

Приложение 7

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ. ДИНАМИКА (теория)

П7.1 Постановка краевой динамической задачи термоупругости

Постановка краевой динамической задачи термоупругости с вязким трением (демпфированием) в большинстве моментов совпадает с постановками краевой (квази)статической задачи термоупругости (см. Приложение 5), поэтому обратим внимание лишь на различия.

Примечание П7.1. Динамические краевые задачи рассматривают в теории колебаний. Это очень значительный объем информации. Здесь приводятся лишь основные сведения.

Обычно задаются начальные условия для перемещений и скоростей, т.е. при $t_0 = 0$:

$$U_m(\vec{x}, 0) = \hat{U}_m(\vec{x}); \quad (П7.1)$$

$$\frac{\partial U_m(\vec{x}, 0)}{\partial t} = \hat{g}_m(\vec{x}). \quad (П7.2)$$

Уравнение равновесия (Д5.2) с применением принципа Даламбера меняется на полное уравнение движения с учетом демпфирования:

$$\nabla_n \sigma_{mn} + \hat{O}_m = \bar{\rho} \frac{\partial^2 U_m}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial U_m}{\partial t} \quad \text{или} \quad \nabla_n \sigma_{mn} + \hat{O}_m = \bar{\rho} \ddot{U}_m + \alpha \dot{U}_m. \quad (П7.3)$$

Систему уравнений динамической термоупругости и естественные граничные условия (Д5.46) можно выразить через компоненты тензора малых перемещений:

$$\nabla_n \left\{ E_{mnij}(T) \left[\frac{1}{2} (\nabla_i U_j + \nabla_j U_i) \right] \right\} - \bar{\rho} \ddot{U}_m - \alpha \dot{U}_m = \nabla_n E_{mnij}(T) \delta_{ij} \alpha_T \Delta \hat{T} - \hat{O}_m; \quad (П7.4)$$

$$\left\{ E_{mnij}(T) \left[\frac{1}{2} (\nabla_i U_j + \nabla_j U_i) \right] \right\} \nu_n = E_{mnij}(T) \delta_{ij} \alpha_T \Delta \hat{T} \nu_n + \hat{P}_m. \quad (П7.5)$$

В совокупности с ГУ (Д5.45), (П7.5) и начальными условиями (П7.1) и (П7.2) уравнение (П7.4) является системой дифференциальных уравнений в точке тела относительно перемещений, решение которой дает описание изменения напряженно-деформированного состояния (НДС) во времени. Очевидно, что в операторном виде она может быть записана как:

$$M\ddot{\vec{U}} + C\dot{\vec{U}} + K\vec{U} = \vec{f}. \quad (П7.6)$$

При вариационной постановке динамической задачи можно использовать вариационный принцип Лагранжа, если в качестве объемной силы рассматривать $\bar{O}_m = \hat{O}_m - \bar{\rho} \ddot{U}_m - \alpha \dot{U}_m$, т.е. в соответствии с принципом Даламбера уравновесить тело инерционной и демпфирующей силой. Как и для краевой задачи термоупругости, снова получаем функционал (Д5.47).

Динамическая задача в общей постановке решается не всегда, а лишь в случаях анализа переходных гармонических процессов и когда возбуждающие силы не являются гармоническими. Существует некоторое „критическое” значение коэффициента демпфирования, при превышении которого колебаний в системе возникнуть не может. При его уменьшении начинают реализовываться низшие формы колебаний.

П7.2 Конечно-элементная аппроксимация краевой динамической задачи

Изложенное в Разделе Д5.2 повторяется (но необратимые деформации отсутствуют) до формулы (Д5.53), вместо которой, учитывая (П7.3), запишем:

$$\begin{aligned}
 F = & \sum_e \int_{\Omega^e} \{\delta q\}_e^T [B]^T [D] ([B]\{q\}_e - \{\alpha_T\} \Delta \hat{T}) d\Omega - \\
 & - \sum_e \int_{\Omega^e} \{\delta q\}_e^T [\phi]^T \{\hat{O}\} d\Omega + \sum_e \int_{\Omega^e} \{\delta q\}_e^T [\phi]^T \bar{\rho} \frac{\partial^2 ([\phi]\{q\}_e)}{\partial t^2} d\Omega + \\
 & + \sum_e \int_{\Omega^e} \{\delta q\}_e^T [\phi]^T \alpha \frac{\partial ([\phi]\{q\}_e)}{\partial t} d\Omega - \sum_e \int_{S_p^e} \{\delta q\}_e^T [\phi]^T \{\hat{P}\} dS - \{\delta q\}_e^T [\phi]^T \{\hat{R}\} = 0, \quad (\text{П7.7})
 \end{aligned}$$

где, как и ранее, $\{q\}_e = \{q(t)\}_e$. В (П7.7) матрица базисных функций $[\phi]$ не зависит от времени, а векторы $\{\delta q\}_e$ и $\{q\}_e$ не зависят от параметров интегрирования и их можно вынести за границы интегралов (как обычные константы). Поэтому (П7.7) запишем в виде:

$$\begin{aligned}
 F = & \sum_e \{\delta q\}_e^T \left(\int_{\Omega^e} \bar{\rho} [\phi]^T [\phi] d\Omega \cdot \frac{d^2 \{q\}_e}{dt^2} + \int_{\Omega^e} \alpha [\phi]^T [\phi] d\Omega \cdot \frac{d \{q\}_e}{dt} + \int_{\Omega^e} [B]^T [D] [B] d\Omega \cdot \{q\}_e \right) + \\
 & + \sum_e \{\delta q\}_e^T \left(- \int_{\Omega^e} [\phi]^T \{\hat{O}\} d\Omega - \int_{S_p^e} [\phi]^T \{\hat{P}\} dS - \int_{\Omega^e} [B]^T [D] \{\alpha_T\} \Delta \hat{T} d\Omega - [\phi]^T \{\hat{R}\} \right) = 0. \quad (\text{П7.8})
 \end{aligned}$$

Обозначим:

$$[M]_e = \int_{\Omega^e} \bar{\rho} [\phi]^T [\phi] d\Omega; \quad [C]_e = \int_{\Omega^e} \alpha [\phi]^T [\phi] d\Omega. \quad (\text{П7.9})$$

Используя обозначения (П7.9), (Д5.67) ... (Д5.69), из (П7.8) получим, что

$$F = \sum_e \{\delta q\}_e^T \left([M]_e \frac{d^2 \{q\}_e}{dt^2} + [C]_e \frac{d \{q\}_e}{dt} + [K]_e \{q\}_e - \{P\}_e - \{Q\}_e \right) = 0. \quad (\text{П7.10})$$

Поскольку вектор вариаций перемещений $\{\delta q\}_e^T$ произволен, то получаем САУ вида

$$[M] \frac{d^2 \{q(t)\}}{dt^2} + [C] \frac{d \{q(t)\}}{dt} + [K] \{q(t)\} = \{P(t)\} + \{Q(t)\} = \{f(t)\}, \quad (\text{П7.11-а})$$

или в другом обозначении

$$[M] \{\ddot{q}(t)\} + [C] \{\dot{q}(t)\} + [K] \{q(t)\} = \{f(t)\} \quad (\text{П7.11-б})$$

относительно глобального вектора действительных перемещений $\{q(t)\}$ в узлах конечно-элементной сетки, дополнительно учитывая кинематические ГУ из (Д5.32) и начальные условия (П7.1) и (П7.2). Эту САУ еще необходимо аппроксимировать во времени.

В NX Nastran различают два типа демпфирования: внутреннее (**internal**) и внешнее (**external**); каждое из них формирует свою матрицу: $[C_I]$ и $[C_E]$ соответственно. Поэтому матрица $[C] = [C_I] + [C_E]$.

П7.3 Конечно-элементное решение краевых динамических задач

Существует несколько характерных вариантов краевых динамических задач. Все они являются особыми случаями сформулированной выше краевой динамической задачи.

П7.3.1 Непосредственное решение динамического уравнения

П7.3.1.1 Метод Ньюмарка

В качестве одного из вариантов непосредственного решения динамического уравнения (П7.11) в NX Nastran применена рекуррентная трехслойная схема второго порядка аппроксимации по методу Ньюмарка (1959 г.), которая имеет вид:

$$\begin{aligned}
 & ([M] + 0.5\Delta t_n [C] + (0.5\Delta t_n)^2 [K]) \{q\}^{(2n+2)} = \\
 & = 2([M] - (0.5\Delta t_n)^2 [K]) \{q\}^{(2n+1)} - ([M] - 0.5\Delta t_n [C] + (0.5\Delta t_n)^2 [K]) \{q\}^{(2n)} + \\
 & + (0.5\Delta t_n)^2 [\{f\}^{(2n+2)} + 2\{f\}^{(2n+1)} + \{f\}^{(2n)}]. \quad n = 0, 1, \dots \quad (\text{П7.12})
 \end{aligned}$$

П7.3.1.2 Явный центрально-разностный алгоритм

Другой вариант непосредственного решения динамического уравнения (П7.11) в NX Nastran – явный центрально-разностный алгоритм – CDM.

Алгоритм CDM является особым случаем разностной схемы. В ней используются разностные операторы второго порядка приближения:

$$\{\ddot{q}\}^n \approx \frac{\{q\}^{n+1} - 2\{q\}^n + \{q\}^{n-1}}{\Delta t^2}; \quad \{q\}^n \approx \frac{\{q\}^{n+1} - \{q\}^{n-1}}{2\Delta t}. \quad (\text{П7.13})$$

Если $[K]\{q\}$ аппроксимировать выражением $[K](\{q\}^{n+1} + \{q\}^{n-1})/2$, то разностная схема

$$(a_0[M] + a_1[C] + 0.5[K])\{q\}^{n+1} = [M](a_2\{q\}^n - a_0\{q\}^{n-1}) + [C]a_1\{q\}^{n-1} - [K]0.5\{q\}^{n-1} + \{f\}^n \quad (\text{П7.14})$$

получает абсолютную устойчивость. Введенные коэффициенты:

$$a_0 = 1/\Delta t^2; \quad a_1 = 1/(2\Delta t); \quad a_2 = 2a_0. \quad (\text{П7.15})$$

Если суммарная матрица $a_0[M] + a_1[C]$ является диагональной или такой, что легко обращается или приводится к диагональному виду, а также если в (П7.11-б) составляющую $[K]\{q\}$ можно аппроксимировать выражением $[K]\{q\}^n$, то схема (П7.14) записывается в виде явной (рекуррентной) схемы:

$$\{q\}^{n+1} = (a_0[M] + a_1[C])^{-1} \left((a_2[M] - [K])\{q\}^n - (a_0[M] - a_1[C])\{q\}^{n-1} + \{f\}^n \right), \quad (\text{П7.16})$$

которую называют *явным центрально-разностным алгоритмом* – CDM. Эта схема имеет условную устойчивость, т.е. временной шаг ограничен сверху: $\Delta t \leq T_n/\pi$, где T_n – наименьший из периодов собственных колебаний тела. Это очень жесткое ограничение, которое нельзя проигнорировать, но большое количество шагов компенсируется отсутствием действий по сборке и решению СЛАУ с недиагональной матрицей.

В NX Nastran 7.1 для того, чтобы матрица $a_0[M] + a_1[C]$ была диагональной, введено ограничение: $[C] = \alpha[M]$ (демпфирование Релея). Тогда матрица $a_0[M] + a_1[C] = (a_0 + \alpha a_1)[M]$.

П7.3.1.3 Решение на первом временном шаге

Чтобы сохранить второй порядок аппроксимации по времени на первом временном шаге, вычислим $\{q\}^{(1)}$ как результат разложения в ряд Тейлора в окрестности $t = 0$ на шаге Δt_n с нужной точностью:

$$\{q\}^{(1)} = \{q\}^{(0)} + \Delta t_n \{\dot{q}\}^{(0)} + \Delta t_n^2 \{\ddot{q}\}^{(0)}/2 + O(\Delta t_n^3). \quad (\text{П7.17})$$

Из начальных условий известно, что $\{q\}^{(0)} = \{\widehat{U}\}$ и $\{\dot{q}\}^{(0)} = \{\widehat{g}\}$ (см. (П7.1) и (П7.2)). Учитывая, что согласно основному уравнению (П7.11)

$$\{\ddot{q}\} = [M]^{-1}(-[C]\{\dot{q}\} - [K]\{q\} + \{f\}), \quad (\text{П7.18})$$

из (П7.17) получим

$$\{q\}^{(1)} \approx \{\widehat{U}\} + \Delta t_n \{\widehat{g}\} + \Delta t_n^2 [M]^{-1}(-[C]\{\widehat{g}\} - [K]\{\widehat{U}\} + \{f\}^{(0)})/2 + O(\Delta t_n^3) \quad (\text{П7.19-а})$$

или, если пренебречь членами второго порядка аппроксимации:

$$\{q\}^{(1)} \approx \{\widehat{U}\} + \Delta t_n \{\widehat{g}\} + O(\Delta t_n^2). \quad (\text{П7.19-б})$$

Итак, прежде чем использовать трехслойную схему (П7.12) или (П7.16), необходимо прежде всего применить одно из выражений (П7.19), которые на первом временном шаге обеспечивают второй и третий порядок аппроксимации во времени. Для того, чтобы можно было быстро обратить матрицу $[M]$, ее обычно при интегрировании по формуле (П7.9) диагонализуют (создается lumped-матрица). Хотя процесс диагонализации – приближенный, применение (П7.19-а) дает повышенную точность $O(\Delta t_n^3)$ при относительно незначительных затратах времени, что хорошо влияет на точность дальнейшего решения.

П7.3.2 Задача о собственных частотах и формах колебаний

Рассматривается нетривиальное решение уравнения (П7.11) при отсутствии внешних влияний и переменных кинематических граничных условий, т.е. уравнение

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [C]\{\dot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = \{0\}. \quad (\text{П7.20})$$

Примечание П7.2. Для некоторых задач очень важно учесть влияние напряженного состояния на собственные частоты и формы колебаний. Например, растяжение лопатки газотурбинного двигателя от центробежных массовых сил. В этом случае нужно в уравнении (П7.20) вместо матрицы $[K]$ использовать матрицу $([K] + [K_\sigma])$, где матрица геометрической жесткости $[K_\sigma]$ соответствует формуле (Д5.99). Для ее построения необходимо иметь решение краевой задачи как статической. Поэтому тогда сначала решается статическая задача при заданных силовых нагрузках и граничных условиях 1-го рода, а потом находятся собственные частоты и формы колебаний.

П7.3.2.1 Решение при отсутствии демпфирования

Из (П7.20) без учета демпфирования

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = \{0\}. \quad (\text{П7.21})$$

Решение можно искать в виде

$$\{q(t)\} = \{A\} \cos(\omega t + \beta), \quad (\text{П7.22})$$

где $\{A\}$ – вектор амплитудных значений узловых перемещений; $\omega = 2\pi f$ – круговая частота, β – фаза колебаний. После прямой подстановки (П7.22) в (П7.21) и сокращения на $\cos(\omega t + \beta)$ получим САУ:

$$(-\omega^2[M] + [K])\{A\} = \{0\}. \quad (\text{П7.23})$$

В этой системе ненулевые значения компонент $\{A\}$ возможны лишь при условии, что

$$\det[[K] - \omega^2[M]] = 0. \quad (\text{П7.24})$$

Если квадратные матрицы $[M]$ и $[K]$ положительно определены, что обычно для задачи линейной упругости, то уравнение (П7.24) имеет N неотрицательных решений – собственных частот ω_k , причем возможны парные значения (здесь N – количество неизвестных в САУ (П7.23)).

Имея N значений собственных частот ω_k , решение системы (П7.21) можно искать в виде линейной комбинации из N выражений (П7.22):

$$\{q(t)\} = \sum_{k=1}^N \{A\}_k \cdot \cos(\omega_k t + \beta_k). \quad (\text{П7.25})$$

Поскольку значения компонент собственных векторов $\{A\}_k$ могут быть найдены не однозначно, а с точностью до постоянного множителя, то обычно их нормируют по правилу:

$$\{A\}_k^T [M] \{A\}_k = 1. \quad (\text{П7.26})$$

Доказано, что собственные векторы $\{A\}_k$ ортогональны относительно матриц $[M]$ и $[K]$, т.е.

$$\{A\}_k^T [M] \{A\}_m = 0; \quad \{A\}_k^T [K] \{A\}_m = 0; \quad k \neq m. \quad (\text{П7.27})$$

Еще можно отметить, что обычно ищутся не все корни уравнения (П7.24), а несколько (обозначим как N_a) наименьших значений, поскольку только при низших собственных частотах амплитуды колебаний имеют относительно большие значения. Иначе говоря, несколько первых собственных частот и форм колебаний достаточно для получения удовлетворительного приближения решения (П7.25). Для этого разработано несколько алгоритмов, лучшие из них используются в NX Nastran.

П7.3.2.2 Решение при наличии демпфирования

Решение системы (П7.20) ищется в виде

$$\{q(t)\} = \{A\} \cdot e^{\lambda t}, \quad (\text{П7.28})$$

После прямой подстановки (П7.28) в (П7.20) и сокращения на $e^{\lambda t}$ получим:

$$(\lambda^2[M] + \lambda[C] + [K])\{A\} = \{0\}. \quad (\text{П7.29})$$

В этой системе ненулевые значения компонент $\{A\}$ возможны лишь при условии, что

$$\det[\lambda^2[M] + \lambda[C] + [K]] = 0. \quad (\text{П7.30})$$

Решение этого уравнения в общем случае дает $2N$ корней λ_n , среди которых есть действительные $\lambda_n = -h_n \pm a_n$ и попарно-комплексные $\lambda_n = -h_n \pm i\bar{\omega}_n$. Действительные корни – это следствие демпфирования, превышающего критическое, когда колебаний нет. Действительная часть корней, обозначенная как h_n , является n -м коэффициентом демпфирования, а мнимая часть попарно-комплексного корня $\bar{\omega}_n$ – круговой частотой тела с имеющимся демпфированием. Среди собственных форм также будут действительные и попарно-комплексные формы. Получить такое решение значительно сложнее, чем для (П7.24). Для этого тоже разработано несколько методов, три из них используются в NX Nastran.

П7.3.3 Решение динамического уравнения с применением метода разложения решения по собственным формам колебаний (модальное решение)

Вместо (П7.25) вектор узловых перемещений можно представить в виде разложения

$$\{q(t)\} \approx \sum_{k=1}^{Na} (\{A\}_k \cdot u_k(t)), \quad (\text{П7.31})$$

которое дает точное значение при $Na = N$. Подставив (П7.31) в (П7.11), умножим полученное выражение слева на $\{A\}_m^T$ и, используя свойства (П7.27), т.е. ортогональности форм собственных колебаний, получим систему уравнений относительно функций $u_m(t)$:

$$M_m \ddot{u}_m + \{A\}_m^T [C] \{A\}_k \dot{u}_k + K_m u_m = F_m(t), \quad (\text{П7.32})$$

где обозначено: $M_m = \{A\}_m^T [M] \{A\}_m$; $K_m = \{A\}_m^T [K] \{A\}_m$; $F_m = \{A\}_m^T \{f\}$.

Эта система в общем случае может быть проинтегрирована аналогично изложенному в Разделе П7.3.2 или другим способом.

Бывают случаи, когда $\{A\}_k^T [C] \{A\}_m = 0$ при $k \neq m$, например, когда матрицу $[C]$ можно представить в виде линейной комбинации матриц $[M]$ и $[K]$. Тогда (П7.32) упрощается до Na не связанных между собой уравнений

$$M_m \ddot{u}_m + C_m \dot{u}_m + K_m u_m = F_m(t), \quad (\text{П7.33})$$

где $C_m = \{A\}_m^T [C] \{A\}_m$. Функции $u_k(t)$ для (П7.31) теперь можно искать в виде

$$u_m(t) = U_m \cdot e^{i\omega t}, \quad (\text{П7.34})$$

где $i = \sqrt{-1}$; ω – круговая частота. Из (П7.33) получим Na не связанных между собой уравнений

$$(-\omega^2 M_m + i\omega C_m + K_m) \cdot U_m = F_m(t) \cdot e^{-i\omega t} \quad (\text{П7.35})$$

относительно функций U_m . Амплитудно-частотными характеристиками $W_m(\omega)$ (АЧХ, или передаточными функциями) называют выражения, соответствующие отношению реакции U_m к входному сигналу $F_m(t) \cdot e^{-i\omega t}$. Из (П7.35) в этом случае АЧХ вычисляются по формуле

$$W_m(\omega) = 1/(-\omega^2 M_m + i\omega C_m + K_m). \quad (\text{П7.36})$$

Потом, согласно формуле (П7.34), функции $u_k(t)$ находятся как

$$u_m(t) = W_m(\omega) \cdot F_m(t). \quad (\text{П7.37})$$

Итак, когда АЧХ известны, то для нахождения $\{q(t)\}$ последовательно применяют формулы (П7.37) и (П7.31). Если диссипация энергии не учитывается, то матрица $[C]$ и ее компоненты в приведенных выше уравнениях отсутствуют.

Функция-решение $u_m(t)$ – комплексная. Ее можно представить в виде:

$$u_m(t) = \text{Re}(u_m(t)) + i \cdot \text{Im}(u_m(t)) = |u_m(t)| e^{i\phi}, \quad (\text{П7.38})$$

где $|u_m(t)|$ – амплитуда; $\phi = \arctg(\text{Im}(u_m(t))/\text{Re}(u_m(t)))$ – фаза колебательного процесса.

П7.3.4 Задача о стохастическом возбуждении тела

Довольно часто в природе возбуждение тела является случайным (вероятностным, стохастическим). Например, возбуждение сооружений при землетрясении, автомобилей – при передвижении мостовой, сооружений – ветровыми нагрузками, кораблей – морскими волнами. Отклик тела на возбуждение всегда детерминирован. Но реализация случайного возбуждения заведомо неизвестна, поэтому оценки можно делать сугубо статистически (плотность распределения случайной функции, стандартное отклонение, вероятность превышения некоторого значения и т.п.). Точные решения требуют бесконечного количества оценок. В NX Nastran применяют один из *корреляционных* методов, который дает довольно хорошее приближение – метод *моментов* с корреляционной функцией *второго* порядка. Он ограничивается лишь двумя оценками: *математическим ожиданием* m_q и *корреляционной функцией* K_q , которая в свою очередь является математическим ожиданием от двух отцентрированных случайных функций:

$$m_q(t) = M(q(t)); \quad K_q(t_1, t_2) = M(\tilde{q}(t_1), \tilde{q}(t_2)); \quad \tilde{q}(t) = q(t) - m_q(t), \quad (\text{П7.39})$$

где $M()$ – оператор усреднения; t_1 и t_2 – случайные значения времени. Доказано, что в этих двух функциях содержится значительная часть информации о случайном процессе.

Если m_q – постоянная величина, а все другие статистические характеристики – неизменны относительно некоторой величины сдвига во времени $\tau = t_1 - t_2$, то корреляционная функция зависит лишь от этого сдвига во времени: $K_q(t_1, t_2) = K_q(\tau)$. Такие случайные колебания называют *стационарными*. Они могут определяться лишь одной неслучайной функцией – *спектральной плотностью* $S_q(\omega)$, которая является дисперсией, приходящейся на единицу длины частотного интервала, т.е.:

$$S_q(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} K_q(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau; \quad K_q(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_q(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (\text{П7.40})$$

Почти все стационарные случайные нагрузки соответствуют условиям *эргодичности*. Это означает, что достаточно длинная реализация этих нагрузок несет в себе всю информацию об их статистических свойствах. Поэтому для эргодических процессов осреднение по ансамблю реализаций может быть заменено осреднением во времени.

Итак, достаточно знать АЧХ всех точек тела, чтобы найти их мгновенные отклики. Поэтому в NX Nastran при стохастическом возбуждении тела для m -го отклика результирующая спектральной плотности реакции (действительное число) рассчитывается как

$$S_m(\omega) = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} (W_m(\omega))_{\alpha} \cdot (\overline{W_m(\omega)})_{\beta} \cdot S_{\alpha\beta}(\omega), \quad (\text{П7.41})$$

где $W_m(\omega)$ – соответствующая АЧХ; α и β означают два состояния нагрузки; черта указывает на комплексно-сопряженное значение; $S_{\alpha\beta}(\omega)$ – функция спектральной плотности возбуждения (**Power Spectral Density**, сокращенно **PSD**).

В таблице П7.1 представлены некоторые аналитические выражения для $K(\tau)$ и $S(\omega)$, а также их графический вид. Случаи 1 и 2 соответствуют процессам с монотонно уменьшающейся спектральной плотностью. Случаи 3 и 4 можно применять для описания процессов с частотами ω , которые преобладают и близки к β . Случай 5 соответствует равномерному распределению энергии для частотного диапазона $|\omega| < \omega_b$. Случай 6 – „белый шум”, можно рассматривать как случай 5 при $\omega_b \rightarrow \infty$. Такой процесс имеет бесконечную энергию, поэтому является абстракцией.

Таблица П7.1 – $K(\tau)$ и $S(\omega)$ для стационарных случайных процессов

№	Корреляционная функция $K(\tau)$	Спектральная плотность $S(\omega)$
1	$K_0 e^{-\gamma \tau }$	$2\gamma K_0 / [\pi(\gamma^2 + \omega^2)]$
2	$K_0 e^{-(\gamma^2 \tau^2)/4}$	$\frac{2K_0}{\gamma\sqrt{\pi}} e^{-(\omega/\gamma)^2}$
3	$K_0 e^{-\gamma \tau } \cos \beta\tau$	$\frac{2\gamma K_0}{\pi} \frac{\omega^2 + \beta^2 + \gamma^2}{(\omega^2 - \beta^2 - \gamma^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}$
4	$K_0 e^{-\gamma \tau } \left(\cos \beta\tau + \frac{\gamma}{\beta} \sin \beta \tau \right)$	$\frac{2\gamma K_0}{\pi} \frac{\beta^2 + \gamma^2}{(\omega^2 - \beta^2 - \gamma^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}$
5	$K_0 \frac{\sin \omega_b \tau}{\omega_b \tau}$	$\frac{K_0}{\omega_b} \text{ при } \omega < \omega_b \text{ и } 0 \text{ при } \omega > \omega_b$
6	$K_1 \delta(\tau)$	K_1 / π

В старых версиях Nastran спектральная плотность реакции при стохастическом возбуждении вычислялась только для указанных узлов и их степеней свободы. После 2000 года в Nastran появилась дополнительная возможность построения ее *среднеквадратичного* значе-

ния \bar{u}_m (RMS), которое может быть получено или как интеграл или как численное приближение (аппроксимация)

$$\bar{u}_m = \sqrt{\int_f |S_{mf}| df} \cong \sqrt{\sum_f C_f S_m}, \quad (\text{П7.42})$$

от трапецидального метода интегрирования, где частотно-зависимые коэффициенты S_{mf} (при $f = f_m$) умножены на частотные коэффициенты:

$$C_{f_i} = (f_{i+1} - f_{i-1})/2 \text{ при } 1 < i < N; \quad C_{f_1} = (f_2 - f_1)/2; \quad C_{f_N} = (f_N - f_{N-1})/2. \quad (\text{П7.43})$$

Чувствительность конструкции – производная среднеквадратичного значения \bar{u}_m по каждой переменной проекта. Чувствительность имеем для ускорения, скорости и векторов смещения. Фактически производные рассчитаны от конечных приращений спектральной чувствительности $\Delta S_m^x(\omega)$, которые, в свою очередь, получены от малых разностей в векторных величинах $\Delta W_{m\alpha}^x$. Из уравнения (П7.42) можно получить:

$$\Delta \bar{u}_m^x = \frac{1}{2\bar{u}_m^x} \sum_f C_f \cdot \Delta S_{mf}^x, \quad (\text{П7.44})$$

где из формулы (П7.41):

$$\Delta S_{mf}^x = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} S_{\alpha\beta} \cdot (\Delta W_{m\alpha} \cdot W_{m\alpha}^* + W_{m\alpha} \cdot \Delta W_{m\alpha}^*). \quad (\text{П7.45})$$

Здесь $\Delta W_{m\alpha}^x$ вычислены для каждого значения x . Из правой части (П7.45) для ΔS_{mf}^x выбирается действительная часть.

П7.4 Динамическая задача при наличии гироскопических сил

Известно, что вследствие вращения тела вокруг локальной оси в его точках возникают вращательное и центростремительное ускорения, а вследствие перемещения локальной оси вращения – еще и Кориолиса. Эти ускорения в свою очередь вызывают силы, а силы – деформации тела и реакции связей. Кроме того, возможно возникновение резонанса. Поэтому возникает потребность в соответствующих расчетах.

Лишь один из характерных примеров: самолет с одним или несколькими газотурбинными двигателями выполняет вираж. И сам двигатель, и система его крепления, и фюзеляж самолета, и его оперение нагружаются дополнительными силами, которые могут разрушить конструкцию. Такую задачу удобно формулировать с применением таких терминов, как скорость самолета, радиус виража, углы вращения, скорость вращения ротора и т.п. Поэтому желательно иметь такую постановку задачи, которая непосредственно воспринимает подобные параметры.

Как известно из курса теоретической механики, при сложном движении точки тела есть смысл вводить *абсолютную* (неподвижную) систему координат $O'\vec{x}'$ и *локальную* (подвижную) систему координат $O\vec{x}$, тесно связанную с телом. Тогда движение точки тела можно рассматривать как *абсолютное* (в системе $O'\vec{x}'$) и *локальное* (в системе $O\vec{x}$). Движение локальной системы координат относительно абсолютной называют *переносным* (тело как бы переносится вместе с ней).

Согласно формуле Бура абсолютная производная по времени $\dot{\vec{R}} = d\vec{R}/dt$ произвольного вектора \vec{R} состоит из локальной производной $\dot{\vec{R}}_{O\vec{x}} = (d\vec{R}/dt)_{O\vec{x}}$ и векторного произведения $\vec{\omega} \times \vec{R}$, где $\vec{\omega}$ является вектором угловой скорости вращения подвижной системы координат относительно неподвижной. Т.е. $\dot{\vec{R}} = \dot{\vec{R}}_{O\vec{x}} + \vec{\omega} \times \vec{R}$.

Согласно теореме о сложении скоростей *абсолютная* скорость \vec{v}_a точки при сложном движении равна векторной сумме *относительной* \vec{v}_r и *переносной* \vec{v}_e скоростей, т.е. $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$.

Согласно теореме Кориолиса о сложении ускорений абсолютное ускорение \vec{a}_a точки при сложном движении равно векторной сумме относительного \vec{a}_r , переносного \vec{a}_e ускорения и ускорения Кориолиса \vec{a}_C , т.е. $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_C$.

Ускорение Кориолиса вычисляется как $\vec{a}_C = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$, где вектор угловой скорости вращения $\vec{\omega}_e$ характеризует *переносное* движение.

Если тело может деформироваться, то текущую координату точки можем определять как $\vec{R} = \vec{r} + \vec{U}$, где \vec{r} указывает на абсолютную координату точки без учета деформирования, а \vec{U} – перемещение точки, непосредственно связанное с деформациями. Очевидно, что $\dot{\vec{r}}_{Ox} = 0$ и $\dot{\vec{R}}_{Ox} = \dot{\vec{U}}$. Тогда из формулы Бура абсолютная скорость точки тела

$$\vec{v}_a = \dot{\vec{R}} = \dot{\vec{R}}_{Ox} + \vec{\omega} \times (\vec{r} + \vec{U}) = \dot{\vec{U}} + \vec{\omega} \times (\vec{r} + \vec{U}). \quad (\text{П7.46})$$

Производная по времени дает абсолютное ускорение:

$$\vec{a}_a = \ddot{\vec{U}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{U}) + 2(\vec{\omega} \times \dot{\vec{U}}). \quad (\text{П7.47})$$

Уравнение равновесия (Д5.2) с применением принципа Даламбера заменяется на полное уравнение движения с учетом демпфирования:

$$\nabla_n \sigma_{mn} + \vec{O}_m = \bar{\rho}(a_m)_a + \alpha(v_m)_a. \quad (\text{П7.48})$$

Поскольку в системе уравнений (П7.1) ... (П7.5) изменились лишь $\dot{\vec{U}}$ на \vec{v}_a и $\ddot{\vec{U}}$ на \vec{a}_a , то вместо системы (П7.6), а именно $M\ddot{\vec{U}} + C\dot{\vec{U}} + K(\vec{U}) = \vec{f}$, будет получена система

$$M\vec{a}_a + C\vec{v}_a + K(\vec{U}) = \vec{f}. \quad (\text{П7.49})$$

Если теперь в (П7.49) подставить выражения (П7.46) и (П7.47), а также применить МКЭ, то окончательно можно получить систему уравнений

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + (2\omega[\bar{M}] + [\bar{C}])\{\dot{q}(t)\} + (\omega^2[\underline{M}] + \omega[\underline{C}] + [K])\{q(t)\} = \{\underline{f}(t)\}, \quad (\text{П7.50})$$

где как $[\bar{M}]$, $[\bar{C}]$, $[\underline{M}]$, $[\underline{C}]$ и $\{\underline{f}(t)\}$ обозначены новые матрицы и вектор нагрузки (не рассматриваем).

Если нет перемещений локальной оси вращения, то система уравнений (П7.50) немного упрощается.

Именно такие системы описывают введенный в XN Nastran объект с названием „роторный регион”. При заданной угловой скорости вращения ω собираются такие системы для „роторных регионов”, они встраиваются в общую систему для всего тела, ищется решение сформулированной задачи. В общем случае ω может изменяться во времени, т.е. $\omega = \omega(t)$.