УДК 539.3:624.016

ПРИРОДНА СИСТЕМА КООРДИНАТ ДЛЯ КРИВОЛІНІЙНИХ КОМПОЗИТНИХ БРУСІВ ІЗ НЕЗМІННИМИ ЛІНІЙНИМИ РОЗМІРАМИ ПОПЕРЕЧНИХ ПЕРЕРІЗІВ

Ковальчук С.Б., Горик О.В.
Полтавська державна аграрна академія, м. Полтава, Україна

Анотація: *У сучасних конструкціях різного призначення актуальним стає застосування елементів неоднорідної будови. Однак аналітичні теорії деформування для композитних брусів, особливо із криволінійною віссю, розвинуті слабко, що додатково перешкоджає запровадженню композитів у практику проектування. Для аналітичного моделювання деформацій криволінійних композитних брусів зручним є застосування природної системи координат, у якій геометрія поверхонь, структурна будова та граничні умови бруса мають найбільш простий аналітичний опис. У даній роботі розглянуто особливості аналітичного моделювання будови криволінійних композитних брусів, що мають незмінні лінійні розміри поперечних перерізів. Встановлено, що для таких брусів природна система координат, має бути побудована на сімействі еквідистант криволінійної осі та ортогональному їм сімействі прямих. Досліджено побудову такої системи координат із різними способами параметризації вихідних сімейств кривих.*

Ключові слова: *композит, брус, криволінійна вісь, деформація, моделювання*

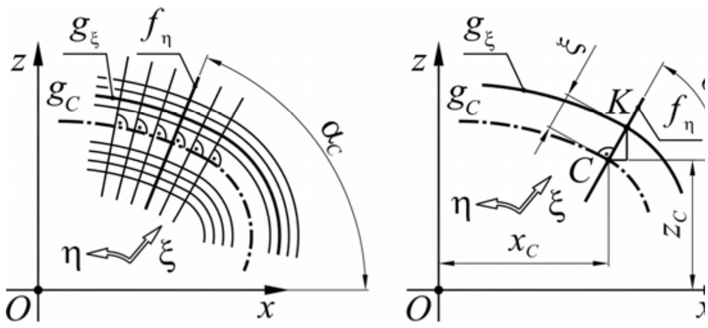
У сучасних машинобудівних та будівельних конструкціях все більш актуальним стає застосування композитних матеріалів. В той же час значною перепоною запровадження таких матеріалів у конструкціях є слабкий рівень розвитку аналітичних теорій деформування композитних елементів. Меншою мірою це стосується композитних оболонок та пластин, більшою – композитних брусів.

Окремі види деформування для композитних брусів із прямою віссю досить добре вивчені [0-0]. Однак для криволінійних композитних брусів і кілець, зустрічаються тільки розв'язки окремих задач для елементів із круговою віссю, наприклад [0-0]. Відповідно розвиток фундаментальних та прикладних теорій деформування композитних криволінійних брусів, є актуальним з наукової і практичної точки зору.

Для композитного бруса із криволінійною плоскою віссю довільної форми у природній системі координат [0] авторами отримані рівняння теорії пружності [0] та залежності для внутрішніх силових факторів [0]. Дані рівняння та залежності теоретично дозволяють розв'язувати задачі визначення напружено-деформованого стану (НДС) криволінійних брусів довільної форми осі. Однак практична реалізація отриманих розв'язків буде обмежена випадками відомих криволінійних ортогональних систем координат – круговою, еліптичною, параболічною та ін. Окрім обмеженого переліку, усі названі системи координат, за виключенням кругової, не дозволяють описати криволінійний композитний брус із сталими вздовж осі лінійними розмірами поперечного перерізу і окремих його фаз.

Отримані у [0] та [0] співвідношення і рівняння для свого застосування потребують не повного аналітичного описання сімейств координатних поверхонь, а лише їх окремих параметрів, таких як коефіцієнти Ламе L_ξ та L_η, відношення $L_\xi / L_\eta = \lambda$, функція $\alpha(\eta,\xi)$ – кута нахилу дотичних до сімейства координатних кривих f_η (рис. 1, а) або її тангенс $\kappa = \mathrm{tg}(\alpha)$ [0]. Тому можна використати отримані рівняння визначивши тільки коефіцієнти L_ξ і L_η та залежність для функції кута α, що можна зробити і без побудови самої системи координат.

У презентованому дослідженні була поставлена задача формальної побудови та отримання необхідних характеристик циліндричної криволінійної ортогональної системи координат, яка дозволяє описати криволінійний композитний брус із довільною плоскою віссю та сталими вздовж осі жорсткості лінійними розмірами поперечних перерізів.



а **б**

Рис. 1 – Сімейства координатних кривих для бруса із незмінними розмірами поперечних перерізів

Для побудови такої системи координат розглянуто ділянку композитного бруса, що не має самоперетинів. Вісь жорсткості бруса g_C належить площині xOz (рис. 1, а) допоміжної прямокутної системи координат xyz і є кусково-гладкою кривою:

$$g_C\left(x,z\right)=\varphi\left(x\right)-z=0\text{, або }g_C\left(x,z\right)=\left\{x=\varphi_x\left(t\right),\ z=\varphi_z\left(t\right)\right\}, \tag{1}$$

де t – параметр кривої g_C.

У випадку коли поперечні лінійні розміри фаз композитного бруса та їх розташування вздовж осі g_C є незмінними, то проекція g_ξ кожного поздовжнього волокна на площину xOz буде кривою рівновіддаленою (паралельною) осі g_C (рис. 1, а). Якщо відстань між точками C і K, що лежать на перетині кривих g_C і g_ξ із спільною нормаллю f_η (рис. 1, б), дорівнює ξ, то їх координати будуть пов'язані співвідношеннями:

$$x_K=x_C+\xi\cos\alpha_C,\qquad z_K=z_C+\xi\sin\alpha_C. \tag{2}$$

Кут α_C та координати x_C і z_C однозначно визначаються рівняннями (1), тому (2) описує однопараметриче сімейство кривих g_ξ паралельних криволінійній осі g_C, або її еквідистант, причому $g_C=g_\xi|_{\xi=0}$. Використовуючи методику наведену у [0], по відомому сімейству g_ξ, можна побудувати ортогональне сімейство f_η, що є необхідним кроком для побудови природної криволінійної системи координат $\eta\xi y$. Однак, у розглядуваному випадку, очевидно, що сімейство f_η буде складатись із сімейства прямих, перпендикулярних до осі g_C (рис. 1, а)

$$f_\eta=z-\left(x-x_C\right)\operatorname{tg}\alpha_C-z_C=0. \tag{3}$$

Для його побудови необхідно тільки визначитись із тим, який параметр прямої (3) буде виступати у якості параметра η сімейства f_η.

Було досліджено три випадки параметризації сімейства f_η: за координатою – $x_C=\eta$ (рис. 2 а), за кутом – $\alpha_C=\eta$ (рис. 2 б) і за параметром t – $t=\eta$. Отримані теоретичні результати показали, що коефіцієнти Ламе L_ξ і L_η, їх відношення $L_\xi/L_\eta=\lambda$ та кут α нахилу нормалей до кривих сімейства g_ξ, які входять до рівнянь теорії пружності та співвідношень для внутрішніх силових факторів у природній криволінійній системі координат, матимуть найбільш простий вигляд у випадку параметризації за кутом α_C (рис. 2 б)

$$f_\eta=z-\left(x-x_C\left(\eta\right)\right)\operatorname{tg}\eta-\varphi\left(x_C\right)=0. \tag{4}$$

Водночас такий тип параметризації потребує розбиття кривої g_C на ділянки без точок перегину, оскільки в іншому випадку одному параметру η відповідатимуть декілька прямих сімейства f_η. Також за такого типу параметризації неможливо розглядати прямолінійні ділянки бруса.

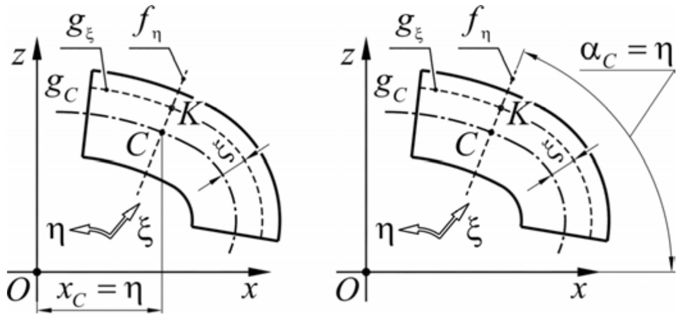


Рис. 2 – Варіанти параметризації сімейства прямих f_η

Параметризація за координатою x_C (рис. 2, а):

$$f_\eta = z - (x - \eta)\operatorname{tg}\alpha_C - \varphi(\eta) = 0\,, \tag{5}$$

призводить до більш громіздких залежностей і потребує розбиття базової кривої g_C на ділянки у межах яких координата x не повинна мати повторів, тобто координата η має монотонно зростати або спадати. Крім того у криволінійній системі координат із даним типом параметризації не можна описати ділянки бруса на яких крива g_C паралельна осі Oz.

Параметризація за параметром t кривої g_C:

$$f_\eta = z - \left(x - \varphi_x(\eta)\right)\operatorname{tg}\alpha_C - \varphi_z(\eta) = 0\,, \tag{6}$$

володіє перевагами над розглянутими вище випадками, оскільки не вимагає розбиття базової кривої на ділянки. Однак за такого типу параметризації ускладнюється аналітичний запис характеристик системи координат.

Теоретичні результати даного дослідження дозволяють розширити застосування рівнянь, отриманих у [0], та співвідношень, отриманих у [0], на випадок композитного криволінійного бруса із незмінними розмірами поперечних перерізів по довжині і зняти практичне обмеження, стосовно форми його осі.

Список літератури:

1. *Горик О.В. Механіка* деформування композитних брусів / О.В. Горик, В.Г. Піскунов, В.М. Чередніков. – Полтава-Київ: АСМІ, 2008. – 402с.
2. *Goryk A.V. Elasticity* theory solution of the problem on plane bending of a narrow layered cantilever bar by loads at its end / A.V. Goryk, S.B. Kovalchuk // Mechanics of Composite Materials. – 2018. – Vol. 54, No. 2. – P. 179-190.
3. *Мусхелишвили Н.И. Некоторые* основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 708с.
4. *Лехницкий С.Г. Теория* упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416с.
5. *Tolf G. Stresses* in a Cerved Laminated Beam / G. Tolf // Fiber Sci. Technol. – 1983. – Vol.19, No.4. – P.243-267.
6. *Ko W.L. Multilayer* Theory for delamination Analysis of a Composite Curved Bar Subjected to End Forces and End Moments / W.L. Ko, R.H. Jackson Multilayer // Composite Structures 5. – Springer, Dordrecht, 1989. – P.173-198.
7. *Ковальчук С.Б. Природна* криволінійна циліндрична система координат для стержнів із плоскою віссю довільної форми / С.Б. Ковальчук, О.В. Горик // Вісник ОДАБА. – 2017. – Вип. №68. – С.31-38.
8. *Ковальчук С.Б. Теоретичні* передумови аналітичного моделювання згину композитних брусів із криволінійною плоскою віссю / С.Б. Ковальчук, О.В. Горик // Матер. XVIII МНТК «Прогрес. техн., технол. та інж. освіта». – К.: КПІ, 2017. – С.52-54.
9. *Ковальчук С.Б. Інтегральні* та диференціальні співвідношення для внутрішніх силових факторів при згині бруса з криволінійною плоскою віссю довільної форми / С.Б. Ковальчук, О.В. Горик // Вісник ОДАБА. – 2018. – Вип. №70. – С.40-48.