

## Приложение 5

# КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ. СТАТИКА. МАЛЫЕ ДЕФОРМАЦИИ (теория)

### П5.1 Основные уравнения механики деформируемого тела в элементарном объеме тела

При постановках краевых задач о напряженно-деформированном состоянии твердого деформируемого тела применяются соответствующие комбинации уравнений статического равновесия, геометрических соотношений и уравнений физических моделей материала. Здесь будут рассмотрены только те, что применяются в NX Nastran. Учтено, что в NX Nastran все задачи формулируются в перемещениях с применением Лагранжевого подхода.

Обычно предполагается, что в начальный момент  $t_0$  в рассматриваемом теле перемещения  $U_i(\vec{x}, t_0)$ , деформации  $\varepsilon_{ij}(\vec{x}, t_0)$ , напряжения  $(\sigma_{mn})_0 = \sigma_{mn}(\vec{x}, t_0)$  имеют известные (чаще – нулевые) значения, известно начальное поле температур  $\hat{T}_0 = T(\vec{x}, t_0)$ . Далее предполагается, что нагрузка изменяется шагами ( $n$  – номер шага); что в объеме тела  $\Omega$ , а также на части его поверхности  $S_G = S_U \cup S_P$  за некоторый промежуток времени  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$  состоится изменение нагрузок, т.е. на момент времени  $t^{n+1}$  были приложены:  $\hat{O}_m(\vec{x}, t) = \rho \cdot \hat{F}_m(\vec{x}, t)$  – объемные силы ( $\rho$  – плотность,  $\vec{F}(\vec{x}, t)$  – вектор массовой силы),  $\hat{P}_m(\vec{x}, t)$  – поверхностные силы на  $S_P$ ;  $\hat{R}_m(\vec{x}, t)$  – сосредоточенные силы; состоялись перемещения  $\hat{U}_i(\vec{x}, t)$  – на  $S_U$ , а также в  $\Omega$  изменилась температура на величины  $\Delta \hat{T}(\vec{x}, t) = \hat{T}(\vec{x}, t) - \hat{T}_0$ . Тогда для определения в каждой точке (ее однородной окрестности) тела величин:  $U_i(\vec{x}, t)$  – перемещений,  $\varepsilon_{ij}(\vec{x}, t)$  – деформаций,  $\sigma_{mn}(\vec{x}, t)$  – напряжений, а также других, производных от них, формулируется краевая задача.

#### П5.1.1 Системы координат

В NX Nastran применяются три системы координат (все – ортогональные): декартова, цилиндрическая и сферическая. Но все уравнения рассматриваются в „физической” (местной), т.е. в нормированной, системе координат:

$$\vec{b}_j = \vec{e}_j / \sqrt{g_{jj}}; \quad j=1,2,3, \quad (\text{П5.1})$$

где  $\vec{e}_j$  – векторы основного базиса;  $g_{ij}$  – компоненты метрического тензора. Это позволяет исключить метрику пространства из физических уравнений.

#### П5.1.2 Уравнение статического равновесия в элементарном объеме тела

Уравнение равновесия как частный случай уравнения движения описываются формулой:

$$\nabla_n \hat{\sigma}^{mn} + \hat{O}^m = 0, \quad (\text{П5.2})$$

где значок « $\hat{\ }$ » над переменной указывает на то, что ее величина задается.

#### П5.1.3 Геометрические соотношения в элементарном объеме тела

В соответствии с подходом Лагранжа координаты любой точки тела  $P$  (или центра элементарного объема) после деформирования могут быть описаны формулой  $x_i = x_i(a_j, t)$ , где  $x_i(a_j, 0) = a_j$  – начальные координаты точки;  $i, j=1,2,3$ , а  $n$  – номер временного слоя (шага нагрузки). Поскольку в „физической” системе координат компоненты метрического тензора  $g_{ij} = g^{ij} = \delta_{ij}$ , то компоненты тензора меры деформации Коши-Грина:

$$C_{ij} = X_i^k \cdot X_j^k = \frac{\partial x^k}{\partial a_i} \frac{\partial x^k}{\partial a_j}, \text{ где } X_i^k = \frac{\partial x^k}{\partial a_i}. \quad (\text{П5.3})$$

Тогда *текущие* компоненты симметричного тензора деформации Лагранжа–Грина (относительно *начальной* конфигурации):

$$\epsilon_{ij} = (C_{ij} - \delta_{ij}) / 2, \quad (\text{П5.4})$$

или через компоненты вектора перемещений:

$$\epsilon_{ij} = (\nabla_j U_i + \nabla_i U_j + \nabla_i U_k \nabla_j U^k) / 2; \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (\text{П5.5})$$

где обозначено

$$\nabla_i U_j = \partial U_j / \partial a_i - U_k \Gamma_{ij}^k; \quad \nabla_j U^i = \partial U^i / \partial a_j + U^k \Gamma_{jk}^i; \quad (\text{П5.6})$$

$\Gamma_{ij}^m$  – символы Кристоффеля второго рода, симметричные по нижним индексам; они являются компонентами разложения  $\partial \vec{e}_j / \partial a_i$  по исходному базису  $\vec{e}_m$ , выражаются формулой

$$\Gamma_{mi}^j = \Gamma_{im}^j = g^{jn} (\partial g_{mn} / \partial a_i + \partial g_{in} / \partial a_m - \partial g_{mi} / \partial a_n) / 2. \quad (\text{П5.7})$$

Если деформации и повороты – малы, то в (П5.5) величинами второго порядка малости пренебрегают:

$$\epsilon_{ij} \approx \varepsilon_{ij} = (\nabla_i U_j + \nabla_j U_i) / 2. \quad (\text{П5.8})$$

Всегда считается, что деформации – совместные (удовлетворяют известным уравнениям совместности). Также считают, что до уровня деформаций примерно в 2% можно использовать суперпозицию деформаций:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^T + \varepsilon_{ij}^C + \varepsilon_{ij}^P, \quad (\text{П5.9})$$

т.е. общие деформации  $\varepsilon_{ij}$  являются алгебраической суммой упругих  $\varepsilon_{ij}^e$ , температурных  $\varepsilon_{ij}^T$ , ползучести  $\varepsilon_{ij}^C$  и пластичности  $\varepsilon_{ij}^P$  (при малых деформациях (П5.9) выполняется точно). Упругие деформации есть всегда, другие – только когда рассматривается соответствующая краевая задача.

### П5.1.4 Уравнения физических моделей материала в элементарном объеме тела

#### П5.1.4.1 Уравнения для определения температурных деформаций

Компоненты тензора температурной деформации для изотропного материала в NX Nastran 7.1 рассчитываются по формуле

$$\varepsilon_{ij}^T = \delta_{ij} \alpha_T \Delta \hat{T}; \quad \Delta \hat{T} = T - T_0, \quad (\text{П5.10-а})$$

где  $\alpha_T$  – коэффициент линейного температурного удлинения;  $T$  – текущая температура;  $T_0$  – начальная температура (всегда назначается для проведения расчетов с учетом температурной деформации, в FEMAP – как **Default Temperature**  $T_{def}$ , т.е.  $T_0 = T_{def}$ ). Считается, что при  $T_0 = T_{def}$  температурная деформация *отсутствует*.

В случае анизотропии материала:

$$\varepsilon_{ij}^T = (\alpha_{ij})_T \Delta \hat{T}, \quad (\text{П5.10-б})$$

где тензор коэффициентов линейного температурного удлинения  $(\alpha_{ij})_T$  – диагональный.

Коэффициент линейного температурного удлинения, как и другие характеристики материала, может зависеть от температуры, хотя такая зависимость – слабая, и ею часто пренебрегают. При этом в диалоге FEMAP вводится значение  $\alpha_{T_{ref}} = \alpha_T(T_{ref})$ , где  $T_{ref}$  является *опорной* температурой испытания материала (если она не указана, то обычно

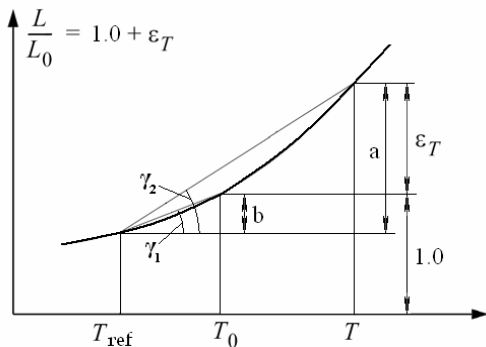


Рис.П5.1 – К получению формулы (П5.13)

равняется  $20^{\circ}C$ ), а также – функция температуры  $F(T)$ , причем  $F(T_{ref}) \equiv 1.0$ . Текущее значение  $\alpha_T(T) = \alpha_{T_{ref}} \cdot F(T)$ .

Но все функции в FEMAP сохраняются в табличном (дискретном) виде. Поэтому для промежуточных значений температуры должна применяться формула аппроксимации. В SPLMS.Fv10.2.0 используется линейная аппроксимация, поэтому текущее значение (см. также (П4.9)):

$$\alpha_T(T) = \alpha_{T_{ref}} \cdot F(T) \approx \alpha_{T_{ref}} \cdot \left\{ F(T_{(k)}) + \frac{T - T_{(k)}}{T_{(k+1)} - T_{(k)}} [F(T_{(k+1)}) - F(T_{(k)})] \right\}, \quad (П5.11)$$

где  $k$  – номер точки на графике  $F(T)$ .

Изменение температуры связывают с изменением энергии атомов, которая сопровождается изменением амплитуды их колебаний. Поэтому в обычных условиях *ничто не может помешать реализации температурных деформаций*. За это их зовут „не стесняемыми”. Температурная деформация всегда мгновенна, т.е. *отвечает текущей температуре*, поэтому вместо (П5.10-а) нужно применять какое-то другое выражение.

Чтобы не изменять привычную запись формулы для температурной деформации, вместо  $\alpha_T$  вводят  $\bar{\alpha}_T(T)$ . Согласно рис.П5.1  $\varepsilon_T = a - b$ . Если принять, что

$$tg(\gamma_1) = \alpha_T(T_0); \quad tg(\gamma_2) = \alpha_T(T), \quad (П5.12)$$

то  $a = tg(\gamma_2) \cdot (T - T_{ref}) = \alpha_T(T) \cdot (T - T_{ref})$  и  $b = tg(\gamma_1) \cdot (T_0 - T_{ref}) = \alpha_T(T_0) \cdot (T_0 - T_{ref})$ . Тогда

$$\bar{\alpha}_T(T) = [\alpha_T(T) \cdot (T - T_{ref}) - \alpha_T(T_0) \cdot (T_0 - T_{ref})] / (T - T_0); \quad (П5.13)$$

$$\varepsilon_{ij}^T = \delta_{ij} \bar{\alpha}_T(T) \cdot (T - T_0) = \delta_{ij} [\alpha_T(T) \cdot (T - T_{ref}) - \alpha_T(T_0) \cdot (T_0 - T_{ref})]. \quad (П5.14)$$

В „Help” NX Nastran 7.1 такой коэффициент  $\bar{\alpha}_T(T)$  называют „секущим для температурного диапазона значением  $\alpha_T$ ”. **Внимание:** формула (П5.14) верна лишь при условии, что табличные значения  $\alpha_T(T)$  соответствуют формулам (П5.12).

При использовании в NX Nastran 7.1 варианта SOL 601 („передовой” нелинейный анализ) считается, что  $T_{ref}$  совпадает с начальной температурой  $T_0$ . Тогда  $\bar{\alpha}_T = \alpha_T(T)$  и

$$\varepsilon_{ij}^T = \delta_{ij} \alpha_T(T) \cdot (T - T_0). \quad (П5.15)$$

#### П5.1.4.2 Уравнения для определения линейно-упругих деформаций

Между напряжениями и упругими деформациями существует однозначная функциональная зависимость. Обычно вводят понятие функционала упругой энергии (или упругого потенциала)  $W$ , с помощью которого закон упругости выражается как

$$\sigma^{mn} = \partial W / \partial \varepsilon_{mn}. \quad (П5.16)$$

Для линейно-упругой модели материала это закон Гука:

$$\sigma^{mn} = E^{mnij} \varepsilon_{ij}^e \quad \text{или} \quad \varepsilon_{ij}^e = C_{ijmn} \sigma^{mn}, \quad (П5.17)$$

где  $E^{mnij}$ ,  $C_{ijmn}$  – тензоры четвертого ранга из модулей упругости, которые в общем случае могут зависеть от координат и температуры. Кроме того, различают материалы изотропные и анизотропные. В NX Nastran можно применять такие разновидности анизотропии: ортотропия и полная анизотропия (двумерная или трехмерная).

В матричной записи линейный закон Гука для *анизотропного* материала имеет вид

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} & E_{16} \\ & E_{22} & E_{23} & E_{24} & E_{25} & E_{26} \\ & & E_{33} & E_{34} & E_{35} & E_{36} \\ & & & E_{44} & E_{45} & E_{46} \\ & & & & E_{55} & E_{56} \\ & & & & & E_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^e \\ \varepsilon_{22}^e \\ \varepsilon_{33}^e \\ \gamma_{12}^e \\ \gamma_{23}^e \\ \gamma_{31}^e \end{Bmatrix} \quad (П5.18)$$

для трехмерного случая и

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^e \\ \varepsilon_{22}^e \\ \gamma_{12}^e \end{Bmatrix} \quad (\text{П5.19})$$

для двумерного. Здесь  $2\gamma_{ij}^e = \varepsilon_{ij}^e$  при  $i \neq j$ , а все константы задаются в направлениях главных осей анизотропии.

Для ортотропного материала в трехмерном случае закон Гука записывается в виде

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^e \\ \varepsilon_{22}^e \\ \varepsilon_{33}^e \\ \gamma_{12}^e \\ \gamma_{23}^e \\ \gamma_{31}^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_{11} & -\nu_{21}/E_{22} & -\nu_{31}/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_{11} & 1/E_{22} & -\nu_{32}/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_{11} & -\nu_{23}/E_{22} & 1/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{31} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{Bmatrix}, \quad (\text{П5.20})$$

где  $\nu_{12}/E_{11} = \nu_{21}/E_{22}$ ,  $\nu_{13}/E_{11} = \nu_{31}/E_{33}$  и  $\nu_{23}/E_{22} = \nu_{32}/E_{33}$ , т.е. матрица – симметрична, содержит 9 независимых констант:  $E_{11}, E_{22}, E_{33}, G_{12}, G_{23}, G_{31}, \nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{31}$ . В двумерном случае

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11}/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & \nu_{12}E_{22}/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & 0 \\ \nu_{12}E_{22}/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & E_{22}/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^e \\ \varepsilon_{22}^e \\ \gamma_{12}^e \end{Bmatrix}, \quad (\text{П5.21})$$

где  $\nu_{12}/E_{11} = \nu_{21}/E_{22}$ ;  $G_{12} = E_{11}E_{22}/(E_{11} + E_{22} + 2E_{11}\nu_{12})$ , т.е. матрица содержит лишь 3 независимые константы:  $E_{11}, E_{22}, \nu_{12}$ .

У изотропного материала независимых упругих характеристик лишь две: модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$ , т.е. все  $E_{ij} = E$  и  $\nu_{ij} = \nu$ . Модуль сдвига связан с этими характеристиками формулой  $G = E/[2(1+\nu)]$ .

Для двумерной задачи есть еще одно дополнительное уравнение: для  $\sigma_{33}$  в случае плоского деформированного состояния (ПДС, при  $\varepsilon_{33}^e = 0$ ) или для  $\varepsilon_{33}^e$  в случае плоского напряженного состояния (ПНС, при  $\sigma_{33} = 0$ ). В случае осесимметричной задачи компоненты  $\varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta z} = \tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = 0$ .

### П5.1.4.3 Уравнения для определения нелинейно-упругих деформаций

В NX Nastran есть лишь две модели нелинейно-упругих материалов.

Для изотропного упруго-нелинейного материала (в NX Nastran обозначается как **Nonlinear Elastic**) физические уравнения можно представить в виде трех законов:

- закон упругого изменения объема

$$\varepsilon_V^S = \sigma_V / 3k; \quad \varepsilon_V^P = \varepsilon_V^C = 0; \quad (\text{П5.22})$$

- тензорное соотношение (закон изменения формы)

$$e_{ij}^S = \varphi \cdot S_{ij}; \quad \varphi = 3\varepsilon_u^S / 2\sigma_u; \quad (\text{П5.23})$$

- уравнение состояния, которое определяется экспериментально и задается в виде функциональной зависимости (функционала):

$$\sigma_u = K(\varepsilon_u^S), \quad (\text{П5.24})$$

где  $\varepsilon_V = \delta_{ij}\varepsilon_{ij}/3$  и  $\sigma_V = \delta_{ij}\sigma_{ij}/3$  – объемные деформация и напряжение соответственно;  $k = k(\bar{x}, T)$  – модуль объемного сжатия;  $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_V$  и  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_V$  – компоненты девиаторных частей тензоров деформаций и напряжений соответственно;  $\varepsilon_u^S$  и  $\sigma_u$  – интенсив-

ности „стесняемых” деформаций  $\varepsilon_{ij}^S = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^T$  и напряжений  $\sigma_{ij}$  соответственно. В упругом материале нет необратимых деформаций, поэтому „стесняемые” деформации – упругие. С учетом (П5.7) и (П5.15)  $\varepsilon_u^S = \varepsilon_u$ . В NX Nastran функционал (П5.24) вводится в виде таблицы для двух квадрантов: первого (кривая растяжения) и третьего (кривая сжатия).

Другой упруго-нелинейный материал – типа *резины*. В NX Nastran для такого материала (обозначается как **Hyperelastic**) применяется полигональная форма модели Муни-Ривлина (Mooney-Rivlin).

При  $\nu = 0.5$  третий инвариант тензора меры деформаций Коши-Грина (первое выражение в (П5.3))

$$I_3 = \det C_{ij} = 1, \quad (\text{П5.25})$$

т.е. компоненты  $C_{ij}$  должны удовлетворять этому условию. Если воспользоваться теорией штрафа, то выражение для функционала упругой энергии можно представить в виде

$$W = \bar{W}(\varepsilon_{ij}) + \lambda(I_3 - 1), \quad (\text{П5.26})$$

где  $\bar{W} = \bar{W}(I_1, I_2)$ , а инварианты

$$I_1 = \delta^{im} C_{mi}; \quad I_2 = (\delta^{im} \delta^{jn} C_{mi} C_{nj} - \delta^{im} \delta^{jn} C_{ij} C_{mn}) / 2. \quad (\text{П5.27})$$

Тогда вместо (П5.16)

$$\sigma^{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} + \lambda \frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} + 2\lambda C^{ij} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} + p C^{ij}, \quad (\text{П5.28})$$

где  $p = 2\lambda$  – гидростатическое давление, а компоненты  $\varepsilon_{ij}$  удовлетворяют условию (П5.18).

Итак, первое слагаемое в (П5.28) описывает „искривление”, а второе – изменение объема.

Аппроксимацию  $\bar{W} = \bar{W}(I_1, I_2)$  полиномом можно записать в виде обрезанного ряда:

$$\bar{W} = \sum_{m+n=1}^p A_{mn} (I_1 - 3)^m (\bar{I}_2 - 3)^n; \quad m, n = 0, 1, \dots, \quad (\text{П5.29})$$

где  $p = \max\{m+n\}$ ;  $\bar{I}_2 = (I_1^2 - I_2) / 2$ , а компоненты  $A_{mn}$  имеют такую же размерность, что и модуль Юнга.

В этом разложении обычно сохраняют члены одинаковой степени  $p$ . Например, если  $p = 3$ , то получим девятикомпонентную модель:

$$\begin{aligned} \bar{W} \approx & A_{10}(I_1 - 3) + A_{01}(\bar{I}_2 - 3) + A_{11}(I_1 - 3)(\bar{I}_2 - 3) + A_{20}(I_1 - 3)^2 + A_{02}(\bar{I}_2 - 3)^2 + \\ & + A_{30}(I_1 - 3)^3 + A_{03}(\bar{I}_2 - 3)^3 + A_{21}(I_1 - 3)^2(\bar{I}_2 - 3) + A_{12}(I_1 - 3)(\bar{I}_2 - 3)^2. \end{aligned} \quad (\text{П5.30})$$

Из (П5.30) легко получить модели из пяти ( $p = 2$ ) и трех ( $p = 1$ ) компонент. Если сохранить лишь два линейных члена ( $p = 1$ ), то это будет модель Муни-Ривлина, которая удовлетворительно описывают поведение материалов типа „резина” при деформациях примерно до 450 ... 500 процентов:

$$\bar{W} \approx A_{10}(I_1 - 3) + A_{01}(\bar{I}_2 - 3) = A_{10}(I_1 - 3) + A_{01}(I_1^2 - I_2 - 6) / 2. \quad (\text{П5.31})$$

Если в (П5.31) принять  $A_{01} = 0$ , то это будет модель неогуковского материала.

Однако, если применять соотношение (П5.28), то необходимо привлекать еще одно уравнение для определения величины гидростатического давления, которое увеличивает общее количество уравнений. Поэтому вместо выражения (П5.28) обычно применяют модель

$$W = \bar{W} + \sum_k D_k (J - 1)^{2(k+1)}; \quad \text{или} \quad W = \bar{W} + \sum_k D_k (J - 1 - \alpha_T \Delta T)^{2(k+1)}; \quad k = 0, 1, \dots \quad (\text{П5.32})$$

где  $J$  – детерминант градиента деформаций  $X_j^i = \partial x^i / \partial a^j$ ;  $\alpha_T \Delta T$  – температурная деформация, а компоненты  $D_k$  имеют такую же размерность, что и модуль Юнга. Более простой вариант:

$$W = \bar{W} + D_0 (J - 1)^2 \quad \text{или} \quad W = \bar{W} + D_0 (J - 1 - \alpha_T \Delta T)^2. \quad (\text{П5.33})$$

Величину  $D_0$  рассчитывают по формуле

$$D_0 = (A_{10} + A_{01}) / (1 - 2\nu), \quad (\text{П5.34})$$

где коэффициент Пуассона  $\nu$  необходимо задавать в пределах 0.495... 0.4999 (рекомендуют, чтобы было  $D_0 < 10^3(A_{10} + A_{01})$ ). Если  $\bar{W}$  соответствует (П5.31), а деформации – незначительны, то величины  $2(A_{10} + A_{01}) = G$  – модуль сдвига, а  $2D_0 = K$  – объемный модуль.

Есть и другие модели. Например, такая:

$$W = A_{10}(I_1 - 3) + A_{01}(I_2 - 3) + C(I_3^{-2} - 1) + D(I_3 - 1)^2, \quad (\text{П5.35})$$

где для вычисления  $C$  и  $D$  применяют формулы:

$$C = A_{10} / 2 + A_{01}; \quad D = [A_{10}(5\nu - 2) + A_{01}(11\nu - 5)] / [2(1 - 2\nu)]. \quad (\text{П5.36})$$

#### П5.1.4.4 Уравнения для определения упруго-пластических деформаций

В NX Nastran применяется несколько моделей упруго-пластического материала: для изотропного, ортотропного и анизотропного материала с изотропным, кинематическим или изотропно-кинематическим упрочнением, для четырех разных условий определения пластического состояния, с возможностью учета влияния температуры или скорости деформирования материала на границу его текучести. Во всех моделях деформации – малые, или не превышают 2%.

Но в сопроводительной документации („Help”) нет детального объяснения относительно примененных упруго-пластических моделей материалов. Поэтому модели материала для определения *упруго-пластических* деформаций в NX Nastran приведены здесь с некоторой долей вероятности.

В модели *ассоциированной пластической текучести* выполняется закон упругого изменения объема (П5.22), а приращения пластических деформаций связывают с „пластическим потенциалом”  $g$ :

$$\Delta \varepsilon_{ij}^P = \Delta \lambda^P \frac{\partial g}{\partial S_{ij}}, \quad (\text{П5.37})$$

где  $\Delta \lambda^P$  – функционал. Обычно с „пластическим потенциалом” ассоциируют выражение для „поверхности текучести”:

$$\phi = Q(S_{ij}) - H(\chi, T, \dot{\varepsilon}_u^S) = 0, \quad (\text{П5.38})$$

где параметр  $\chi$  определяет изотропное упрочнение материала. Если поверхность имеет отдельные части, аппроксимируемые разными выражениями, то есть ребра, где эти части поверхности стыкуются. В точках на этих ребрах приращение пластических деформаций определяется как сумма вкладов от каждой из стыкующихся частей поверхности (модель Койтера). Поэтому:

$$\Delta \varepsilon_{ij}^P = \sum_k (\Delta \lambda^P)^{(k)} \frac{\partial Q^{(k)}}{\partial S_{ij}} = \sum_k (\Delta \lambda^P)^{(k)} \cdot \text{grad} Q^{(k)}, \quad (\text{П5.39})$$

где  $k$  указывает соответствующую напряженному состоянию часть „поверхности текучести”.

В NX Nastran считается, что части „поверхности текучести” описываются формулами типа

$$\phi = f^{(k)}(S_{ij} - \alpha_{ij}) - H(\chi, T, \dot{\varepsilon}_u^S) = 0, \quad (\text{П5.40})$$

где  $H(\chi, T, \dot{\varepsilon}_u^S)$  – „мгновенная термомеханическая поверхность”, аппроксимируемая выражением билинейной изотропной модели

$$H(\chi, T, \dot{\varepsilon}_u^S) = \sigma_s(T, \dot{\varepsilon}_u^S) + \beta \cdot E_p \cdot \chi, \quad (\text{П5.41})$$

где  $\sigma_s(T, \dot{\varepsilon}_u^S)$  – граница текучести, которая может зависеть от температуры  $T$  или от скорости деформирования материала в точке тела  $\dot{\varepsilon}_u^S$ ;  $E_p$  – модуль упрочнения материала на дан-

ной части „мгновенной термомеханической поверхности”. Если функция  $H(\chi, T, \dot{\varepsilon}_u^S)$  задается таблицей (в FEMAP – функцией типа **4.vs.Stress**), то применяется формула типа (П5.41), причем модуль  $E_p$  рассчитывается на *каждом* линейном отрезке функции, а  $\sigma_s(T, \dot{\varepsilon}_u^S)$  соответствует началу такого линейного отрезка.

Приращения компонентов тензора „микронапряжений”  $\alpha_{ij}$ , описывающего кинематическое упрочнение материала, вычисляются как

$$\Delta \alpha_{ij} = (1 - \beta) \cdot C_p \cdot \Delta \varepsilon_{ij}^P. \quad (\text{П5.42})$$

Параметр  $C_p$  называется параметром упрочнения Прагера. Он связан с  $E_p$ . Параметром  $\beta$  задается тип упрочнения: при  $\beta = 0$  – кинематическое;  $\beta = 1$  – изотропное;  $0 < \beta < 1$  – изотропно-кинематическое. В NX Nastran полагается  $\beta = 0.5$  (идеальный эффект Баушингера при  $C_p = E_p$ ).

В NX Nastran предел текучести вычисляется как

$$\sigma_s(T, \dot{\varepsilon}_u^S) = (\sigma_s)_0 \cdot \varphi(T) \quad \text{или} \quad \sigma_s(T, \dot{\varepsilon}_u^S) = (\sigma_s)_0 \cdot \psi(\dot{\varepsilon}_u^S), \quad (\text{П5.43})$$

где  $\varphi(T)$  и  $\psi(\dot{\varepsilon}_u^S)$  – табличные функции;  $(\sigma_s)_0$  – начальное значение границы текучести.

Для функций  $f^k(S_{ij} - \alpha_{ij})$  может использоваться 4 варианта. Для металлов:

- теория Мизеса-Генки (изотропный материал, геометрическая интерпретация: одна поверхность в виде бесконечного цилиндра)  $f(S_{ij} - \alpha_{ij}) = \sqrt{3(S_{ij} - \alpha_{ij})(S_{ij} - \alpha_{ij})/2}$ ;
- теория Треска-Сен-Венана (изотропный материал, геометрическая интерпретация: шестигранная бесконечная призма)  $f^{(1)} = |[(\sigma_1 - \alpha_1) - \lambda \cdot (\sigma_2 - \alpha_2)]/2|$ ,  $f^{(2)} = |[(\sigma_2 - \alpha_2) - \lambda \cdot (\sigma_3 - \alpha_3)]/2|$ ,  $f^{(3)} = |[(\sigma_3 - \alpha_3) - \lambda \cdot (\sigma_1 - \alpha_1)]/2|$ .

Здесь  $\sigma_j$  и  $\alpha_j$  – главные значения напряжений и „микронапряжений” соответственно.

Для грунтов в виде сыпучих материалов (гравий, песок):

- теория Друкера-Прагера (изотропный упругий и идеально-пластический материал, геометрическая интерпретация: конус с вершиной в области положительных значений напряжений)  $\phi = \sqrt{3S_{ij}S_{ij}/2} + 3\beta\sigma_v - \sigma_s(T, \dot{\varepsilon}_u^S) = 0$ , где  $\sigma_v = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$ . Величины  $\beta$  и  $\sigma_s$  автоматически пересчитываются NX Nastran исходя из двух параметров, которые определяются из экспериментов: коэффициента „сцепления”  $C \geq 0$  и „угла внутреннего трения”  $\varphi$ , причем  $\sigma_s = 6C \cos \varphi / [\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)]$  и  $\beta = 2 \sin \varphi / [\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)]$ , а угол  $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$ ;

- теория Мора-Кулона (Mohr-Coulomb) – шестиугольная пирамида, вписанная в конус Друкера-Прагера.

#### П5.1.4.5 Уравнения для определения деформаций ползучести

В моделях технической теории ползучести для изотропного материала выполняется закон упругого изменения объема (П5.20), а компоненты тензора деформации ползучести или скорости ползучести определяются соответственно из выражений

$$\varepsilon_{ij}^C = \varepsilon_u^C \frac{\partial g}{\partial S_{ij}} \quad \text{или} \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^C = \dot{\varepsilon}_u^C \frac{\partial g}{\partial S_{ij}}, \quad (\text{П5.44})$$

где  $g = g(\varepsilon_u^C, \sigma_u, T, t)$  – „потенциал ползучести”. Обычно „потенциал ползучести” выбирают таким образом, что  $\partial g / \partial S_{ij} = 3S_{ij} / (2\sigma_u)$ , а именно:

$$g = \sqrt{(3S_{ij}S_{ij}/2)} - \Phi(\varepsilon_u^C, T, t) = 0. \quad (\text{П5.45})$$

Тогда соответственно

$$\varepsilon_{ij}^C = \frac{3\varepsilon_u^C}{2\sigma_u} S_{ij} \quad \text{или} \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^C = \frac{3\dot{\varepsilon}_u^C}{2\sigma_u} S_{ij}. \quad (\text{П5.46})$$

Уравнение кривой ползучести (что устанавливается экспериментально), т.е. выражение для  $\varepsilon_u^C$ , в NX Nastran определяются одним из вариантов:

- эмпирической формулой  $\varepsilon_u^C(\sigma_u, t) = A(\sigma_u) \cdot \{1 - \exp[-R(\sigma_u) \cdot t]\} + K(\sigma_u) \cdot t$ , где  $A(\sigma_u) = a \cdot \sigma_u^b$  или  $A(\sigma_u) = a \cdot \exp(b \cdot \sigma_u)$ ;  $R(\sigma_u) = c \cdot \exp(d \cdot \sigma_u)$  или  $R(\sigma_u) = c \cdot \sigma_u^d$ ;  $K(\sigma_u) = e \cdot [\text{sh}(f \cdot \sigma_u)]^g$  или  $K(\sigma_u) = e \cdot \exp(f \cdot \sigma_u)$ ;  $a, b, c, d, e, f, g$  – постоянные аппроксимации, определяемые в эксперименте;  $\sigma_u$  – напряжение;  $t$  – время;

- эмпирической формулой  $\varepsilon_u^C(\sigma_u, t) = a \cdot \sigma_u^b \cdot t^d$  (те же обозначения);
- таблицей.

Как и в любой эволюционной задаче, нужно задавать начальные условия. В задаче ползучести обычно задаются нулевые начальные деформации ползучести, т.е.  $\varepsilon_u^C(\bar{x}, 0) = 0$ .

### П5.1.5 Граничные условия

Дополнительно к уравнениям равновесия, геометрическим и физическим привлекаются граничные условия (ГУ) на  $S_U$  и  $S_P$ :

- ГУ 1-го рода (известные перемещения):

$$U_i|_{S_U} = \hat{U}_i; \tag{П5.47}$$

- ГУ 2-го рода (естественные):

$$\sigma^{mn} \nu_n|_{S_P} = \hat{P}^m, \tag{П5.48}$$

а также сосредоточенные силы  $\hat{R}_m$ , приложенные в некотором количестве узлов КЭС.

### П5.1.6 Вариационная постановка статической краевой задачи

Для решения краевой задачи часто удобнее иметь ее вариационную постановку.

Для получения вариационной постановки задачи используются уравнение равновесия и геометрические, а также свойство симметрии тензора напряжений и теорема Остроградско-Гаусса. В итоге получается следующий функционал относительно вариаций перемещений и связанных с ними деформаций

$$F = \int_{\Omega} \sigma^{mn} \delta \varepsilon_{mn} d\Omega - \int_{\Omega} \hat{O}_m \delta U_m d\Omega - \int_{S_P} \hat{P}_m \delta U_m dS - \hat{R}_m \delta U_m = 0, \tag{П5.49}$$

который в объединении с кинематическими ГУ (П5.47) на поверхности  $S_U$  определяет бесчисленное множество возможных (виртуальных) напряженно-деформированных состояний. Действительное НДС является одним из виртуальных, но оно дополнительно удовлетворяет физическим уравнением связей между напряжениями и деформациями.

Дополнительно надо отметить, что, кроме задачи ползучести и динамических задач (последние рассматриваются в Приложении 7), время не является параметром, т.е. явным образом не входит в уравнения. В этих случаях время применяется лишь для того, чтобы различать начальное состояние с последующими.

## П5.2 Конечно-элементное представление краевых задач о НДС твердого деформируемого тела. Малые деформации

### П5.2.1 Векторы перемещений, деформаций, напряжений

В NX Nastran реализован вариант МКЭ, в котором искомым является вектор перемещений. В матричном обозначении это вектор

$$\{U\} = \{U_1; U_2; U_3\}^T. \tag{П5.50}$$

Приближенное решение краевой задачи в объеме  $\Omega$  (компоненты вектора перемещений) можно искать в виде усеченного ряда:

$$U_n = U_n(\bar{x}, t) \approx \sum_{m=1}^{N^B} (q_n(t))_m \cdot \Phi_m(\bar{x}), \tag{П5.51}$$



где  $\Phi_m(\bar{x})$  – полная по энергии система линейно независимых базисных функции;  $N^B$  – общее их количество;  $(q_n(t))_m$  – искомые узловые значения; а в соответствии с идеологией МКЭ

$$\Phi_m(\bar{x}) = \sum_{\Omega^e \subset \Lambda_m} \chi^e(\bar{x}) \cdot \varphi_m^e(\bar{x}). \quad (\text{П5.52})$$

Здесь  $\Lambda_m$  – множество КЭ, что содержат узел с номером  $m$ ;  $\varphi_m^e(\bar{x})$  – базисная функция КЭ номер  $e$  (обычно это интерполяционный полином), соответствующая узлу  $m$  в пределах КЭ объема  $\Omega^e$ ; функция принадлежности к КЭ (оператор инцидентности):

$$\chi^e(\bar{x}) = \begin{cases} 1, & \bar{x} \subset \Omega^e; \\ 0, & \bar{x} \not\subset \Omega^e. \end{cases} \quad (\text{П5.53})$$

Иначе говоря, вместо (П5.51) имеем конечно-элементную аппроксимацию

$$U_n = U_n(\bar{x}, t) \approx \sum_{m=1}^{N^U} (q_n)_m(t) \sum_{\Omega^e \subset \Lambda_m} \chi^e(\bar{x}) \cdot \varphi_m^e(\bar{x}), \quad (\text{П5.54})$$

где  $N^U$  – общее количество узлов в теле.

Поскольку для любой точки в пределах КЭ  $\chi^e(\bar{x}) = 1$ , то в пределах КЭ  $\Phi_m(\bar{x}) = \varphi_m^e(\bar{x})$ . За пределами КЭ  $\chi^e(\bar{x}) = 0$ , поэтому в (П5.54) фактически идет суммирование только по  $M$  узлам того КЭ, в котором расположена рассматриваемая точка с координатами  $\bar{x}$ . Поэтому вводится матрица базисных функций КЭ  $[\phi]$ , через которую проводится тождественная замена формулы (П5.54):

$$\{U\} = [\phi] \{q\}_e, \quad (\text{П5.55})$$

где вектор перемещений в узлах КЭ

$$\{q\}_e = \{(q_1, q_2, q_3)_1, \dots, (q_1, q_2, q_3)_m, \dots, (q_1, q_2, q_3)_M\}^T, \quad (\text{П5.56})$$

в котором  $(q_1, q_2, q_3)_m$  – перемещения  $m$ -го узла КЭ;  $m = 1, 2, \dots, M$ . Этот вектор является результатом выборки значений перемещений  $\{q\}_e$  в узлах данного КЭ из глобального вектора узловых перемещений  $\{q\}$ . Поскольку в трехмерном случае вектор  $\{U\}$  имеет размерность  $3 \times 1$ , а  $\{q\}_e$  –  $3M \times 1$ , то размерность матрицы базисных функций –  $3 \times 3M$ . Матрица  $[\phi]$  – блочная:

$$[\phi] = [[\phi]_1, [\phi]_2, \dots, [\phi]_M], \quad (\text{П5.57})$$

в которой блок для  $m$ -го узла имеет вид:

$$[\phi]_m = \begin{bmatrix} \varphi_m^e & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_m^e & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_m^e \end{bmatrix}. \quad (\text{П5.58})$$

Для любой точки тела в пределах КЭ вводятся векторы полных и температурных деформаций, напряжений:

$$\{\mathcal{E}\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}\}^T; \quad (\text{П5.59})$$

$$\{\mathcal{E}^T\} = \{\alpha_T\} \Delta \hat{T} = \{(\alpha_T)_x, (\alpha_T)_y, (\alpha_T)_z, 0, 0, 0\}^T \cdot \Delta \hat{T}; \quad (\text{П5.60})$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}\}^T, \quad (\text{П5.61})$$

где  $\gamma_{mn} = 2\varepsilon_{mn}$  при  $m \neq n$ ; а также аналогичные в заполнении вектора упругих  $\{\mathcal{E}^e\}$  и необратимых  $\{\mathcal{E}^P\}$  и  $\{\mathcal{E}^C\}$  деформаций.

### П5.2.2 Малые деформации

Вводится матрица  $[B]$  дифференцирования по глобальным координатам, с использованием которой линейные уравнения (П5.8) записываются в виде

$$\{\varepsilon\} = [B]\{q\}_e. \quad (П5.62)$$

Поскольку вектор  $\{\varepsilon\}$  имеет размерность  $6 \times 1$ , а  $\{q\}_e - 3M \times 1$ , то размерность матрицы  $[B]$  равна  $6 \times 3M$ . Обозначим:

$$p_{im} = \partial \varphi_m^e / \partial x_i. \quad (П5.63)$$

Матрица дифференцирования – блочная:

$$[B] = [[B]_1, [B]_2, \dots, [B]_M], \quad (П5.64)$$

блоки которой, например, для декартовой системы координат, имеют такое заполнение:

$$[B]_{m, \text{дек}} = \begin{bmatrix} p_{1m} & 0 & 0 \\ 0 & p_{2m} & 0 \\ 0 & 0 & p_{3m} \\ p_{2m} & p_{1m} & 0 \\ 0 & p_{3m} & p_{2m} \\ p_{3m} & 0 & p_{1m} \end{bmatrix}. \quad (П5.65)$$

Линейный закон Гука (П5.17) запишем в виде

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon^e\}, \quad (П5.66)$$

где  $[D]$  – матрица модулей упругости. Если материал упруго-изотропный, то матрица

$$[D] = 2G(T) \cdot \begin{pmatrix} a & b & b & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 & 0 & 0 \\ b & b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad (П5.67)$$

где  $2G(T) = E/(1 + \mu)$ ;  $a = (1 - \mu)/(1 - 2\mu)$ ;  $b = \mu/(1 - 2\mu)$ ;  $c = 0.5$ ;  $E = E(T)$  – модуль Юнга;  $\mu = \mu(T)$  – коэффициент Пуассона. Для анизотропных материалов матрица  $[D]$  также симметрична, но имеет несколько иное заполнение.

### П5.2.3 САУ при малых деформациях

Используя введенные обозначения, выразим вариационный функционал (П5.49) в матричном виде:

$$\begin{aligned} F = & \sum_e \int_{\Omega^e} \delta\{q\}_e^T [B]^T [D] [B] \{q\}_e d\Omega - \sum_e \int_{\Omega^e} \delta\{q\}_e^T [B]^T [D] \{\alpha_T\} \Delta \hat{T} d\Omega - \\ & - \sum_e \int_{\Omega^e} \delta\{q\}_e^T [B]^T [D] (\{\varepsilon^P\} + \{\varepsilon^C\}) d\Omega - \sum_e \int_{S_p^e} \delta\{q\}_e^T [\phi]^T \{\hat{P}\} dS - \\ & - \sum_e \int_{\Omega^e} \delta\{q\}_e^T [\phi]^T \{\hat{O}\} d\Omega - \delta\{q\}_e^T [\phi]^T \{\hat{R}\} = 0. \end{aligned} \quad (П5.68)$$

Поскольку вектор узловых значений перемещений  $\{q\}_e$  не зависит от параметров интегрирования, он, а также вектор  $\delta\{q\}_e^T$  могут быть вынесенными за границы интеграла. Обозначим:

$$[K]_e = \int_{\Omega^e} [B]^T [D] [B] d\Omega; \quad (П5.69)$$

$$\{P\}_e = \int_{\Omega^e} [\phi]^T \{\hat{O}\} d\Omega + \int_{S_p^e} [\phi]^T \{\hat{P}\} dS + [\phi]^T \{\hat{R}\}; \quad (П5.70)$$

$$\{Q\}_e = \int_{\Omega^e} [B]^T [D] \{\alpha_T\} \Delta \hat{T} d\Omega; \quad (П5.71)$$

$$\{H\}_e = \int_{\Omega^e} [B]^T [D] (\{\varepsilon^P\} + \{\varepsilon^C\}) d\Omega. \quad (П5.72)$$

Поскольку вариации перемещений являются произвольными, то получим систему алгебраических уравнений (САУ) вида

$$[K]\{q\} = \{P\} + \{Q\} + \{H\} \quad (\text{П5.73})$$

относительно глобального вектора  $\{q\}$  значений узловых перемещений. В (П5.73) обозначены сборки по степеням свободы:  $[K] = \sum_e [K]_e$ ;  $\{P\} = \sum_e \{P\}_e$ ;  $\{Q\} = \sum_e \{Q\}_e$ ;  $\{H\} = \sum_e \{H\}_e$ .

Вектор  $\{P\}$  обусловлен внешними силовыми нагрузками и массовыми силами; векторы  $\{Q\}$  и  $\{H\}$  – фиктивными, отражающими влияния температуры (вектор  $\{Q\}$ ) и необратимых деформаций (вектор  $\{H\}$ ), если последние учитываются. При отсутствии необратимых деформаций САУ (П5.73) – линейная (СЛАУ), при наличии – нелинейная.

### П5.3 Краевая задача о потере устойчивости твердого деформируемого тела

Краевая задача о потере устойчивости твердого деформируемого тела, решается в NX Nastran 7.1 с применением подхода Эйлера, когда формы потери устойчивости считаются точно такими, как и формы собственных колебаний. Применяются геометрические уравнения, учитывающие нелинейные члены.

#### П5.3.1 Геометрические уравнения, учитывающие нелинейные члены

Обозначим

$$\epsilon_{ij} = (\epsilon_{ij})_L + (\epsilon_{ij})_{NL}, \quad (\text{П5.74})$$

где  $(\epsilon_{ij})_L$  – линейная часть тензора деформаций (П5.5), т.е. (П5.8); а  $(\epsilon_{ij})_{NL}$  – нелинейная часть, т.е.

$$(\epsilon_{ij})_{NL} = \frac{1}{2} \nabla_i U_k \nabla_j U^k. \quad (\text{П5.75})$$

В декартовой системе координат (ДСК)  $U^i = U_i$ , все символы Кристоффеля  $\Gamma_{ij}^k = 0$ ,  $\nabla_i = \partial / \partial x_i$ , поэтому

$$(\epsilon_{ij})_{L\text{ДСК}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right); \quad (\epsilon_{ij})_{NL\text{ДСК}} = \frac{1}{2} \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \frac{\partial U_k}{\partial x_j}; \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (\text{П5.76})$$

т.е. в формуле (П5.74) остается по пять составляющих. Обозначим:

$$b_{ij} = \partial U_i / \partial x_j \quad (\text{П5.77})$$

и введем вектор

$$\{\theta\} = \{ \{\theta_{x^1}\}, \{\theta_{x^2}\}, \{\theta_{x^3}\} \}^T, \quad \text{где } \{\theta_{x^j}\} = \{b_{1j}, b_{2j}, b_{3j}\}^T. \quad (\text{П5.78})$$

Тогда второе соотношение (П5.76) можно представить в виде

$$\{\epsilon\}_{NL\text{ДСК}} = \frac{1}{2} [A] \{\theta\}, \quad (\text{П5.79})$$

где матрица  $[A]$  размерностью  $6 \times 9$  (трехмерный случай) в ДСК имеет вид:

$$[A]_{\text{ДСК}} = \begin{bmatrix} b_{11}; & b_{21}; & b_{31}; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{12}; & b_{22}; & b_{32}; & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{13}; & b_{23}; & b_{33} \\ b_{12}; & b_{22}; & b_{32}; & b_{11}; & b_{21}; & b_{31}; & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{13}; & b_{23}; & b_{33}; & b_{12}; & b_{22}; & b_{32} \\ b_{13}; & b_{23}; & b_{33}; & 0 & 0 & 0 & b_{11}; & b_{21}; & b_{31} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \{\theta_{x_1}\}^T; & \{0\}^T; & \{0\}^T \\ \{0\}^T; & \{\theta_{x_2}\}^T; & \{0\}^T \\ \{0\}^T; & \{0\}^T; & \{\theta_{x_3}\}^T \\ \{\theta_{x_2}\}^T; & \{\theta_{x_1}\}^T; & \{0\}^T \\ \{0\}^T; & \{\theta_{x_3}\}^T; & \{\theta_{x_2}\}^T \\ \{\theta_{x_3}\}^T; & \{0\}^T; & \{\theta_{x_1}\}^T \end{bmatrix}, \quad (\text{П5.80})$$

где  $\{0\} = \{0, 0, 0\}^T$  – нулевой вектор.

Векторы  $\{\theta_{x_j}\}$  можно выразить через узловые значения перемещений как

$$\{\theta_{x_j}\} = [W_j] \{q\}_e, \quad (\text{П5.81})$$

где матрица

$$[W_j] = [[p_{j1}], [p_{j2}], \dots, [p_{jm}]], \text{ а } [p_{jm}] = \begin{bmatrix} p_{jm}; & 0; & 0 \\ 0; & p_{jm}; & 0 \\ 0; & 0; & p_{jm} \end{bmatrix}. \quad (\text{П5.82})$$

Тогда с учетом (П5.78)

$$\{\theta\} = [W] \{q\}_e, \quad (\text{П5.83})$$

где матрица  $[W]$  размерностью  $9 \times 3M$

$$[W] = \begin{bmatrix} [W_1] \\ [W_2] \\ [W_3] \end{bmatrix}. \quad (\text{П5.84})$$

Итак, учитывая (П5.83), можем записать, что

$$\{\epsilon\}_{NLDCK} = 0.5[A] \{\theta\} = 0.5[A][W] \{q\}_e = 0.5[\bar{B}] \{q\}_e, \quad (\text{П5.85})$$

где обозначена матрица дифференцирования нелинейных составляющих тензора деформаций (размерностью  $6 \times 3M$ )

$$[\bar{B}] = [A][W]. \quad (\text{П5.86})$$

Итак

$$\{\epsilon\} = (\{\epsilon\}_L + \{\epsilon\}_{NL}) = ([B] + 0.5[\bar{B}]) \{q\}_e, \quad (\text{П5.87})$$

причем матрица дифференцирования линейной части тензора деформаций  $[B]$  соответствует формулам (П5.64) и (П5.65).

Введем обозначение:

$$[\tilde{B}] = [B] + 0.5[\bar{B}]. \quad (\text{П5.88})$$

Тогда окончательно запишем, что с учетом нелинейных членов

$$\{\epsilon\} = [\tilde{B}] \{q\}_e. \quad (\text{П5.89})$$

Матрица  $[B]_{NL}$  является линейной функцией перемещений через матрицу  $[A]$ , так как из (П5.80) с учетом (П5.81):

$$[A] = \begin{bmatrix} ([C_1] \{q\}_e)^T; & \{0\}^T; & \{0\}^T \\ \{0\}^T; & ([C_2] \{q\}_e)^T; & \{0\}^T \\ \{0\}^T; & \{0\}^T; & ([C_3] \{q\}_e)^T \\ ([C_2] \{q\}_e)^T; & ([C_1] \{q\}_e)^T; & \{0\}^T \\ \{0\}^T; & ([C_3] \{q\}_e)^T; & ([C_2] \{q\}_e)^T \\ ([C_3] \{q\}_e)^T; & \{0\}^T; & ([C_1] \{q\}_e)^T \end{bmatrix}. \quad (\text{П5.90})$$

Поэтому, учитывая (П5.83), (П5.86) и (П5.90), можно получить, что вектор приращения нелинейной составляющей деформаций

$$\begin{aligned} \{d \in\}_{NL} = d\{\in\}_{NL} &= d(0.5[\bar{B}]\{q\}_e) = d(0.5[A]\{\theta\}) = 0.5(d[A]\{\theta\} + [A]d\{\theta\}) = [A]d\{\theta\} = \\ &= [A][C]\{dq\}_e = [\bar{B}]\{dq\}_e. \end{aligned} \quad (П5.91)$$

Итак, вектор приращений деформаций и, аналогично, вариаций деформаций:

$$\{d \in\} = ([B] + [\bar{B}])\{dq\}_e = [\tilde{B}]\{dq\}_e, \quad \{\delta \in\} = [\tilde{B}]\{\delta q\}_e, \quad (П5.92)$$

где  $[\tilde{B}] = ([B] + [\bar{B}])$  – полная матрица дифференцирования для получения вектора *приращения* деформаций, которая *зависит от перемещений*. Особо отметим, что матрица дифференцирования для получения *полного* вектора перемещений, которая также зависит от перемещений, имеет несколько другое наполнение (сравните (П5.92) с (П5.88)). Эти общие выражения сохраняют вид и для других координатных систем.

### П5.3.2 САУ при учете нелинейных членов и методы ее решения в NX Nastran

Когда деформации учитывают нелинейные члены, вместо (П5.6) используется нелинейное уравнение (П5.5), а вместо (П5.55) – выражение (П5.89). Поскольку в NX Nastran для решения *нелинейных* САУ используется метод Ньютона-Рафсона, то для получения САУ применяется несколько другой путь, чем в Разделе П5.2.3.

Если в функционале (П5.61) не делать замену напряжений согласно формуле (П5.59) на выражение через перемещения, то, с учетом второго выражения (П5.92) и при условии произвольности вариаций перемещений получим, что:

$$\sum_e \int_{\Omega^e} [\tilde{B}]^T \{\sigma\} d\Omega = \{P\}. \quad (П5.93)$$

Согласно методу Ньютона-Канторовича решения нелинейных САУ считается, что

$$\{\psi\}^{(k+1)} \approx \{\psi\}^{(k)} + \left. \frac{\partial \{\psi\}}{\partial \{q\}} \right|^{(k)} \cdot \{dq\} \approx \{0\}; \quad \{q\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k)} + \{dq\}, \quad (П5.94)$$

где вектор погрешности приближения  $\{\psi\}$  определяется как разность между правой и левой частями САУ;  $k$  – номер итерации. Из (П5.93):

$$\{\psi\}^{(k)} = \{P\} - \sum_e \int_{\Omega^e} ([\tilde{B}]^T \{\sigma\})^{(k)} d\Omega; \quad k = 0, 1, \dots; \quad (П5.95)$$

а в соответствии с (П5.94) и (П5.95), поскольку  $\partial\{P\}/\partial\{q\} = [0]$ :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \{\psi\}}{\partial \{q\}} \right|^{(k)} \{dq\} &= - \frac{\partial}{\partial \{q\}} \left( \sum_e \int_{\Omega^e} [\tilde{B}]^T \{\sigma\} d\Omega \right)^{(k)} \{dq\} = \\ &= - \left( \sum_e \int_{\Omega^e} d[\tilde{B}]^T \{\sigma\} d\Omega + \sum_e \int_{\Omega^e} [\tilde{B}]^T d\{\sigma\} d\Omega \right)^{(k)}. \end{aligned} \quad (П5.96)$$

Поскольку  $d[B] \equiv [0]$ , то с учетом (П5.80) ... (П5.84), (П5.86):

$$\begin{aligned} \sum_e \int_{\Omega^e} d[\tilde{B}]^T \{\sigma\} d\Omega &= \sum_e \int_{\Omega^e} d[\bar{B}]^T \{\sigma\} d\Omega = \sum_e \int_{\Omega^e} d([A][C])^T \{\sigma\} d\Omega = \\ &= \sum_e \int_{\Omega^e} [C]^T d[A]^T \{\sigma\} d\Omega = \sum_e \int_{\Omega^e} [C]^T [S] d\{\theta\} d\Omega = \sum_e \left( \int_{\Omega^e} [G]^T [S] [G] d\Omega \cdot \{dq\}_e \right), \end{aligned} \quad (П5.97)$$

где введены матрицы:

$$[\tilde{S}] = \begin{bmatrix} [S] & 0 & 0 \\ 0 & [S] & 0 \\ 0 & 0 & [S] \end{bmatrix}; \quad [S] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}; \quad (П5.98)$$

$$[G] = [[G]_1, [G]_2, \dots, [G]_M]; \quad (П5.99)$$

$M$  – количество узлов в КЭ, а матрица  $[G]_m$  для декартовой системы координат ( $m = 1, 2, \dots, M$ )

$$[G]_m = \begin{bmatrix} p_{1m} & p_{2m} & p_{3m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{1m} & p_{2m} & p_{3m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{1m} & p_{2m} & p_{3m} \end{bmatrix}^T. \quad (\text{П5.100})$$

В матрице  $[S]$  компоненты напряжений  $\sigma_{ij}$  рассчитывают в соответствии с физическим законом (см. Раздел П5.1.4) на основе вектора узловых перемещений  $\{q\}$ .

Введем глобальную симметричную матрицу

$$[K_\sigma] = \sum_e [K_\sigma]_e, \quad \text{где } [K_\sigma]_e = \int_{\Omega^e} [G]^T [S] [G] d\Omega. \quad (\text{П5.101})$$

Из физического закона (П5.59) с применением (П5.92):

$$d\{\sigma\} = [D]d\{\varepsilon^e\} = [D]d(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^T\} - \{\varepsilon^P\} - \{\varepsilon^C\}) = [D](\tilde{[B]}\{dq\}_e - \{d\varepsilon^T\} - \{d\varepsilon^P\} - \{d\varepsilon^C\}). \quad (\text{П5.102})$$

Подставим это выражение в (П5.96):

$$\begin{aligned} \sum_e \int_{\Omega^e} \tilde{[B]}^T \{d\sigma\} d\Omega &= \sum_e \left( \int_{\Omega^e} \tilde{[B]}^T [D] \tilde{[B]} d\Omega \cdot \{dq\}_e \right) - \sum_e \int_{\Omega^e} \tilde{[B]}^T [D] \{\alpha_T\} d\hat{T} d\Omega - \\ &\quad - \sum_e \int_{\Omega^e} \tilde{[B]}^T [D] (\{d\varepsilon^P\} + \{d\varepsilon^C\}) d\Omega. \end{aligned} \quad (\text{П5.103})$$

Обозначим:

$$[\bar{K}]_e = \int_{\Omega^e} \tilde{[B]}^T [D] [B] d\Omega + \int_{\Omega^e} [B]^T [D] [\bar{B}] d\Omega + \int_{\Omega^e} \tilde{[B]}^T [D] [\bar{B}] d\Omega; \quad (\text{П5.104})$$

$$\{dQ\} = \sum_e \int_{\Omega^e} \tilde{[B]}^T [D] \{\alpha_T\} d\hat{T} d\Omega; \quad \{dH\} = \sum_e \int_{\Omega^e} \tilde{[B]}^T [D] (\{d\varepsilon^P\} + \{d\varepsilon^C\}) d\Omega, \quad (\text{П5.105})$$

тогда (П5.102) запишем в виде

$$\sum_e \int_{\Omega^e} \tilde{[B]}^T \{d\sigma\} d\Omega = \sum_e (([K]_e + [\bar{K}]_e) \cdot \{dq\}_e) - \{dQ\} - \{dH\}. \quad (\text{П5.106})$$

Подставим полученные выражения в (П5.96), а результат – в (П5.94):

$$([K] + [\bar{K}] + [K_\sigma])^{(k)} \{dq\} = \{\psi\}^{(k)} + \{dQ\} + \{dH\}; \quad \{q\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k)} + \{dq\}. \quad (\text{П5.107})$$

Реально рассматриваются не бесконечные малые приращения, а такие, что имеют конечные величины. Поэтому в (П5.105) вместо знака дифференциала  $d$  используют знак приращения  $\Delta$ , а вместо (П5.107) – такие выражения:

$$([K] + [\bar{K}] + [K_\sigma])^{(k)} \{\Delta q\} = \{\psi\}^{(k)} + \{\Delta Q\} + \{\Delta H\}; \quad \{q\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k)} + \{\Delta q\}. \quad (\text{П5.108})$$

Формула (П5.108) соответствует одной итерации алгоритма Ньютона-Рафсона решения нелинейной САУ, который построен на основе метода Ньютона-Канторовича. В (П5.108) матрица нестабильна, собирается снова на каждой итерации. Для алгоритма доказаны теоремы существования и единственности решения. Есть несколько вариантов модификации этого метода, в которых матрица САУ обновляется через несколько итераций или совсем не обновляется.

Матрица  $[\bar{K}]$  носит название матрицы *значительных перемещений*, а  $[K_\sigma]$  – матрицы *геометрической жесткости* (geometric stiffness matrix).

Полученные выражения метода Ньютона-Рафсона можно использовать и при *малых* деформациях. Так как при малых деформациях матрица  $[\bar{B}]$  отсутствует, то отсутствуют и матрицы  $[\bar{K}]$  и  $[K_\sigma]$ , а матрица  $[\tilde{B}] = [B]$ . Выражения (П5.108) упрощаются до:

$$[K]^{(k)} \{\Delta q\} = \{\psi\}^{(k)} + \{\Delta Q\} + \{\Delta H\}; \quad \{q\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k)} + \{\Delta q\}. \quad (\text{П5.109})$$

Именно эти выражения применяются вместо (П5.73) в случае ее нелинейности.

### П5.3.3 Краевая задача о потере устойчивости твердого деформируемого тела

При постановке краевой задачи о потере устойчивости твердого тела различают *начальное* и *сопредельное* состояния тела.

Решение для начального состояния получается обычным способом (см. Раздел П5.2). Для получения решения для сопредельного состояния есть САУ (П5.108). Но неизвестно, какое приращение нагрузки нужно сделать, чтобы нагрузка достигла критического значения. Обычно делают таким образом. Процесс нагружения (от начального состояния до момента потери устойчивости) считается пропорциональным, тогда дополнительную нагрузку можно назначать подобно формуле  $P_j = P_j^* + \Delta P_j = \alpha P_j^*$ , т.е.  $\Delta P_j = (\alpha - 1)P_j^*$ . Это касается и температурной нагрузки, поэтому вектор  $\{\Delta Q\} = (\alpha - 1)\{Q^*\}$ . Поскольку начальное состояние – уравновешенное, то, в соответствии с формулой (П5.95) вектор погрешности приближения  $\{\psi\} = (\alpha - 1)\{P^*\}$ . Компоненты вектора  $\Delta H$  (от необратимых деформаций) и  $[K_\sigma]\{\Delta q\}$  (от напряжений) тоже изменятся пропорционально, хотя пропорциональные множители будут другими, т.е.  $\gamma$  и  $\beta$  соответственно. При условии  $\{\Delta H\} = \{0\}$  (отсутствие необратимых деформаций) и  $[\bar{K}] = [0]$  (деформации – малые)  $\beta = \alpha$ . Если только  $\{\Delta H\} = \{0\}$ , т.е. деформации – большие, но упругие, то  $\beta \approx \alpha$ .

Известно, что потеря устойчивости тела может проходить по разным геометрическим формам, для которых множители  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  должны быть своими, т.е. таких коэффициентов будет много (теоретически – бесконечность). Тогда из (П5.108) получим САУ:

$$([K] + [\bar{K}] + \beta_i [K_\sigma])\{\Delta q\} = (\alpha_i - 1)(\{P^*\} + \{Q^*\}) + (\gamma_i - 1)\{H^*\}; \quad i = 1, 2, \dots, \quad (\text{П5.110})$$

в котором в случае малых деформаций матрица  $[\bar{K}] = [0]$ , т.е. отсутствует.

Поскольку после потери телом устойчивости нет единого геометрического состояния тела, то и нет единого решения САУ (П5.110). Т.е. матрица этой САУ в момент потери устойчивости является вырожденной, а ее детерминант равняется нулю:

$$\det([K] + [\bar{K}] + \beta_i [K_\sigma]) = 0; \quad i = 1, 2, \dots \quad (\text{П5.111})$$

При  $\beta \approx \alpha$  каждое полученное значение множителя  $\beta_i$  будет указывать степень недогруженности ( $\beta_i > 1$ ) или перегруженности ( $\beta_i < 1$ ) тела относительно  $i$ -го состояния потери устойчивости.

На практике обычно есть смысл рассматривать лишь несколько значений  $\beta_i$  (меньших по модулю).

В NX Nastran для задачи потери устойчивости тела принимаются такие допущения:

- отклонения геометрии тела перед деформированием – малые, т.е.  $[\bar{K}] = [0]$ ;
- конфигурация равновесия тела на момент потери устойчивости – начальная геометрия;
- реакция материала на момент потери устойчивости – линейная или нелинейная, но – упругая, т.е.  $\beta \approx \alpha$ ;
- поведение тела после того, как устойчивость утрачена, не прогнозируется.

**Примечание П5.1.** Когда принимается  $[\bar{K}] = [0]$ , то расчетные критические нагрузки обычно являются завышенными относительно экспериментальных, поскольку при потере устойчивости деформации – значительные, хотя и необязательно имеют необратимую составляющую.

**Примечание П5.2.** Рекомендуется задавать начальную нагрузку такую, что близка к критической нагрузке.

#### П5.4 Алгоритм „двух шагов” получения решения в NX Nastran задачи для тел с малой жесткостью

Если тело имеет малую жесткость, а деформации не считаются значительными, то в NX Nastran применяется алгоритм „двух шагов”, в котором на первом шаге решается линейная

САУ (П5.73), а на втором к матрице жесткости  $[K]$  прибавляется матрица *геометрической жесткости*  $[K_\sigma]$  (см. формулу (П5.101)):

$$([K] + [K_\sigma])\{q\} = \{P\} + \{Q\} + \{H\}. \quad (\text{П5.112})$$

В матрице  $[K]_\sigma$  компоненты напряжений  $\sigma_{ij}$  рассчитывают в соответствии с физическими законами (см. Раздел П5.1.4) на основе вектора узловых перемещений  $\{q\}$ , который получен на первом шаге.