Приложение 6

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ. СТАТИКА. БОЛЬШИЕ ДЕФОРМАЦИИ (теория)

П6.1 О классических типах формулирования алгоритмов решения геометрически нелинейных краевых задач

После того, как будут получены системы алгебраических уравнений (САУ) для итерационного решения краевых задач с геометрической нелинейностью, проявятся *две проблемы*:

- во-первых, на момент вычисления компонент САУ текущая геометрия тела не определена;
- во-вторых, напряжения σ^{ij} (Эйлера-Коши), вычисленные в разных конфигурациях, нельзя просто так складывать, поскольку нужно учитывать вращение площадок, на которых они вычислялись и вычисляются.

Первая проблема вынуждает искать решение на основе *предварительно* определенной (*опорной*) геометрии тела, вторая – проводить преобразования напряжений.

Если в качестве опорной геометрии тела на всех этапах нагружения используется *начальная* геометрия, то такой подход называют „*полная формулировка Лагранжа*” (Total Lagrange – **TL**). Иначе, если в качестве опорной геометрии тела на всех этапах нагружения используется геометрия, которая *создана предыдущим этапом нагружения*, то такой подход называют „*модифицированная формулировка Лагранжа*” (Updated Lagrange – **UL**).

TL-формулировку можно применять лишь тогда, когда при получении решения не имеет значения *история нагружения* тела. Эта история может быть значащей:

- при потере устойчивости геометрии тела, если нужно изучать дальнейшее его напряженно-деформированное состояние, в частности, после так называемого „прощелкивания” конструкции;
- при сложном упруго-пластическом нагружении, когда в разных частях тела реализуются разные траектории деформирования, в частности, одновременно происходят процессы активного упруго-пластического деформирования и упругой разгрузки;
- при действительно значительных деформациях, когда теоретически нельзя складывать даже деформации, а можно складывать только скорости деформаций, т.е. реализовывать формулировку Эйлера. Погрешность, которая возникает при простом сложении деформаций, считается небольшой где-то в пределах до 2 процентов деформации.

При применении **UL-**формулировки нужно автоматически всю историю нагружения разделять на отдельные этапы и на всех этапах обеспечивать относительно небольшие приращения нагрузки. Наличие многих этапов обычно увеличивает время получения решения краевой задачи. Поэтому, если отсутствуют неупругие деформации или упруго-пластическое нагружение – пропорциональное, а деформации – относительно малы, использование формулировки **TL** обычно эффективнее, чем **UL**, так как все нагружение можно провести за один этап. И лишь тогда, когда краевая задача обязывает применение малых приращений нагрузки, нужно применять формулировку **UL**.

Далее коротко рассмотрим эти обе формулировки и сопутствующие проблемы.

Использование базовой, а не текущей, конфигурации тела нуждается в перерасчете величин, фигурирующих в формулах, на базовую конфигурацию. Поэтому изменяются даже названия (меры) тензоров напряжений и деформаций.

В таблице П6.1 приведена краткая информация о характерных ситуаций при наличии физической и/или геометрической нелинейности (формулировка Эйлера с неподвижной сеткой и **ALE** (смешанная Эйлера-Лагранжа) – не рассматриваются).

Таблица П6.1 – Ситуации при моделировании нелинейных краевых задач о НДС тел

Тип анализа	Описание ситуации	Типы формулировок	Меры деформаций и напряжений
Только нелинейность свойств материала (только физическая нелинейность)	Бесконечно малые параллельные перемещения и вращения; соотношения „напряжения-деформации" являются нелинейными	Только нелинейность свойств материала (Materially nonlinear only – **MNO**)	Напряжения Эйлера-Коши, малые деформации Грина-Лагранжа (Cauchy stress, small Green-Lagrange strain)
Большие параллельные перемещения, большие вращения, но малые деформации	Параллельные перемещения и вращения волокон являются большими, но удлинения волокна и угловые изменения между волокнами являются малыми; соотношения „напряжения-деформации" могут быть линейными или нелинейными	Полная формулировка Лагранжа (Total Lagrange – **TL**)	Напряжения Пиола-Кирхгофа 2-го рода, малые деформации Грина-Лагранжа (Second Piola-Kirchhoff stress, small Green-Lagrange strain)
		Модифицированная формулировка Лагранжа (Updated Lagrange – **UL**)	Напряжения Эйлера-Коши, малые деформации Альманси (Cauchy stress, small Almansi strain)
Большие параллельные перемещения, большие вращения и большие деформации	Параллельные перемещения и вращения волокон являются большими; удлинение волокон и угловые изменения между волокнами также являются большими, соотношения „напряжения-деформации" могут быть линейными или нелинейными	Полная формулировка Лагранжа (Total Lagrange – **TL**)	Напряжения Пиола-Кирхгофа 2-го рода, деформации Грина-Лагранжа (Second Piola-Kirchhoff stress, large Green-Lagrange strain)
		Модифицированная формулировка Лагранжа (Updated Lagrangian – **UL**)	Напряжения Эйлера-Коши, логарифмические деформации Генки (Cauchy stress, logarithmic strain Hencky)

Рассмотрим вопросы о деформациях Грина-Лагранжа и Генки, о тензоре Эйлера-Коши и втором тензоре напряжений Пиола-Кирхгофа, а также об определяющих уравнениях, которые будут использоваться при формулировании постановок краевых задач.

П6.2 Основные определения и соотношения, необходимые для формулирования алгоритмов решения геометрически нелинейных краевых задач

Постановка краевой задачи сделана в Разделе П5.1.

П6.2.1 Системы координат. Метрический тензор

Системой отсчета $\Re$ называют совокупность по крайней мере 4-х точек, не лежащих в одной плоскости. Очевидно, что ее геометрия может быть и евклидовой.

В общем случае для описания состояния тела обычно вводят несколько координатных систем. Введем такие системы с ортогональными базисами (см. рис.П6.1):

- глобальную неподвижную декартову систему координат с базисом $\vec{k}_i$, осями x^i; $i=1,2,3$ и точкой M^0, в которой помещается начало системы. Любую точку $P_{(0)}$ задает вектор $\vec{r}^{(0)}$, проведенный к ней из начала координат с базисом $\vec{k}_i$;
- глобальную неподвижную, в общем случае криволинейную систему координат с базисом $\vec{e}_i$ и координатными линиями $a^i = a^i(x^j)$; $i, j = 1,2,3$. Обычно она тоже имеет начало в

точке M^0, но это не является обязательным. Базис $\vec{e}_i$ может совпадать с базисом $\vec{k}_i$. Условие $a^i = const;\ i = 1,2,3$ задает *координатную поверхность*. Две координатные поверхности a^i и a^j пересекаются (при $i \neq j$). Линия их пересечения называется *координатной линией*, она соответствует третьей координате a^k;

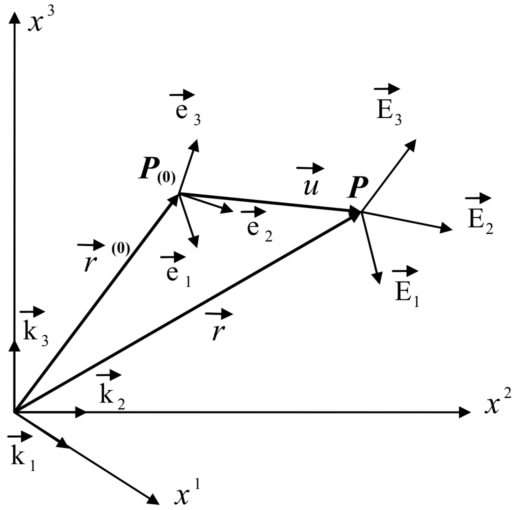

Рис.П6.1. Координатные системы

- локальную „вмороженную”, в общем случае криволинейную не ортогональную, систему координат с базисом $\vec{E}_i$, которая сопровождает каждую материальную точку тела, на текущее положение которой указывает вектор $\vec{r} = \vec{r}(a^1, a^2, a^3, t)$, проведенный к ней из начала координат, в котором принимают $\vec{r} = \vec{0}$ (это всегда можно сделать путем параллельного переноса).

Три вектора базиса $\vec{e}_i$, который называется основным, задаются как

$$\vec{e}_i = \lim_{\Delta a^i \to 0} \frac{\Delta \vec{r}^{(0)}}{\Delta a^i} = \frac{\partial \vec{r}^{(0)}}{\partial a^i}. \qquad (П6.1)$$

Эти три вектора основного базиса являются касательными к координатным линиям в точке M^0, которая определяет начало координатной системы.

Если координатная система $a^i = x, y, z$, т.е. является декартовою (ДСК), то все модули $|\vec{e}_i| = 1$.

Девять величин $g_{ij} = \left(\vec{e}_i, \vec{e}_j\right) = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \dfrac{\partial \vec{r}^{(0)}}{\partial a^i} \cdot \dfrac{\partial \vec{r}^{(0)}}{\partial a^j}$ называют ковариантными компонентами симметричного метрического тензора. В ДСК

$$(g_{ij})_{ДСК} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij}). \qquad (П6.2)$$

Здесь и всюду ниже в тексте δ_{ij} – символ Кронекера.

В точке M^0 начала координатной системы, наряду с основным, вводится взаимный базис $\vec{e}^i$ таким образом, чтобы $\vec{e}^i \cdot \vec{e}_j = \delta^i_j = \delta_{ij}$ (векторы $\vec{e}_i$ указывают направление координатных линий, а векторы $\vec{e}^i$ – перпендикулярны к координатным поверхностям). Аналогично g_{ij} вводится контравариантный симметричный метрический тензор с компонентами $g^{ij} = \vec{e}^i \cdot \vec{e}^j$. Тогда

$$\left(g_{ij}\right)\left(g^{jk}\right) = \left(g_{ij} \cdot g^{jk}\right) = \delta^k_i;\quad \left(g^{ij}\right) = \left(g_{ij}\right)^{-1};\quad \vec{e}^i = g^{ij}\vec{e}_j;\quad \vec{e}_i = g_{ij}\vec{e}^j. \qquad (П6.3)$$

С учетом (П6.2) и (П6.3)

$$\left(g^{ij}\right)_{ДСК} = \left(g_{ij}\right)_{ДСК} = \delta_{ij}. \qquad (П6.4)$$

Для удобства, в частности, чтобы метрика пространства не присутствовала в физических уравнениях, вводится локальный ортонормированный „физический” (местный) базис $\vec{b}_i$, т.е. такой, чтобы все три $|\vec{b}_i| = 1$. Этого можно достичь, если взять $\vec{b}_i$ в следующем виде (под радикалом здесь не суммировать):

$$\vec{b}_i = \vec{e}_i / \sqrt{g_{ii}} = \sqrt{g^{ii}}\,\vec{e}_i. \qquad (П6.5)$$

Из (П6.2), (П6.4) и (П6.5) следует, что в ДСК основной, взаимный и „физический” базисы совпадают, чего нельзя сказать о других, где базисах обычно различные.

Примечание П6.1. Величина $\sqrt{g_{ii}} = |\vec{e}_i|$, т.е. является модулем соответствующего базисного вектора. Поэтому еще один вариант определения базисных векторов: $\vec{e}_i = \sqrt{g_{ii}}\vec{b}_i$.

Любой вектор $\vec{F}$ в основном, взаимном и „физическом” базисах имеет компоненты $F^i, F_i, \breve{F}_i$ соответственно. Он выражается как

$$\vec{F} = F^i\vec{e}_i = F_i\vec{e}^{\,i} = \breve{F}_i\vec{b}_i. \quad (П6.6)$$

Из (П6.6) с учетом преобразований (П6.3) и (П6.5)

$$F_j = F^i g_{ij}; \quad F^j = F_i g^{ij}; \quad \breve{F}_j = F^j\sqrt{g_{jj}}. \quad (П6.7)$$

Поэтому и координатный вектор $\vec{r}$ точки *M*, проведенный к ней из начала координат, можно записать как

$$\vec{r} = a^i\,\vec{e}_i = a_i\,\vec{e}^{\,i} = \breve{a}_i\,\vec{b}_i. \quad (П6.8)$$

Произвольный тензор второго ранга $\vec{\sigma}$ в основном, взаимном и „физическом” базисах определяется как:

$$\vec{\sigma} = \sigma^{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j = \sigma_{ij}\vec{e}^{\,i}\vec{e}^{\,j} = \breve{\sigma}_{ij}\vec{b}_i\vec{b}_j, \quad (П6.9)$$

где σ_{ij}, σ^{ij} – компоненты тензора $\vec{\sigma}$ (строго говоря, компоненты $\breve{\sigma}_{ij}$ могут не создавать тензор, поскольку могут не подчиняться правилам перерасчета тензора при вращении системы координат. Это характерно для координатных систем, в которых не все $\sqrt{g_{ii}} = 1$, т.е. к ДСК не относится). Из (П6.9) с учетом преобразований (П6.3) и (П6.5) получим (под радикалом здесь не суммировать):

$$\sigma^{ij} = \sigma_{mn}g^{im}g^{jn}; \quad \sigma_{ij} = \sigma^{mn}g_{im}g_{jn}; \quad \breve{\sigma}_{ij} = \sigma^{ij}\sqrt{g_{ii}/g^{jj}} = \sigma_{mn}g^{im}g^{jn}\sqrt{g_{ii}/g^{jj}}. \quad (П6.10)$$

По определению, квадрат линейного элемента $ds^2 = d\vec{a}\cdot d\vec{a} = da^i\vec{e}_i \cdot da_j\vec{e}^{\,j} = g_{ij}da^i da^j = g^{ij}da_i da_j$. Еще одна характеристика:

$$\sqrt{g} = \sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}} = \sqrt{\det|g_{ij}|} = \vec{e}_1\cdot(\vec{e}_2\times\vec{e}_3) = \vec{e}_2\cdot(\vec{e}_3\times\vec{e}_1) = \vec{e}_3\cdot(\vec{e}_1\times\vec{e}_2). \quad (П6.11)$$

В частности, для ДСК $\det|g_{ij}| = 1$.

П6.2.2 Тензор деформаций Грина-Лагранжа

Обозначим начальную конфигурацию тела как C_0 с координатным вектором $\vec{r}^{\,(0)}$ к точке $P_{(0)}$, а текущую – C с координатным вектором $\vec{r}$ к точке P (см. рис.П6.1). В соответствии с (П6.1) в начальном состоянии:

$$\vec{e}_i = \frac{\partial\vec{r}^{\,(0)}}{\partial a^i}; \quad \vec{e}^{\,j} = \frac{\partial\vec{r}^{\,(0)}}{\partial a_j}; \quad d\vec{r}^{\,(0)} = da^i\vec{e}_i = da_j\,\vec{e}^{\,j}. \quad (П6.12)$$

В текущем состоянии введем локальный „вмороженный” сдеформированный базис

$$\vec{E}_i = \frac{\partial\vec{r}}{\partial a^i}; \quad \vec{E}^j = \frac{\partial\vec{r}}{\partial a_j} = C^{ji}\vec{E}_i; \quad d\vec{r} = da^i\,\vec{E}_i = da_j\,\vec{E}^j \quad (П6.13)$$

(о C^{ji} – ниже). Тогда квадраты длины линейного элемента, который связывает две бесконечно близкие материальные точки, до и после деформирования, соответственно:

$$(d\vec{r}^{\,(0)})^2 = d\vec{r}^{\,(0)}\cdot d\vec{r}^{\,(0)} = da^i\vec{e}_i\cdot da_j\vec{e}^{\,j} = da^i da_j\delta_i^j = da^i da_i = da^i g_{ij}da^j = g_{ij}da^i da^j; \quad (П6.14)$$

$$(d\vec{r})^2 = d\vec{r}\cdot d\vec{r} = da^i\vec{E}_i\cdot da_j\vec{E}^j = E_i^j da^i da_j = C_{ij}da^i da^j = C^{ij}da_i da_j. \quad (П6.15)$$

По определению, выражение

$$(d\vec{r})^2 - (d\vec{r}^{\,(0)})^2 \equiv 2\in_{ij}\,da^i da^j \quad (П6.16)$$

является мерой деформации в точке тела относительно *начальной* конфигурации, где $\in_{ij}$ – компоненты тензора деформаций (деформацию можно рассматривать и относительно любой другой конфигурации, но для **TL**-формулировки нужна деформация именно относительно начальной конфигурации).

Если во всем теле $(d\vec{r})^2 - (d\vec{r}^{(0)})^2 = 0$, то движение тела – *абсолютно жесткое*. Иначе тело находится в *сдеформированном состоянии*.

Подставим (П6.14) и (П6.15) в (П6.16):

$$2\in_{ij} da^i da^j = C_{ij} da^i da^j - g_{ij} da^i da^j = (C_{ij} - g_{ij}) da^i da^j . \qquad (П6.17)$$

Из (П6.17) следует, что *текущие* компоненты симметричного тензора деформации Грина–Лагранжа (относительно *начальной* конфигурации):

$$\in_{ij} = 0.5(C_{ij} - g_{ij}), \qquad (П6.18\text{-а})$$

или через компоненты вектора перемещений:

$$\in_{ij} = 0.5(\nabla_j U_i + \nabla_i U_j + \nabla_i U_k \nabla_j U^k); \quad i,j,k = 1,2,3 . \qquad (П6.19)$$

где обозначено

$$\nabla_i U_k = \frac{\partial U_k}{\partial a^i} - U_m \Gamma^m_{ik}; \quad \nabla_j U^k = \frac{\partial U^k}{\partial a^j} + U^m \Gamma^k_{jm}; \qquad (П6.20)$$

Γ^m_{ij} – символы Кристоффеля второго рода, которые симметричны по нижним индексам и являются компонентами разложения $\partial \vec{e}_j / \partial a^i$ по исходному базису $\vec{e}_m$; выражаются формулой

$$\Gamma^j_{mi} = \Gamma^j_{im} = \frac{1}{2} g^{jn} \left(\frac{\partial g_{mn}}{\partial a^i} + \frac{\partial g_{in}}{\partial a^m} - \frac{\partial g_{mi}}{\partial a^n} \right). \qquad (П6.21)$$

Первый вектор из (П6.13)

$$\vec{E}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial a^i} = \frac{\partial x^j}{\partial a^i} \vec{e}_j = \frac{\partial(\vec{a} + \vec{U})}{\partial a^i} = \vec{e}_i + \frac{\partial \vec{U}}{\partial a^i} = \frac{\partial(a^j + U^j)}{\partial a^i} \vec{e}_j = (\delta^j_i + \nabla_i U^j) \vec{e}_j = X^j_i \vec{e}_j , \qquad (П6.22)$$

называется *градиентом деформаций* и определяет сдеформированные координатные оси локальной конвекционной („вмороженной”) системы координат *с базисом* $\vec{E}_i$.

Компоненты тензора меры деформации Коши-Грина

$$C_{ij} = X^k_i X^k_j = \frac{\partial x^k}{\partial a^i} \frac{\partial x^k}{\partial a^j}, \text{ где } X^k_i = \frac{\partial x^k}{\partial a^i} = (\delta^k_i + \nabla_i U^k), \qquad (П6.23)$$

$x^i = x^i(a^j, t)$ – текущие координаты точки; $x^i(a^j, 0) = a^i$ – начальные координаты точки; $i, j = 1,2,3$.

Представим (П6.18-а) в матричном виде:

$$[\in] = 0.5([C] - [g]), \qquad (П6.18\text{-б})$$

где матрицы

$$[\in] = \begin{bmatrix} \in_{11}; & \in_{12}; & \in_{13} \\ & \in_{22}; & \in_{23} \\ symm & & \in_{33} \end{bmatrix}; \quad [g] = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}; \qquad (П6.24)$$

$$[C] = [X]^T [X]. \qquad (П6.25)$$

Матрица $[X]$ отображает градиенты деформаций X^k_i (см. формулу (П6.23)), поэтому имеет такое наполнение (обозначено $h_{ij} = \partial U_i / \partial a^j$):

$$[X] = \begin{bmatrix} X_{11}; & X_{12}; & X_{13} \\ X_{21}; & X_{22}; & X_{23} \\ X_{31}; & X_{32}; & X_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + h_{11}; & h_{12}; & h_{13} \\ h_{21}; & 1 + h_{22}; & h_{23} \\ h_{31}; & h_{32}; & 1 + h_{33} \end{bmatrix}. \qquad (П6.26)$$

Тогда матрица

$$[C]=\begin{bmatrix} c_{11}; & c_{21}; & c_{31} \\ & c_{22}; & c_{32} \\ symm & & c_{33} \end{bmatrix}=[X]^T[X]=\begin{bmatrix} X_{11}; & X_{21}; & X_{31} \\ X_{12}; & X_{22}; & X_{32} \\ X_{13}; & X_{23}; & X_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_{11}; & X_{12}; & X_{13} \\ X_{21}; & X_{22}; & X_{23} \\ X_{31}; & X_{32}; & X_{33} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} (X_{11})^2+(X_{21})^2+(X_{31})^2; & X_{11}X_{12}+X_{21}X_{22}+X_{31}X_{32}; & X_{11}X_{13}+X_{21}X_{23}+X_{31}X_{33} \\ & (X_{12})^2+(X_{22})^2+(X_{32})^2; & X_{12}X_{13}+X_{22}X_{23}+X_{32}X_{33} \\ symm & & (X_{13})^2+(X_{23})^2+(X_{33})^2 \end{bmatrix}. \qquad (П6.27)$$

Примечание П6.2. Для вычисления компонент $\in_{ij}$ чаще используют именно формулы (П6.18), которые в случае известных компонент C_{ij} имеют значительно меньше действий, чем формулы (П6.19).

П6.2.3 О мерах тензоров напряжений

При наличии геометрической нелинейности могут использоваться несколько мер (разновидностей) тензоров напряжений.

По определению Эйлера (1707... 1783 гг) и Коши (1789 ... 1857 гг), напряжение – это внутренняя сила, действующая на элементарной площадке и отнесенная к ее площади при условии стремления этой площади к нулю.

Результирующий вектор напряжений на элементарной площадке dS_1, которая перпендикулярна $\vec{e}_1$, обозначим как $\vec{\sigma}^1 dS_1$, где $\vec{\sigma}^1$ – вектор напряжений на единице площади dS_1. Аналогично вводятся векторы напряжений $\vec{\sigma}^2$ и $\vec{\sigma}^3$. Компоненты векторов $\vec{\sigma}^m$ в основном базисе $\vec{e}_n$, а именно σ^{mn}, называются контравариантными компонентами симметричного *тензора напряжений Эйлера-Коши* (*Эйлера*, *Коши*):

$$\vec{\sigma}^m=\sigma^{mn}\vec{e}_n. \qquad (П6.28)$$

То есть этот тензор содержит такие напряжения: нормальные к элементарным площадкам σ^{mn}; $m=n=1,2,3$, и касательные к ним $\sigma^{mn}=\sigma^{nm}$; $m\neq n$; $m,n=1,2,3$. Первый индекс указывает, перпендикулярно к какой оси $\vec{e}_m$ расположена элементарная площадка, а второй – направление напряжения, т.е. вдоль какой оси $\vec{e}_n$ направлена компонента тензора напряжений. Подчеркнем, что не всегда направления определяет исходный *глобальный* базис $\vec{e}_m$. Есть случаи, когда направление компонент напряжений определяет исходный *локальный* базис, например, в пластинах и оболочках исходный вектор $\vec{e}_3$ обычно перпендикулярен центральной поверхности; в стрежнях – параллелен продольной оси.

В каждой точке наклонной площадки dS, внешняя нормаль к которой $\vec{\nu}$ имеет компоненты ν_m, результирующий вектор напряжений

$$\vec{\sigma}=\vec{\sigma}^m\nu_m=\sigma^{mn}\vec{e}_n\nu_m. \qquad (П6.29)$$

Компоненты векторов $\vec{\sigma}^m$ в *сдеформированном* базисе $\vec{E}_n$, а именно $\underset{\sim}{\sigma}^{mn}$, называются (контравариантными) компонентами симметричного *второго тензора напряжений Пиола* (*1836*) *–Кирхгофа* (*1850*):

$$\vec{\underset{\sim}{\sigma}}^m=\underset{\sim}{\sigma}^{mn}\vec{E}_n. \qquad (П6.30)$$

В каждой точке наклонной площадки dS, внешняя нормаль к которой $\vec{\nu}$ имеет компоненты ν_m, результирующий вектор напряжений

$$\vec{\underset{\sim}{\sigma}}=\vec{\underset{\sim}{\sigma}}^m\nu_m=\underset{\sim}{\sigma}^{mn}\vec{E}_n\nu_m. \qquad (П6.31)$$

Но, поскольку при деформировании базис $\vec{E}_n$ обычно не является ортогональным, то $\vec{\underset{\sim}{\sigma}}$ с его компонентами применяют лишь как некоторую расчетную (вспомогательную) дефиницию. Поскольку в разных точках сдеформированного тела направления локального сдеформированного базиса $\vec{E}_n$ относительно осей $\vec{e}_n$ будут разными, то результаты расчетов есть смысл представлять относительно осей $\vec{e}_n$, т.е. относительно известных начальных направлений. Именно поэтому перед представлением результатов расчетов, а именно напряжений, нужно перейти к тензору Эйлера-Коши.

Но это еще не все. Поскольку, как об этом говорилось в Разделе П6.1, на момент вычисления компонент САУ текущая геометрия тела не определена, то приходится использовать опорную конфигурацию. В случае **TL-**формулировки, которую мы рассматриваем, опорной конфигурацией является *исходная* конфигурация.

Симметричный *второй тензор напряжений Пиола-Кирхгофа* $(\underset{\sim}{\sigma}^{mn})_0$ на поверхности начальной конфигурации $(dS)_0$ создает результирующий вектор напряжений

$$(\vec{\underset{\sim}{\sigma}})_0 = (\underset{\sim}{\sigma}^{mn})_0 \vec{E}_n (\nu_m)_0, \tag{П6.32}$$

причем рассматривается именно та поверхность $(dS)_0$, которая превратилась при деформировании в поверхность dS.

Компоненты векторов $(\vec{T}^m)_0$ в *основном* базисе $\vec{e}_n$, а именно $(T^{mn})_0$, называются (контравариантными) компонентами несимметричного *первого тензора напряжений Пиола-Кирхгофа*:

$$(\vec{T}^m)_0 = (T^{mn})_0 \vec{e}_n. \tag{П6.33}$$

Его определяют путем проектирования компонент тензора Эйлера-Коши к *начальной* геометрии с *полным* учетом изменений элементарной площадки: как ее размера, так и ориентации. Поэтому в каждой точке поверхности $(dS)_0$ он создает результирующий вектор напряжений

$$(\vec{T})_0 = (T^{mn})_0 \vec{e}_n (\nu_m)_0. \tag{П6.34}$$

В дальнейшем 1-й $(T^{mn})_0$ и 2-й $(\underset{\sim}{\sigma}^{mn})_0$ тензоры напряжений Пиола-Кирхгофа, для краткости, будем называть аббревиатурами ТН1ПК и ТН2ПК соответственно.

Есть и другие тензоры напряжений, но для **TL-**формулировки они не применяются, поэтому здесь не рассматриваются.

Между всеми видами тензоров напряжений существуют однозначные преобразования.

Примечание П6.3. В литературе довольно часто индексы, которые обозначают „привязку” величины к *этапу нагружения*, указывают *левым верхним* индексом, а к *базовой* конфигурации – *левым нижним* индексом. Например, ${}^{n+1}_{0}A^{im}\ {}^{n+1}_{0}\nu_m$ – компоненты некоторого вектора, которые определены для $(n+1)$-го этапа на основе исходной конфигурации. Но, когда таких меток много, то с непривычки формулы читаются тяжело. Именно поэтому в дальнейшем тексте мы их применять не будем.

П6.2.4 Соотношение между компонентами первого и второго тензоров напряжений Пиола-Кирхгофа в начальной конфигурации

Соотношение между компонентами $(\vec{T})_0$ и $(\vec{\underset{\sim}{\sigma}})_0$ получим из условия $(\vec{T})_0 = (\vec{\underset{\sim}{\sigma}})_0$. С учетом (П6.32) и (П6.34):

$$(T^{mn})_0 \vec{e}_n (\nu_m)_0 = (\underset{\sim}{\sigma}^{mn})_0 \vec{E}_n (\nu_m)_0. \tag{П6.35}$$

Согласно (П6.22) $\vec{E}_n = \partial\vec{x} / \partial a^n = \nabla_n x^i \vec{e}_i = X^i_n \vec{e}_i$. Поэтому из (П6.35)

$$(T^{mn})_0 \vec{e}_n (\nu_m)_0 = (\underset{\sim}{\sigma}^{mn})_0 X^i_n \vec{e}_i (\nu_m)_0. \tag{П6.36}$$

Заменим в левой части последней формулы „слепой” индекс n на индекс i:

$$(T^{mi})_0 \vec{e}_i (\nu_m)_0 = (\underset{\sim}{\sigma}^{mn})_0 X^i_n \vec{e}_i (\nu_m)_0 \quad \text{или} \quad \left((T^{mi})_0 - (\underset{\sim}{\sigma}^{mn})_0 X^i_n\right) \vec{e}_i (\nu_m)_0 = \vec{0}. \tag{П6.37}$$

Это равенство справедливо при любых $\vec{e}_i(\nu_m)_0$. Поэтому окончательно получим, что соотношение между компонентами тензоров $(\vec{T})_0$ и $(\underset{\sim}{\vec{\sigma}})_0$:

$$(T^{mi})_0 = (\underset{\sim}{\sigma}^{mn})_0 X_n^i . \tag{П6.38-а}$$

Для получения соотношения между компонентами тензоров $(\vec{T})_0$ и $(\underset{\sim}{\vec{\sigma}})_0$ с компонентами тензора Эйлера-Коши $\vec{\sigma}$ необходимо сначала рассмотреть некоторые другие вопросы.

П6.2.5 Символы Леви-Чивита

Учтем, что результатом векторного произведения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является новый вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, который перпендикулярен до обоих векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и имеет модуль $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha$, где α является углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Поэтому $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$. Еще известно, что $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$. Поэтому $\vec{a}_m \times \vec{a}_n = (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 - \vec{a}_2 \times \vec{a}_1) + (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3 - \vec{a}_3 \times \vec{a}_2) + (\vec{a}_3 \times \vec{a}_1 - \vec{a}_1 \times \vec{a}_3)$ при $m, n = 1, 2, 3$. Кроме того, для трех ортогональных векторов основного базиса: $\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = \vec{e}_2 \cdot (\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) = \vec{e}_3 \cdot (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) = \sqrt{g}$; $\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_3 \times \vec{e}_2) = \vec{e}_2 \cdot (\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) = \vec{e}_3 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_1) = -\sqrt{g}$; $\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) =$ $= \vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) = \vec{e}_2 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_1) = \vec{e}_2 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = \vec{e}_3 \cdot (\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) = \vec{e}_3 \cdot (\vec{e}_3 \times \vec{e}_2) = 0$.

Эти и аналогичные факты обычно описывают с помощью символов Леви-Чивита $E^{ijk} = E_{ijk}$ (тензор эти компоненты не создают):

$$E_{ijk} = \begin{cases} 1; & \text{прямая круговая перестановка значений индексов;} \\ -1; & \text{обратная круговая перестановка значений индексов;} \\ 0; & \text{наличие двух или трех одинаковых индексов.} \end{cases} \tag{П6.39}$$

Тогда вместо многих выражений имеем лишь одно:

$$\vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) = E_{ijk}\sqrt{g} = Э_{ijk} . \tag{П6.40}$$

Если базис декартовый, то $\sqrt{g} = 1$ и $Э_{ijk} = E_{ijk}$.

В общем случае, если некоторая матрица A_n^k является матрицей перехода от одной координатной системы к другой, то

$$E_{qmn} \det\|A\| = E_{ijk} A_q^i A_m^j A_n^k . \tag{П6.41}$$

В качестве компонент матрицы A_n^k можно взять, согласно (П6.22), компоненты $X_n^k = \partial x^k / \partial a^n$. Тогда в соответствии с (П6.41)

$$\mathrm{E}_{qmn} \det\left|\frac{\partial x^k}{\partial a^n}\right| = \mathrm{E}_{qmn} \det|X_n^k| = \mathrm{E}_{qmn}\sqrt{G} = \mathrm{E}_{qmn} J = \mathrm{E}_{ijk} \frac{\partial x^i}{\partial a^q} \frac{\partial x^j}{\partial a^m} \frac{\partial x^k}{\partial a^n} . \tag{П6.42}$$

Здесь обозначено

$$\sqrt{G} = \det|X_n^k| = \sqrt{\det C_{ij}} = J . \tag{П6.43}$$

П6.2.6 Изменение элементарного объема при деформировании

Сначала отметим, что, согласно (П6.13) и, соответственно, из (П6.14) и (П6.22):

$$d\vec{r}^{(0)} = \vec{e}_i da^i = \vec{e}_1 da^1 + \vec{e}_2 da^2 + \vec{e}_3 da^3 , \tag{П6.44}$$

$$d\vec{r} = \vec{E}_i da^i = \vec{E}_1 da^1 + \vec{E}_2 da^2 + \vec{E}_3 da^3 , \tag{П6.45}$$

т.е. отдельные векторы $\vec{e}_i da^i$ определяют длины сторон элементарного параллелепипеда до его деформирования, а $\vec{E}_i da^i$ – после его деформирования. Кроме того, для трех ортогональных векторов основного и совместного базиса:

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \vec{e}^k \sqrt{g} ; \quad i \neq j \neq k \neq i = 1, 2, 3 . \tag{П6.46}$$

В соответствии с (П6.46) и соотношением $\vec{e}_i \cdot \vec{e}^j = \delta_i^j$ (см. Раздел П6.2.1) начальная величина элементарного объема (см. также (П6.11)):

$$(d\Omega)_0 = (\vec{e}_1 da^1)\cdot\left((\vec{e}_2 da^2)\times(\vec{e}_3 da^3)\right) = \vec{e}_1\cdot(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)da^1 da^2 da^3 = \sqrt{g}da^1 da^2 da^3 . \qquad (П6.47)$$

После деформирования элементарного объема, с учетом Раздела П6.2.4, формулы (П6.46) и $\vec{e}_i \cdot \vec{e}^j = \delta_i^j$:

$$\begin{aligned}
d\Omega &= (\vec{E}_1 da^1)\cdot\left((\vec{E}_2 da^2)\times(\vec{E}_3 da^3)\right) = \vec{E}_1\cdot(\vec{E}_2\times\vec{E}_3)da^1 da^2 da^3 = \\
&= X_1^m \vec{e}_m \cdot\left(X_2^n \vec{e}_n \times X_3^k \vec{e}_k\right)da^1 da^2 da^3 = X_1^m \vec{e}_m \cdot\Big[\left(X_2^1 X_3^2 - X_2^2 X_3^1\right)(\vec{e}_1\times\vec{e}_2) + \\
&+\left(X_2^2 X_3^3 - X_2^3 X_3^2\right)(\vec{e}_2\times\vec{e}_3) + \left(X_2^1 X_3^3 - X_2^3 X_3^1\right)(\vec{e}_3\times\vec{e}_1)\Big]da^1 da^2 da^3 = \\
&= X_1^m \vec{e}_m \cdot\Big[\left(X_2^1 X_3^2 - X_2^2 X_3^1\right)\sqrt{g}\vec{e}^3 + \left(X_2^2 X_3^3 - X_2^3 X_3^2\right)\sqrt{g}\vec{e}^1 + \\
&+\left(X_2^1 X_3^3 - X_2^3 X_3^1\right)\sqrt{g}\vec{e}^2\Big]da^1 da^2 da^3 = \\
&=\Big[X_1^3 \vec{e}_3 \cdot\left(X_2^1 X_3^2 - X_2^2 X_3^1\right)\vec{e}^3 + X_1^1 \vec{e}_1 \cdot\left(X_2^2 X_3^3 - X_2^3 X_3^2\right)\vec{e}^1 + \\
&+X_1^2 \vec{e}_2 \cdot\left(X_2^1 X_3^3 - X_2^3 X_3^1\right)\vec{e}^2\Big]\sqrt{g}da^1 da^2 da^3 = \\
&=\Big[X_1^3\left(X_2^1 X_3^2 - X_2^2 X_3^1\right) + X_1^1\left(X_2^2 X_3^3 - X_2^3 X_3^2\right) + \\
&+X_1^2\left(X_2^1 X_3^3 - X_2^3 X_3^1\right)\Big]\sqrt{g}da^1 da^2 da^3 = \det|X_n^m|\sqrt{g}da^1 da^2 da^3 . \qquad (П6.48)
\end{aligned}$$

Учтено, что выражение в квадратных скобках является выражением для детерминанта матрицы $[X]$, собранной из компонент тензора X_n^m.

Поэтому, с учетом (П6.43) и (П6.47)

$$d\Omega = \sqrt{G}\sqrt{g}da^1 da^2 da^3 = \sqrt{G}(d\Omega)_0 = J\cdot(d\Omega)_0 . \qquad (П6.49)$$

Итак, величина $\sqrt{G} = J$ определяет масштаб в изменении элементарного объема.

П6.2.7 Следствие из закона сохранения массы тела

В соответствии с законом сохранения массы, масса m объема при его деформировании является неизменной, т.е. для любого объема

$$m = \int_{\Omega} \overline{\rho}(\vec{x},t)d\Omega = \int_{\Omega_0} \overline{\rho}(\vec{a},t_0)(d\Omega)_0 = m_0 = const , \qquad (П6.50)$$

где $\overline{\rho}$ – плотность материала. Обозначим $\overline{\rho}_0 = \overline{\rho}(\vec{a},t_0)$, $\overline{\rho} = \overline{\rho}(\vec{x},t)$. Поскольку в (П6.50) объем является произвольным, то и для элементарного объема:

$$dm = \overline{\rho}d\Omega = \overline{\rho}_0(d\Omega)_0 = (dm)_0 = const . \qquad (П6.51)$$

Учитывая (П6.49), получим, что

$$\overline{\rho}\sqrt{G} = \overline{\rho}J = \overline{\rho}_0 , \quad \text{или} \quad \overline{\rho}_0 / \overline{\rho} = \sqrt{G} = J . \qquad (П6.52)$$

Итак, величина $\sqrt{G} = J$ еще определяет пропорцию в изменении плотности материала при условии сохранения массы тела.

П6.2.8 Формула Нансона

Эта формула связывает площади и ориентации элементарных поверхностей: начальной $(dS)_0$ и сдеформированной dS (на рис.П6.2 поверхности ABC по левую сторону и по праву сторону соответственно).

Будем считать, что система координат с ортами $\vec{e}_i$; $i = 1,2,3$ является декартовою.

Сначала рассмотрим элементарную площадку ABC с площадью $(dS)_0$ (см. рис.П6.2, по левую сторону). Рассмотрим два вектора, которые принадлежат этой площадке и выходят из одного угла, например, из A :

$$\overrightarrow{AB} = (d\vec{a})_{AB} = \vec{e}_1(da^1)_{AB} + \vec{e}_2(da^2)_{AB} + \vec{e}_3(da^3)_{AB} = \vec{e}_j(da^j)_{AB} ;$$

$$\overrightarrow{AC} = (d\vec{a})_{AC} = \vec{e}_1(da^1)_{AC} + \vec{e}_2(da^2)_{AC} + \vec{e}_3(da^3)_{AC} = \vec{e}_k(da^k)_{AC} ; \quad j,k = 1,2,3 . \qquad (П6.53)$$

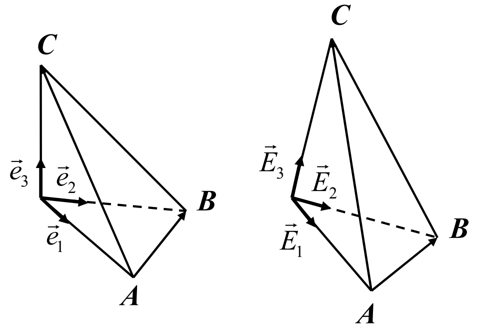

Рис.П6.2. К выводу формулы Нансона

Известно, что векторное произведение таких векторов определяет удвоенную площадь площадки ABC, а также направление нормали к ней:

$$(d\vec{a})_{AB} \times (d\vec{a})_{AC} = 2(\vec{\nu})_0 (dS)_0 . \qquad (П6.54)$$

Вектор $(\vec{\nu})_0$ внешней нормали к поверхности площадки ABC в точке A определим как

$$(\vec{\nu})_0 = \vec{e}^1(\nu_1)_0 + \vec{e}^2(\nu_2)_0 + \vec{e}^3(\nu_3)_0 = \vec{e}^n(\nu_n)_0 ; \quad n = 1,2,3 . \qquad (П6.55)$$

Если (П6.55) скалярным образом умножить на $\vec{e}_i$, то, с учетом $\vec{e}_i \cdot \vec{e}^n = \vec{e}^n \cdot \vec{e}_i = \delta_i^n$, получим:

$$\vec{e}_i \cdot (\vec{\nu})_0 = \vec{e}_i \cdot \vec{e}^n (\nu_n)_0 = (\nu_i)_0 . \qquad (П6.56)$$

Учитывая изложенное в Разделе П6.2.5 и (П6.53), запишем, что

$$\vec{e}_i \cdot \left((d\vec{a})_{AB} \times (d\vec{a})_{AC} \right) = \vec{e}_i \cdot \left(\left(\vec{e}_1(da^1)_{AB} + \vec{e}_2(da^2)_{AB} + \vec{e}_3(da^3)_{AB} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\vec{e}_1(da^1)_{AC} + \vec{e}_2(da^2)_{AC} + \vec{e}_3(da^3)_{AC} \right) \right) = \vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k)(da^j)_{AB}(da^k)_{AC} = E_{ijk}(da^j)_{AB}(da^k)_{AC} . \qquad (П6.57)$$

Итак, согласно (П6.54), (П6.56) и (П6.57):

$$\mathrm{E}_{ijk}(da^j)_{AB}(da^k)_{AC} = \vec{e}_i \cdot 2(\vec{\nu})_0 (dS)_0 = 2(\nu_i)_0 (dS)_0 = 2(dS_i)_0 \qquad (П6.58)$$

или, с учетом (П6.40) при $E_{123} = E_{231} = E_{312} = 1$:

$$2(\nu_1)_0 (dS)_0 = (da^2)_{AB}(da^3)_{AC} ; \quad 2(\nu_2)_0 (dS)_0 = (da^3)_{AB}(da^1)_{AC} ;$$

$$2(\nu_3)_0 (dS)_0 = (da^1)_{AB}(da^2)_{AC} . \qquad (П6.59)$$

Также рассмотрим сдеформированную элементарную площадку ABC (см. рис.П6.2, по правую сторону) с площадью dS. После деформирования векторы $(d\vec{a})_{AB}$ и $(d\vec{a})_{AC}$ превратятся на векторы $(d\vec{x})_{AB}$ и $(d\vec{x})_{AC}$. Можно записать аналогичные (П6.54) ... (П6.59) выражения, в частности, аналогично (П6.54), (П6.55), (П6.58) и (П6.59):

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (d\vec{x})_{AB} \times (d\vec{x})_{AC} = 2\vec{\nu} dS ; \qquad (П6.60)$$

$$\vec{\nu} = \vec{e}^1\nu_1 + \vec{e}^2\nu_2 + \vec{e}^3\nu_3 = \vec{e}^n\nu_n ; \quad n = 1,2,3 ; \qquad (П6.61)$$

$$E_{ijk}(dx^j)_{AB}(dx^k)_{AC} = \vec{e}_i \cdot 2\vec{\nu} dS = 2\nu_i dS = 2dS_i ; \qquad (П6.62)$$

$$2\nu_1 dS = (dx^2)_{AB}(dx^3)_{AC} ; \quad 2\nu_2 dS = (dx^3)_{AB}(dx^1)_{AC} ;$$

$$2\nu_3 dS = (dx^1)_{AB}(dx^2)_{AC} . \qquad (П6.63)$$

По определению, с учетом $\partial x^j / \partial a^n = X_n^j$:

$$(dx^j)_{AB} = \frac{\partial x^j}{\partial a^m}(da^m)_{AB} = X_m^j (da^m)_{AB} ; \quad (dx^k)_{AC} = \frac{\partial x^k}{\partial a^n}(da^n)_{AC} = X_n^k (da^n)_{AC} , \qquad (П6.64)$$

поэтому из (П6.62)

$$2\nu_i dS = 2dS_i = \vec{e}_i \cdot 2\vec{\nu} dS = \mathrm{E}_{ijk} X_m^j X_n^k (da^m)_{AB}(da^n)_{AC} . \qquad (П6.65)$$

Умножим это выражение на $\partial x^i / \partial a^q = X^i_q$:

$$2X^i_q \nu_i dS = 2X^i_q dS_i = \mathrm{E}_{ijk} X^i_q X^j_m X^k_n (da^m)_{AB} (da^n)_{AC} . \qquad (П6.66)$$

Из (П6.66) с учетом (П6.42), (П6.40) и (П6.58):

$$2X^i_q \nu_i dS = 2X^i_q dS_i = J \cdot \mathrm{E}_{qmn} (da^m)_{AB} (da^n)_{AC} = 2J \cdot (dS_q)_0 = 2J \cdot (\nu_q)_0 (dS)_0 . \qquad (П6.67)$$

Крайние выражения из (П6.67) создают формулу Нансона. А именно, после сокращения на двойку и очевидных замен индекса q на более привычный m:

$$X^i_m \nu_i dS = J \cdot (\nu_m)_0 (dS)_0 ; \quad i,m = 1,2,3 . \qquad (П6.68)$$

Еще одна форма записи формулы Нансона – матричная. С использованием матрицы $[X]$, введенной в (П6.26), вместо (П6.68) имеем формулу Нансона в матричной форме:

$$[X]^T \{\nu\} dS = J \cdot \{(\nu)_0\} (dS)_0 , \qquad (П6.69)$$

где обозначены векторы $\{\nu\} = \{\nu_1, \nu_2, \nu_3\}^T$ и $\{(\nu)_0\} = \{(\nu_1)_0, (\nu_2)_0, (\nu_3)_0\}^T$, которые определяют нормали к поверхностям dS и соответственно $(dS)_0$ относительно базиса $\vec{e}^{\,i}$.

П6.2.9 Соотношения между компонентами первого и второго тензоров напряжений Пиола-Кирхгофа с компонентами тензора Эйлера-Коши

Согласно формулам (П6.29), (П6.32) и (П6.35), на поверхностях dS и $(dS)_0$ тензоры $\vec{\sigma}$ и $(\vec{T})_0$ создают соответственно векторы внутренних усилий $d\vec{F} = \sigma^{mn} \vec{e}_n \nu_m dS$ и $(d\vec{F})_0 = (T^{mn})_0 \vec{e}_n (\nu_m)_0 (dS)_0$ с компонентами $dF^n = \sigma^{mn} \nu_m dS$ и $(dF^n)_0 = (T^{mn})_0 (\nu_m)_0 (dS)_0$.

Далее удобно использовать матричные обозначения. Введем матрицы с компонентами тензоров напряжений:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma^{11}; & \tau^{12}; & \tau^{13} \\ & \sigma^{22}; & \tau^{23} \\ symm & & \sigma^{33} \end{bmatrix}; \quad [T]_0 = \begin{bmatrix} (T^{11})_0; & (T^{12})_0; & (T^{13})_0 \\ (T^{21})_0; & (T^{22})_0; & (T^{23})_0 \\ (T^{31})_0; & (T^{32})_0; & (T^{33})_0 \end{bmatrix}. \qquad (П6.70)$$

Тогда выражения для $d\vec{F}$ и $(d\vec{F})_0$ будут иметь вид:

$$\{dF\} = \{dF^1, dF^2, dF^3\}^T = [\sigma]^T \{\nu\} dS ; \quad \{(dF)_0\} = \{(dF^1)_0, (dF^2)_0, (dF^3)_0\}^T = [T]_0^T \{(\nu)_0\} (dS)_0 . \qquad (П6.71)$$

Поскольку ТН1ПК получено путем проектирования тензора Эйлера-Коши на исходную конфигурацию, то приравниваем компоненты этих векторов:

$$[\sigma]^T \{\nu\} dS = [T]_0^T \{(\nu)_0\} (dS)_0 . \qquad (П6.72)$$

Исключим из (П6.72) $\{(\nu)_0\}(dS)_0$ с помощью формулы Нансона (П6.69):

$$J \cdot [\sigma]^T \{\nu\} dS = [T]_0^T [X]^T \{\nu\} dS . \qquad (П6.73)$$

Это равенство справедливо при любых $\{\nu\} dS$. Поэтому, после отбрасывания $\{\nu\} dS$ и транспонирования, получим соотношения между компонентами матриц $[\sigma]$ и $[T]_0$:

$$J \cdot [\sigma] = [X][T]_0 \quad \text{или} \quad [T]_0 = J \cdot [X]^{-1} [\sigma]. \qquad (П6.74\text{-а})$$

В матричной форме соотношение (П6.38-а) $(T^{mi})_0 = (\underset{\sim}{\sigma}^{mn})_0 X^i_n$ между компонентами тензоров $(\vec{T})_0$ и $(\underset{\sim}{\vec{\sigma}})_0$ будет иметь вид:

$$[T]_0 = \left[\underset{\sim}{\sigma}\right]_0 [X]^T \quad \text{или} \quad \left[\underset{\sim}{\sigma}\right]_0 = [T]_0 [X]^{-T} , \qquad (П6.38\text{-б})$$

где введена матрица ТН2ПК

$$\left[\underset{\sim}{\sigma}\right]_0 = \begin{bmatrix} (\underset{\sim}{\sigma}^{11})_0; & (\underset{\sim}{\tau}^{12})_0; & (\underset{\sim}{\tau}^{13})_0 \\ & (\underset{\sim}{\sigma}^{22})_0; & (\underset{\sim}{\tau}^{23})_0 \\ symm & & (\underset{\sim}{\sigma}^{33})_0 \end{bmatrix}. \qquad (П6.75)$$

Из (П6.74-а) и (П6.38-б) получим соотношение между матрицами $[\underset{\sim}{\sigma}]_0$, $[\sigma]$ и $[T]_0$:

$$J \cdot [\sigma] = [X][\underset{\sim}{\sigma}]_0[X]^T = [X][T]_0. \tag{П6.76-а}$$

Поскольку матрица $[\sigma]$ симметрична, то конгруэнтная ей матрица $\left[\underset{\sim}{\sigma}\right]_0$ тоже симметрична, т.е. ТН2ПК действительно является симметричным тензором.

В компонентной форме выражения (П6.76-а):

$$J \cdot \sigma^{mn} = X_j^n (\underset{\sim}{\sigma}^{ij})_0 X_i^m = X_j^m (T^{jn})_0. \tag{П6.76-б}$$

Еще один вариант записи первой части выражения (П6.76-а) – через векторы-столбцы $\{\sigma\}$ и $\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0$:

$$J\{\sigma\} = [V]\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0 \quad \text{или} \quad \{\underset{\sim}{\sigma}\}_0 = J[V]^{-1}\{\sigma\}, \tag{П6.77}$$

где матрица $[V]$ размером 6х6 состоит из комбинаций компонент матрицы $[C]$ (см. выражение (П6.27)).

П6.3 Принцип возможных перемещений в текущей конфигурации

П6.3.1 Законы движения и равновесия элементарного объема тела

Количество движения некоторого текущего (сдеформированного) объема Ω^*, каждая точка которого имеет скорость $\vec{V}$ и плотность материала $\bar{\rho}$, определяется как

$$\Im = \int_{\Omega^*} \vec{V} \bar{\rho} d\Omega. \tag{П6.78}$$

Уравнением количества движения (вторым законом Ньютона) называют уравнение

$$d\Im / dt = \vec{R}, \tag{П6.79}$$

где результирующая всех сил, действующих на объем

$$\vec{R} = \int_{\Omega^*} \vec{O} d\Omega + \int_{S^*} \vec{P} dS, \tag{П6.80}$$

$\vec{O} = O^j \vec{E}_j$ и $\vec{P} = P^j \vec{E}_j$ – соответственно плотность объемных (массовых) и поверхностных сил; а векторы $\vec{E}_j$, как и ранее, определяют сдеформированный базис.

С поверхностными силами связывают компоненты тензора напряжений, действующих в той же точке поверхности (естественные граничные условия):

$$\vec{P} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\nu}\Big|_{S^*}, \tag{П6.81}$$

где $\vec{\nu}$ – внешняя нормаль к точке поверхности тела. Отметим, что выражение $\vec{\sigma} \cdot \vec{\nu}$ означает свертку тензора с вектором, которая имеет результатом вектор.

Применим уравнение Остроградского-Гаусса, получим, что

$$\int_{S^*} \vec{\sigma} \cdot \vec{\nu} dS = \int_{\Omega^*} \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} d\Omega, \tag{П6.82}$$

где $\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} = div(\vec{\sigma})$ является дивергенцией тензора второго ранга $\vec{\sigma}$, причем вектор-оператор ковариантного дифференцирования $\vec{\nabla} = \vec{e}^{\,i} \nabla_i$.

Считаем, что все рассматриваемые физические величины в теле непрерывны, а также выполняется закон сохранения массы, т.е. $d(\bar{\rho} d\Omega)/dt = 0$. Тогда с использованием (П6.78) для левой части (П6.79) можно записать, что:

$$d\Im / dt = \int_{\Omega^*} \frac{d\vec{V}}{dt} \bar{\rho} d\Omega = \int_{\Omega^*} \dot{\vec{V}} \bar{\rho} d\Omega = \int_{\Omega^*} \ddot{\vec{U}} \bar{\rho} d\Omega, \tag{П6.83}$$

где $\dot{\vec{V}} = d\vec{V}/dt = d^2\vec{U}/dt^2 = \ddot{\vec{U}}$ – вектор ускорения. Теперь уравнение (П6.79):

$$\int_{\Omega^*} \bar{\rho} \ddot{\vec{U}} d\Omega = \int_{\Omega^*} \vec{O} d\Omega + \int_{\Omega^*} \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} d\Omega \tag{П6.84}$$

или в „собранном” виде:

$$\int_{\Omega^*} (\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}+\vec{O}-\overline{\rho}\ddot{\vec{U}})d\Omega = 0\,. \qquad (П6.85)$$

Поскольку выражение (П6.85) должно выполняться для любого объема $\Omega^* \in \Omega$, то выражение под интегралом должно равняться нулю (основная лемма физики сплошной среды), т.е. уравнение движения элементарного объема тела имеет вид:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}+\vec{O}=\overline{\rho}\ddot{\vec{U}}\,. \qquad (П6.86)$$

Если ускорение отсутствует или им можно пренебречь, то уравнение движения (П6.86) превращается в уравнение равновесия элементарного объема тела:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}+\vec{O}=0\,. \qquad (П6.87)$$

П6.3.2 Принцип (начало) возможных перемещений (в текущей конфигурации)

Возьмем уравнение равновесия (П6.87) и скалярным образом умножим его на вектор вариации перемещений $\delta\vec{U}$:

$$(\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}+\vec{O})\cdot\delta\vec{U}=0\,. \qquad (П6.88)$$

После интегрирования во всем объеме тела:

$$\int_{\Omega}(\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}+\vec{O})\cdot\delta\vec{U}d\Omega=0\,. \qquad (П6.89)$$

Так как $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\sigma}\cdot\delta\vec{U})=(\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma})\cdot\delta\vec{U}+\vec{\sigma}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\delta\vec{U})$, то

$$(\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma})\cdot\delta\vec{U}=\vec{\nabla}\cdot(\vec{\sigma}\cdot\delta\vec{U})-\vec{\sigma}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\delta\vec{U})\,. \qquad (П6.90)$$

После подстановки (П6.90) в (П6.89) получаем выражение:

$$\int_{\Omega}\vec{\nabla}\cdot(\vec{\sigma}\cdot\delta\vec{U})d\Omega-\int_{\Omega}\vec{\sigma}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\delta\vec{U})d\Omega+\int_{\Omega}\vec{O}\cdot\delta\vec{U}d\Omega=0\,. \qquad (П6.91)$$

Согласно теореме Остроградского-Гаусса первый (объемный) интеграл из (П6.91) равняется (точное соотношение) интегралу по поверхности этого объема:

$$\int_{\Omega}\vec{\nabla}\cdot(\vec{\sigma}\cdot\delta\vec{U})d\Omega=\int_{S}(\vec{\sigma}\cdot\vec{v})\cdot\delta\vec{U}dS\,. \qquad (П6.92\text{-а})$$

Согласно естественным граничным условиям (П6.81), а именно $\vec{P}=\vec{\sigma}\cdot\vec{v}\big|_{S_P}$, на поверхности S_P задана силовая нагрузка $\vec{P}$. Другая часть поверхности тела $S\setminus S_P$ свободна от нагрузок, поэтому $\vec{\sigma}\cdot\vec{v}\big|_{S\setminus S_P}=0$ и $\int_{S\setminus S_P}\vec{\sigma}\cdot\vec{v}\cdot\delta\vec{U}dS=0$. Поэтому соотношение (П6.92-а) можно изменить на

$$\int_{\Omega}\vec{\nabla}\cdot(\vec{\sigma}\cdot\delta\vec{U})d\Omega=\int_{S_P}\vec{P}\cdot\delta\vec{U}dS\,. \qquad (П6.92\text{-б})$$

С использованием (П6.92-б) выражение (П6.91) запишется в виде:

$$\int_{S_P}\vec{P}\cdot\delta\vec{U}dS-\int_{\Omega}\vec{\sigma}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\delta\vec{U})d\Omega+\int_{\Omega}\vec{O}\cdot\delta\vec{U}d\Omega=0\,. \qquad (П6.93)$$

Поскольку тензор напряжений $\vec{\sigma}$ симметричен, то можем записать тождество:

$$\vec{\sigma}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\delta\vec{U})=\vec{\sigma}\cdot 0.5(\vec{\nabla}\cdot\delta\vec{U}+\vec{\nabla}\cdot\delta\vec{U})=\vec{\sigma}\cdot\delta\Big[0.5(\vec{\nabla}\cdot\vec{U}+\vec{\nabla}\cdot\vec{U})\Big]=\vec{\sigma}\cdot\delta\vec{\varepsilon}\,, \qquad (П6.94)$$

где введено обозначение (через компоненты):

$$\varepsilon_{ij}=0.5(\nabla_i U_j+\nabla_j U_i)\,. \qquad (П6.95)$$

Окончательно вместо (П6.93) имеем (с заменой знаков на противоположные):

$$\delta\Psi=\int_{\Omega}\vec{\sigma}\cdot\delta\vec{\varepsilon}d\Omega-\int_{\Omega}\vec{O}\cdot\delta\vec{U}d\Omega-\int_{S_P}\vec{P}\cdot\delta\vec{U}dS=0\,. \qquad (П6.96)$$

Обозначим:

$$\delta\prod = \int_{\Omega} \vec{\sigma}\cdot\delta\vec{\varepsilon}\, d\Omega\,; \quad \delta\text{A} = \int_{\Omega} \vec{O}\cdot\delta\vec{U} d\Omega + \int_{S_P} \vec{P}\cdot\delta\vec{U} dS\,. \tag{П6.97}$$

Здесь $\delta\prod$ – работа напряжений на вариациях деформаций; δA – работа массовых и поверхностных усилий на вариациях перемещений (но не вариации работ).

Тогда (П6.96) можно записать как

$$\delta\Psi = \delta(\Pi - \text{A}) = \delta\Pi - \delta\text{A} = 0 \quad \text{или} \quad \delta\prod = \delta\text{A}\,. \tag{П6.98}$$

Выражения (П6.96) и (П6.98) отображают вариационный принцип возможных перемещений (Ж.Л. Лагранж, 1736 … 1813 гг). Выражение $\delta(\Pi - \text{A})$ определяет *полную виртуальную энергию* тела ($\Psi = \Pi - \text{A}$ является *полной энергией* тела). Заметим, что предполагается неизменность напряжений и усилий, когда варьируются перемещения.

П6.4 Принцип возможных перемещений при TL-формулировке

Рассмотрим вопрос: как изменится выражение (П6.96) принципа возможных перемещений при перерасчете от текущей конфигурации к начальной, которая применяется в TL-формулировке (см. Раздел П6.1). Напомним, что начальную конфигурацию характеризуют три вектора основного базиса $\vec{e}_i$, координатные линии a^i, элемент площади $(dS)_0$, элемент объема $(d\Omega)_0$.

П6.4.1 Выражение для работы напряжений на вариациях перемещений в TL-формулировке принципа возможных перемещений

Рассмотрим первый интеграл из функционала (П6.96), приведем его к начальной конфигурации.

Сначала получим выражение для вариации деформации.

Используем симметричные матрицы $[\in]$ и $[g]$, созданные из компонент тензоров $\in_{ij}$ и g_{ij} (метрического) соответственно – формулы (П6.24). Тогда уравнение (П6.29):

$$[\in] = 0.5\left([X]^T[X] - [g]\right), \tag{П6.99}$$

где матрица $[X]$ соответствует (П6.26).

Из этого выражения получим вариацию, учитывая, что $\delta[g] = 0$:

$$\delta[\in] = 0.5\left(\left(\delta[X]^T\right)[X] + [X]^T\left(\delta[X]\right)\right). \tag{П6.100}$$

Из компонент $\nabla_i(\delta x^m) = \nabla_i(a^m + \delta U^m)$ создадим матрицу

$$\delta[U] = \begin{bmatrix} \nabla_1(\delta x^1); & \nabla_2(\delta x^1); & \nabla_3(\delta x^1) \\ \nabla_1(\delta x^2); & \nabla_2(\delta x^2); & \nabla_3(\delta x^2) \\ \nabla_1(\delta x^3); & \nabla_2(\delta x^3); & \nabla_3(\delta x^3) \end{bmatrix}. \tag{П6.101}$$

Можно легко получить, что

$$\delta[X] = \left(\delta[U]\right)[X]\,; \quad \delta[X]^T = [X]^T\left(\delta[U]^T\right). \tag{П6.102}$$

Поэтому (П6.100) определится как

$$\delta[\in] = 0.5\left([X]^T\left(\delta[U]^T\right)[X] + [X]^T\left(\delta[U]\right)[X]\right) =$$

$$= [X]^T 0.5\left(\left(\delta[U]^T\right) + \left(\delta[U]\right)\right)[X] = [X]^T\left(\delta[\varepsilon]\right)[X]\,, \tag{П6.103}$$

где обозначена матрица

$$\delta[\varepsilon] = 0.5\left(\left(\delta[U]^T\right) + \left(\delta[U]\right)\right), \tag{П6.104}$$

содержащая вариации от компонент тензора (П6.95).

Теперь сначала запишем первый интеграл из функционала (П6.96) с применением (П6.76-а) и (П6.49) как $\int\limits_{\Omega}[\sigma]\delta[\varepsilon]d\Omega=\int\limits_{\Omega_0}\frac{1}{J}[X]\big[\underset{\sim}{\sigma}\big]_0[X]^T\delta[\varepsilon]J(d\Omega)_0$; потом, умножая подынтегральное выражение справа на выражение, которое ничто не изменяет, а именно на $[X][X]^{-1}=[I]$, и проводя замену $[X]^T\left(\delta[\varepsilon]\right)[X]=\delta[\in]$ согласно (П6.103), получим, что:

$$\int\limits_{\Omega}[\sigma]\delta[\varepsilon]d\Omega=\int\limits_{\Omega_0}\frac{1}{J}[X]\big[\underset{\sim}{\sigma}\big]_0[X]^T\delta[\varepsilon]J(d\Omega)_0=\int\limits_{\Omega_0}[X]\big[\underset{\sim}{\sigma}\big]_0\left([X]^T\delta[\varepsilon][X]\right)[X]^{-1}(d\Omega)_0=$$

$$=\int\limits_{\Omega_0}[X]\big[\underset{\sim}{\sigma}\big]_0\delta[\in][X]^{-1}(d\Omega)_0=\int\limits_{\Omega_0}\big[\underset{\sim}{\sigma}\big]_0\delta[\in](d\Omega)_0. \qquad \text{(П6.105-а)}$$

В компонентной форме:

$$\int\limits_{\Omega}\sigma^{ij}\delta\varepsilon_{ij}d\Omega=\int\limits_{\Omega_0}(\underset{\sim}{\sigma}^{ij})_0\delta\in_{ij}(d\Omega)_0. \qquad \text{(П6.105-б)}$$

Итак, получили запись первого интеграла из функционала (П6.96) в начальной конфигурации.

П6.4.2 Выражение для объемного интеграла в TL-формулировке принципа возможных перемещений

Получим выражение для второго интеграла из (П6.96), а именно для $\int\limits_{\Omega}\vec{O}\cdot\delta\vec{U}d\Omega$, после преобразования в начальную конфигурацию. Компоненты δU^i вектора вариации перемещений $\delta\vec{U}=\delta U^i\vec{e}_i$ преобразовывать нет необходимости, поскольку они определяются относительно исходной (недеформированной) конфигурации. Вектор $\vec{O}$ объемной нагрузки запишем в виде

$$\vec{O}=\overline{\rho}\vec{F}, \qquad \text{(П6.106)}$$

где $\overline{\rho}$ является удельной плотностью материала. Согласно следствию закона о сохранении массы тела (см. формулу (П6.50)) $\int\limits_{\Omega}\overline{\rho}d\Omega=\int\limits_{\Omega_0}(\overline{\rho})_0(d\Omega)_0$. Поэтому

$$\int\limits_{\Omega}\vec{O}\cdot\delta\vec{U}d\Omega=\int\limits_{\Omega_0}(\overline{\rho})_0\vec{F}\cdot(\delta U^i\vec{e}_i)(d\Omega)_0. \qquad \text{(П6.107)}$$

Осталось выразить вектор удельной массовой силы $\vec{F}$ в начальной конфигурации. Возможны две ситуации:

- сила $\vec{F}$ является „мертвою”, т.е. не изменяет своего положения и свою величину при наличии деформации в точке тела, поэтому $\vec{F}=(F^i)_0\vec{e}_i$ и

$$\int\limits_{\Omega}\vec{O}\cdot\delta\vec{U}d\Omega=\int\limits_{\Omega_0}(\overline{\rho})_0(F^i)_0\vec{e}_i\cdot(\delta U^i\vec{e}_i)(d\Omega)_0; \qquad \text{(П6.108-а)}$$

- сила $\vec{F}$ „следит” за деформацией точки тела (изменяет свое положение и свою величину при наличии деформации), поэтому $\vec{F}=F^j\vec{E}_j=F^j(\delta^i_j+\nabla_jU^i)\vec{e}_i=F^jX^i_j\vec{e}_i$ и

$$\int\limits_{\Omega}\vec{O}\cdot\delta\vec{U}d\Omega=\int\limits_{\Omega_0}(\overline{\rho})_0F^jX^i_j\vec{e}_i\cdot(\delta U^i\vec{e}_i)(d\Omega)_0, \qquad \text{(П6.108-б)}$$

причем величина F^i может изменяться как функция $\vec{x}$. Кстати, плотность материала также может быть функцией координат.

Выражения (П6.108-а) и (П6.108-б) можно заменить одним, если ввести обозначения:

$$(\overline{F}^i)_0=(F^i)_0 \quad \text{и} \quad (\overline{F}^i)_0=F^jX^i_j \qquad \text{(П6.109)}$$

для формул (П6.108-а) и (П6.108-б) соответственно. Учтем, что $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=g_{ij}$, поэтому выражение $\vec{F}\cdot(\delta U^i\vec{e}_i)=(\overline{F}^i)_0\vec{e}_i\cdot(\delta U^i\vec{e}_i)=(\overline{F}^i)_0\delta U^ig_{ii}$.

Обозначим $(\underset{\sim}{Q}^i)_0 = (\bar{F}^i)_0 g_{ii}$ (в ДСК все g_{ii}=1). Тогда выражение для второго интеграла из (П6.96) в начальной конфигурации запишется как

$$\int_{\Omega} \vec{O} \cdot \delta\vec{U} d\Omega = \int_{\Omega_0} (\bar{\rho})_0 (\tilde{F}^i)_0 \delta U^i (d\Omega)_0 \quad \text{или} \quad \int_{\Omega} \vec{O} \cdot \delta\vec{U} d\Omega = \int_{\Omega_0} (\underset{\sim}{Q}^i)_0 \delta U^i (d\Omega)_0 . \tag{П6.110}$$

П6.4.3 Выражение для поверхностного интеграла в TL-формулировке принципа возможных перемещений

Рассмотрим третий интеграл из (П6.96), а именно $\int_{S_P} \vec{P} \cdot \delta\vec{U} dS$. Результирующий вектор поверхностной нагрузки на элементарной площадке $\vec{P}dS$ запишем в виде $\vec{P}dS = q\underset{\sim}{\vec{v}}dS$, где $q = q(\vec{x},t)$ – распределенная нагрузка в точке поверхности; $\underset{\sim}{\vec{v}} = \underset{\sim}{v}_i \vec{E}^i$ – вектор нормали к поверхности в той же точке. Учтено, что именно контравариантные векторы $\vec{E}^i$ нормальны к сдеформированной поверхности, которую определяют два вектора $\vec{E}_j$ и $\vec{E}_k$ (здесь $i \neq j \neq k \neq i;\ i,j,k = 1,2,3$). Тогда

$$\int_{S_P} \vec{P} \cdot \delta\vec{U} dS = \int_{S_P} (q\underset{\sim}{v}_i \vec{E}^i) \cdot (\delta U^i \vec{e}_i) dS . \tag{П6.111}$$

Компоненты δU^i вектора вариации перемещений $\delta\vec{U} = \delta U^i \vec{e}_i$ преобразовывать нет необходимости, поскольку они определяются относительно исходной (недеформированной) конфигурации. Представим оставшуюся часть подынтегрального выражения, т.е. $q\underset{\sim}{v}_i \vec{E}^i dS$, в виде

$$q\underset{\sim}{v}_i \vec{E}^i dS = (p^j)_0 \vec{E}_j (dS)_0 , \tag{П6.112}$$

где компоненты

$$(p^j)_0 = P^{ij} (v_i)_0 \tag{П6.113}$$

являются приведенными компонентами вектора нагрузки к поверхности единичной площади *исходной* (недеформированной) конфигурации, которые еще необходимо найти.

Компоненты $\underset{\sim}{v}_i$ в (П6.112) определены относительно $\vec{E}_i$, т.е.:

$$\underset{\sim}{v}_i = (\delta_i^j + \nabla_i U^j) v_j = X_i^j v_j ; \quad i,j = 1,2,3 . \tag{П6.114}$$

где v_j являются компонентами вектора нормали к элементарной поверхности dS, определенные относительно $\vec{e}_i$, $i = 1,2,3$. Итак, вместо (П6.112) запишем:

$$qX_i^j v_j \vec{E}^i dS = (P^{ij})_0 (v_i)_0 \vec{E}_j (dS)_0 . \tag{П6.115}$$

В соответствии с формулой Нансона (П6.68) $X_i^j v_j dS = J \cdot (v_i)_0 (dS)_0$. Подставим это выражение в левую часть формулы (П6.115). После сокращения на $(dS)_0$ получим:

$$qJ(v_i)_0 \vec{E}^i = (P^{ij})_0 (v_i)_0 \vec{E}_j . \tag{П6.116}$$

С учетом (П6.113) это выражение примет вид

$$qJ(v_i)_0 \vec{E}^i = (p^j)_0 \vec{E}_j . \tag{П6.117}$$

Умножим (П6.117) скалярным образом на $\vec{E}_k$. Учитывая то, что $\vec{E}^i \cdot \vec{E}_k = \delta_k^i$; $(v_i)_0 \delta_k^i = (v_k)_0$; $\vec{E}_j \cdot \vec{E}_k = C_{jk}$, получим сначала, что

$$qJ(v_k)_0 = (p^j)_0 G_{jk} , \tag{П6.118}$$

а с учетом $C^{jk} = (C_{jk})^{-1}$ и $C^{jk}(v_k)_0 = C^{ji}(v_i)_0$:

$$(p^j)_0 = qJG^{ji}(v_i)_0 . \tag{П6.119}$$

Итак, вместо (П6.111), с учетом (П6.112) и (П6.119), имеем выражение

$$\int_{S_P} \vec{P}\cdot\delta\vec{U}dS = \int_{(S_P)_0} qJC^{ji}(\nu_i)_0\vec{E}_j\cdot(\delta U^i\vec{e}_i)(dS)_0 =$$

$$= \int_{(S_P)_0} qJ\left(C^{ji}(\nu_i)_0 X_j^m\vec{e}_m\right)\cdot(\delta U^m\vec{e}_m)(dS)_0 = \int_{(S_P)_0} qJC^{ji}(\nu_i)_0 X_j^m\delta U^m g_{mm}(dS)_0\,, \qquad (\text{П6.120-а})$$

вычисляемое в *исходной* (недеформированной) конфигурации. Обозначим:

$$(\underset{\sim}{p}^m)_0 = qJC^{ji}(\nu_i)_0 X_j^m g_{mm}\,. \qquad (\text{П6.121})$$

Тогда окончательно для (П6.96)

$$\int_{S_P} \vec{P}\cdot\delta\vec{U}dS = \int_{(S_P)_0} (\underset{\sim}{p}^m)_0\delta U^m(dS)_0\,. \qquad (\text{П6.120-б})$$

П6.4.4 Выражение принципа возможных перемещений при TL-формулировке

Если выражения (П6.105-б), (П6.110) и (П6.120-б) подставить в принцип возможных перемещений (П6.96), то получим его выражение при TL-формулировке (в компонентной форме):

$$\delta\Psi = \int_{\Omega_0} (\underset{\sim}{\sigma}^{ij})_0\delta\varepsilon_{ij}(d\Omega)_0 - \int_{\Omega_0} (\underset{\sim}{Q}^i)_0\delta U^i(d\Omega)_0 - \int_{(S_P)_0} (\underset{\sim}{p}^m)_0\delta U^m(dS)_0 = 0\,. \qquad (\text{П6.122})$$

П6.5 Конечно-элементная аппроксимация краевых задач при TL-формулировке и метод решения системы алгебраических уравнений

П6.5.1 Конечно-элементная аппроксимация принципа возможных перемещений

Для создания системы алгебраических уравнений в NX Nastran применяется принцип возможных перемещений в TL-формулировке (П6.122).

Поскольку аппроксимация будет проводиться на конечно-элементной сетке, то вместо выражения (П6.122) запишем его сеточный аналог

$$\delta\Psi_h = \left(\int_{\Omega_0} (\underset{\sim}{\sigma}^{ij})_0\delta\in_{ij}(d\Omega)_0 - \int_{\Omega_0} (\underset{\sim}{Q}^i)_0\delta U^i(d\Omega)_0 - \int_{(S_P)_0} (\underset{\sim}{p}^m)_0\delta U^m(dS)_0\right)_h = 0\,. \qquad (\text{П6.123})$$

Далее нижний индекс h опускаем с целью упрощения записей.

Этот функционал в объединении с кинематическими ГУ на поверхности S_U

$$U^m\Big|_{S_U} = \hat{g}^m\,,\ \text{т.е.}\ \delta U^m\Big|_{S_U} = 0 \qquad (\text{П6.124})$$

определяет бесчисленное множество возможных НДС. Действительное НДС – одно из виртуальных, но дополнительно удовлетворяет уравнениям связи между напряжениями и деформациями.

Есть несколько итерационных алгоритмов (методов) решения существенно нелинейных краевых задач, довольно хорошо изученных. При постановке краевой задачи в перемещениях с учетом неупругих деформаций, а также при учете геометрической нелинейности в NX Nastran применяется метод дополнительных нагрузок одновременно с методом Ньютона-Рафсона решения нелинейной САУ, порождаемой методом.

Весь процесс нагружения тела разбивается на этапы, на каждом из которых решается краевая задача. Результаты текущего этапа являются начальными условиями для следующего этапа. В частном случае рассматривается лишь один этап нагружения.

Для аппроксимации будущего решения применяется метод конечных элементов.

Введем векторы: $\{\underset{\sim}{Q}\}_0 = \{\underset{\sim}{Q}_1, \underset{\sim}{Q}_2, \underset{\sim}{Q}_3\}_0^T$ – объемных и $\{\underset{\sim}{p}\}_0 = \{\underset{\sim}{p}_1, \underset{\sim}{p}_2, \underset{\sim}{p}_3\}_0^T$ – приведенных поверхностных нагрузок. Функционал (П6.123) с учетом матричных обозначений, введенных ранее в Приложениях 5 и 6, будет иметь вид:

$$\delta\Psi = \int_{\Omega_0} \{\delta\in\}^T\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0(d\Omega)_0 - \int_{\Omega_0} \{\delta U\}^T\{\underset{\sim}{Q}\}_0(d\Omega)_0 - \int_{(S_P)_0} \{\delta U\}^T\{\underset{\sim}{p}\}_0(dS)_0 = 0\,. \qquad (\text{П6.125})$$

Определим, что $\{\delta \in\} = [\tilde{B}]\{\delta q\}_e$ (см. второе выражение в (П5.92)) и $\{\delta \in\}^T = \left([\tilde{B}]\{\delta q\}_e\right)^T =$ $= \{\delta q\}_e^T [\tilde{B}]^T$; $\{\delta U\} = \delta\left([\phi]\{q\}_e\right) = [\phi]\{\delta q\}_e$ и $\{\delta U\}^T = \{\delta q\}_e^T [\phi]^T$. Функционал (П6.125) с учетом этих формул и возможности суперпозиции по КЭ работ внешних и внутренних сил, обусловленной тем, что КЭ не пересекаются, записывается как

$$\delta\Psi = \sum_e \int\limits_{(\Omega^e)_0} \{\delta q\}_e^T [\tilde{B}]^T \{\underset{\sim}{\sigma}\}_0 (d\Omega)_0 -$$

$$-\sum_e \int\limits_{(\Omega^e)_0} \{\delta q\}_e^T [\phi]^T \{\underset{\sim}{Q}\}_0 (d\Omega)_0 - \sum_e \int\limits_{(S_P^e)_0} \{\delta q\}_e^T [\phi]^T \{\underset{\sim}{p}\}_0 (dS)_0 = 0\,, \qquad (\text{П6.126})$$

где знак $\sum\limits_e$ означает суммирование по всем КЭ, содержащим актуальную степень свободы конкретного узла.

Так как векторы $\{\delta q\}_e^T$ не зависят от параметров интегрирования, их можно вынести за границы интегралов (как обычные константы). Из (П6.126), сгруппировав интегралы, имеем:

$$\delta\Psi = \sum_e \{\delta q\}_e^T \left(\int\limits_{(\Omega^e)_0} [\tilde{B}]^T \{\underset{\sim}{\sigma}\}_0 (d\Omega)_0 - \int\limits_{(\Omega^e)_0} [\phi]^T \{\underset{\sim}{Q}\}_0 (d\Omega)_0 - \int\limits_{(S_P^e)_0} [\phi]^T \{\underset{\sim}{p}\}_0 (dS)_0 \right) = 0\,. \qquad (\text{П6.127})$$

Поскольку величины $\{\delta q\}_e^T$ – произвольные, то из (П6.127)

$$\sum_e \left(\int\limits_{(\Omega^e)_0} [\tilde{B}]^T \{\underset{\sim}{\sigma}\}_0 (d\Omega)_0 - \int\limits_{(\Omega^e)_0} [\phi]^T \{\underset{\sim}{Q}\}_0 (d\Omega)_0 - \int\limits_{(S_P^e)_0} [\phi]^T \{\underset{\sim}{p}\}_0 (dS)_0 \right) = 0\,. \qquad (\text{П6.128})$$

Обозначим:

$$\{P\}_0 = \sum_e (\{P\}_0)_e\,; \quad (\{P\}_0)_e = \int\limits_{(\Omega^e)_0} [\phi]^T \{\underset{\sim}{Q}\}_0 (d\Omega)_0 + \int\limits_{(S_P^e)_0} [\phi]^T \{\underset{\sim}{p}\}_0 (dS)_0\,. \qquad (\text{П6.129-а})$$

Если на поверхности задано несколько (обозначим как $N_{\bar{P}}$) сосредоточенных сил $\vec{\bar{P}}_i$; $i = 1,\ldots,N_{\bar{P}}$ с компонентами $(\bar{P}^m)_i$ в исходном базисе $\vec{e}_m$, то для КЭ с таким узлом $\int\limits_{S_p^e} [\phi]^T \{\bar{p}\} dS = \{\bar{P}\}$, поскольку в узлах матрица $[\phi]$ имеет все нулевые значения, кроме единицы в актуальном узле, а площадь вырождается в точку. Здесь введен вектор сосредоточенной силы $\{\bar{\bar{P}}\} = \{\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3\}^T$. Поэтому выражение (П6.129-а) модифицируется:

$$\{P\}_0 = \sum_e (\{P\}_0)_e\,; \quad (\{P\}_0)_e = \int\limits_{(\Omega^e)_0} [\phi]^T \{\underset{\sim}{Q}\}_0 (d\Omega)_0 + \int\limits_{(S_P^e)_0} [\phi]^T \{\underset{\sim}{p}\}_0 (dS)_0 + \sum_{i=1}^{N_{\bar{P}}} \{\bar{P}\}_i\,. \qquad (\text{П6.129-б})$$

Еще обозначим

$$\{R\}_0 = \sum_e (\{R\}_0)_e\,; \quad (\{R\}_0)_e = \int\limits_{(\Omega^e)_0} [\tilde{B}]^T \{\underset{\sim}{\sigma}\}_0 (d\Omega)_0\,. \qquad (\text{П6.130-а})$$

Выражение (П6.128), т.е. уравнение равновесия системы, примет вид

$$\sum_e \int\limits_{(\Omega^e)_0} [\tilde{B}]^T \{\underset{\sim}{\sigma}\}_0 (d\Omega)_0 = \{P\}_0 \quad \text{или} \quad \{R\}_0 = \{P\}_0\,. \qquad (\text{П6.131-а})$$

П6.5.2 Алгоритм решения краевой задачи с учетом геометрической нелинейности на основе метода Ньютона-Рафсона

Для решения *нелинейных* САУ в NX Nastran используется метод Ньютона-Рафсона, обеспечивающий высокую скорость сходимости.

Согласно методу Ньютона-Рафсона решения нелинейных САУ считается, что

$$\{\psi\}^{(k+1)} \approx \{\psi\}^{(k)} + \left(\frac{\partial\{\psi\}}{\partial\{q\}}\right)^{(k)} \{dq\} \approx \{0\}\,; \quad \{q\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k)} + \{dq\}\,, \qquad (\text{П6.132})$$

где вектор погрешности (вектор невязки) $\{\psi\}$ определяется как разность между правой и левой частями САУ; k – номер итерации. Поэтому из выражений (П6.131-а) вектор погрешностей

$$\{\psi\}^{(k)} = (\{P\}_0)^{(k)} - \left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} [\tilde{B}]^T \{\underset{\sim}{\sigma}\}_0 (d\Omega)_0 \right)^{(k)} \quad \text{или}$$

$$\{\psi\}^{(k)} = (\{P\}_0)^{(k)} - (\{R\}_0)^{(k)}; \quad k = 0,1,... \; . \qquad (П6.133)$$

С учетом (П6.133) выражение (П6.132) запишем в виде итерационной (рекуррентной) последовательности СЛАУ

$$-\left(\frac{\partial\{\psi\}}{\partial\{q\}} \right)^{(k)} \{dq\} = (\{P\}_0)^{(k)} - (\{R\}_0)^{(k)}; \quad \{q\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k)} + \{dq\}\,. \qquad (П6.134)$$

Осталось определиться с матрицей $\left(\frac{\partial\{\psi\}}{\partial\{q\}} \right)^{(k)}$. В соответствии с первым выражением (П6.133) для последовательности СЛАУ (П6.134):

$$\left(\frac{\partial\{\psi\}}{\partial\{q\}} \right)^{(k)} \{dq\} = \left(\frac{\partial}{\partial\{q\}} \left(\{P\}_0 - \sum_e \int_{(\Omega^e)_0} [\tilde{B}]^T \{\underset{\sim}{\sigma}\}_0 (d\Omega)_0 \right) \right)^{(k)} \{dq\} = \left(\frac{\partial\{P\}_0}{\partial\{q\}} \right)^{(k)} \{dq\} -$$

$$- \left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} \frac{\partial[\tilde{B}]^T}{\partial\{q\}_e} \{\underset{\sim}{\sigma}\}_0 (d\Omega)_0 \right)^{(k)} \{dq\} - \left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} [\tilde{B}]^T \frac{\partial\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0}{\partial\{q\}_e} (d\Omega)_0 \right)^{(k)} \{dq\}\,. \qquad (П6.135)$$

Отдельно рассмотрим каждое выражение из правой части (П6.135).

Несмотря на значительные перемещения и повороты, будем считать, что деформации являются относительно небольшими (до 2%) . Примем, что

$$\left(\frac{\partial\{P\}_0}{\partial\{q\}} \right)^{(k)} \{dq\} \approx \{0\}\,. \qquad (П6.136)$$

Поскольку $[\tilde{B}] = [B] + [\overline{B}]$, а $\partial[B]/\partial\{q\}_e = [0]$, то, с учетом (П5.83) и (П5.76) ... (П5.80), первый интеграл из правой части (П6.135):

$$\left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} \frac{\partial[\tilde{B}]^T}{\partial\{q\}_e} \{\underset{\sim}{\sigma}\}_0 (d\Omega)_0 \right)^{(k)} = \left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} \frac{\partial[\overline{B}]^T}{\partial\{q\}_e} \{\underset{\sim}{\sigma}\}_0 (d\Omega)_0 \right)^{(k)} =$$

$$= \left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} \frac{\partial([A][W])^T}{\partial\{q\}_e} \{\underset{\sim}{\sigma}\}_0 (d\Omega)_0 \right)^{(k)} = \left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} [W]^T \frac{\partial[A]^T}{\partial\{q\}_e} \{\underset{\sim}{\sigma}\}_0 (d\Omega)_0 \right)^{(k)} =$$

$$= \left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} [W]^T [\underset{\sim}{\sigma}]_0 [W] (d\Omega)_0 \right)^{(k)}, \qquad (П6.137)$$

где учтена симметрия матрицы $[\underset{\sim}{\sigma}]_0$ из компонент вектора $\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0$; что $([A][W])^T = [W]^T[A]^T$, $\partial[W]^T / \partial\{q\}_e = [0]$, а также, что матрица $\partial[A]^T / \partial\{q\}_e = [W]$.

Введем глобальную симметричную матрицу:

$$[K_\sigma]_0 = \sum_e ([K_\sigma]_0)_e\,, \text{ где } ([K_\sigma]_0)_e = \int_{(\Omega^e)_0} [G]^T [\tilde{S}][G] (d\Omega)_0\,. \qquad (П6.138)$$

Тогда окончательно из первого интеграла из правой части (П6.135) имеем

$$\left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} \frac{\partial[\tilde{B}]^T}{\partial\{q\}_e} \{\underset{\sim}{\sigma}\}_0 (d\Omega)_0 \right)^{(k)} = \sum_e \left(([K_\sigma]_0)_e \right)^{(k)} = \left([K_\sigma]_0 \right)^{(k)}. \qquad (П6.139)$$

Рассмотрим последнее выражение из правой части (П6.135). Определим, что

$$\frac{\partial\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0}{\partial\{q\}_e}=\frac{\partial\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0}{\partial\{\in\}}\frac{\partial\{\in\}}{\partial\{q\}_e}=[\tilde{D}]\frac{\partial\{\in\}}{\partial\{q\}_e}. \qquad (П6.140)$$

Согласно (П5.92)

$$\frac{\partial\{\in\}}{\partial\{q\}_e}=[\tilde{B}]. \qquad (П6.141)$$

Поэтому:

$$\left(\sum_e\int_{(\Omega^e)_0}[\tilde{B}]^T\frac{\partial\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0}{\partial\{q\}_e}(d\Omega)_0\right)^{(k)}\{dq\}=\left(\sum_e\int_{(\Omega^e)_0}[\tilde{B}]^T[\tilde{D}][\tilde{B}](d\Omega)_0\right)^{(k)}\{dq\}. \qquad (П6.142)$$

Итак, осталось определиться с выражением для матрицы

$$[\tilde{D}]=\frac{\partial\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0}{\partial\{\in\}}. \qquad (П6.143\text{-а})$$

Вариантов таких выражений столько, сколько моделей материалов, т.е. много. Поэтому здесь выражения для матрицы $[\tilde{D}]$ не рассматриваем.

Обозначим:

$$([\tilde{K}]_0)_e=\int_{(\Omega^e)_0}[\tilde{B}]^T[\tilde{D}][\tilde{B}](d\Omega)_0;\quad [\tilde{K}]_0=\sum_e([\tilde{K}]_0)_e. \qquad (П6.144)$$

Левая часть первого выражения из (П6.134) получит вид:

$$-\left(\frac{\partial\{\psi\}}{\partial\{q\}}\right)^{(k)}\{dq\}=\left([K_\sigma]_0+[\tilde{K}]_0\right)^{(k)}\{dq\}=\left([\underline{K}]_0\right)^{(k)}\{dq\}, \qquad (П6.145)$$

где введена матрица

$$[\underline{K}]_0=[K_\sigma]_0+[\tilde{K}]_0. \qquad (П6.146)$$

Теперь окончательно выражения (П6.134), т.е. уравнения метода Ньютона-Рафсона, получат вид:

$$\left([\underline{K}]_0\right)^{(k)}\{dq\}\approx(\{P\}_0)^{(k)}-(\{R\}_0)^{(k)};\quad \{q\}^{(k+1)}=\{q\}^{(k)}+\{dq\}. \qquad (П6.147\text{-а})$$

Первое выражение (П6.147-а) является линейной системой алгебраических уравнений для нахождения вектора-решения $\{dq\}$ на $(k+1)$-й итерации согласно методу Ньютона-Рафсона. Она собрана на основе решения, полученного на предыдущей k-ой итерации: и матрица $[\underline{K}]_0$ СЛАУ, и вектор правой части СЛАУ.

На нулевой итерации, когда в теле еще нет напряжений и деформаций, компоненты выражения (П6.147-а) $(\{R\}_0)^{(0)}=\{0\}$; $[K_\sigma]_0=[0]$, а

$$[\tilde{K}]_0=[K]_0,\text{ где }\ [K]_0=\sum_e[K_0]_e;\quad [K_0]_e=\int_{(\Omega^e)_0}[B]^T[D][B](d\Omega)_0, \qquad (П6.148)$$

поэтому на нулевой итерации (П6.147-а) вырождается в

$$[K]_0\{dq\}\approx(\{P\}_0)^{(0)};\quad \{q\}^{(1)}=\{q\}^{(0)}+\{dq\}. \qquad (П6.149\text{-а})$$

Реально рассматриваются не бесконечное малые приращения, а конечные. Поэтому в (П6.147-а) и (П6.149-а) вместо знака дифференциала d используют знак приращения Δ:

$$\left([\underline{K}]_0\right)^{(k)}\{\Delta q\}\approx(\{P\}_0)^{(k)}-(\{R\}_0)^{(k)};\quad \{q\}^{(k+1)}=\{q\}^{(k)}+\{\Delta q\}; \qquad (П6.147\text{-б})$$

$$[K]_0\{\Delta q\}\approx(\{P\}_0)^{(0)};\quad \{q\}^{(1)}=\{q\}^{(0)}+\{\Delta q\}. \qquad (П6.149\text{-б})$$

Для алгоритма Ньютона-Рафсона доказаны теоремы существования и единственности решения. Алгоритм имеет большую скорость сходимости. Его основной недостаток – новые матрицы на каждой итерации.

Матрицу $[K_\sigma]$ называют матрицей *геометрической жесткости* (geometric stiffness matrix) или матрицей *начальных напряжений*.

П6.5.3 Алгоритм метода BFGS решения САУ для краевой задачи с учетом геометрической нелинейности

Метод BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno), применяемый в NX Nastran 7.1, является одним из так называемых квази-Ньютоновских методов, или методов восстановления, линейного поиска (line search), $\alpha-$ускорения. Отличие этих методов от метода Ньютона-Рафсона (см. Раздел П6.5.2) состоит в том, что другим способом обновляется матрица жесткости для ($k+1$)-й итерации.

Метод BFGS имеет три этапа (принято, что $[\underline{K}]_0^{(1)} = [\underline{K}]_0$):

Этап 1: находятся векторы:

$$\{\psi\}_0^{(k)} = \{P\}_0^{(k)} - \{R\}_0^{(k)}; \quad k = 1,...; \tag{П6.150}$$

$$\{\Delta q\} = ([\underline{K}]_0^{(k)})^{-1}\{\psi\}_0^{(k)}; \quad k = 1,.... \tag{П6.151}$$

Последний вектор определяет „направление" фактического приращения узловых перемещений.

Этап 2: вычисляется новый вектор узловых перемещений

$$\{q\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k)} + \alpha \cdot \{\Delta q\} \tag{П6.152}$$

и соответствующий ему вектор $\{\psi\}_0^{(k+1)} = \{P\}_0^{(k+1)} - \{R\}_0^{(k+1)}$. В (П6.151) α – скалярный множитель, который обычно выбирается из диапазона $[0.05, 1]$ таким, чтобы при назначенном допуске сходимости ε удовлетворялось условие

$$\{\Delta q\}^T \cdot \{\psi\}_0^{(k+1)} \le \varepsilon \{\Delta q\}^T \cdot \{\psi\}_0^{(k)}. \tag{П6.153}$$

Когда α выбрано и вычислено $\{q\}^{(k+1)}$, формируются векторы

$$\{\delta\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k+1)} - \{q\}^{(k)} = \alpha \cdot \{\Delta q\}; \tag{П6.154}$$

$$\{\gamma\}^{(k+1)} = \{\psi\}_0^{(k)} - \{\psi\}_0^{(k+1)}. \tag{П6.155}$$

Этап 3: обновляется матрица жесткости:

$$([\underline{K}]_0^{(k+1)})^{-1} = ([A]^{(k+1)})^T ([\underline{K}]_0^{(k)})^{-1} [A]^{(k+1)}, \tag{П6.156}$$

где применяется матрица $[A]^{(k)}$ той же размерности, что и $[\underline{K}]_0$, с компонентами

$$[A]^{(k)} = [I] + \{v\}^{(k)}(\{w\}^{(k)})^T. \tag{П6.157}$$

Обновленная матрица $[\underline{K}]_0^{(k+1)}$ должна удовлетворять уравнению

$$[\underline{K}]_0^{(k+1)}\{\delta\}^{(k+1)} = \{\gamma\}^{(k+1)}. \tag{П6.158}$$

Векторы $\{v\}$ и $\{w\}$ для (П6.157) вычисляются согласно формулам

$$\{v\}^{(k+1)} = -\sqrt{\frac{(\{\delta\}^{(k+1)})^T\{\gamma\}^{(k+1)}}{(\{\delta\}^{(k+1)})^T + [\underline{K}]_0^{(k)}\{\delta\}^{(k+1)}}}[\underline{K}]_0^{(k)}\{\delta\}^{(k+1)} - \{\gamma\}^{(k+1)}; \tag{П6.159}$$

$$\{w\}^{(k+1)} = \frac{\{\delta\}^{(k+1)}}{\{\delta\}^{(k+1)}\{\gamma\}^{(k+1)}}. \tag{П6.160}$$

Вектор $[\underline{K}]_0^{(k)}\{\delta\}^{(k+1)}$ в (П6.159) фактически равен $\alpha \cdot \{\psi\}_0^{(k)}$, легко вычисляется.

Матрица $([\underline{K}]_0^{(k+1)})^{-1}$, вычисленная согласно (П6.156), является симметричной и положительно определенной. Поэтому число обусловленности $\nu_{[\underline{K}]_0^{(k+1)}}$ матрицы $([\underline{K}]_0^{(k+1)})^{-1}$ может быть вычислено как

$$\nu_{[\underline{K}]_0^{(k+1)}} = -\sqrt{\frac{(\{\delta\}^{(k+1)})^T\{\gamma\}^{(k+1)}}{(\{\delta\}^{(k+1)})^T + [\underline{K}]_0^{(k)}\{\delta\}^{(k+1)}}}. \tag{П6.161}$$

Если это число превысит некоторое заданное значение, то это также можно считать признаком неудачного выбора параметра α.

Если все преобразования САУ свести в единую цепь, то выражение (П6.151) может быть записано как

$$\{\Delta q\}=([I]+\{w\}^{(k)}(\{v\}^{(k)})^T...([I]+\{w\}^{(2)}(\{v\}^{(2)})^T([\underline{K}]_0)^{-1}[A]^{(2)}...[A]^{(k)}\{\psi\}_0^{(k)}. \qquad (П6.162)$$

Эта формула показывает, что решение можно найти, не проводя обновление матрицы жесткости и не проводя ее новых обращений. Кроме того, метод может уменьшать количество итераций, необходимых для получения сходимости решения с заданной точностью.

П6.6 Основные положения UL-формулировки алгоритмов решения геометрически нелинейных краевых задач

Согласно таблице П6.1, при **UL**-формулировке в общем случае геометрической нелинейности (большие параллельные перемещения, большие вращения и большие деформации) используются напряжения Эйлера-Коши и логарифмические деформации Генки.

Итак, нужно рассмотреть вопрос о логарифмических деформациях Генки, а также об определяющих уравнениях, которые будут использоваться при формулировании постановок краевых задач, для получения системы алгебраических уравнений.

П6.6.1 Разложение матрицы градиента деформации Грина на матрицы растяжения и вращения (теорема про полярную декомпозицию)

Покажем, что (несимметричную) матрицу $[X]$ (П6.26) всегда можно представить как

$$[X]=[R][U]_R, \qquad (П6.163)$$

где $[R]$ – матрица вращения (ортогональная), а $[U]_R$ – правая матрица чистой деформации (симметричная). Об этом утверждает теорема про полярную декомпозицию.

Рассмотрим не вырожденную положительно определенную матрицу

$$[C]=[X]^T[X]. \qquad (П6.164)$$

Если $[R]$ является матрицей вращения, то $[R]^T[R]=[I]$, где $[I]$ – единичная матрица. Поэтому, с применением (П6.163):

$$[C]=\left([R][U]_R\right)^T[R][U]_R=[U]_R^T\left([R]^T[R]\right)[U]_R=[U]_R^T[I][U]_R=[U]_R^T[U]_R=[U]_R^2. \qquad (П6.165)$$

Учтено, что матрица $[U]_R$ должна быть симметричной, тогда $[U]_R^T[U]_R=[U]_R^2$.

Итак, поскольку в общем случае $[U]_R\neq[X]$, то

$$[U]_R=[C]^{1/2}=\left([X]^T[X]\right)^{1/2}. \qquad (П6.166)$$

Но легко вычислить $[U]_R$ из (П6.166) удается лишь тогда, когда $[X]^T[X]$ является диагональной матрицей. В противном случае для получения компонент $[U]_R$ рассмотрим стандартную симметричную проблему собственных значений для симметричной матрицы $[C]$:

$$[C]\{w\}=\lambda\{w\}. \qquad (П6.167)$$

Из полученных собственных значений $\lambda_i>0$; $i=1,2,3$ сложим диагональную матрицу $[\lambda_C]$, а из собственных векторов (столбцов) $\{w\}$ – матрицу собственных векторов $[W]_R$.

Матрице $[U]_R$ соответствует тензор $\vec{U}_R$. Поскольку есть прямая связь между $[C]$ и $[U]_R$, а именно $[C]=[U]_R^2$, то любой главный базис тензора $\vec{C}$ будет одновременно главным базисом тензора $\vec{U}_R$, который порождает матрицу $[U]_R$ (и наоборот). Поскольку матрица $[C]$ не вырождена, а также положительно определена, то ее собственные значения являются положительными, которые вместе с тем являются квадратами собственных значений матрицы $[U]_R$. Поэтому из величин $\sqrt{\lambda_i}\geq 0$ можно собрать новую диагональную матрицу, обозначим ее как $\left[\underline{U}\right]$:

$$[\underline{U}]=[\lambda_C]^{1/2}. \tag{П6.168}$$

Тогда с применением матрицы $[\underline{U}]$ и матрицы собственных векторов $[W]_R$ можно получить матрицу, которая и будет искомой матрицей $[U]_R$:

$$[U]_R=[W]_R[\underline{U}][W]_R^T. \tag{П6.169}$$

Матрицу вращения $[R]$ можно получить из выражения (П6.163):

$$[R]=[X][U]_R^{-1}. \tag{П6.170}$$

Свойство $[R]^T[R]=[I]$, обязательное для матрицы вращения, было заложено при получении матрицы $[U]_R$. Чтобы матрица $[R]$ была матрицей вращения, ей еще нужно иметь $\det[R]=1$. Это действительно так, поскольку:

$$\det[R]=\det[X]\cdot\det[U]_R^{-1}=J/\det[U]_R=J/\det[\underline{U}]=J/\det[\lambda_C]^{1/2}=J/J=1.$$

Симметричная проблема собственных значений для не вырожденной, положительно определенной матрицы имеет лишь один вариант решения. Поэтому и полярная декомпозиция (П6.163) тоже имеет лишь один вариант.

Кроме *правой* матрицы чистой деформации $[U]_R$ еще рассматривают *левую* матрицу чистой деформации $[U]_L$, а именно, вместо (П6.163) – формулу

$$[X]=[U]_L[R]. \tag{П6.171}$$

Действия – аналогичны. С использованием (П6.163) $[X]=[R][U]_R=[U]_L[R]$, поэтому

$$[U]_L=[R][U]_R[R]^T;\quad [U]_L=[W]_L[\underline{U}][W]_L^T;\quad [W]_L=[R][W]_R;\quad [W]_R=[R]^T[W]_L. \tag{П6.172}$$

Примечание П6.4. Согласно (П6.163) деформирование рассматривается как процесс, в котором последовательно реализуются: сначала чистая деформация элементарного объема, потом – его жесткое вращение. В случае использования декомпозиции (П6.171) процесс рассматривается строго наоборот: сначала – жесткое вращение, потом – чистая деформация.

В обоих случаях матрицы $[U]_R$ и $[U]_L$ с чистой деформацией элементарного объема вычисляются через матрицу $[\underline{U}]$, которая фактически содержит чистую деформацию *в направлении главных осей* деформации, т.е. матрица $[\underline{U}]$ не содержит угловых деформаций (является диагональной). Это позволяет интерпретировать диагональные компоненты матрицы $[\underline{U}]$ как представителей главных деформаций тензоров деформаций и определить, в частности, тензор деформаций Грина-Лагранжа как (матричное обозначение, нормированная ортогональная система координат)

$$[\in]=[W]_R\left(0.5([\underline{U}]^2-[I])\right)[W]_R^T. \tag{П6.173}$$

П6.6.2 Логарифмические деформации Генки (Hencky)

Если считать, что направление деформации волокна материала с исходной длиной L_0 при деформировании не изменяется, то текущую продольную деформацию волокна можно определить как

$$\in_H=\int_{L_0}^{L}\frac{dx}{x}=\ln\left(\frac{L}{L_0}\right)=\ln\left(\frac{L_0+\Delta L}{L_0}\right)=\ln(1+\varepsilon),\quad \text{где}\quad \varepsilon=\frac{\Delta L}{L_0}. \tag{П6.174}$$

Это и есть логарифмическая деформация Генки для волокна материала.

Если использовать матрицы собственных векторов $[W]_R$, то тензор деформации Генки можно определить как (матричное обозначение)

$$[\varepsilon]_H=[W]_R[\Lambda][W]_R^T, \tag{П6.175}$$

где диагональная матрица $[\Lambda]$ содержит компоненты

$$\Lambda_{ii}=\ln(1+\varepsilon_i)=\ln\sqrt{\lambda_i},\quad i=1,2,3, \tag{П6.176}$$

причем $\lambda_i > 0$ – собственные значения матрицы $[C]$, определяемые из системы (П6.167).

Примечание П6.5. Поскольку в определении тензоров деформаций Грина-Лагранжа (П6.173) и Генки (П6.175) отсутствует матрица вращения $[R]$ (есть только главные деформации и матрицы собственных векторов), то это означает, что эти оба тензора не зависят от жесткого вращения элементарного объема тела.

Примечание П6.6. Из примечания П6.5 следует, что компоненты тензора *малых* деформаций (П5.8) генерируют паразитные (на самом деле отсутствующие) деформации при жестком вращении и смещении элементарного объема тела. Именно поэтому формулами (П5.8) нельзя пользоваться при наличии жесткого вращения элементарного объема тела.

Логарифмические деформации Генки при **UL**-формулировке применяются лишь для вычисления компонент матрицы, аналогичной по смыслу $[\tilde{D}]$ (см. формулу (П6.143-а)) при наличии необратимых деформаций, больших, чем 2 процента. При этом удается избавиться от сложения деформаций (упругих, пластичных, температурных) и перейти к сложению перемещений, что не вносит никаких погрешностей. Для этого используются разложения и подходы, первоначально разработанные для гиперупругих материалов. Изложения этих формулировок тут не приводим. В сжатом виде информацию можно получить в разделе 6.6.4 книги [69].

П6.6.3 Сходства и особенности UL– и TL-формулировок алгоритмов решения геометрически нелинейных краевых задач

Как было указано в Разделе П6.1, **UL**-формулировка отличается от **TL**-формулировки тем, какая геометрия выбирается опорной: для **UL** – *начальная*, для **UL** – *созданная предыдущим этапом нагружения*. Поэтому существенных изменений при получении системы алгебраических уравнений не будет.

Вводится внутреннее время, весь этап нагружения автоматически делится на несколько (например, на 10) промежуточных этапов – слоев. Верхним индексом n будем обозначать такой временной слой. Нижний индекс, как и ранее, определяет начальную конфигурацию.

Поскольку деформации всегда вычисляются относительно начального состояния, то начнем почти с конца: с уравнения (П6.131-а) с учетом (П6.129-а).

Будем считать, что есть решение на $n-$м временном слое, рассматривается следующий, $(n+1)-$й. Изменится опорная геометрия: вместо $(\Omega^e)_0$ и $(S^e_P)_0$ будут $(\Omega^e)^n_0$ и $(S^e_P)^n_0$. Напряжения $\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0$, объемные $\{\underset{\sim}{Q}\}_0$ и поверхностные $\{\underset{\sim}{p}\}_0$ силы на опорной геометрии $n-$го временного слоя обозначим как $\{\underset{\sim}{\sigma}\}^n_0$, $\{\underset{\sim}{Q}\}^n_0$ и $\{\underset{\sim}{p}\}^n_0$ соответственно.

Уравнения (П6.129-б) и (П6.131-а) изменяются на:

$$\{P\}^n_0 = \sum_e (\{P\}^n_0)_e \,; \quad (\{P\}^n_0)_e = \int\limits_{(\Omega^e)^n_0} [\phi]^T \{\underset{\sim}{Q}\}^n_0 (d\Omega)^n_0 + \int\limits_{(S^e_P)^n_0} [\phi]^T \{\underset{\sim}{p}\}^n_0 (dS)^n_0 + \sum_{i=1}^{N_{\overline{P}}} \{\overline{P}\}^n_i \,; \quad \text{(П6.129-в)}$$

$$\sum_e \int\limits_{(\Omega^e)^n_0} [\tilde{B}]^T \{\underset{\sim}{\sigma}\}^n_0 (d\Omega)^n_0 \approx \{P\}^n_0 \quad \text{или} \quad \{R\}^n_0 = \{P\}^n_0 \,. \quad \text{(П6.131-б)}$$

Вместо (П6.143-а) и (П6.130-а) будем иметь соответственно

$$[\tilde{D}] = \frac{\partial \{\underset{\sim}{\sigma}\}^n_0}{\partial \{\varepsilon\}} \,; \quad \text{(П6.143-б)}$$

$$\{R\}^n_0 = \sum_e (\{R\}^n_0)_e \,, \quad \text{где} \quad (\{R\}^n_0)_e = \int\limits_{(\Omega^e)_0} [\tilde{B}]^T \{\underset{\sim}{\sigma}\}^n_0 (d\Omega)_0 \,. \quad \text{(П6.130-б)}$$

Как и ранее отметим, что вариантов выражений (П6.143-б) столько, сколько моделей материалов, т.е. много. Поэтому здесь выражения для матрицы $[\tilde{D}]$ не рассматриваем.

Вместо (П6.147-б) получим такую систему уравнений:

$$\left([\underset{\sim}{K}]_0^n\right)^{(k)}\{\Delta q\}\approx(\{P\}_0^n)^{(k)}-(\{R\}_0^n)^{(k)};\quad \{q\}^{(k+1)}=\{q\}^{(k)}+\{\Delta q\};\tag{П6.147-в}$$

Кроме того $(\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0^n)^{(0)}=\{\sigma\}_0^n$, т.е. являются напряжениями Эйлера-Коши с компонентами σ^{ij}, достигнутыми на конец предыдущего ($n-$го) этапа нагружения. Стартовое уравнение (П6.149-б) остается неизменным (только при $n=0$), т.е. старт обоих алгоритмов является одинаковым: упругим и по уравнениям бесконечно малых деформаций.

П6.6.4 Алгоритмы методов ограничения нагрузок/перемещений при решении краевой задачи с учетом геометрической нелинейности. Сферический критерий длины дуги (M.A. Crisfield)

В нелинейном анализе довольно часто нужно в автоматическом режиме уменьшать заданную нагрузку, чтобы не потерять точность решения, не пропустить существенную нелинейность процесса деформирования, например, при нелинейно-упругой или неупругой потере устойчивости, при старте трещины, при контактировании и т.п. После прохождения такого участка требуется снова в автоматическом режиме увеличить нагрузку до максимальной, т.е. реализовать посткризисное состояние.

Для регулирования нагрузок обычно вводится скалярный множитель $\lambda\in[-1,1]$ при векторе нагрузок $\{P\}_0$ (E. Riks), т.е. применяется нагрузка $\lambda\{P\}_0$. Тогда условие равновесия (П6.131-б) заменяется на

$$(\{R\}_0^n)^{(k)}=\lambda(\{P\}_0^n)^{(k)}.\tag{П6.177}$$

Поскольку алгоритмы ограничения нагрузок/перемещений обычно применяют одновременно с методом Ньютона-Рафсона, то, как и в Разделе П6.5.2 данного Приложения, введем вектор погрешности приближения уравнения равновесия (П6.177) в виде

$$\{\psi\}^{(k)}=\lambda^{(k)}(\{P\}_0^n)^{(k)}-(\{R\}_0^n)^{(k)};\quad k=0,1,\dots,\tag{П6.178}$$

где согласно (П6.130-б) $(\{R\}_0^n)^{(k)}=\int\limits_{(\Omega^e)_0}[\tilde{B}]^T(\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0^n)^{(k)}(d\Omega)_0$ зависит от $\{q\}^{(k)}$, поскольку напряжения $(\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0^n)^{(k)}$ прямо зависят от $\{q\}^{(k)}$. Т.е. $\{\psi\}^{(k)}=\{\psi\}^{(k)}(\{q\},\lambda)$.

Согласно методу Ньютона-Рафсона рассмотрим первые члены разложения $\{\psi\}^{(k+1)}$ в ряд, приравняем разложение нулю:

$$\{\psi\}^{(k+1)}\approx\{\psi\}^{(k)}+\left(\frac{\partial\{\psi\}}{\partial\{q\}}\right)^{(k)}\{dq\}+\left(\frac{\partial\{\psi\}}{\partial\lambda}\right)^{(k)}d\lambda=0.\tag{П6.179}$$

Аналогично (П6.145) запишем, что $\left(\frac{\partial\{\psi\}}{\partial\{q\}}\right)^{(k)}\{dq\}\approx-([\underset{\sim}{K}]_0^n)^{(k)}\{dq\}$, а из (П6.178) имеем $\left(\frac{\partial\{\psi\}}{\partial\lambda}\right)^{(k)}d\lambda=(\{P\}_0^n)^{(k)}d\lambda$. С учетом (П6.178) выражение (П6.179) примет вид

$$([\underset{\sim}{K}]_0^n)^{(k)}\{dq\}=\{\psi\}^{(k)}+(\{P\}_0^n)^{(k)}d\lambda=(\lambda^{(k)}+d\lambda)(\{P\}_0^n)^{(k)}-(\{R\}_0^n)^{(k)}.\tag{П6.180}$$

Представим $\{dq\}$ в виде

$$\{dq\}=\{d\overline{q}\}+\{d\overline{\overline{q}}\}d\lambda,\tag{П6.181}$$

где составляющие векторов $\{d\overline{q}\}$ и $\{d\overline{\overline{q}}\}$ соответствуют уравнениям

$$([\underset{\sim}{K}]_0^n)^{(k)}\{d\overline{q}\}=\{\psi\}^{(k)}=\lambda^{(k)}(\{P\}_0^n)^{(k)}-(\{R\}_0^n)^{(k)};\tag{П6.182}$$

$$([\underset{\sim}{K}]_0^n)^{(k)}\{d\overline{\overline{q}}\}=(\{P\}_0^n)^{(k)}.\tag{П6.183}$$

Если (П6.183) умножить на $d\lambda$, а результат сложить с (П6.182), то получим, с учетом (П6.181), выражение (П6.180).

Поскольку в уравнении (П6.181) $\lambda^{(k)}$, $\{d\overline{q}\}$ и $\{d\overline{\overline{q}}\}$ для ($k+1$)-й итерации известны, то имеем уравнение относительно еще неизвестных двух составляющих: $\{dq\}$ и $d\lambda$. Нужно еще одно уравнение. Оно должно отображать некоторый критерий, который позволяет определиться с направлением и законом изменения параметра λ.

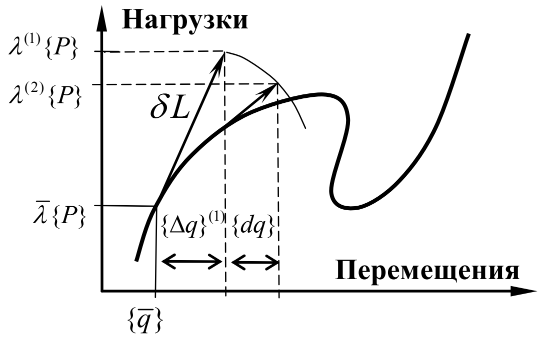

Рис.П6.3. К критерию ограничения нагрузок/перемещений

Были предложены различные критерии: E. Riks (линейный), M.A. Crisfield (сферический), другие, разные модификации. Приведем только один, а именно сферический, как один из применяемых в NX Nastran 7.1.

Примем, что есть решение $\{\overline{q}\}$ на предыдущем этапе нагружения, когда нагрузка была равна $\overline{\lambda}\,\{P\}_0$.

Если как δL обозначить радиус окрестности возле точки, которая характеризует напряженно-деформированное состояние на начало текущего этапа, и этот радиус определяет ограничение для приращения нагрузок, то получим (см. рис.П6.3) так называемый *сферический критерий длины дуги* (**the Spherical Arc-length Criterion**):

$$\left(\lambda-\overline{\lambda}\right)^2\beta^2((\{P\}_0^n)^{(k)})^T(\{P\}_0^n)^{(k)}+(\{q\}-\{\overline{q}\})^T(\{q\}-\{\overline{q}\})=(\delta L)^2, \qquad (П6.184-а)$$

где β – коэффициент нормализации (чтобы сделать одинаковыми размерности). Полная нагрузка (на рис.П6.3 на нее указывает вектор) уменьшается, причем траекторию уменьшения создает *тот же самый вектор* длиной δL.

В выражении (П6.184-а)

$$\lambda=\lambda^{(k+1)}=\overline{\lambda}+\Delta\lambda^{(k)}+d\lambda;\quad \{q\}=\{q\}^{(k+1)}=\{\overline{q}\}+\{\Delta q\}^{(k)}+\{dq\}, \qquad (П6.185)$$

поэтому оно изменяется на

$$(\Delta\lambda^{(k)}+d\lambda)^2\beta^2((\{P\}_0^n)^{(k)})^T(\{P\}_0^n)^{(k)}+(\{\Delta q\}^{(k)}+\{dq\})^T(\{\Delta q\}^{(k)}+\{dq\})=(\delta L)^2. \qquad (П6.184-б)$$

Это и есть второе выражение для определения неизвестных $\{dq\}$ и $d\lambda$. Подставим первое уравнение, а именно (П6.181), в (П6.184-б):

$$(\Delta\lambda^{(k)}+d\lambda)^2\beta^2((\{P\}_0^n)^{(k)})^T(\{P\}_0^n)^{(k)}+$$
$$+(\{\Delta q\}^{(k)}+\{d\overline{q}\}+\{d\overline{\overline{q}}\}d\lambda)^T(\{\Delta q\}^{(k)}+\{d\overline{q}\}+\{d\overline{\overline{q}}\}d\lambda)=(\delta L)^2. \qquad (П6.184-в)$$

После группирования членов при величинах $(d\lambda)^2$ и $d\lambda$ получим квадратичное уравнение относительно $d\lambda$:

$$a\cdot(d\lambda)^2+b\cdot d\lambda+c=0, \qquad (П6.186)$$

где коэффициенты

$$a=\{d\overline{\overline{q}}\}^T\{d\overline{\overline{q}}\}+\beta^2((\{P\}_0^n)^{(k)})^T(\{P\}_0^n)^{(k)};$$
$$b=2\Delta\lambda^{(k)}\beta^2(\{P\}_0^{(k)})^T\{P\}_0^{(k)}+2(\{\Delta q\}^{(k)}+\{d\overline{q}\})^T\{d\overline{\overline{q}}\}; \qquad (П6.187)$$
$$c=(\Delta\lambda^{(k)})^2\beta^2(\{P\}_0^{(k)})^T\{P\}_0^{(k)}+(\{\Delta q\}^{(k)}+\{d\overline{q}\})^T(\{\Delta q\}^{(k)}+\{d\overline{q}\})-(\delta L)^2.$$

Квадратичное уравнение имеет два решения:

$$d\lambda_{1,2}=(-b\pm\sqrt{b^2-4ac})/(2a). \qquad (П6.188)$$

Из них нужно выбрать то, для которого угол между векторами $\{q\}^{(k)}-\{\overline{q}\}$ и $\{q\}^{(k+1)}-\{\overline{q}\}$ меньше 90 градусов, т.е.:

$$\cos\theta=\frac{(\{q\}^{(k)}-\{\overline{q}\})^T(\{q\}^{(k+1)}-\{\overline{q}\})}{\delta L^2}>0. \qquad (П6.189-а)$$

Поскольку, согласно (П6.173-а) $\{q\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k)} + \{dq\}$, а $\{q\}^{(k)} - \{\overline{q}\} = \{\Delta q\}^{(k)}$, то $\{q\}^{(k+1)} - \{\overline{q}\} = \{\Delta q\}^{(k)} + \{dq\}$. Поэтому условие (П6.189-а) запишется как

$$\cos\theta = \frac{(\{\Delta q\}^{(k)})^T (\{\Delta q\}^{(k)} + \{dq\})}{\delta L^2} > 0\,. \qquad (П6.189-б)$$

Если такого значения $d\lambda$ не оказалось, то это означает, что нагрузка $\lambda^{(1)}\{P\}_0^{(1)}$ выбрана неудачно, необходимо уменьшить $\lambda^{(1)} = \overline{\lambda} + \Delta\lambda^{(1)}$.

Если оказалось, что

$$(\{q\}^{n-1} - \{q\}^{n-2})^T \{\Delta\overline{\overline{q}}\} < 0\,, \qquad (П6.190)$$

т.е. жесткость тела падает, то необходимо изменить знак при $\Delta\lambda^{(k)}$ на противоположный (начать разгрузку). Здесь (и ниже) верхний индекс n обозначает номер шага нагрузки, а значения соответствуют решениям на указанных этапах.

Еще необходимо следить за тем, чтобы было $\lambda^{(k)} \le 1$. При $\lambda^{(k)} = 1$ имеем обычный итерационный процесс Ньютона-Рафсона.

Начальное значение δL можно выбирать по формуле Рикса

$$\delta L^2 = (\Delta\lambda^{(1)})^2 \left[\{\Delta\overline{\overline{q}}\}^T \{\Delta\overline{\overline{q}}\} + \beta^2 ((\{P\}_0^n)^{(1)})^T (\{P\}_0^n)^{(1)} \right], \qquad (П6.191)$$

причем величина

$$\Delta\lambda^{(1)} = 1/m\,, \qquad (П6.192)$$

где m – количество шагов, которое может изменять (задавать) пользователь.

На дальнейших этапах нагружения величина δL подбирается: уменьшается при большой нелинейности (при значительном количестве итераций на этапах), и наоборот. Еще учитывается изменение жесткости тела. Предыдущее (старое) значение δL_{old} масштабируется:

$$\delta L_{new} = \mu\,\delta L_{old}\,. \qquad (П6.193)$$

Например, коэффициент влияния количества итераций рекомендуется определять по формуле

$$\mu_I = \sqrt{I_d / I_r}\,, \qquad (П6.194)$$

где I_d – желательное количество итераций для сходимости; I_r – реальное (на предыдущем этапе нагружения); а коэффициент влияния изменения жесткости тела – по формуле

$$\mu_K = \frac{K_{old}}{K_{new}} = \left| \frac{(\{q\}^n - \{q\}^{n-1})^T (\{R\}_0^{n-1} - \{R\}_0^{n-2})}{(\{q\}^{n-1} - \{q\}^{n-2})^T (\{R\}_0^n - \{R\}_0^{n-1})} \right|. \qquad (П6.195-а)$$

Эту формулу можно переписать в более привлекательном виде:

$$\mu_K = \left| \frac{\Delta\lambda^{n-1} / \delta L^{n-1}}{\Delta\lambda^n / \delta L^n} \right| = \left| \frac{\Delta\lambda^{n-1}\delta L^n}{\Delta\lambda^n \delta L^{n-1}} \right|. \qquad (П6.195-б)$$

Если μ_I и μ_K одновременно превышают единицу, то из двух этих значений выбирается минимальное, т.е. $\mu = \min\{\mu_I, \mu_K\}$; и, наоборот, при значениях, меньших единицы, выбирается максимальное, т.е. $\mu = \max\{\mu_I, \mu_K\}$. Если эти условия не выполняются, то принимается $\mu = 1$. Кроме того, масштабный коэффициент нужно ограничивать некоторым диапазоном, например, $\mu \in [0.25,\, 4]$, а также следить, чтобы $\lambda^{(k)} \le 1$. Если в расчетах получили $\lambda^{(k)} > 1$, то необходимо отказаться от процедуры ограничения нагрузки или уменьшить δL. Если итерационный процесс не сходится, то необходимо значительно уменьшить δL, например, в два или четыре раза. Все это реализовано в NX Nastran 7.1 (и более ранних версиях Nastran).

П6.7 Заключительные замечания

В завершении раздела отметим следующее:

- в NX Nastran алгоритмы (П6.147) носят название алгоритмами *континуальной механики возрастающей **TL**– и **UL**-формулировки* (**Continuum Mechanics Incremental Total and Updated Lagrangian Formulations**);
- основной публикацией, на которую ссылается „**Help**" по этому вопросу, является книга [69];
- обозначения в этом разделе иногда значительно отличаются от обозначений, примененных в „**Help**" NX Nastran и в книге [69]. Причиной этого являются старания автора упростить обозначения, а также сохранить одинаковую систему обозначений для всех Приложений, в которых излагается теоретические основы.