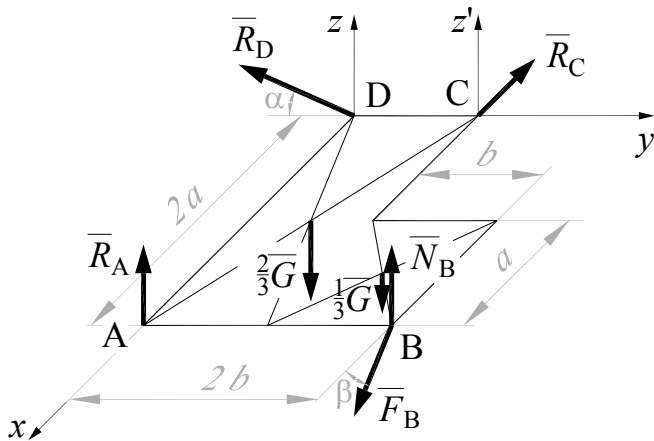


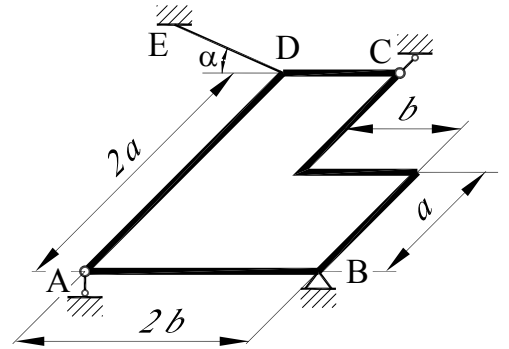
КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019-2020 навч. рік
Задачі I етапу Всеукраїнської студентської олімпіади
з теоретичної механіки та їх розв'язання

ЗАДАЧА С1 (12 балів). Однорідна пластина, вага якої дорівнює G , закріплена в точках А і С за допомогою невагомих стрижнів, гнучкої ланки DE, яка утворює з горизонталлю кут α , а також опирається на вістря у точці В. Точки С, D і Е лежать в одній вертикальній площині. Розміри пластины a і b відомі. Визначити, при якому мінімальному значенні коефіцієнта тертя між вістрям та пластиною можлива її рівновага в зображеному на рисунку положенні.



Розв'язання

Введемо систему координат $Dxyz$ як показано на рисунку. Замінімо дію кожної в'язі на пластину однойменними реакціями в'язі. Реакцію у точці В представимо у вигляді нормальної складової N_B і сили тертя F_B , напрям якої на даному етапі невідомий і позначений кутом β



(див. рис.). Саму пластину розіб'ємо на дві частини, вага кожної з яких пропорційна площі і прикладена до центру її ваги. Для даної розрахункової схеми запишемо рівняння рівноваги:

$$\sum_i M_{xi} = 0: -\frac{2}{3}G \cdot \frac{b}{2} - \frac{1}{3}G \cdot \frac{3b}{2} + N_B \cdot 2b = 0. \text{ Звідки слідує, що } N_B = \frac{5}{12}G.$$

$$\sum_i M_{yi} = 0: -R_A \cdot 2a + \frac{2}{3}G \cdot a + \frac{1}{3}G \cdot \frac{3a}{2} - N_B \cdot 2a = 0. \text{ Звідки слідує, що } R_A = \frac{1}{6}G.$$

$$\sum_i F_{iz} = 0: R_A - \frac{2}{3}G - \frac{1}{3}G + N_B + R_D \sin \alpha = 0. \text{ Звідси знаходимо } R_D: R_D = \frac{5G}{12 \sin \alpha}.$$

Введемо додаткову вісь Cz' , яка паралельна Dz і проходить через точку С. Запишемо суму моментів сил відносно осі Cz' :

$$\sum_i M_{z'i} = 0: F_B h = 0,$$

де h – плече сили тертя F_B відносно осі Cz' . Оскільки припускаємо, що сила F_B не дорівнює нулеві, то лінія дії сили, положення якої визначається кутом β , має перетинати вісь

Cz' (проходити через точку С). Таким чином $\sin \beta = \frac{b}{\sqrt{4a^2 + b^2}}.$

$$\sum_i F_{iy} = 0: -R_D \cos \alpha + F_B \sin \beta = 0. \text{ Звідки слідує, що } F_B = R_D \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} = \frac{5\sqrt{4(a/b)^2 + 1}}{12 \tan \alpha} G.$$

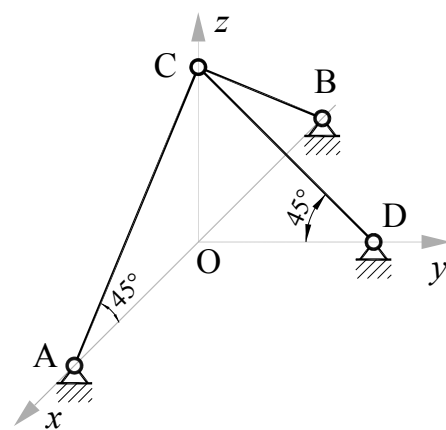
Мінімальне значення коефіцієнту тертя f між вістря́м та пластиною для даної розрахункової схеми можна визначити на основі закону Амонтона-Кулона – $F_B \leq f \cdot N_B$, звідки

$$f_{\min} = \frac{F_B}{N_B} = \frac{\sqrt{4(a/b)^2 + 1}}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Відповідь: $\sqrt{4(a/b)^2 + 1} / \operatorname{tg} \alpha$

ЗАДАЧА С2 (10 балів). Три однакових однорідних стрижні вагою P кожний прикріплені кінцями до горизонтальної площини сферичними шарнірами A , B і D та з'єднані між собою шарніром C . Визначити реакції сферичних шарнірів A , B і D .

Розв'язання. Розрахункова схема з усіма силами, прикладеними до системи, показана на рисунку. З міркувань симетрії системи очевидними є наступні співвідношення між складовими сил реакції: $R_{Dx} = 0$; $R_{Ax} = R_{Bx}$ (з урахуванням напрямів, показаних на рисунку); $R_{Ay} = R_{By}$; $R_{Az} = R_{Bz}$. Отже,



з 9ти невідомих складових реакцій в'язей необхідно обчислити лише 5. Наступні три рівняння є умовами рівноваги конструкції в цілому:

$$\sum F_{yi} = 0: 2R_{Ay} - R_{Dy} = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{zi} = 0: 2R_{Az} + R_{Dz} - 3P = 0; \quad (2)$$

$$\sum M_{Oxi} = 0: -\frac{L\sqrt{2}}{2} \frac{P}{2} + L \frac{\sqrt{2}}{2} R_{Dz} = 0, \quad (3)$$

де L – довжина стрижнів.

Запишемо також рівняння рівноваги окремих стрижнів:

- стрижень CD

$$\sum M_{Cxi} = 0: -\frac{L\sqrt{2}}{2} \frac{P}{2} + L \frac{\sqrt{2}}{2} R_{Dz} - L \frac{\sqrt{2}}{2} R_{Dy} = 0; \quad (4)$$

- стрижень AC

$$\sum M_{Cy i} = 0: \frac{L\sqrt{2}}{2} \frac{P}{2} - L \frac{\sqrt{2}}{2} R_{Az} + L \frac{\sqrt{2}}{2} R_{Ax} = 0; \quad (5)$$

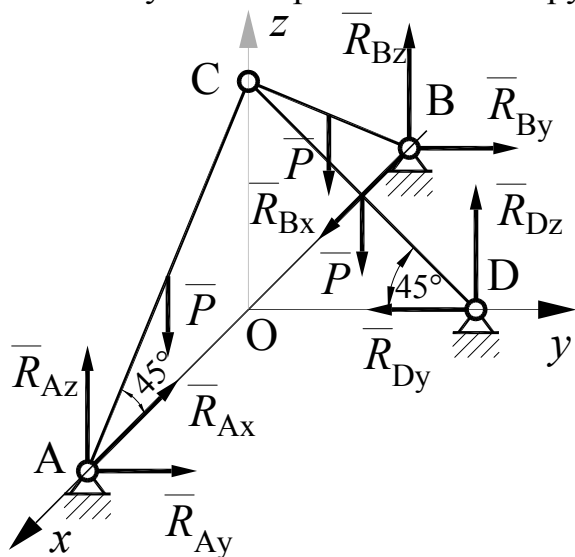
З рівняння (3) знаходимо $R_{Dz} = P/2$. Тоді з (2)

$$R_{Az} = \frac{1}{2} (3P - R_{Dz}) = \frac{1}{2} \left(3P - \frac{P}{2} \right) = \frac{5P}{4}.$$

З (4) з урахуванням (3) отримаємо $R_{Dy} = 0$. Тоді з (1) слідує $R_{Ay} = 0$. Нарешті, з (5)

$$R_{Ax} = R_{Az} - \frac{P}{2} = \frac{5P}{4} - \frac{P}{2} = \frac{3P}{4}.$$

Отже реакції сферичних шарнірів A , B і D дорівнюють



$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2 + R_{Az}^2} = \sqrt{\left(\frac{3P}{4}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{5P}{4}\right)^2} = \frac{P\sqrt{34}}{4};$$

$$R_B = \sqrt{R_{Bx}^2 + R_{By}^2 + R_{Bz}^2} = R_A = \frac{P\sqrt{34}}{4};$$

$$R_D = \sqrt{R_{Dx}^2 + R_{Dy}^2 + R_{Dz}^2} = \sqrt{0^2 + 0^2 + \left(\frac{P}{2}\right)^2} = \frac{P}{2};$$

Відповідь: $R_A = R_B = P\sqrt{34}/4$; $R_D = P/2$

ЗАДАЧА С3 (12 балів).

Розв'язання. Визначимо рівнодійну розподіленого навантаження. З міркувань симетрії очевидно, що рівнодійна спрямована уздовж осі x . Виділимо на дузі елемент, що відповідає елементарному куту $d\varphi$ (див. рис.). Довжина елемента буде $Rd\varphi$, а проекція елементарної сили на вісь x :

$$dQ_x = +q \cdot Rd\varphi \cdot \cos\varphi.$$

Інтегруючи знаходимо рівнодійну

$$Q = \int_{-\alpha}^{\alpha} dQ_x = qR \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\varphi d\varphi = 2qR \sin\alpha = qR\sqrt{2}.$$

де φ_0 – центральний кут дуги, яка співпадає з середньою лінією балки (див. рис.):

$$\sin\alpha = \frac{R\sqrt{2}/2}{R} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$

Напрям сили і точка її прикладання зображені на рисунку.

Рівнодійна P сил тяжіння елемента спрямована паралельно осі Oy у від'ємному напрямку і прикладена в точці C – центр ваги балки. З міркувань симетрії очевидно, що координата y_C дорівнює $R\sqrt{2}/2$. Для знаходження x_C маємо:

$$x_C = \frac{1}{m} \int x \cdot dm,$$

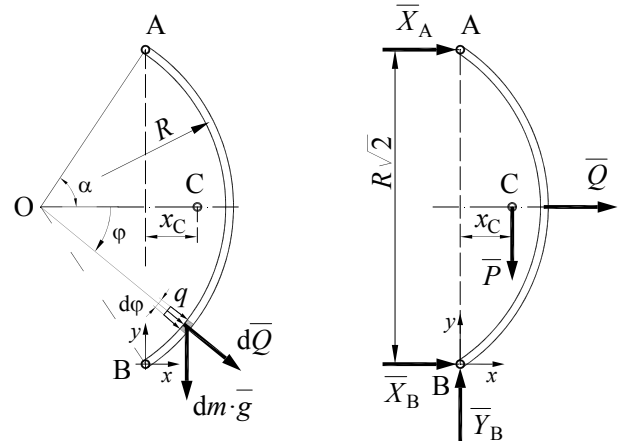
де $m = P/g$ – повна маса балки. Маса dm елемента балки з центральним кутом $d\varphi$ дорівнює

$$dm = \gamma \cdot Rd\varphi,$$

де γ – питома маса балки (маса одиниці довжини балки, $\gamma = m/R2\alpha$). Отже маємо

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{m} \int_{-\alpha}^{\alpha} x \cdot \gamma \cdot Rd\varphi = \frac{\gamma \cdot R}{m} \int_{-\alpha}^{\alpha} (R\cos\varphi - R\cos\alpha) \cdot d\varphi = \frac{R}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} (\cos\varphi - \cos\alpha) \cdot d\varphi = \\ &= \frac{R}{2\alpha} (\sin\varphi - \varphi \cdot \cos\alpha) \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{R}{\alpha} (\sin\alpha - \alpha \cdot \cos\alpha) = \frac{R\sqrt{2}}{2\pi} (4 - \pi). \end{aligned}$$

Складаємо рівняння рівноваги балки:



$$\sum F_{yi}=0: Y_B - P = 0;$$

$$\sum M_{Azi}=0: -P \cdot x_C + Q \cdot \frac{R\sqrt{2}}{2} + X_B \cdot R\sqrt{2} = 0.$$

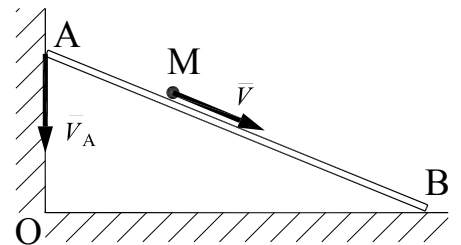
З цієї системи знаходимо

$$Y_B = P; \quad X_B = P \cdot \frac{x_C}{R\sqrt{2}} - Q \cdot \frac{1}{2} = P \cdot \frac{\frac{R\sqrt{2}}{2}(4-\pi)}{R\sqrt{2}} - qR\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = P \frac{4-\pi}{2\pi} - \frac{qR}{\sqrt{2}};$$

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = \sqrt{\left(P \frac{4-\pi}{2\pi} - \frac{qR}{\sqrt{2}}\right)^2 + P^2}.$$

Відповідь: $\sqrt{\left(P \frac{4-\pi}{2\pi} - \frac{qR}{\sqrt{2}}\right)^2 + P^2}$

ЗАДАЧА K1 (14 балів). Балка АВ довжиною $4a$ ковзає по вертикальній та горизонтальній площинах таким чином, що кінець А рухається з постійною швидкістю $\vec{v}_A$. По балці рухається матеріальна точка М з постійною відносною швидкістю $\vec{v}$. Визначити абсолютну швидкість точки М як функція часу, якщо в початковий момент $AM=0$ і $OA=2a$.

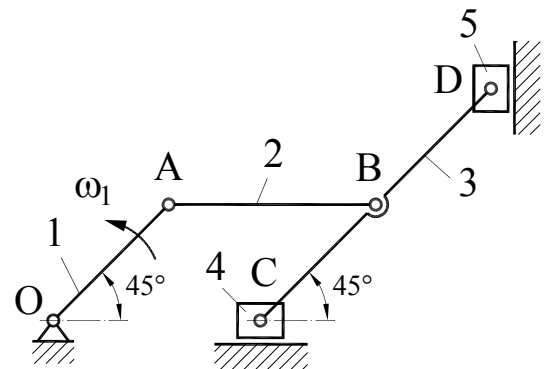


Розв'язання. (див. нижче)

Відповідь: $\sqrt{v_A^2 + v^2 + v_A v - \frac{v_A^2 v t}{a} + \frac{v_A^2 v^2 t^2}{12a^2 + 4av_A t - v_A^2 t^2}}$

ЗАДАЧА K2 (14 балів). Плоский механізм складається з кривошипу (на рис. позначений цифрою 1), двох шатунів (2 і 3) і двох повзунів (4 і 5). Довжини ланок відомі, причому $L_{OA}=L_{AB}=L_{BD}=L_{BC}=L$. Для зображеного на рис. положення механізму визначити пришвидшення точки В за умови, що кутова швидкість кривошипа $\omega_1 = \text{const}$ (напрямок ω_1 показано на рис.).

Розв'язання. (див. нижче)



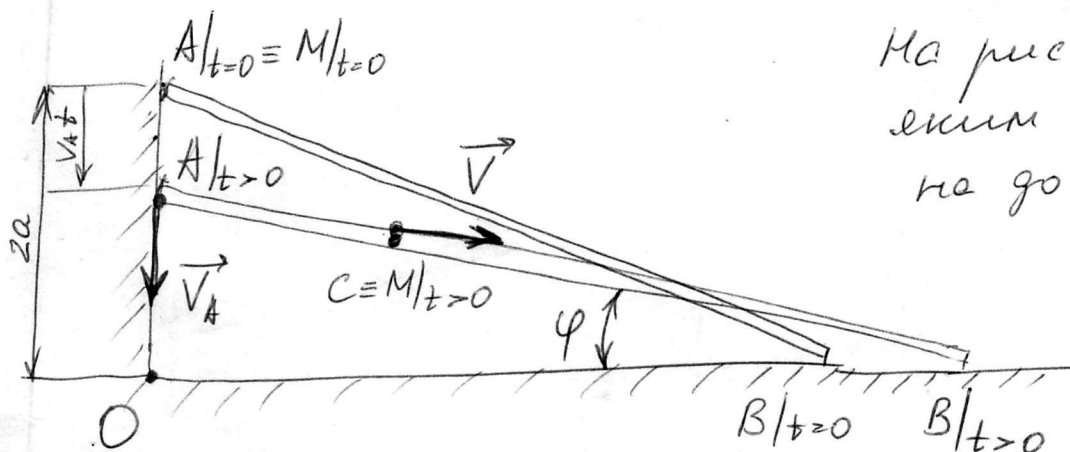
Відповідь: $\omega_1^2 L \sqrt{13 + 8\sqrt{2}}$

Розв'язання

Абсолютна швидкість точки М, яка здійснює складний рух, є векторною сумою переносної ($\vec{V}_e$) та відносної ($\vec{V}_r$) складових:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_e + \vec{V}_r, \quad (1)$$

де $\vec{V}_r = \vec{V}$ - швидкість точки М відносно балки АВ,
 $\vec{V}_e = \vec{V}_C$ - швидкість точки С балки, положення якої в розрахунковий момент часу t співпадає з точкою М. (див. рис.)



На рис. φ - кут, під яким балка АВ нахилена до горизонталі:

З $\triangle OAB$ слідує,

$$\sin \varphi = \frac{OA}{AB}.$$

З врахуванням рівності $OA = 2a - V_A t$ (з постановки задачі) -

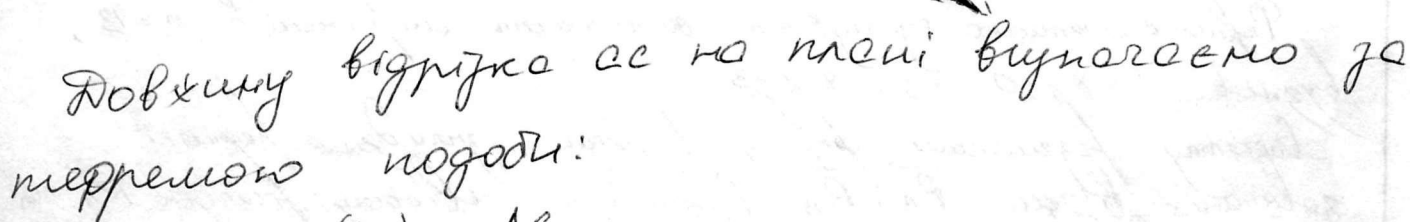
$$\sin \varphi = \frac{2a - V_A t}{4a}$$

Швидкість точки С визначається як

$$\vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{V}_{C/A} \quad (2)$$

де $\vec{V}_{C/A} = \vec{\omega} \times \vec{AC}$ - швидкість точки С відносно А,
 $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ - кутове швидкість балки. ($\vec{V}_{C/A} \perp AB$)

Рівняння (1) і (2) розв'язують графічно за допомогою плану швидкостей.



$$\frac{(ac)}{(ab)} = \frac{AC}{AB}$$

Значит $(ac) = (ab) \frac{AM}{AB} = \frac{(pva)}{\cos \varphi} \cdot \frac{vt}{4a} = (pva) \frac{vt}{4a \cos \varphi}$

$$\Rightarrow V_{C/A} = V_A \frac{vt}{4a \cos \varphi}$$

Таким чином, $\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{с/А} + \vec{V}$. Напрямки і значення векторів у правій частині відомі. Запишемо проекції даного векторного рівняння на координатні осі x і y , напрямки яких зображені на малюнку:

$$V_{Mx} = V_A \sin \varphi + 0 + V = V_A \sin \varphi + V;$$

$$V_{My} = V_A \cos \varphi - V_{C/A} + 0 = V_A \cos \varphi - \frac{V_A V \dot{t}}{4a \cos \varphi}.$$

Османовно

$$V_M = \sqrt{V_{Mx}^2 + V_{My}^2} = \sqrt{(V_A \sin \varphi + V)^2 + \left(V_A \cos \varphi - \frac{V_A V t}{4a \cos \varphi}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{V_A^2 + V^2 - \frac{V_A^2 V t}{2a} + 2V_A V \sin \varphi + \frac{V_A^2 V^2 t^2}{16a^2(1 - \sin^2 \varphi)}} =$$

$$= \sqrt{V_A^2 + V^2 + V_A V - \frac{V_A^2 V t}{a} + \frac{V_A^2 V^2 t^2}{12a^2 + 4aV_A t - V_A^2 t^2}}$$

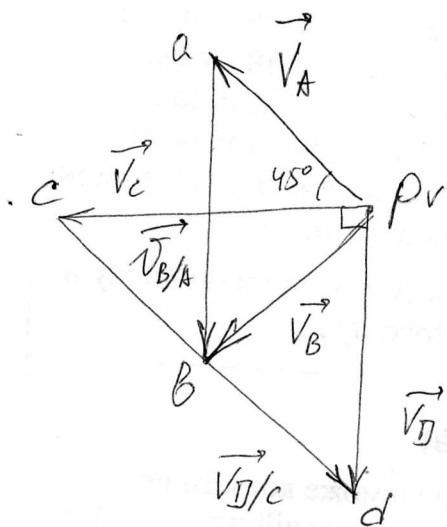
Бигнобиг: $\sqrt{V_A^2 + V^2 + V_A V - \frac{V_A^2 V t}{a} + \frac{V_A^2 V^2 t^2}{12a^2 + 4aV_A t - V_A^2 t^2}}$

Розв'язання

Для визначення кутових швидкостей ланок 2 і 3 скористаємося методом планів. Оскільки криволінійні 1 обертаються проти годинникової стрілки, то припустимо, що точка С рухається ліворуч, і знайдемо її швидкості відомі. Тоді для ланки 3

$$\vec{V}_D = \vec{V}_C + \vec{V}_{D/C}, \quad \vec{V}_{D/C} \perp CD.$$

Будуємо план швидкостей і визначаємо швидкості точки В за теоремою подобия:



Векторне рівняння для ланки 2:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}$$

де $V_A = \omega_1 L$, $\vec{V}_A \perp OA$ у бік ω_1
 $\vec{V}_{B/A} \perp AB$.

Зобразимо ці вектори на плані

З плану швидкостей слідує

$$V_B = V_A = \omega_1 L$$

$$V_{B/A} = V_A \sqrt{2} = \omega_1 L \sqrt{2}, \quad \omega_2 = \omega_{AB} = \frac{V_{B/A}}{L_{AB}} = \omega_1 \sqrt{2}$$

$$V_C = V_D = V_B \sqrt{2} = \omega_1 L \sqrt{2};$$

$$V_{D/C} = V_C \sqrt{2} = 2\omega_1 L; \quad \omega_3 = \omega_{DC} = \frac{V_{D/C}}{L_{DC}} = \frac{2\omega_1 L}{2L} = \omega_1.$$

Для визначення привибудимо точки В запишемо наші векторні рівняння:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{A/O}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}_{B/C}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_D + \vec{a}_{B/D}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_B = \vec{a}_{A/O} + \vec{a}_{B/A} + \vec{a}_{B/A}^T; & (1) \\ \vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}_{B/C} + \vec{a}_{B/C}^T; & (2) \\ \vec{a}_B = \vec{a}_D + \vec{a}_{B/D} + \vec{a}_{B/D}^T; & (3) \end{cases}$$

у цих системах

$$a_{A/O}^n = \omega_1^2 L_{OA} = \omega_1^2 L$$

$$a_{B/A}^n = \omega_2^2 L_{AB} = 2\omega_1^2 L$$

$$a_{B/C}^n = \omega_3^2 L_{BC} = \omega_1^2 L$$

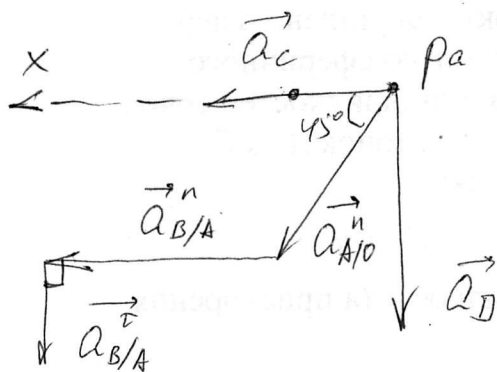
$$a_{B/D}^n = \omega_3^2 L_{BD} = \omega_1^2 L$$

При цьому $\vec{a}_{B/C}^n = -\vec{a}_{B/D}^n$, $\vec{a}_{B/C}^T = -\vec{a}_{B/D}^T$. Якщо скласти (2) і (3) рівняння системи, то отримаємо

$$\begin{cases} \vec{a}_B = \vec{a}_{A/O} + \vec{a}_{B/A} + \vec{a}_{B/A}^T \\ 2\vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}_D \end{cases}$$

Напишемо векторів у правильній системі відліку.

Спроектуємо ці рівняння на вісь x, напрям якої зображено на рисунку

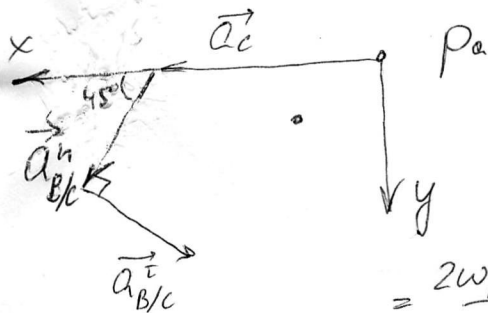


$$\begin{cases} a_{Bx} = a_{A/O}^n \cos 45^\circ + a_{B/A}^n = \\ = \omega_1^2 L \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\omega_1^2 L = \omega_1^2 L \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \\ 2a_{Bx} = a_c \end{cases}$$

Звідси $a_c = 2\omega_1^2 L \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

З рівняння (2) отримаємо

$$\begin{aligned} a_{Bx} &= a_c + a_{B/C}^n \cos 45^\circ - a_{B/C}^T \cos 45^\circ \\ \Rightarrow a_{B/C}^T &= \frac{a_c + a_{B/C}^n \cos 45^\circ - a_{Bx}}{\cos 45^\circ} = \\ &= \frac{2\omega_1^2 L \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \omega_1^2 L \frac{\sqrt{2}}{2} - \omega_1^2 L \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{2}/2} = 2\omega_1^2 L (1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$



$$A_{By} = A_{B/c}^n \sin 45^\circ + A_{B/c}^T \sin 45^\circ =$$

$$= \omega_1^2 L \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\omega_1^2 L (1 + \sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \omega_1^2 L \left(2 + \frac{3\sqrt{2}}{2} \right);$$

Максимум, $A_{Bx} = \omega_1^2 L \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

$$A_{By} = \omega_1^2 L \left(2 + \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$A_B = \sqrt{A_{Bx}^2 + A_{By}^2} = \omega_1^2 L \cdot \sqrt{13 + 8\sqrt{2}}$$

Результат: $\omega_1^2 L \sqrt{13 + 8\sqrt{2}}$

ЗАДАЧА К3 (14 балів). В сателітному механізмі, який складається з водила Н і конічних шестірень 1, 2 та 3, задані обертання шестірень 1 і 2 з кутовими швидкостями $\omega_1 = \text{const}$ і $\omega_2 = \text{const}$, причому $\omega_1 > \omega_2$. Розміри коліс визначаються кутами α і β в осьових перерізах і відстанню ОК (К – точка на осі сателіта 3, див. рис.). Знайти швидкість та доосьове пришвидження точки К сателіта 3 при $\omega_1 = 2\omega_2 = 2\omega$, $\alpha = \beta = 45^\circ$ і $ОК = a$.

Розв'язання. Колеса 1 і 2 обертаються навколо нерухомої вертикальної осі, яка проходить через точку О. В свою чергу сателіт 3 здійснює обертальний рух як відносно колеса 1, так і колеса 2. Осі цих відносних обертань (позначені на рис. через Ω і Ψ , відповідно) перетинаються у точці О, т.ч. колесо 3 здійснює сферичний рух з нерухомою точкою О. Якщо позначити кутові швидкості відносних рухів через $\vec{\omega}_{3/1}$ і $\vec{\omega}_{3/2}$, то система векторних рівнянь для визначення $\vec{\omega}_3$ запишеться наступним чином:

$$\begin{cases} \vec{\omega}_3 = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{3/1}; \\ \vec{\omega}_3 = \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_{3/2}. \end{cases}$$

Систему розв'язуємо графічно через побудову плану кутових швидкостей (див. рис., на якому враховано $\omega_1 > \omega_2$). З $\Delta 123$ (цифрами позначені кінці відповідних векторів $\vec{\omega}_i$) з використанням теореми синусів маємо

$$\frac{\sin \beta}{\omega_{3/1}} = \frac{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)}{\omega_1 - \omega_2} \Rightarrow \omega_{3/1} = (\omega_1 - \omega_2) \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Значення $\omega_3 = |\vec{\omega}_3|$ і кут γ нахилу миттєвої осі обертання Δ колеса 3 відносно вертикалі визначається з $\Delta p_{\omega} 13$ (на плані) з використанням теорем косинусів та синусів –

$$\omega_3 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_{3/1}^2 - 2\omega_1\omega_{3/1}\cos\alpha};$$

$$\frac{\sin \alpha}{\omega_3} = \frac{\sin \gamma}{\omega_{3/1}} \Rightarrow \gamma = \arcsin \left[\frac{\omega_{3/1}}{\omega_3} \sin \alpha \right].$$

Для визначення швидкості та доосьового пришвидження точки К на осі сателіта 3 справедливі формули

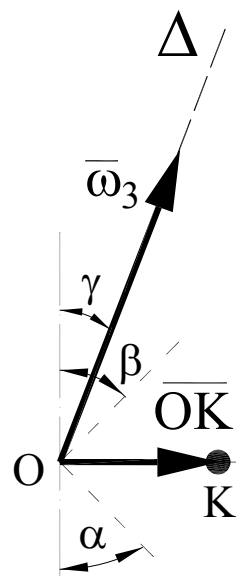
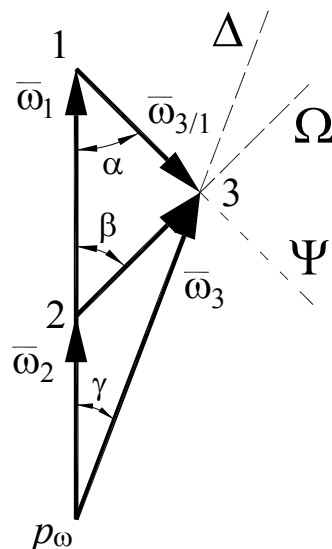
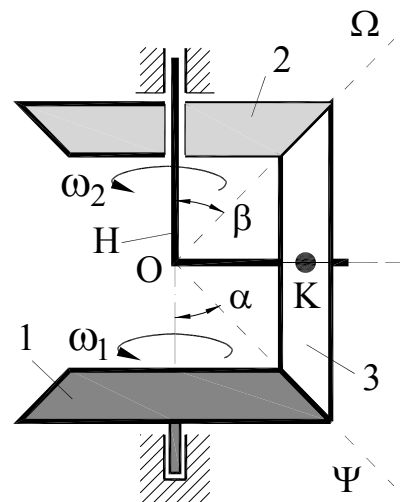
$$\vec{v}_K = \vec{\omega}_3 \times \overrightarrow{ОК}; \quad \vec{w}_K^{oc} = \vec{\omega}_3 \times (\vec{\omega}_3 \times \overrightarrow{ОК})$$

або
$$v_K = \omega_3 \cdot ОК \cdot \sin(\vec{\omega}_3, \overrightarrow{ОК}); \quad w_K^{oc} = \omega_3^2 \cdot ОК \cdot \sin(\vec{\omega}_3, \overrightarrow{ОК}).$$

Очевидно, що $(\vec{\omega}_3, \overrightarrow{ОМ}) = \beta + \frac{180^\circ - \alpha - \beta}{2} - \gamma = 90^\circ - \frac{\alpha - \beta}{2} - \gamma$, тоді

$$\sin(\vec{\omega}_3, \overrightarrow{ОК}) = \sin\left(90^\circ - \frac{\alpha - \beta}{2} - \gamma\right) = \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2} + \gamma\right).$$

Для заданих в постановці задачі значень ($\omega_1 = 2\omega$; $\omega_2 = \omega$; $\alpha = \beta = 45^\circ$; $ОК = a$) маємо:



$$\omega_{3/1} = (\omega_1 - \omega_2) \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\omega}{\sqrt{2}}; \quad \omega_3 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_{3/1}^2 - 2\omega_1\omega_{3/1}\cos\alpha} = \frac{\omega\sqrt{10}}{2};$$

$$\sin \gamma = \frac{\omega_{3/1}}{\omega_3} \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \cos \gamma = \sqrt{1 - \sin^2 \gamma} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}; \quad \sin(\vec{\omega}_3, \overrightarrow{OK}) = \cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{10}};$$

$$v_K = \omega_3 \cdot OK \cdot \sin(\vec{\omega}_3, \overrightarrow{OK}) = \frac{3\omega a}{2}; \quad w_K^{oc} = \omega_3^2 \cdot OK \cdot \sin(\vec{\omega}_3, \overrightarrow{OK}) = \frac{\omega^2 10}{4} \cdot a \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\omega^2 a \sqrt{10}}{4}.$$

Вектор $\vec{v}_K$ направлений перпендикулярно площині рисунка «від нас», а вектор $\vec{w}_K^{oc}$ розташований у площині рисунка і направлений від К до миттєвої осі обертання Δ .

Відповідь: $3\omega a/2$; $3\omega^2 a \sqrt{10}/4$

ЗАДАЧА Д1 (12 балів). Два вантажі D і E однакової маси m утримуються в положенні рівноваги пружиною з жорсткістю c , нижній кінець якої закріплений нерухомо, а верхній приєднано до вантажу D. Вантажі відхилили від положення рівноваги униз на певну відстань λ і відпустили без початкової швидкості. Чому має бути дорівнювати максимальне значення λ , щоб при русі системи вантаж E не відірвався від вантажу D? Знайти також закон коливань вантажів $x = x(t)$ відносно положення рівноваги.

Розв'язання. Рівняння руху системи двох вантажів:

$$(m+m) \cdot \ddot{x} = -(m+m) \cdot g + F_{пр},$$

де $F_{пр} = c(\Delta - x)$ – сила пружності пружини; Δ – деформація пружини від початкової довжини до положення рівноваги системи ($(m+m) \cdot g = c \cdot \Delta$); x – поточне положення системи вантажів відносно положення рівноваги. Звідси слідує наступне рівняння руху системи:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

$$\text{де } \omega^2 = \frac{c}{2m}.$$

Розв'язок даного диференційного рівняння може бути записаний наступним чином

$$x = A \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow \dot{x} = A \omega \cos(\omega t + \varphi).$$

Константи і визначаються з початкових умов

$$x|_{t=0} = -\lambda = A \sin(\varphi);$$

$$\dot{x}|_{t=0} = 0 = A \omega \cos(\varphi).$$

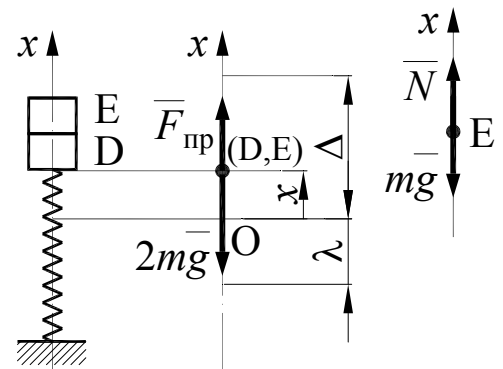
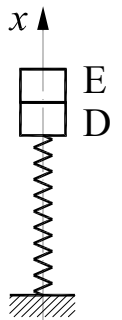
$$\text{Звідси слідує, що } \varphi = \frac{\pi}{2}; \quad A = -\lambda. \text{ Остаточнo } x = -\lambda \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -\lambda \cos\left(t \sqrt{\frac{c}{2m}}\right).$$

Розглянемо тепер рівняння руху вантажу E (див. рис.):

$$m \cdot \ddot{x} = -m \cdot g + N.$$

Звідси $N = m \cdot g + m \cdot \ddot{x}$ – сила взаємодії між вантажами D і E. Щоб вантаж не відірвався має виконуватися умова

$$N \geq 0 \Rightarrow m \cdot g + m \cdot \ddot{x} \geq 0 \Rightarrow g \geq -\ddot{x} = \frac{c\lambda}{2m} \cos\left(t \sqrt{\frac{c}{2m}}\right).$$



Максимальне можливе значення у правій частині дорівнює $c\lambda/2m$. Тому нерівність виконується для будь-якого t , якщо

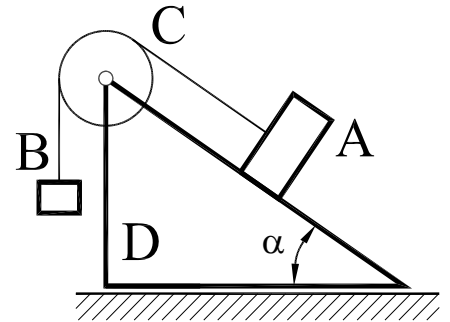
$$g \geq \frac{c\lambda}{2m}.$$

Тому остаточна відповідь
$$\lambda \leq \frac{2mg}{c}.$$

Відповідь: $\lambda \leq 2mg/c$; $x(t) = -\lambda \cos(t\sqrt{c/2m})$

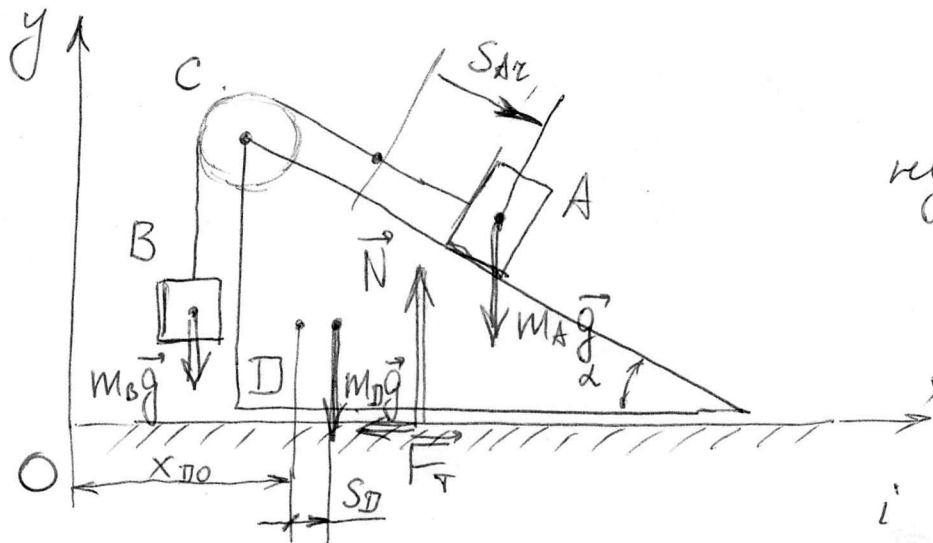
ЗАДАЧА Д2 (12 балів). Вантаж А масою M_A при опусканні з певним присквищенням по похилій поверхні призми D, яка утворює кут α з горизонтом, через невагому, нерозтяжну і перекинуту через невагомий блок С нитку призводить до руху вантаж В масою M_B . При якому значенні коефіцієнта тертя призми з опорною поверхнею вона не буде рухатися? Маса призми дорівнює M_D ($M_D = 2M_A = 4M_B$).

Розв'язання. (див. нижче)



Відповідь: $f \geq \frac{\sin 2\alpha - \cos \alpha}{10 + 2\sin \alpha (1 - \sin \alpha)}$

Розв'язання 12



Введено інерціаль-
ну систему коорди-
нат Oxy і по-
начимо через
 $(x_{A0}, y_{A0}), (x_{B0}, y_{B0})$

і (x_{D0}, y_{D0}) координатами

маси центру мас відповідних тіл в початковий
момент часу ($t=0$); через S_D – закон руху
тіла D відносно початкового положення;
через S_{Az} – закон відносного руху тіла A по D
відносно положення при $t=0$. Тоді координати
центрів мас тіл системи при
 $t > 0$ виражаються за формулами:

$$\begin{aligned} x_A &= x_{A0} + S_D + S_{Az} \cos \alpha; & y_A &= y_{A0} - S_{Az} \sin \alpha; \\ x_B &= x_{B0} + S_D(t); & y_B &= y_{B0} + S_{Az}(t); \\ x_D &= x_{D0} + S_D(t); & y_D &= y_{D0}. \end{aligned}$$

Тоді центр мас системи тіл виражається
координатами

$$\bar{x}_C = \frac{m_A x_A + m_B x_B + m_D x_D}{m_A + m_B + m_D};$$

$$\bar{y}_C = \frac{m_A y_A + m_B y_B + m_D y_D}{m_A + m_B + m_D}.$$

Для визначення коефіцієнта тертя
прилип з опірною поверхнею використаємо
теорему про рух центру мас системи,

яке у координатній формі може бути представлено у вигляді:

$$\begin{cases} (m_A + m_B + m_D) \frac{d^2 \bar{X}_C}{dt^2} = F_x^e = -F_T; \\ (m_A + m_B + m_D) \frac{d^2 \bar{Y}_C}{dt^2} = F_y^e = N - (m_A + m_B + m_D)g \end{cases}$$

де F_x^e, F_y^e - проекції головного вектору зовнішніх сил на координатні осі; F_T - сила тертя ковзання, напрям якої протилежний передбачуваному (імовірному) напрямку руху прилип. За законом Амонтона-Кулона $F_T \leq fN$.

З другою рівняння системи

$$N = (m_A + m_B + m_D) \left[g + \frac{d^2 \bar{Y}_C}{dt^2} \right]$$

Після підстановки виразу для $\bar{Y}_C$ з урахуванням співвідношення між масами і того, що призма не рухається ($s_D = 0$), маємо

$$N = m_B [7g + (1 - 28m\alpha) \ddot{s}_{A2}].$$

Підставляємо в перше рівняння системи з урахуванням виразів для $\bar{X}_C$ і F_T :

$$m_A \ddot{s}_{A2} \cos \alpha = -F_T \leq f m_B [7g + (1 - 28m\alpha) \ddot{s}_{A2}];$$

$$\Rightarrow f \geq \frac{-2\ddot{s}_{A2} \cos \alpha}{7g + (1 - 28m\alpha) \ddot{s}_{A2}} \quad (f > 0)$$

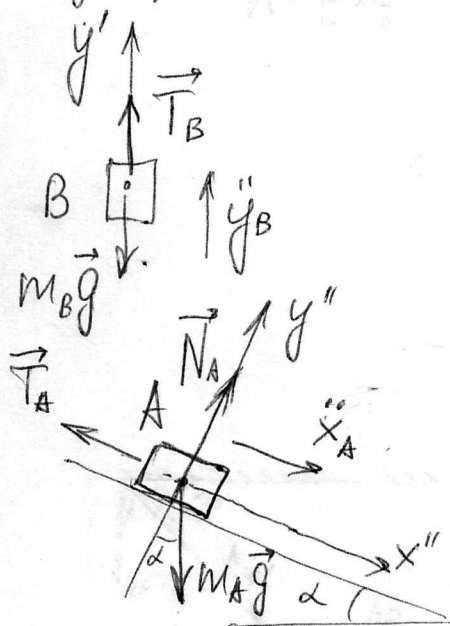
Знак "-" вказує, що при $\ddot{s}_{A2} > 0$ (міло А відносно прутки Д рухається униз) сила тертя спрямована у протилежний бік від зображеного на рисунку.

Остаточно, за модулем

$$f \geq \frac{2\ddot{s}_{A2} \cos \alpha}{7g + (1 - 2\sin \alpha)\ddot{s}_{A2}} \quad (1)$$

Для випагнення $\ddot{s}_{A2}$ застосуємо другий закон Ньютона для тіл А і В відносно зображених на рис. координатних осей:

$$m_B \ddot{y}_B = T_B - m_B g$$



$$m_A \ddot{x}_A = m_A g \sin \alpha - T_A,$$

Тут, T_A, T_B - сили натягу нитки. Очевидно, що $T_A = T_B$, $\ddot{y}_B = \ddot{x}_A = \ddot{s}_{A2}$. Звідси слідує, що

$$\ddot{s}_{A2} = \frac{2 \sin \alpha - 1}{3} g.$$

Після підстановки в (1) і спрощення отримуємо остаточний результат

$$f \geq \frac{2 \cos \alpha (2 \sin \alpha - 1)}{21 - (2 \sin \alpha - 1)^2} = \frac{\sin 2\alpha - \cos \alpha}{10 + 2 \sin \alpha (1 - \sin \alpha)}$$

Виготовлено: $f \geq \frac{\sin 2\alpha - \cos \alpha}{10 + 2 \sin \alpha (1 - \sin \alpha)}$