

УДК 539.372, 539.38

ОПИСАННЯ КІНЕТИКИ ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ЗА ДВОВІСНОГО НЕПРОПОРЦІЙНОГО АСИМЕТРИЧНОГО КОНТРОЛЬОВАНОГО ПО НАПРУЖЕННЯМ НАВАНТАЖЕННЯ

Бородій М. В., Адамчук М. П., Стрижало В. О.

Інститут проблем міцності імені Г. С. Писаренка НАН України, м. Київ, Україна

***Анотація.** Розроблена версія ендохронної теорії пластичності для опису кінетики деформованого стану металевих матеріалів при асиметричному циклічному двовісному непропорційному навантаженні із контролем по напруженням. Для розв'язку отриманої нелінійної системи диференціальних рівнянь була створена чисельна процедура та написана відповідна обчислювальна програма. Запропоновано метод конкретизації параметрів експоненційних ядер спадкової функції, ендохронної теорії пластичності для описання ефекту ратчетингу за двовісного навантаження. В ньому використовується залежність параметра спадкової функції від швидкості ратчетингу на усталеній ділянці кривих циклічного деформування, яка визначається із експериментів або прогнозується теоретично на основі мінімальної кількості базових експериментів. Показано, що запропонована модель дозволяє з задовільною точністю описувати кінетику деформованого стану під час ратчетингу для довільних циклічних траєкторій навантаження.*

***Ключові слова:** ратчетинг; ендохронна теорія пластичності; непропорційне навантаження.*

Відомо, що за малоциклового асиметричного навантаження металів із контролем по напруженнях виникає таке явище, як ратчетинг (або циклічна повзучість) – одностороннє накопичення пластичних деформацій в напрямку дії середніх напружень циклу σ_m . Ці переміщення є однією із можливих причин виникнення пошкоджень, руйнувань або втрати функціональної придатності конструкцій енергетичного машинобудування, авіації, транспорту тощо.

На сьогоднішній день є актуальними експериментальні та теоретичні дослідження ефекту циклічної повзучості за непропорційного навантажування. В літературі відомо багато робіт по даній тематиці, але поки що мають місце значні розбіжності в експериментальних та розрахункових даних. Зважаючи на це, можна зробити висновок, що проблема побудови простої моделі для інженерних розрахунків усе ще є актуальною.

Предметом аналізу є двовісне навантаження матеріалу по довільним кусково-ломаним траєкторіям у девіаторному просторі напружень. Розглядається випадок, коли відмінними від нуля є лише дві компоненти тензора напружень σ_x і τ_{xy} . Траєкторія навантаження задається кусково-ломаною лінією, кожна ділянка якої описується наступним рівнянням:

$$\sigma_x = k \cdot \sqrt{3} \tau_{xy} + \bar{\sigma}, \quad (1)$$

де k – коефіцієнт кута нахилу прямої; $\bar{\sigma}$ – координата точки перетину прямої з віссю σ .

Для описання кінетики напружено деформованого стану скористаємося рівняннями ендохронної теорії пластичності [1], що пов'язують відповідні компоненти тензора напружень σ_x , τ_{xy} з компонентами тензора пластичних деформацій ε^p , γ^p :

$$\sigma_x = \sigma_0 \frac{d\varepsilon^p}{dz} + \int_0^z E(z-z') \frac{d\varepsilon^p}{dz'} dz', \quad (2)$$

$$\sqrt{3} \tau_{xy} = \sigma_0 \frac{d\gamma^p}{\sqrt{3} dz} + \int_0^z E(z-z') \frac{d\gamma^p}{\sqrt{3} dz'} dz', \quad (3)$$

$$dz = d\xi / F, \quad (4)$$

$$d\xi^2 = (d\varepsilon^p)^2 + 1/3 (d\gamma^p)^2, \quad (5)$$

де σ_0 – початковий радіус поверхні текучості; z – внутрішній час; ξ – міра внутрішнього часу (параметр Одквіста); F – функція зміцнення; E – спадкова функція.

Оскільки первісна модель, що базується на визначальних співвідношеннях ендохронної теорії пластичності Валаніса [1], не дає змоги коректно прогнозувати процес ратчетингу, скористаємося запропонованим в роботі [2] удосконаленням рівнянь (2, 3) шляхом використання більш складного визначення спадкової функції E , а саме:

$$E(z, \delta) = E_1 e^{-\alpha z} + E_2(\delta) \quad (6)$$

де E_1 , E_2 і α – параметри матеріалу.

Тобто модель будувалася із припущення, що кінематичне зміцнення, яке визначається спадковою функцією E , залежить не тільки від міри процесу деформування – внутрішнього часу z , але і від рівня напружень, досягнутих на попередньому півциклі навантаження. Останнє твердження припускає залежність спадкової функції E від характерної відстані δ між поточним максимальним значенням напружень у кожному півциклі і максимально досягнутим за всю історію навантаження, яка була запропонована для формулювання правила кінематичного зміцнення теорії течії. Таке удосконалення в рамках ендохронної теорії дозволило вирішити проблему змикання петель пружно-пластичного гістерезису і відкрило можливість описати явище ратчетингу матеріалів.

Зважаючи на сказане, для випадку двовісного навантаження, величини спадкової функції в окремих рівняннях ендохронної теорії пластичності (2) та (3) будуть приймати значення відмінні одне від одного, тобто:

$$\begin{aligned} E(z, \delta_\sigma) &= E_1 e^{-\alpha z} + E_2(\delta_\sigma), \\ E(z, \delta_\tau) &= E_1 e^{-\alpha z} + E_2(\delta_\tau). \end{aligned} \quad (7)$$

Внаслідок відповідних перетворень рівнянь (1) – (5) з урахуванням (7) в роботі [3] була отримана система визначальних рівнянь, що описує напружено-деформований стан матеріалу на n -ій ($z_n \leq z \leq z_{n+1}$) ділянці кусково-ламаної траєкторії в просторі напружень:

$$\begin{aligned} \ddot{\varepsilon}_n + A_{\varepsilon_n} \dot{\varepsilon}_n + B_{\varepsilon_n} \varepsilon_n + C_{\varepsilon_n} &= \alpha \sigma_n + \dot{\sigma}_n, \\ \ddot{\gamma}_n + A_{\gamma_n} \dot{\gamma}_n + B_{\gamma_n} \gamma_n + C_{\gamma_n} &= \alpha \tau_n + \dot{\tau}_n, \\ \sigma &= k_n \cdot \tau + s_n, \\ F^2(z) &= (\dot{\varepsilon})^2 + (\dot{\gamma})^2, \end{aligned} \quad (8)$$

де A_{ε_n} , B_{ε_n} , C_{ε_n} , A_{γ_n} , B_{γ_n} , C_{γ_n} , s_n – константи матеріалу.

Дана нелінійна система рівнянь не має аналітичного розв'язку і розв'язувалась чисельно. Попередньо вона була зведена до вигляду системи диференційних рівнянь першого порядку. Ця система диференційних рівнянь початковими умовами (задача Коші) розв'язувалась чисельно методами Рунге-Кутти четвертого порядку. Для чисельної реалізації був розроблений алгоритм і складена відповідна обчислювальна програма. Згідно ітераційної процедури, на кожному кроці через відомі для поточного внутрішнього часу z_k значення функцій ε_k , $\dot{\varepsilon}_k$, γ_k , $\dot{\gamma}_k$, τ_k за відповідними формулами отримувались наступні для часу z_{k+1} значення ε_{k+1} , $\dot{\varepsilon}_{k+1}$, γ_{k+1} , $\dot{\gamma}_{k+1}$, τ_{k+1} . Перехід на наступну ділянку траєкторії навантаження відбувався лише в тому випадку, коли розраховані напруження з заданою точністю досягали необхідної величини, відтворюючи задану траєкторію навантаження. При цьому переході відбувалася зміна констант, що описують траєкторію навантаження, та із попередньої ділянки в якості початкових умов бралися відповідні значення напружень та деформацій.

Для розрахунку кінетики напружено-деформованого стану матеріалу за допомогою запропонованої моделі циклічної пластичності (8) також необхідно визначити невідомі

параметри спадкової функції (6), а саме різницю модулів пластичності на ділянках навантаження (E_2^+) та розвантаження (E_2^-):

$$\Delta E_2 = E_2^- - E_2^+ \quad (9)$$

На випадок аналізу складного двовісного навантаження для траєкторій з однаковими середніми та амплітудними (за Мізесом) напруженнями було використано наступне рівняння для визначення параметру спадкової функції E_2^+ :

$$E_2^+(\Phi) = E_2^- \bar{\xi}^s / (\bar{\xi}^s + \hat{\xi}(\Phi)), \quad (10)$$

де $\hat{\xi}(\Phi)$ – прогнозована швидкість ратчетингу на усталеній ділянці деформування для непропорційної траєкторії навантаження; $\hat{\xi}^s$ – ширина низхідної петлі гістерезису для базової траєкторії (розтяг-стиск).

Для визначення швидкості накопичення пластичних деформацій $\dot{\xi}$ на усталеній стадії деформування на основі даних одновісних базових експериментів і параметру непропорційності циклу Φ був використаний вираз [4]:

$$\dot{\xi}(\Phi) = (\hat{\xi}^s - \hat{\xi}^t)(1 - \Phi)\beta^I\beta^{II} + \hat{\xi}^t, \quad (11)$$

де Φ – параметр непропорційності циклу [5]; β^I – безрозмірний коефіцієнт, який враховує розмах напружень в напрямку дії середніх напружень циклу; β^{II} – безрозмірний коефіцієнт, який враховує вплив довжини траєкторії навантаження; $\hat{\xi}^s$, $\hat{\xi}^t$ – усталені швидкості ратчетингу з базових експериментів на розтяг-стиск та знакозмінне кручення, відповідно.

Щоб пересвідчитись, що запропонована модель коректно прогнозує кінетику деформованого стану, вона була використана для описання експериментальних кривих ратчетингу за навантаження зразків із нержавіючої сталі марки 304L одновісним розтягом-стиском та за двовісною хрестоподібною траєкторією [6] з однаковими середніми та амплітудними (за Мізесом) напруженнями ($\sigma_a = 200 \text{ МПа}$, $\sigma_m = 50 \text{ МПа}$). Константи матеріалу, що використовувались про розрахунках наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Базові параметри моделі циклічної пластичності

Сталь	E_0 , МПа	σ_0 , МПа	α	E_1 , МПа	E_2^- , МПа	C	β
304L	$1,8 \cdot 10^5$	140	3000	$1,6 \cdot 10^5$	5380	1,3	10

На ділянках траєкторії навантаження, де напруження σ приймалися позитивними, використовувалось значення параметру E_2^+ ($E_2^+ = 4530 \text{ МПа}$ для розтягу-стиску та $E_2^+ = 4725 \text{ МПа}$ для хрестоподібної траєкторії), при навантаженні в протилежному напрямку – E_2^- . При розрахунку хрестоподібної траєкторії на ділянках кручення використовувалось спадкове ядро $E^t = E^{\sigma^-} = E_1 e^{-\alpha z} + E_2^-$. На рис. 1, 2 зображені розрахункові і експериментальні [6] криві деформування для асиметричних траєкторій навантаження розтягом-стиском та у вигляді хреста відповідно, які показали задовільну збіжність результатів.

Таким чином запропонована модель циклічної пластичності на основі визначальних рівнянь ендохронної теорії здатна описувати кінетику деформованого стану за двовісного непропорційного асиметричного контрольованого по напруженням навантаження. Разом з тим спостерігається незначна невідповідність розрахункового розподілу поля деформацій по відношенню до експериментального. Це може бути викликано наступними причинами: недостатньою точністю визначення констант матеріалу, наприклад модуля пружності; незначним відхиленням розрахункової траєкторії деформування від експериментальної для виключення сингулярності в рівняннях; впливом точок зламу траєкторії тощо.

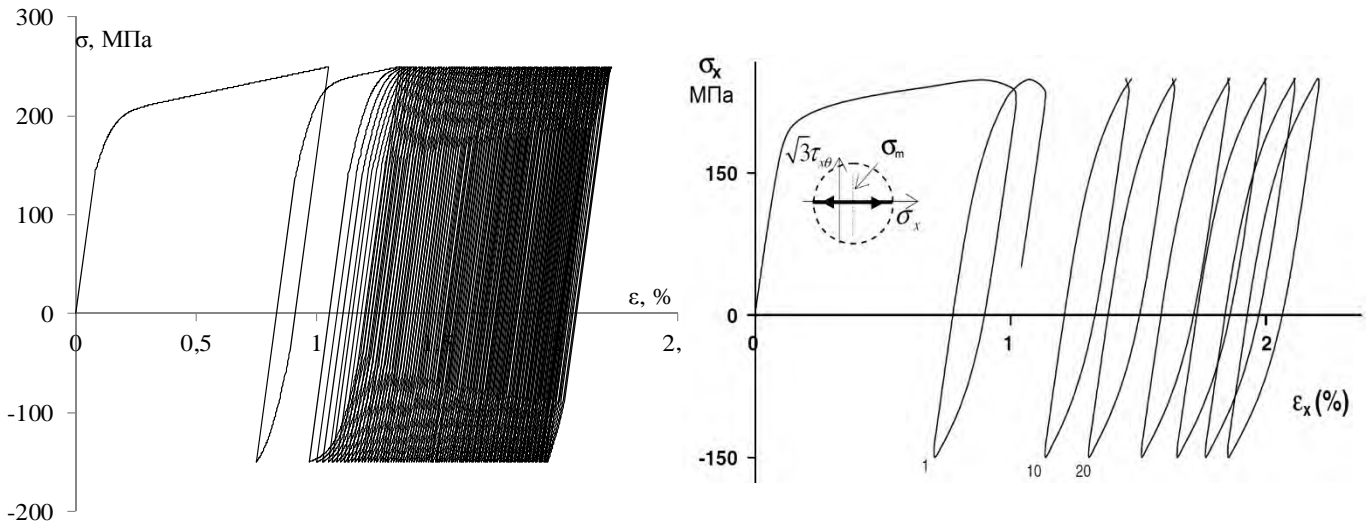


Рис. 1. Кінетика напружено-деформованого стану за навантаження розтяг-стиск:
а) – розрахунок, б) – експеримент

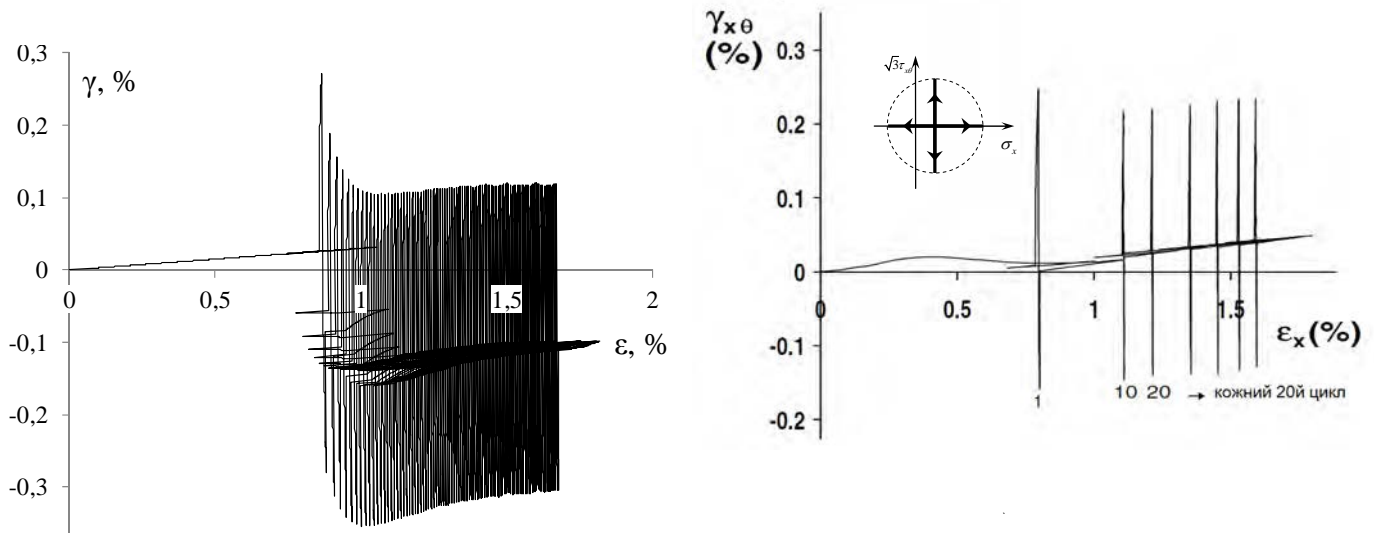


Рис. 2. Криві деформування при навантаженні за траєкторією "хрест":
а) – розрахунок, б) – експеримент

Список літератури.

1. Valanis K.C. *Fundamental consequences of new intrinsic time measure plasticity as a limit of the endochronic theory.* – Archives of Mechanics. – 1980. – 32. – P. 171-191.
2. Borodii M.V. *Modeling of the asymmetric low-cycle loading in the space of stresses.* – Strength of Materials. – 1998. – Vol.30. N5. – P. 472 - 480.
3. Adamchuk M.P., Borodii M.V., Selin O.M., Stryzhalo V.O. *Development of the model for cyclic plasticity to describe the ratcheting effect under non-proportional asymmetric loading.* – Strength of materials. – 2016. – Vol. 48, N2. – P.251-258.
4. Adamchuk M.P., Borodii M.V. *Determination of steady ratcheting strain rate under biaxial loading based on cycle nonproportionality coefficient.* – Strength of materials. – 2017. – Vol. 49, N2. – P.250-255.
5. Borodii M.V. *Determination of cycle nonproportionality coefficient.* – Strength of Materials. – 1995. – Vol.27. N5-6. – P. 265 - 472.
6. Hassan T., Taleb L., Krishna S. *Influence of non-proportional loading on ratcheting responses and simulations by two recent cyclic plasticity models.* - Int. J. Plasticity. – 2008. – Vol. 24. – P. 1863-1889.