МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
"КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО"
МЕХАНІКО-МАШИНОБУДІВНИЙ ІНСТИТУТ
КАФЕДРА ДИНАМІКИ І МІЦНОСТІ МАШИН ТА ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання курсової роботи
з дисципліни
"Числові методи динаміки та міцності машин"
для студентів
спеціальності "131 Прикладна механіка"
спеціалізації "Динаміка і міцність машин"

Ухвалено методичною комісією
__________ ММІ_______________
(назва інституту/факультету)

Протокол від _____20__ р. № ___

Голова методичної комісії

_________ _______________
(підпис) (ініціали, прізвище)

«____»__________ 20__ р.

КИЇВ – 2016

Методичні вказівки до виконання курсової роботи з дисципліни "Числові методи динаміки та міцності машин" для студентів спеціальності "131 Прикладна механіка" спеціалізації "Динаміка і міцність машин" / Нац. техн. ун-т України "КПІ імені Ігоря Сікорського" : укл.: К.М. Рудаков. К. : НТУУ "КПІ імені Ігоря Сікорського", 2016. 30 с. – Бібліогр.: с. 27 (19 назв).

ВСТУП

Сучасний розвиток техніки висуває перед наукою про міцність задачі підвищення надійності та довговічності машин і конструкцій, які працюють у складних експлуатаційних умовах. Це породжує масові розрахунки.

Для проведення кожного розрахунку робиться постановка крайової задачі. Зазвичай тіло подається як суцільне середовище, стан якого описується диференційними або інтегро-диференційними рівняннями, лінійними або нелінійними, з граничними та початковими умовами. Але відомі аналітичні методи розв'язування поставлених задач часто не можуть бути застосованими, тому необхідно використовувати чисельні методи та ЕОМ. У цьому випадку проводиться дискретизація та алгебраїзація задачі: суцільне середовище замінюється на дискретне, тобто подається як зліченна множина точок тіла – вузлів, в яких є справедливими ті ж рівняння; далі тим або іншим методом рівняння перетворюються на систему алгебраїчних рівнянь – лінійних або нелінійних. Розв'язування системи рівнянь дозволяє одержати числові значення розподілу полів температур, переміщень, деформацій, напружень, власних частот коливань та ін., які є необхідною інформацією для оцінки міцності та довговічності елементів конструкцій та агрегатів у цілому.

Предметом курсу „Чисельні методи в динаміці та міцності машин" є загальні ефективні методи розв'язування крайових задач механіки суцільних середовищ та динаміки машин, насамперед – методи алгебраїзації. Програмою курсу передбачено, зокрема, курсову роботу.

1. МЕТА ТА ЗАВДАННЯ КУРСОВОЇ РОБОТИ

Курсова робота виконується для подальшого поглиблення знань чисельних методів розв'язування крайових задач механіки твердого тіла, що деформується, та для вдосконалення навичок практичного користування програмами, які реалізують методи розв'язування цих задач на ПЕОМ. Орієнтовний перелік тем для курсової роботи наведено нижче. Для студентів, які беруть участь у наукових розробках кафедри та базових наукових чи проектних організаціях, тематика курсових робіт може бути пов'язана з цими розробками, але її потрібно погодити з лектором.

Метою курсової роботи є набуття:

- знань про постановки та методи розв'язування крайових задач механіки суцільних середовищ та динаміки машин;
- вміння ставити крайові задачі та призначати чи розробляти ефективні алгоритми їх розв'язування;
- навичок в розробці алгоритмів розв'язування крайових задач, їх реалізації на ПЕОМ, а також у проведенні розрахунків на ПЕОМ із застосуванням вже існуючих програм.

2. УМОВИ ВИКОНАННЯ КУРСОВОЇ РОБОТИ

Завдання для виконання курсової роботи видається студентам перед початком останнього семестру вивчання дисципліни. Воно містіть назву теми роботи, рисунок тіла, яке потребує розрахунку, вихідні дані, формулювання завдання. Бланк із завданням потрібно потім вмістити у пояснювальну записку після титульної сторінки (див. Додаток 1). Зразок аркушу завдання до курсової роботи поміщено у Додаток 2.

Для виконання курсової роботи кожному студентові надається можливість працювати у лабораторії обчислювальної техніки ММІ (аудиторія 254-1) як у час консультацій, так і самостійно. ЛОТ ММІ обладнана ПЕОМ під керуванням ОС Windows 7 (64 bit), що дозволяє студентові при виконанні курсової роботи використовувати пакети прикладних програм з чисельного розв'язування крайових задач динаміки та міцності машин методом скінченних елементів NASTRAN, OKA-3D, RELAX тощо, а також офісні редактори для оформлення курсової роботи.

3. ЗАГАЛЬНІ ВИМОГИ ДО ВИКОНАННЯ ТА ОФОРМЛЕННЯ КУРСОВОЇ РОБОТИ

Для успішного виконання завдання необхідно:

- опрацювати рекомендовану літературу, скласти огляд за опублікованими результатами досліджень проблеми, що розглядається;
- провести постановку крайової задачі;
- визначитися з методами розв’язування крайової задачі та викласти їх;
- за необхідності скласти та відпрацювати алгоритм та програми чисельної реалізації розрахунків або додаткові програми, потрібні для виконання роботи;
- провести необхідні розрахунки на ПЕОМ з подальшим побудуванням відповідних графіків, таблиць, епюр тощо;
- проаналізувати результати розрахунків, зробити висновки.

У виборі методу розв’язування крайової задачі пріоритет віддавати методу скінченних елементів. Але це не виключає застосування інших методів, якщо це доцільно.

Для проведення захисту роботи її потрібно оформити належним чином, тобто у вигляді пояснювальної записки та графічної частини (якщо в останньому є потреба).

У пояснювальній записці розкривається тема курсової роботи. Зазвичай вона містить такі розділи:

- *вступ*, в якому дається загальне пояснення теми роботи, проводиться огляд літератури з теми роботи, в якому дається аналіз методів розв’язування крайової задачі, що розглядається (не обов’язково, за необхідності);
- *постановка крайової задачі* у вигляді системи алгебраїчних, диференційних та/або інтегральних рівнянь, що описують поведінку матеріалу, початкових та граничних умов термосилового навантаження елементу конструкції, що розглядається. Потрібно також вказати на основні гіпотези та припущення, які використовуються у постановці задачі;
- *методи та алгоритми розрахунків*, які буде застосовано для розв’язання крайової задачі (у вигляді формул з необхідними поясненнями щодо ефективності, точності, збіжності);
- основні *дані про програми*, за допомогою яких було зроблено необхідні розрахунки;
- *розрахункова схема*, яка повністю враховує та відображає особливості конструкції та методи розв’язування (наприклад, сітка скінченних елементів, яка враховує наявність площин симетрії із зазначенням зон прикладання граничних умов та їхніх типів);
- *вхідні дані для програм* (з граничними та початковими умовами, механічними та теплофізичними постійними матеріалів та ін.);
- *результати* розрахунків у вигляді таблиць, графіків, картин ізосмуг та ін., аналіз результатів розрахунків (з урахуванням пропозицій завдання, з оцінкою збіжності розв’язку, з порівнянням розв’язку з відомими результатами, якщо це можливо), *висновки;*
- *перелік літератури*;
- *зміст* пояснювальної записки.

Пояснювальний матеріал можна оформляти як Додаток, який розташовується наприкінці пояснювальної записки, після переліку літератури.

Текст пояснювальної записки потрібно поділити на розділи відповідно до структури роботи. Формули (ілюстрації, таблиці) у записці нумерувати подвійною нумерацією: перша цифра – номер розділу, друга – номер формули (ілюстрації, таблиці) цього розділу. Посилання в роботі на літературні джерела оформляти у вигляді цифрового посилання, яке відповідає номеру в переліку літератури. Малюнки та графіки виконувати за допомогою креслярського інструменту або ПЕОМ, з додержанням масштабу, розташовувати або відповідно до тексту, або у Додатку.

Пояснювальну записку до курсової роботи потрібно виконати у вигляді журналу формату А4 з титульною сторінкою з цупкого паперу (ватману) за формою згідно з Додатком. Текст пояснювальної записки розміщувати на білому папері вказаного формату чорнилами або у друкованому вигляді з полями: зліва шириною 30 мм, на правій стороні – 10 мм, знизу та зверху – по 20 мм.

Графічну частину (якщо вона є) треба оформити у вигляді плакатів на ватмані форматом А1. На зворотній стороні кожного аркуша потрібно проставити та заповнити кутовий штамп (обов'язково – прізвища студента та викладача).

4. ЗАХИСТ КУРСОВОЇ РОБОТИ

Захист курсової роботи проводиться наприкінці вивчення дисципліни у час, призначений викладачем. Захист проводиться прилюдно, у присутності лектора та асистента.

Попередній захист роботи проводиться шляхом показу викладачу результатів виконання роботи на екрані ПЕОМ з метою перевірки викладачем введених геометричних, термомеханічних даних, початкових та граничних умов, інших даних та результатів.

Для захисту курсової роботи студент подає пояснювальну записку (якщо є – плакати) та робить доповідь, в якій в стислій формі, за 3 … 5 хвилин, викладає основний зміст роботи з наголосом на такому:

- тема роботи, її актуальність;
- основні гіпотези та припущення, які використовуються у постановці та при розв’язуванні задачі;
- методи та алгоритми розрахунків;
- розрахункова схема;
- назви програм, за допомогою яких робилися розрахунки;
- вхідні дані до програм;
- результати розрахунків, їхній аналіз (з оцінкою збіжності розв’язків), висновки та рекомендації.

Після закінчення доповіді студенту задаються питання за темою роботи, на які він дає відповіді. Після закінчення захисту робота оцінюється, і оцінка вноситься у відомість та залікову книжку студента.

5. ОРІЄНТОВНИЙ ПЕРЕЛІК ТЕМ КУРСОВИХ РОБІТ

1. Тепловий стан, пружне і пружно-пластичне деформування нескінченного товстостінного циліндра під внутрішнім та (або) зовнішнім тиском.
2. Тепловий стан, кінетика напружено-деформованого стану при несталій повзучості нескінченного товстостінного циліндра під впливом внутрішнього тиску.
3. Тепловий стан, пружне і пружно-пластичне деформування циліндричного зразка з кільцевим концентратором напружень.
4. Тепловий стан, пружне і пружно-пластичне деформування трубчастого зразка з кільцевим концентратором напружень.
5. Тепловий стан, пружне і пружно-пластичне деформування плоского зразка з концентратором напружень.
6. Тепловий стан, пружне і пружно-пластичне деформування зразка, що швидко обертається, з концентратором напружень.
7. Тепловий стан, пружне і пружно-пластичне деформування квадратної в плані пластини, що шарнірно оперта по контуру і навантажена одностороннім рівномірним тиском.
8. Тепловий стан, пружне і пружно-пластичне деформування квадратної в плані пластини, що защемлена по контуру і навантажена одностороннім рівномірним тиском.
9. Тепловий стан, пружне і пружно-пластичне деформування круглої в плані пластини, що защемлена по контуру і навантажена одностороннім рівномірним тиском.
10. Тепловий стан, пружне і пружно-пластичне деформування круглої в плані пластини з отвором, що защемлена по контуру і навантажена одностороннім рівномірним тиском.
11. Тепловий стан, пружне і пружно-пластичне деформування круглої в плані пластини, що шарнірно оперта по контуру і навантажена одностороннім рівномірним тиском.
12. Тепловий стан, пружне і пружно-пластичне деформування круглої в плані пластини з отвором, що шарнірно оперта по контуру і навантажена одностороннім рівномірним тиском.
13. Тепловий та напружено-деформований стан короткої втулки.
14. Тепловий, пружний і пружно-пластичний стан швидкообертового диску постійної або змінної товщини.
15. Тепловий, пружний і пружно-пластичний стан смуги постійної товщини з отвором при розтягуванні вздовж осі.
16. Тепловий, пружний і пружно-пластичний стан пластини постійної товщини з отвором при розтягуванні вздовж обох осей.
17. Тепловий стан, пружне і пружно-пластичне деформування трубчастого зразка в районі радіусного переходу під дією різноманітних сил: осьової, крутного моменту, внутрішнього або наріжного тиску.
18. Розробка програми розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь з використанням схем щільного пакування матриці системи та методу Холецького її $L^T DL$ або LU – розкладу.
19. Розробка програми розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь з використанням схем щільного пакування матриці системи та ітераційного методу спряжених градієнтів.
20. Створення бібліотеки одновимірних, двовимірних та тривимірних ізопараметричних скінченних елементів першого та другого порядку наближення.

6. ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ КУРСОВОЇ РОБОТИ

6.1. Завдання до виконання курсової роботи

Тема: **„Розрахунок температурного й напружено-деформованого стану, власних частот і форм коливань трубчастого зразка з кільцевою проточкою”**.

Всі вихідні дані й додаткові умови до завдання наведені на аркуші завдання (див. Додаток 2).

Зразок (див. рис.1) – це трубка, посередині довжини якої зроблено кільцеву проточку, яка утворює концентрацію напружень.

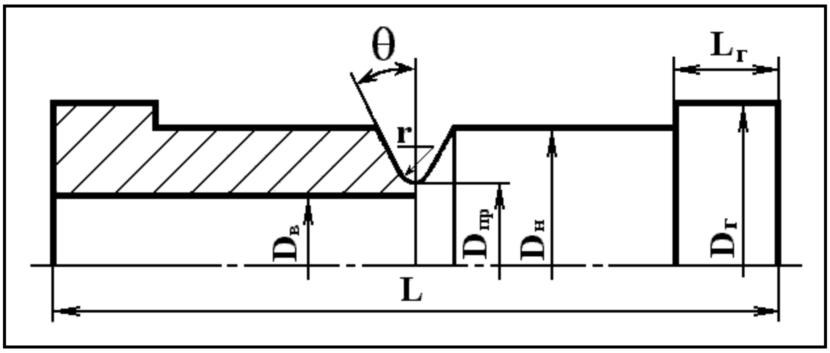


Рис.1. Схема зразка з кільцевим концентратором

6.2. Вступ

Зразок з концентратором застосовують при експериментальних дослідженнях впливу концентрації напружень на втому матеріалів. Для таких експериментів потрібно мати зразки з декількома різними значеннями коефіцієнта концентрації напружень, значення якого пов’язане із значенням радіусу дна проточки. Але для визначення цих значень потрібно заздалегідь провести розрахунки напружено-деформованого стану зразків у районі концентратора напружень, на основі яких вибрати параметри зовнішнього навантаження. Якщо вивчається малоциклова втома, то при навантаженнях зразка повинна бути необоротна (пластична) деформація.

Тіло з концентратором напружень у вигляді кільцевої проточки можна розрахувати за допомогою аналітичних методів. Це зроблено, наприклад, у працях Г.Нейбера [1 та ін.] за допомогою спеціальної системи координат. Але при цьому задачу розв’язано для проточки еліптичного вигляду, тільки у пружному стані, без температурних впливів. У більш складних випадках ця задача аналітичних розв’язків не має. Потрібно застосовувати чисельні методи.

Тіло має складну конфігурацію та зону з концентрацією напружень. Тому застосуємо метод скінченних елементів, який не має обмежень щодо геометрії тіл, властивостей матеріалу та напружено-деформованого стану. Для цього використаємо пакет прикладних програм „ОКА-3D”, в якому реалізовано цей метод, а також є моделі стаціонарної теплопровідності, термопружності, аналізу власних форм та частот коливань.

Загальний алгоритм розв’язування крайової задачі про напружено-деформований стан тіла містить наступні етапи:

а) представлення тіла у вигляді сукупності скінченних елементів;

б) призначення термомеханічних властивостей матеріалів, початкових і граничних умов задачі, інших початкових даних;

в) призначення значень часового кроку, поточного часу;

г) призначення поточних ГУ;

д) за необхідності – розв’язання крайової задачі теплопровідності для визначення поточного температурного стану тіла;

е) складання (на основі МСЕ) системи алгебраїчних рівнянь (САР). Для лінійної термопружної задачі це буде система лінійних алгебраїчних рівнянь – СЛАР;

є) введення в СЛАР кінематичних ГУ (створення так званої ефективної СЛАР);

ж) розв'язання СЛАР;

з) проведення прогнозу напружень на основі отриманих у результаті розв'язання СЛАР вузлових значень переміщень або їхніх прирощень;

и) оформлення результату на поточний момент часу у вигляді, зручному для подальшого використання (відображення на екрані монітору) і аналізу;

6.3. Постановки крайових задач

6.3.1. Постановка незв'язної крайової задачі теплопровідності

Використаємо рівняння закону збереження в частинних похідних за змінними Ейлера:

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} + \nabla_k B^k = W\,, \tag{1}$$

де: $A = A(\vec{\bar{x}}, \tau)$ – об'ємна густина розглядуваної величини, в даному випадку $A(\vec{\bar{x}}, \tau) = c_P(\vec{\bar{x}}, \tau) \cdot \bar{\rho}(\vec{\bar{x}}, \tau) \cdot \theta(\vec{\bar{x}}, \tau)$ – об'ємна густина тепла ($c_P(\vec{\bar{x}}, \tau)$ – питомі теплоємність (Дж/(кг$\cdot$град)) і $\bar{\rho}(\vec{\bar{x}}, \tau)$ – густина речовини (кг/м^3), $\theta(\vec{\bar{x}}, \tau)$ – температура); $B = B(\vec{\bar{x}}, \tau, \vec{\nu})$ – швидкість густини потоку через межу області S, в даному випадку потоку тепла $B^k(\vec{\bar{x}}, \tau, \vec{\nu}) = q^k(\vec{\bar{x}}, \tau)$ в напрямках k; $W = W(\vec{\bar{x}}, \tau)$ – прирощення об'ємної густини за одиницю часу, викликане припливом ззовні (задається), в даному випадку $W(\vec{\bar{x}}, \tau) = \hat{\omega}(\vec{\bar{x}}, \tau)$ – потужність внутрішнього джерела (або стоку) тепла; $\vec{\bar{x}}$, τ – ейлерові координати.

Перейдемо до лагранжевих координат, тобто у просторово-часовий простір $\vec{x}$ (координати точки) та t (час), проводячи лінеаризацію задачі. Також використаємо закон теплопровідності Фур'є для ізотропної теплопровідності: тепловій потік у напрямку осі пропорційний відповідному градієнту температури та має напрямок, оборотний градієнту, тобто

$$q_k = -\lambda \cdot \nabla_k \theta\,, \tag{2}$$

де $\lambda = \lambda(\vec{x})$ – коефіцієнт теплопровідності матеріалу (Вт/(м$\cdot$град)).

Будемо нехтувати переносом тепла матеріалом тіла, який рухається у результаті деформування. Також врахуємо, що, згідно з завданням, немає об'ємного джерела тепла ($\hat{\omega} = 0$), заданого теплового потоку та променевого теплообміну; задача розглядається як стаціонарна ($\partial\theta / \partial t = 0$).

Отримаємо, що в кожній елементарній одиниці об'єму середовища баланс потоку тепла визначається співвідношенням

$$\nabla_k(\lambda \nabla_k \theta) = 0 \tag{3}$$

за початкової умовою

$$\theta(\vec{x}, t_0) = \hat{\theta}_0(\vec{x})\,. \tag{4}$$

На поверхні тіла граничні умови (ГУ):

- за температурою поверхні (її частини S_θ) – ГУ 1-го роду

$$\theta(\vec{x})\Big|_{S_T} = \hat{\theta}(\vec{x})\,; \tag{5}$$

- за тепловим потоком (у напрямку зовнішньої нормалі $\vec{\nu}$ до поверхні) – природні ГУ

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial \nu}\bigg|_{S_G} = q\Big|_{S_\alpha}\,, \tag{6}$$

Для конвекційної складової теплового потоку через поверхню буде використовуватися лінійна апроксимація:

$$q\Big|_{S_\alpha} = -\alpha \cdot (\theta - \hat{\theta}_\infty)\Big|_{S_\alpha}\,. \tag{7}$$

Позначено: α – коефіцієнт конвекційної тепловіддачі (Вт/(м$^2\cdot$град)); поверхня з ГУ $S_G = S_\alpha \cup S_\theta$; $\hat{\theta}_\infty = \theta_\infty(\vec{x},t)$ – температура середовища біля поверхні S_α з конвекційним теплообміном. Значок „^” над змінною вказує на те, що її величина відома та задається.

Таким чином, отримано для кожної точки тіла систему диференційних рівнянь (3) ... (7) для стаціонарної задачі теплопровідності відносно значень температур $\theta(\vec{x})$.

6.3.2. Постановка крайової задачі термопружності

Зазвичай припускається, що в початковий момент t_0 в розглядуваному тілі переміщення $U_i(\vec{x},t_0)$, деформації $\varepsilon_{ij}(\vec{x},t_0)$, напруження $(\sigma_{mn})_0 = \sigma_{mn}(\vec{x},t_0)$ мають відомі (частіше – нульові) значення, відомо початкове поле температур $\hat{\theta}_0(\vec{x}) = \theta(\vec{x},t_0)$. Далі припускається, що навантаження змінюється кроками (n – номер кроку); що в об’ємі тіла Ω, а також на частині його поверхні $S_G = S_U \cup S_P$ за деякий проміжок часу $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ відбудеться зміна навантажень, тобто на момент часу t^{n+1} були прикладені: $\hat{O}_m(\vec{x},t) = \overline{\rho}\cdot\hat{F}_m(\vec{x},t)$ – об’ємні сили ($\vec{F}(\vec{x},t)$ – вектор масової сили), $\hat{P}_m(\vec{x},t)$ – поверхневі сили на S_P; $\hat{\overline{P}}_m(\vec{x},t)$ – зосереджені сили в деяких точках; відбулися переміщення $\hat{U}_i(\vec{x},t)$ – на S_U, а також в Ω змінилася температура з $\hat{\theta}_0(\vec{x})$ на $\hat{\theta}(\vec{x},t)$. Тоді для визначення в кожній точці (її однорідного околу) тіла величин: $U_i(\vec{x},t)$ – переміщень, $\varepsilon_{ij}(\vec{x},t)$ – деформацій, $\sigma_{mn}(\vec{x},t)$ – напружень, а також інших, похідних від них, маємо наступну крайову:

- рівняння рівноваги:

$$\nabla_n \sigma_{mn} + \hat{O}_m = 0; \tag{8}$$

- геометричні (12.49) (для малих деформацій):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i U_j + \nabla_j U_i); \tag{9}$$

а також принцип суперпозиції деформацій різної природи:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^e{}_{ij} + \varepsilon^\theta_{ij}; \tag{10}$$

- фізичні рівняння. Між напруженнями та пружними деформаціями існує однозначна функціональна залежність. Для лінійно-пружної моделі матеріалу це є закон Гука:

$$\sigma_{mn} = E_{mnij}\varepsilon^e_{ij} \quad \text{або} \quad \varepsilon^e_{ij} = C_{ijmn}\sigma_{mn}, \tag{11}$$

де E_{mnij} та C_{ijmn} – матеріальні тензори модулів пружності та жорсткості відповідно.

До фізичних рівнянь належать і рівняння для температурної деформації:

$$\varepsilon^\theta_{ij} = \delta_{ij}\alpha_\theta\cdot(\theta - \theta_0), \tag{12}$$

де α_θ є коефіцієнтом лінійного температурного подовження.

Крім статичних, геометричних і фізичних рівнянь додатково залучаються ГУ на S_U (1-го роду) і S_P (природні):

$$U_i\big|_{S_U} = \hat{U}_i; \tag{13}$$

$$\sigma_{mn}\nu_n\Big|_{S_P} = \hat{P}_m; \tag{14}$$

а також наявні зосереджені сили $\hat{\overline{P}}_m$ в деяких точках кількістю $N_{\overline{P}}$.

Для розв’язування крайової задачі чисельними методами зручніше мати її варіаційну постановку. Для цього використовуються співвідношення (8), (9) і (14), властивості симетрії тензора напружень $\sigma_{mn} = \sigma_{nm}$ і теорема Остроградського-Гауса. В підсумку можна отримати наступний функціонал відносно варіацій переміщень і зв’язаних із ними деформацій

$$F = \int_\Omega \sigma_{mn}\delta\varepsilon_{mn} d\Omega - \int_\Omega \widehat{O}_m \delta U_m d\Omega - \int_{S_P} \widehat{P}_m \delta U_m dS - \sum_{i=1}^{N_{\bar{P}}} (\widehat{\bar{P}}_m \delta U_m)_i = 0\,, \tag{15}$$

який в поєднанні з кінематичними ГУ (13) на поверхні S_U визначає незліченну множину можливих (віртуальних) напружено-деформованих станів. Дійсний НДС є одним з віртуальних, але він додатково задовольняє фізичним рівнянням зв'язків σ_{mn} та ε_{ij}, а також геометричним рівнянням зв'язків ε_{ij} з U_m. Цей функціонал не містить фізичних та геометричних рівнянь, тому він є придатним для будь-яких моделей матеріалів: лінійних та нелінійних.

Додатково треба відзначити, що в даній задачі час не є параметром, тобто явно не входить до рівнянь. Час застосовується лише для того, щоб розрізняти початковий стан з наступними.

6.3.3. Постановка крайової динамічної задачі термопружності

Постановка крайової динамічної задачі термопружності в більшості моментів співпадає з постановками крайової статичної задачі термопружності, тому звернемо увагу лише на розбіжності.

Додатково до ГУ 1-го роду (13) задаються початкові умови для переміщень і швидкостей, тобто при $t_0 = 0$:

$$U_i(\vec{x},0) = \widehat{U}_i(\vec{x})\,; \quad \frac{\partial U_i(\vec{x},0)}{\partial t} = \widehat{g}_i(\vec{x})\,. \tag{16}$$

Рівняння рівноваги (8) із застосуванням принципу Д'аламбера заміняється на повне рівняння руху з урахуванням демпфірування:

$$\nabla_n \sigma_{mn} + \widehat{O}_m = \bar{\rho}\frac{\partial^2 U_m}{\partial t^2}\,; \tag{17}$$

де $\bar{\rho}$ є густиною матеріалу.

Систему рівнянь динамічної термопружності та природні граничні умови (14) можна виразити через компоненти тензора переміщень:

$$\nabla_n \left\{ E_{mnij} \left[\frac{1}{2}\left(\nabla_i U_j + \nabla_j U_i\right) \right] \right\} - \bar{\rho}\frac{\partial^2 U_m}{\partial t^2} = \nabla_n E_{mnij}\delta_{ij}\alpha_\theta \Delta\widehat{\theta} - \widehat{O}_m\,; \tag{18}$$

$$\left\{ E_{mnij} \left[\frac{1}{2}\left(\nabla_i U_j + \nabla_j U_i\right) \right] \right\} \nu_n = E_{mnij}\delta_{ij}\alpha_T \Delta\widehat{\theta}\nu_n + \widehat{P}_m\,. \tag{19}$$

У сукупності з ГУ (13 і початковими умовами (16) і (19) рівняння (18) є системою диференційних рівнянь в точці тіла, записаною відносно переміщень, розв'язок якої дасть опис зміни НДС в часі з урахуванням динамічного навантаження і в'язкого тертя. Окремим випадком цієї є задача про власні частоти та форми коливань тіла.

6.4. Методи розв'язування крайових задач

6.4.1. Скінченно-елементний алгоритм розв'язування крайової задачі стаціонарної теплопровідності у тілі

6.4.1.1. Послаблена форма методу зважених похибок наближення для задачі теплопровідності у тілі

Просторову похибку наближення R_Ω створимо з основного рівняння крайової задачі (3), яке відображає баланс потоку тепла в кожній точці тіла:

$$R_\Omega = \nabla_k(\lambda\nabla_k\theta)\,. \tag{20}$$

Поверхневу похибку наближення R_S створимо з рівняння поверхневих граничних умов (6) за тепловим потоком:

$$R_S = \lambda \frac{\partial \theta}{\partial \nu}\bigg|_{S_G} - q\big|_{S_\alpha}. \quad (21)$$

Початкові умови (4) та ГУ 1-го роду (5) враховуються окремо.

Шуканий результат – це єдина скалярна функція (температури), тому відповідно до основної формули методу зважених похибок наближення (МЗПН) складемо J функціоналів

$$F_j = \int_\Omega \nabla_k(\lambda \nabla_k \theta) w_j d\Omega - \int_S \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial \nu}\bigg|_{S_G} - q\big|_{S_\alpha} \right) \tilde{w}_j dS = 0; \quad j = 1,2,...,J. \quad (22)$$

У виразі (22) найвищий порядок похідної – другий (член $\nabla_k(\lambda \nabla_k \theta)$).

На вільної від ГУ другого роду поверхні тіла, яку позначимо як $S_0 = S \setminus S_G$, інтеграл $\int_{S_0} \lambda \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \tilde{w}_j dS$ тотожно дорівнює нулю. Тому замість інтеграла $\int_{S_G} \lambda \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \tilde{w}_j dS$ можемо розглядати інтеграл $\int_S \lambda \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \tilde{w}_j dS$, тобто на повній поверхні.

Згідно з формулою Гріна-Стокса для неперервних скалярних функцій w і θ:

$$\int_S w \frac{\partial \theta}{\partial \nu} dS = \int_\Omega \nabla \theta \nabla w \, d\Omega + \int_\Omega w \nabla(\nabla \theta) \, d\Omega \quad (23)$$

інтеграл $\int_S \lambda \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \tilde{w}_j dS$ у (22) можна замінити сумою інтегралів $\int_\Omega \nabla_k \theta \cdot \lambda \nabla_k \tilde{w}_j \, d\Omega + \int_\Omega \nabla_k(\lambda \nabla_k \theta) \tilde{w}_j d\Omega$. Але для того, щоб скоротити другий інтеграл цього виразу з інтегралом $\int_\Omega \nabla_k(\lambda \nabla_k \theta) w_j d\Omega$ із (22), який має протилежний знак, потрібно прийняти, що $\tilde{w}_j = w_j$ та $\lambda = const$. Це можна зробити, оскільки системи $\tilde{w}_j$ й w_j – довільні, які повинні задовольняти лише вимогам повноти за енергією, а $\lambda = const$ зазвичай. Робимо ці заміни та отримаємо:

$$F_j = \int_\Omega \nabla_k \theta \cdot \lambda \nabla_k w_j d\Omega - \int_{S_\alpha} q w_j dS = 0; \quad j = 1,2,...,J. \quad (24)$$

Отже, формула Гріна-Стокса (23) для скалярних функцій w_j і θ дозволяє понизити порядок похідної до першого, а також водночас виключити з (22) інтеграл по всій поверхні тіла S.

Це й є послаблена форма МЗПН для задачі теплопровідності. Зазначимо, що вимоги для вагових функцій змінилися: окрім повноти вони ще повинні бути один раз диференційованими, що прийнятно. А от базисні функції тепер будуть диференційованими лише один раз, а не двічі, що знижує вимоги до них. Оскільки формула Гріна-Стокса є точною, то послаблена форма МЗПН не погіршує майбутній розв'язок.

6.4.1.2 Просторова алгебраїзація задачі теплопровідності на основі МСЕ

Залишилися відкритими питання про вибір:

- функції для наближення температури $\theta(\vec{x})$;
- вагових функцій $w_j(\vec{x})$, $j = 1,2,...,J$.

Розглянемо всі проблеми, що залишилися, із застосуванням скінченно-елементного наближення цих задач.

Оскільки скінченні елементи у МСЕ взаємно не перетинаються та щільно заповнюють Ω, то запишемо (24) через суму інтегралів, враховуючи (7)

$$F_j = \sum_{e=1}^{E} \int_{\Omega^e} \nabla_k \theta \lambda \nabla_k \left(\Xi_j^n \right)^e w_n^e d\Omega -$$

$$-\sum_{e=1}^{E^*} \int_{S_\alpha^e} \alpha \cdot (\theta - \widehat{\theta}_\infty) \left(\Xi_j^n \right)^e w_n^e dS = 0; \quad j = 1,...,J; \;\; n = 1,...,M_e, \tag{25}$$

де S_α^e – поверхні СЕ, які виходять на поверхні тіла S_α с конвекційним теплообміном; $\left(\Xi_j^n \right)^e$ – масив (оператор) інцидентності (відповідності)

$$(\Xi_j^n)^e = \begin{cases} 1; \; \textit{якщо вузлу з глобальним номером} \;\; j \;\; \textit{відповідає} \\ \qquad\qquad \textit{вузел з локальним номером} \;\; n \;\; \textit{у СЕ з номером} \; e; \\ 0; \; \textit{інакше}. \end{cases} \tag{26}$$

Кількість вузлів у скінченно-елементній сітці дорівнює N, тому, щоб отримати квадратну матрицю САР, необхідно прийняти, що $J = N$.

Згідно з методом Фур'є та формулою наближення у МСЕ, наближений розв'язок крайової задачі в об'ємі Ω тіла шукається у вигляді

$$\theta(\vec{x},t) \approx \sum_{e=1}^{E} \left(\sum_{m=1}^{M_e} \left(\varphi_m^e(\vec{r}) \cdot \theta_m(t) \right) \right), \tag{27}$$

де $\vec{r}$ – вектор локальної в кожному СЕ з номером e системи координат; $\varphi_m^e(\vec{r})$ – локальні *базисні* функції вузлів з номером m, які лінійно незалежні, відповідають умові повноти та дорівнюють нулю за границями свого СЕ.

У межах кожного СЕ, згідно з (27), температура обчислюється за виразом апроксимації в СЕ:

$$\theta(\vec{r},t) \approx \sum_{m=1}^{M_e} \left(\varphi_m^e(\vec{r}) \cdot \theta_m(t) \right). \tag{28}$$

Далі скористаємося рекомендацією І.Г. Бубнова і застосуємо для вагових функцій у функціоналах (25) базисні функції, тобто приймемо, що в межах СЕ

$$w_n^e = \varphi_n^e(\vec{r}); \quad n = 1,...,M_e. \tag{29}$$

Підставимо (28) і (29) в функціонали (25). Отримаємо, що:

$$F_j(\theta)_h = \sum_{e=1}^{E} \left(\left(\Xi_i^m \right)^e \left(\Xi_j^n \right)^e \left(\int_{\Omega^e} \nabla_k \varphi_m^e \lambda \nabla_k \varphi_n^e d\Omega + \int_{S_\alpha^e} \alpha \varphi_m^e \varphi_n^e dS \right) \cdot \theta_m \right) -$$

$$-\sum_{e=1}^{E} \left(\left(\Xi_j^n \right)^e \int_{S_\alpha^e} \alpha \widehat{\theta}_\infty \varphi_n^e dS \right) = 0, \tag{30}$$

де $k = 1,2,3$; $m,n = 1,...,M_e$; $i,j = 1,...,N$.

Позначимо компоненти матриць та вектора:

$$L_{mn}^e = L_{nm}^e = \int_{\Omega^e} \nabla_k \varphi_m^e \lambda \nabla_k \varphi_n^e d\Omega; \tag{31}$$

$$A_{mn}^e = A_{nm}^e = \int_{S_\alpha^e} \alpha \varphi_m^e \varphi_n^e dS \;; \tag{32}$$

$$K_{mn}^e = L_{mn}^e + A_{mn}^e; \tag{33}$$

$$P_n^e = \int_{S_\alpha^e} \alpha \widehat{\theta}_\infty \varphi_n^e dS, \tag{34}$$

де $m,n = 1,2,...,M_e$.

З урахуванням введених позначень функціонали (30) приймають характерний вигляд системи алгебраїчних рівнянь (САР)

$$K_{ij}\theta_i = P_j\,; \quad i,j = 1,2,...,N\,. \tag{35}$$

Тут введено *глобальні* матриці та вектори, які „збираються” звичайним алгебраїчним додаванням згідно з номерами вузлів із матриць і векторів СЕ:

$$K_{ij} = \sum_{e=1}^{E} \left(\Xi_i^m\right)^e \left(\Xi_j^n\right)^e K_{mn}^e\,; \tag{36}$$

$$P_j = \sum_{e=1}^{E} \left(\Xi_j^n\right)^e P_n^e\,. \tag{37}$$

Матрицю L_{ij} звуть матрицею теплопровідності; A_{ij} – конвекційного теплообміну. Всі матриці є симетричними, тому і сумарна матриця K_{ij} САУ теж є симетричною.

6.4.2. Скінченно-елементний алгоритм розв’язування задачі термопружності

6.4.2.1. Матричний запис тензорних і векторних величин у МСЕ

Для компонентів вектора переміщень $U_j = U_j(\vec{x},t)$, $j=1,2,3$ при $\vec{x}\in\Omega^e$ вводяться вектори (матриці-стовпці)

$$\{U\} = \{U_1, U_2, U_3\}^T\,. \tag{38}$$

Наближення будь-якої величини f у скінченному елементі представляється апроксимаційною формулою $f = \sum\limits_{m=1}^{M_e} \varphi_m^e f_m$, де φ_m^e – базисні функції СЕ; f_m – відомі вузлові значення величини f; M_e – кількість вузлів у СЕ. Тому формула для обчислення вектора переміщень $\{U\}$ в будь-якій точці СЕ через відомий вектор $\{q\}_e$ переміщень вузлів СЕ має вигляд

$$\{U\} = [\phi]\{q\}_e\,, \tag{39}$$

де вектор переміщень вузлів СЕ

$$\{q\}_e = \{(q^1,q^2,q^3)_1,\,...,\,(q^1,q^2,q^3)_{M_e}\}^T = \{q_1,q_2,\,...,\,q_{3M_e}\}^T, \tag{40}$$

в якому q_m, $m = 1,2,...,3M_e$ – ті самі вузлові переміщення, але тепер вони мають *наскрізну* нумерацію. Цей вектор є результатом вибирання необхідних значень з глобального вектора переміщень у вузлах всього тіла $\{q\}$. Матриця $[\phi]$ зветься матрицею базисних функцій.

Лінійні співвідношення (9) між переміщеннями та деформаціями записуються у вигляді

$$\{\varepsilon\} = [B]\{q\}_e\,. \tag{41}$$

Тут вектори повних деформацій

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11},\varepsilon_{22},\varepsilon_{33},\gamma_{12},\gamma_{23},\gamma_{31}\}^T \tag{42}$$

мають компоненти $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ або $\Delta\gamma_{ij} = 2\Delta\varepsilon_{ij}$ при $i \neq j$, а матриця $[B]$ є матрицею диференціювання компонентів переміщень або їхніх приростів по глобальним координатам.

Конкретизація матриць $[\phi]$ і $[B]$ пов’язана лише з типом СЕ і системою глобальних координат, тут несуттєва.

Лінійний закон Гука записується у вигляді

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon^e\}\,, \tag{43}$$

де $\{\varepsilon^e\}$ – вектор пружних деформацій, заповнений аналогічно (42), а $\{\sigma\}$ – вектор напружень

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{33},\tau_{12},\tau_{23},\tau_{31}\}^T\,. \tag{44}$$

У відповідності до структури заповнення векторів $\{\sigma\}$ та $\{\varepsilon^e\}$ матриця модулів пружності $[D]$ у випадку ізотропного матеріалу буде мати вигляд

$$
\left[D\right] = 2G \cdot \begin{pmatrix} a & b & b & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 & 0 & 0 \\ b & b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \tag{45}
$$

де $2G = E/(1+\mu)$; $a = (1-\mu)/(1-2\mu)$; $b = \mu/(1-2\mu)$; $c = 0.5$; E – модуль Юнга; μ – коефіцієнт Пуассона.

Вектор температурних деформацій, згідно з формулою (12), буде мати вигляд (тут $\theta = \theta(\vec{x})$ – поточна, а $\theta_0 = \theta(\vec{x}, 0)$ – початкова температури):

$$
\{\varepsilon^{\theta}\} = \{\alpha_{\theta}, \alpha_{\theta}, \alpha_{\theta}, 0, 0, 0\}^T \left(\theta - \theta_0\right), \tag{46}
$$

де α_{θ} – значення коефіцієнта лінійних температурних подовжень.

З принципу суперпозиції деформацій різноманітної природи (10)

$$
\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^e\} + \{\varepsilon^{\theta}\}. \tag{47}
$$

З використанням (46) та геометричних рівнянь (41)

$$
\{\varepsilon^e\} = [B]\{q\}_e - \{\alpha_{\theta}\}\Delta\widehat{\theta}. \tag{48}
$$

Після застосування закону Гука (43)

$$
\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon^e\} = [D]\Big([B]\{q\}_e - \{\alpha_{\theta}\}\Delta\widehat{\theta}\Big). \tag{49}
$$

Після розв’язання СЛАР, яку породжує МСЕ, вектор $\{q\}_e$ у (49) стає відомим, тому застосування рівняння (49) дозволяє відразу отримати значення компонентів вектора напружень $\{\sigma\}$ в будь-якій точці СЕ.

6.4.2.2. Отримання САР методом додаткових навантажень при розв’язуванні крайової задачі термопружності

Введемо вектори: $\{\widehat{O}\} = \{\widehat{O}_1, \widehat{O}_2, \widehat{O}_3\}^T$ – об’ємних; $\{\widehat{p}\} = \{\widehat{p}_1, \widehat{p}_2, \widehat{p}_3\}^T$ – поверхневих навантажень.

Функціонал (15) з урахуванням матричних позначень буде мати вигляд:

$$
F = \int_{\Omega} \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} d\Omega - \int_{\Omega} \{\delta U\}^T \{\widehat{O}\} d\Omega - \int_{S_P} \{\delta U\}^T \{\widehat{p}\} dS - \sum_i (\{\delta q\}_e^T \{\widehat{\widehat{P}}\})_i = 0. \tag{50}
$$

Врахуємо, що $\{\delta\varepsilon\} = \delta\big([B]\{q\}_e\big) = [B]\{\delta q\}_e$, $\{\delta U\} = \delta\big([\phi]\{q\}_e\big) = [\phi]\{\delta q\}_e$; $\{\delta\varepsilon\}^T = \big([B]\{\delta q\}_e\big)^T = \{\delta q\}_e^T [B]^T$ та $\{\delta U\}^T = \big([\phi]\{\delta q\}_e\big)^T = \{\delta q\}_e^T [\phi]^T$, а також те, що у вузлах $\{\delta q\}_e^T [\phi]^T = \{\delta q\}_e^T$. Функціонал (50) з урахуванням цих формул, формули (49) та можливості суперпозиції по СЕ робіт зовнішніх і внутрішніх сил, зумовленої тим, що СЕ не перетинаються, записується як

$$
\begin{aligned}
F = \sum_e \int_{\Omega^e} \{\delta q\}_e^T [B]^T \Big([B]\{\Delta q\}_e - \{\alpha_{\theta}\}\Delta\widehat{\theta}\Big) d\Omega - \\
- \sum_e \int_{\Omega^e} \{\delta q\}_e^T [\phi]^T \{\widehat{O}\} d\Omega - \sum_e \int_{S_P^e} \{\delta q\}_e^T [\phi]^T \{\widehat{p}\} dS - \sum_i (\{\delta q\}_e^T \{\widehat{\widehat{P}}\})_i = 0,
\end{aligned} \tag{51}
$$

де знак $\sum_e$ означає додавання по всіх СЕ, що містять розглядуваний ступінь свободи вузла.

Оскільки вектори $\{\delta q\}_e^T$ і $\{q\}_e$ не залежать від параметрів інтегрування, їх можна винести за межі інтегралів. З (51), згрупувавши інтеграли, отримаємо

$$F=\sum_e \{\delta q\}_e^T \int_{\Omega^e}[B]^T[D][B]d\Omega\cdot\{q\}_e -$$

$$-\sum_e \{\delta q\}_e^T\cdot\left(\int_{\Omega^e}[\phi]^T\{\widehat{O}\}d\Omega+\int_{S_P^e}[\phi]^T\{\widehat{p}\}dS-\int_{\Omega^e}[B]^T[D]\{\alpha_\theta\}\Delta\widehat{\theta}d\Omega\right)-\sum_i(\{\delta q\}_e^T\{\widehat{\overline{P}}\})_i=0. \quad (52)$$

Позначимо:

$$[K]_e=\int_{\Omega^e}[B]^T[D][B]d\Omega; \quad (53)$$

$$\{P\}_e=\int_{\Omega^e}[\phi]^T\{\widehat{O}\}d\Omega+\int_{S_p^e}[\phi]^T\{\widehat{p}\}dS; \quad (54)$$

$$\{R\}_e=\int_{\Omega^e}[B]^T[D]\{\alpha_\theta\}\Delta\widehat{\theta}d\Omega. \quad (55)$$

Тоді

$$F=\sum_e \{\delta q\}_e^T\left([K]_e\{q\}_e-\{P\}_e-\{R\}_e\right)-\sum_i(\{\delta q\}_e^T\{\widehat{\overline{P}}\})_i=0. \quad (56)$$

Оскільки $\{\delta q\}_e^T$ є будь-якими, то отримуємо САР вигляду

$$[K]\{q\}=\{P\}+\{\overline{P}\}+\{R\}, \quad (57)$$

яка після введення до неї кінематичних ГУ (13) розв'язується відносно глобального вектора дійсних переміщень $\{q\}$ у вузлах СЕ сітки. В (57) позначено додавання за ступенями свободи вузлів: $[K]=\sum_e[K]_e$; $\{P\}=\sum_e\{P\}_e$; $\{R\}=\sum_e\{R\}_e$, а $\{\overline{P}\}=\sum_i(\{\widehat{\overline{P}}\})_i$, тобто збірка зосереджених сил, прикладених у вузлах скінченно-елементної сітки тіла.

Матриця $[K]_e$ зветься матрицею жорсткості СЕ, а матриця $[K]$ – матрицею жорсткості тіла. Вектор $\{P\}+\{\overline{P}\}$ зумовлюється зовнішніми силовими навантаженнями і масовими силами; вектор $\{R\}$ – фіктивними навантаженнями, що відображають вплив температури. Наявність саме вектора $\{R\}$ як додаткового до вектора зовнішніх навантажень $\{P\}$ і обумовило назву: *метод додаткових навантажень*.

6.4.3. Скінченно-елементний алгоритм розв'язування задачі про власні частоти та форми коливань при відсутності демпфірування

Розглядається нетривіальний розв'язок рівняння

$$[M]\{\ddot{q}(t)\}+[K]\{q(t)\}=\{0\}, \quad (58)$$

тобто за відсутності зовнішніх впливів і змінних кінематичних граничних умов. Тут матриця $[M]$ є матрицею мас $[M]=\sum_e[M]_e$, де $[M]_e=\int_{\Omega^e}\overline{\rho}[\phi]^T[\phi]d\Omega$ а $\overline{\rho}$ є густиною матеріалу.

Розв'язок можна шукати у вигляді

$$\{q(t)\}=\{A\}\cos(\omega t+\beta), \quad (59)$$

де $\{A\}$ – вектор амплітудних значень вузлових переміщень; $\omega=2\pi f$ – колова частота, β – фаза коливань. Після прямої підстановки (59) у (58) та скорочення на $\cos(\omega t+\beta)$ отримаємо САР:

$$(-\omega^2[M]+[K])\{A\}=\{0\}. \quad (60)$$

У цієї системі ненульові значення компонентів $\{A\}$ можливі лише при умові, що

$$\det\left[[K]-\omega^2[M]\right]=0. \quad (61)$$

Якщо квадратні матриці $[M]$ та $[K]$ – додатне визначені (зазвичай для задачі лінійної пружності), то рівняння (61) має N додатних розв'язків – власних частот ω_k, причому можливі парні значення (тут N – кількість невідомих у САР (60)).

Маючи N значень власних частот ω_k, розв'язок системи (58) можна шукати у вигляді лінійної комбінації з N виразів (59):

$$\{q(t)\} = \sum_{k=1}^{N} \{A\}_k \cdot \cos(\omega_k t + \beta_k)\,. \qquad (62)$$

Оскільки значення компонентів власних векторів $\{A\}_k$ можуть бути знайдені не однозначно, а з точністю до постійного множника, то зазвичай їх нормують за правилом:

$$\{A\}_k^T [M] \{A\}_k = 1\,. \qquad (63)$$

Доведено, що власні вектори $\{A\}_k$ ортогональні відносно матриць $[M]$ та $[K]$, тобто

$$\{A\}_k^T [M] \{A\}_m = 0\,; \quad \{A\}_k^T [K] \{A\}_m = 0\,; \quad k \neq m\,. \qquad (64)$$

Ще можна відзначити, що зазвичай шукаються не всі корні рівняння (61), а декілька (позначимо як Na) найменших значень, оскільки тільки при нижчих власних частотах амплітуди коливань мають відносно великі значення. Інакше кажучи, декілька перших власних частот та форм коливань достатньо для отримання задовільного наближення розв'язку (62). Для цього розроблено декілька ефективних алгоритмів, які використовуються у скінченно-елементних програмах.

6.5. Розрахункова схема, скінченно-елементна сітка

Трубчастий зразок з концентратором у вигляді кільцевої проточки є осесиметричним тілом. Згідно з завданням всі зовнішні впливи не залежать від колової координати ϑ. Тому маємо випадок повної осьової симетрії задачі. Програма OKA-3D, за допомогою якої будуть розв'язуватися крайові задачі, не має осесиметричних СЕ, а має тільки об'ємні СЕ, чотирикутні у плані (гексагональні). Тому з трубчастого зразка "вирізаємо" сектор з невеликим кутом $\Delta\vartheta$ (наприклад, $\Delta\vartheta = 1$ градус), вздовж цієї координати буде лише один скінченний елемент. Оскільки зразок має площину симетрії, яка розділяє його навпіл вздовж координати z, то врахуємо це у розрахунковій схемі: будемо розглядати лише половину зразка за довжиною. На рис.2 зображено вид на сектор вздовж координати ϑ, на якому вже позначені скінченні елементи (мілка сітка).

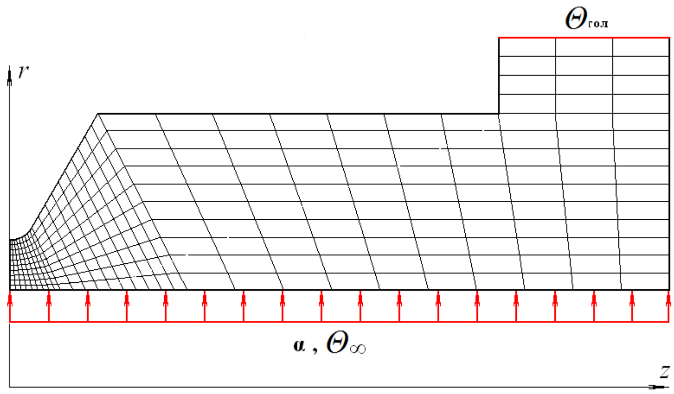


Рис.2. Розрахункова схема для задачі про тепловий стан зразка

Для задачі стаціонарної теплопровідності задаємо: а) – початкову температуру $\theta_0 = 293\,K$; б) – температуру $\theta_{гол} = 330\,K$ циліндричної поверхні голівки зразка (див. рис.2); в) – температуру середовища $\theta_\infty = 700\,K$, яке "омиває" зразок зсередини, та коефіцієнт конвекційного теплообміну $\alpha = 11300$ Вт/(м^2 K).

Для задачі про напружено-деформований стан для всіх вузлів СЕ потрібно заборонити ступені свободи у напрямку координати ϑ, оскільки задача є вісесиметричною. Ще у вузлах з координатою $z = 0$ потрібно заборонити ступені свободи у напрямку координати z (змоделювати відкинуту симетричну частину зразка). Усі вузли, що мають однакові координати r та z, але координати ϑ яких розрізняються на кут сектору $\Delta\vartheta$ (ми вибрали цей кут у 1 градус), звуться вузлами, що "циклічно сумісні". Для них ще потрібно буде скласти список пар "циклічно сумісних" вузлів (у програмі OKA-3D для цього є відповідний діалог).

Для задачі про напружено-деформований стан зовнішнє навантаження будемо прикладати у вигляді: а) – тиску (розподіленого навантаження) $p = 25$ МПа до поверхонь СЕ, які виходять на поверхню отвору зразка; б) – розподіленого навантаження $q = N / A$ до поверхонь СЕ, які виходять на лівій торець голівки зразка (див. рис.3), де N – поздовжня сила; $A = \pi(D_Г^2 - D_Н^2) / 4$ – площа торця. Воно має величину

$$q = 4 \cdot 12000 / \pi(40^2 - 34^2) \approx 34.4 \text{ МПа}.$$

Крім того, згідно з формулою (12) у зразку виникають температурні деформації, які в стиснених умовах деформування викликають напруження.

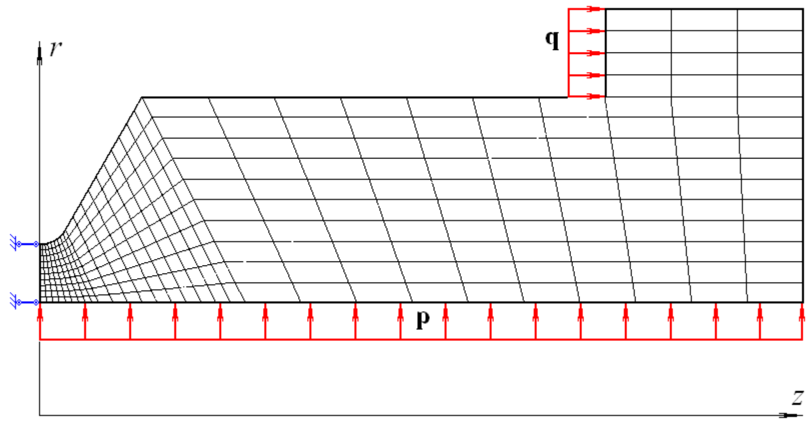


Рис.3. Розрахункова схема для задачі про напружено-деформований стан зразка

Сітка СЕ програмою OKA-3D створюється на основі чотирикутних у плані регіонів з використанням параметричного відображення. Тобто задаються координати кутових та, якщо границя регіону є криволінійною, – проміжного вузла, після чого призначається кількість СЕ у кожному напрямку регіону. На рис.2 та рис.3 бачимо обриси таких 4-х регіонів. Заповнення регіонів скінченними елементами та стикування сіток регіонів проводиться автоматично. Створена сітка СЕ зберігається у файлі з розширенням імені .dis.

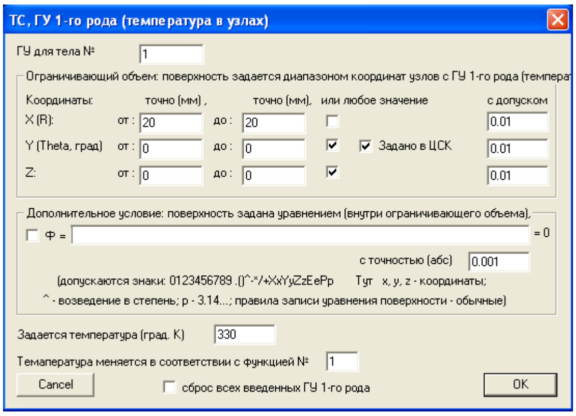
Термомеханічні характеристики матеріалу, початкові та граничні умови, типи задач й інші дані задаються за допомогою відповідних діалогів програми OKA-3D.

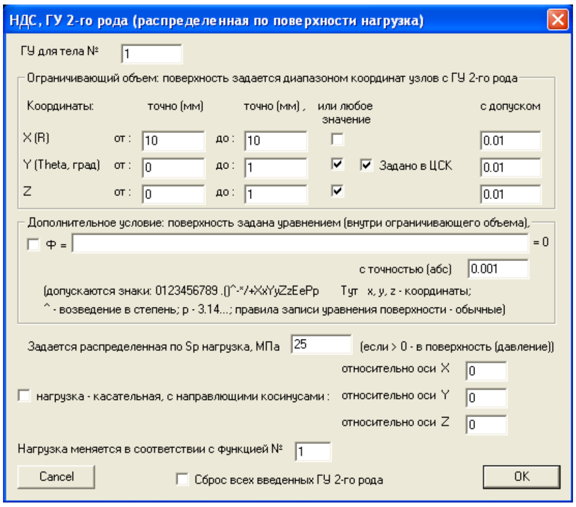
На рис.4 як приклад наведено вигляд діалогів для введення: температурних ГУ 1-го роду (рис4-а) і тиску на поверхнях СЕ (рис.4-б).

6.6. Результати розрахунків, висновки

Результати розрахунків програма поміщує у файли **t_res_01_1.oka** та **nds_res_01_1.oka**. Ці файли містять таблиці розподілу функцій у вузлах скінченно-елементної сітки. Функції такі: температура та температурні градієнти (задача про тепловий стан); усі 6 компонент тензора напружень, три компоненти вектора переміщень, параметр Одквіста, інтенсивність напружень, головні напруження, параметри Надаї-Лоде та жорсткості напруженого стану, деякі інші (задача про напружено-деформований стан). Оскільки обсяг інформації дуже великий, розглянемо тільки деякі основні параметри напруженого стану зразка.

По-перше необхідно відзначити "фізичний" характер отриманих результатів. Їх аналіз показав, що усі поля напружень не залежать від координати θ, узгоджені з граничними умовами, мають характерний вигляд у місцях концентрації напружень. Тому можна вважати, що постановку задачі та її розв’язання було зроблено правильно (точність результатів не дуже значна, оскільки сітка скінченних елементів не є щільною. Але для навчальних цілей цієї точності достатньо).





а) б)

Рис.4. Вигляд діалогів для введення: а) температурних ГУ 1-го роду; б) – тиску на поверхнях СЕ

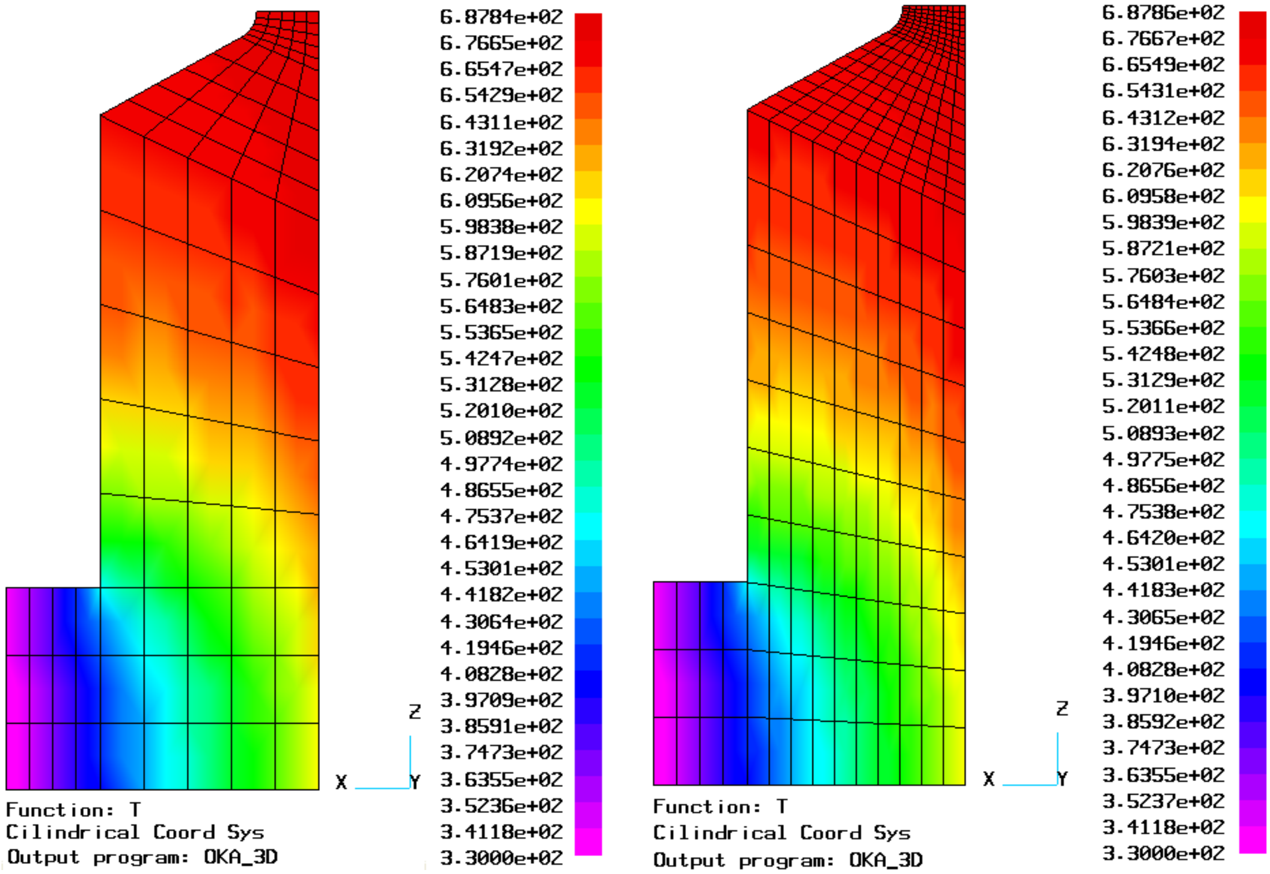
Нагадаємо, що розв’язки отримували на двох скінченно-елементних сітках.

Результати розрахунку задачі про тепловий стан, отримані на двох різних сітках, зображено на рис.5-а і рис.5-б відповідно. Як видно з рисунків, температурні поля практично не розрізняються, тобто є збіжність розрахунків.

На рис.6 зображено розподіл напружень за Мізесом (інтенсивності напружень), які обумовлені тільки температурними деформаціями, отримані на двох різних сітках. Максимальний рівень напружень реалізується в голівці зразка, оскільки саме там є найбільший градієнт температур. Видно, що розподіл напружень на обох сітках дуже близький, тобто є збіжність розрахунків.

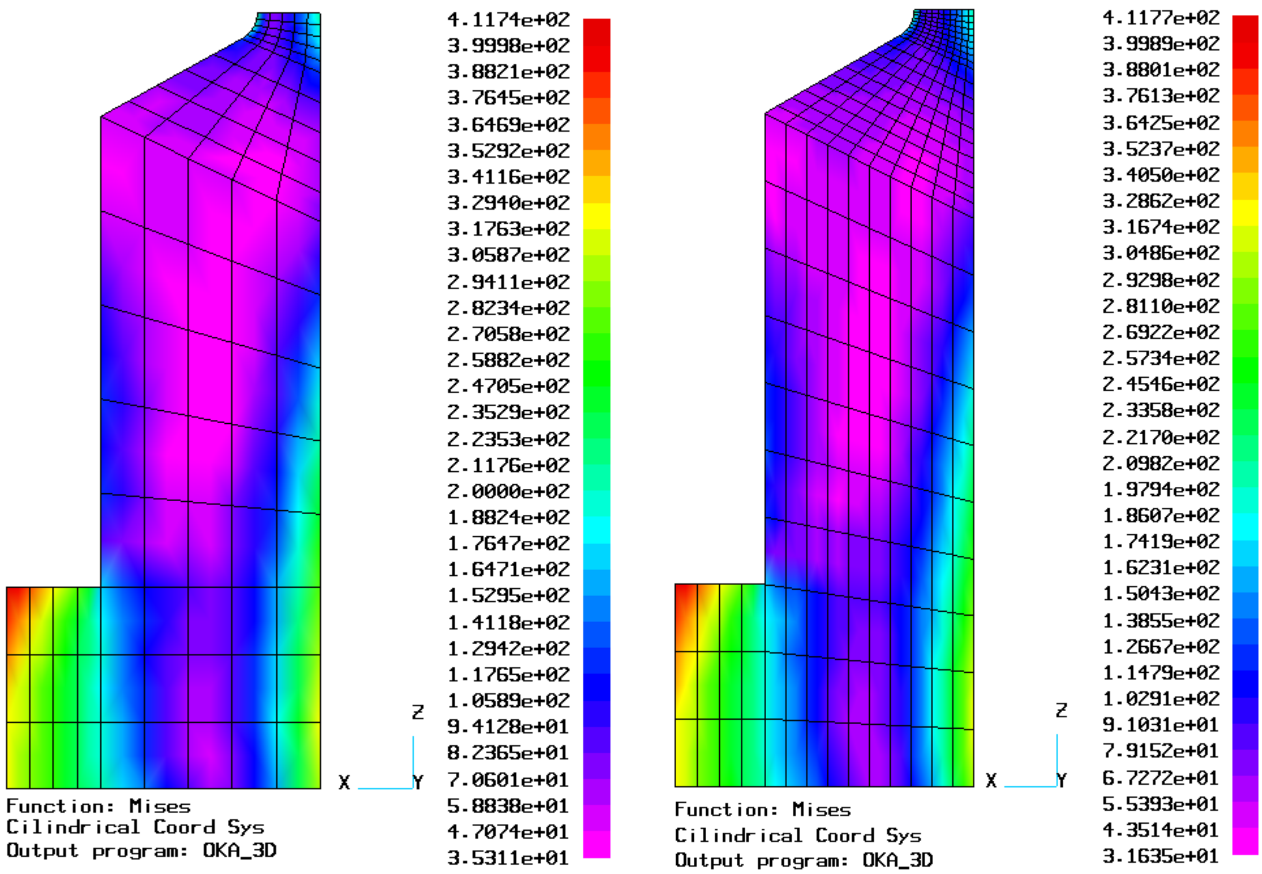
На рис.7 зображено розподіл напружень за Мізесом, які обумовлені температурними деформаціями та зовнішнім силовим навантаженням: внутрішнім тиском та силою, що розтягає, отримані на двох різних сітках. Видно, що максимальні значення на більш щільній (другій) сітці дещо більші, ніж на менш щільній сітці.

На рис.8 наведені збільшені зображення розподілу напружень за Мізесом, які зображені на рис.7, в околі концентратора напружень. Видно, що більш щільна сітка краще описує локальний пик напружень. Оскільки напруження у приповерхневому шарі СЕ мають дуже великий градієнт, можна передбачати, що при подальшому ущільненні сітки градієнт та максимальне значення напруження за Мізесом у зоні концентрації ще збільшаться.



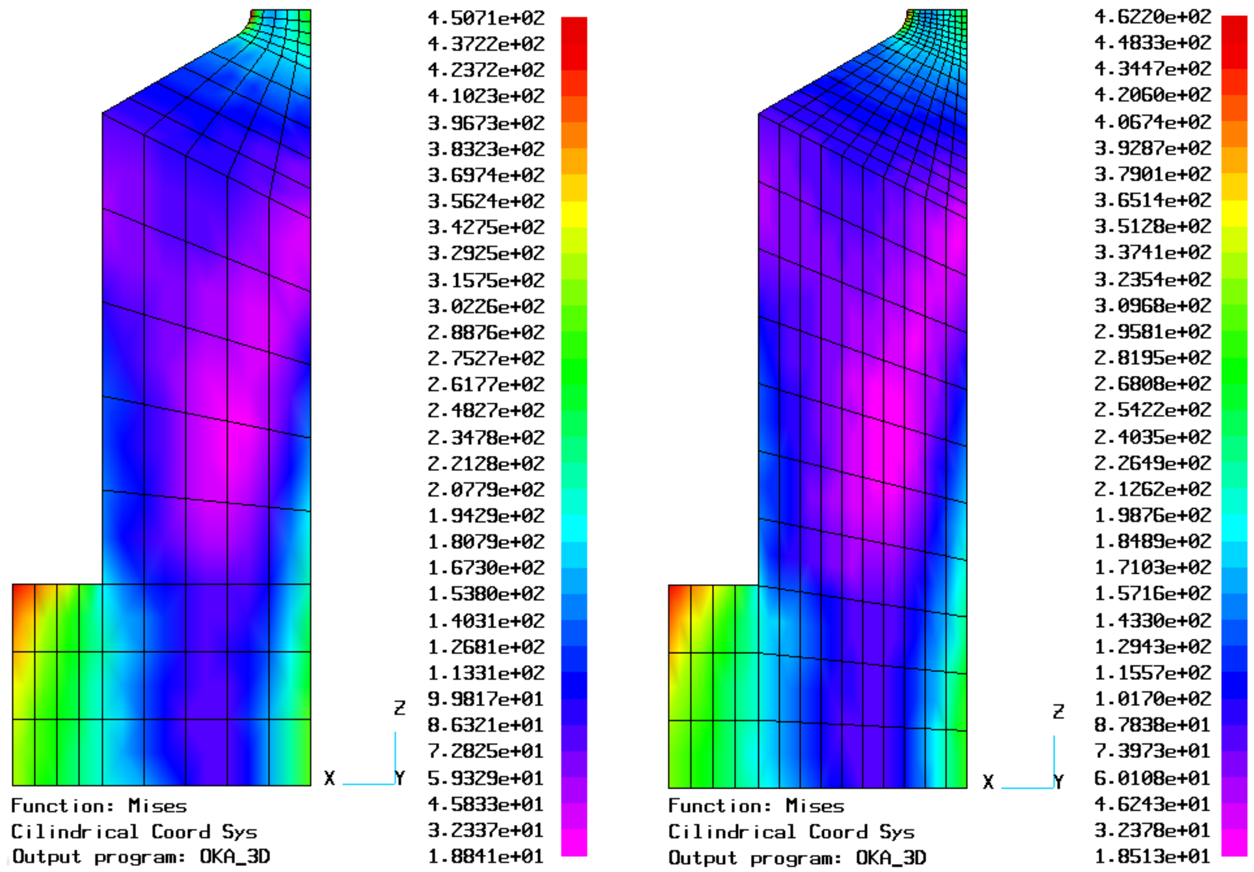
а) б)

Рис.5. Результати розрахунку задачі про тепловий стан, градуси Кельвіна



а) б)

Рис.6. Ізосмуги напружень за Мізесом, МПа, обумовлені тільки температурними деформаціями



а) б)

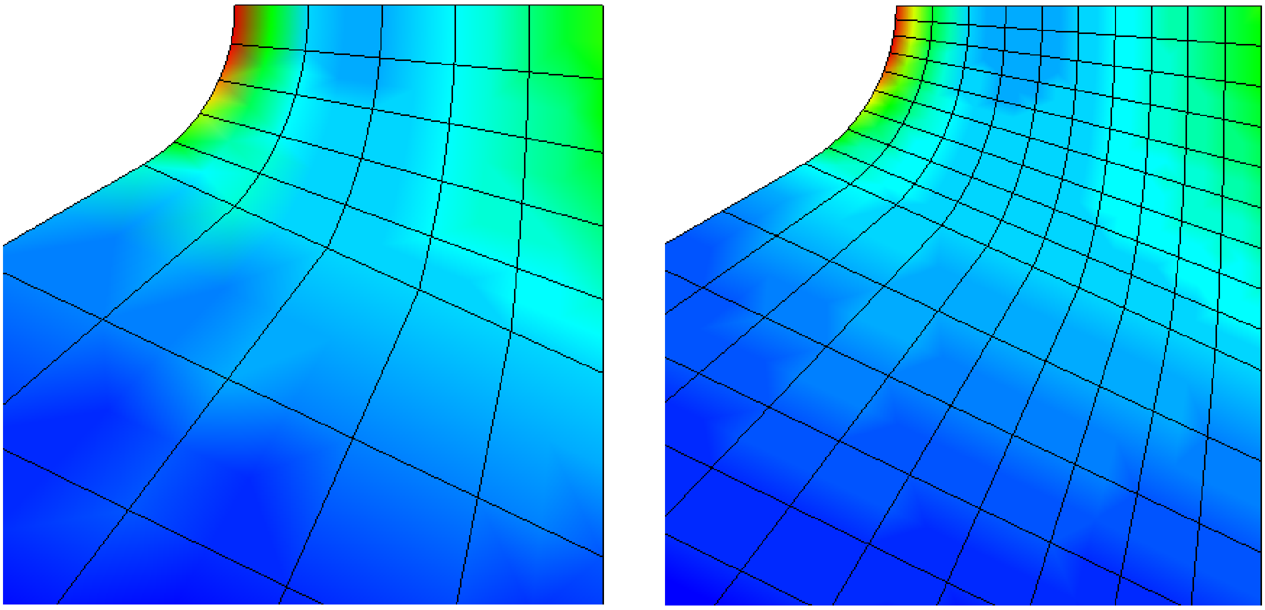
Рис.7. Ізосмуги напружень за Мізесом, МПа, обумовлені температурними деформаціями та зовнішнім силовим навантаженням

На рис.9 зображено розподіл напружень σ_{max}. Видно, що максимальні величини напружень реалізуються теж „на дні” циліндричної проточки, причому напруження за Мізесом мають величини 450.7 МПа та 462.2 МПа для різних сіток відповідно; а σ_{max} дорівнюють 548.6 МПа та 543.6 МПа. Тобто для крихкого матеріалу напружений стан зразка є більш небезпечним, ніж для пластичного матеріалу, якщо вони мають близькі значення напружень, що допускаються.

У таблицях 1 і 2 приведені дані, а на рис.10 – відповідні графіки розподілу напружень за Мізесом σ_{Mizes} і максимальних σ_{max} вздовж радіуса в небезпечному перерізі. Як видно з таблиць і графіків, розбіжності є, але незначні. Тому можна вважати, що точність проведених розрахунків є задовільною і робити додаткові розрахунки на ще більш щільній сітці немає особливої потреби.

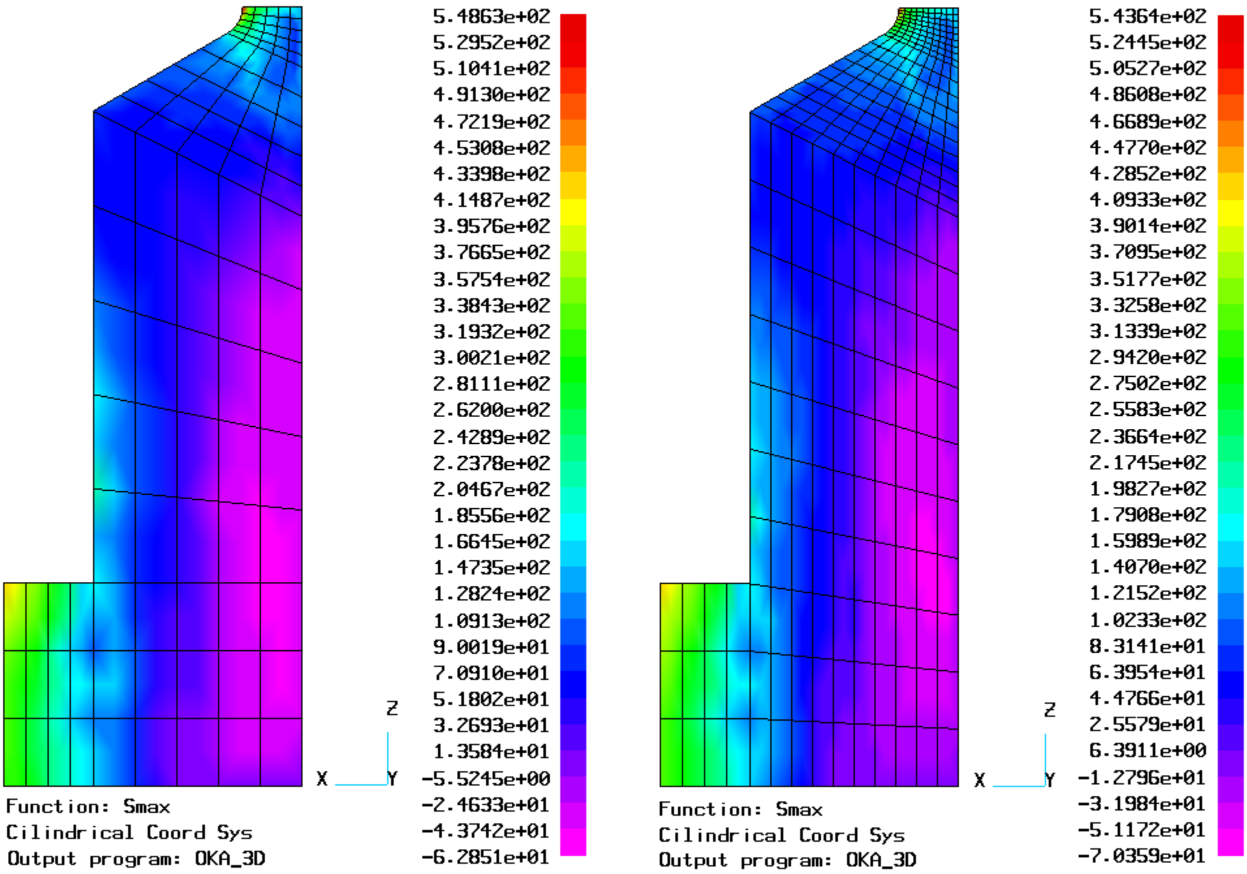
Як зазначалося у вступі, зразок з концентратором застосовують при експериментальних дослідженнях впливу концентрації напружень на втому матеріалів. Для таких експериментів потрібно знати значення коефіцієнта концентрації напружень, пов’язане зі значенням радіусу дна проточки: чим менше радіус, тим більшим є цей коефіцієнт. У формули, якими наближують закономірності впливу концентрації напружень на втому матеріалів, можуть входити різні параметри в небезпечному перетині: інтенсивність напружень σ_{Mizes}, максимальне нормальне напруження $\sigma_{\max}$, максимальне дотичне напруження $\tau_{\max}$, параметр жорсткості напруженого стану $K = \sigma_V / \sigma_{\max}$ та інші, навіть необоротні деформації.

Визначимося лише з двома коефіцієнтами концентрації напружень: для σ_{Mizes} і для $\sigma_{\max}$. Для цього потрібно мати значення пікових (максимальних) та номінальних для перерізу напружень, оскільки $K_\sigma = (\sigma)_{Max} / (\sigma)_{Nom}$.



а) б)

Рис.8. Збільшене зображення ізосмуг напружень за Мізесом, МПа, обумовлені температурними деформаціями та зовнішнім силовим навантаженням



а) б)

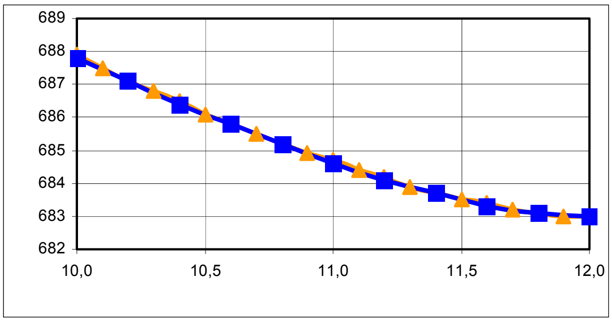
Рис.9. Ізосмуги максимальних напружень, МПа, обумовлені температурними деформаціями та зовнішнім силовим навантаженням

Таблиця 1. Розподіл температур та напружень σ_{Mizes} і σ_{max} вздовж радіуса у небезпечному перерізі зразка, отримані на першій сітці СЕ

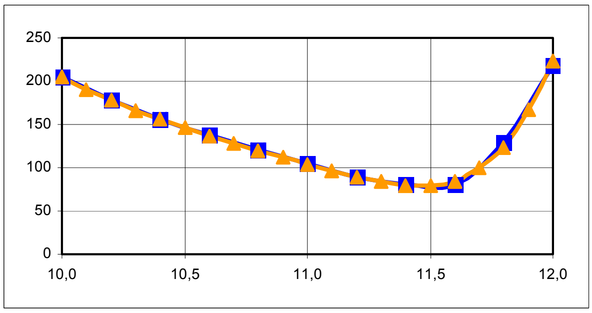
Радіус, мм	Сітка 1 (груба)			
	θ, **К**	σ_{Mizes} **(від θ), МПа**	σ_{Mizes}, **МПа**	σ_{max}, **МПа**
10.0	687.8	205.1	283.5	135.5
10.2	687.1	178.5	250.0	153.8
10.4	686.4	156.1	224.9	167.3
10.6	685.8	137.3	204.2	182.6
10.8	685.2	120.2	187.2	196.4
11.0	684.6	104.3	172.9	210.9
11.2	684.1	89.6	161.4	228.0
11.4	683.7	80.5	163.3	242.9
11.6	683.3	80.3	173.6	273.5
11.8	683.1	128.7	272.2	329.7
12.0	683.0	218.2	450.7	548.6

Таблиця 2. Розподіл температур та напружень σ_{Mizes} і $\sigma_{\max}$ вздовж радіуса в небезпечному перерізі зразка, отримані на другій сітці СЕ

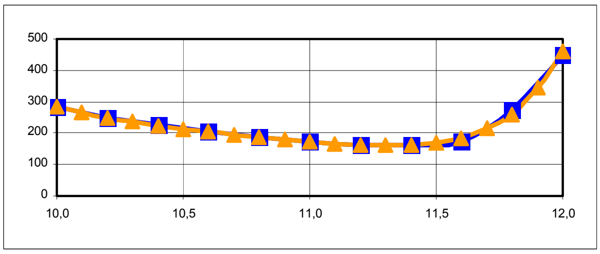
Радіус, мм	Сітка 2 (щільна)			
	θ, **К**	σ_{Mizes} **(від θ), МПа**	σ_{Mizes}, **МПа**	σ_{max}, **МПа**
10.0	687.9	204.7	282.7	136.9
10.1	687.5	190.6	264.7	145.9
10.2	687.1	177.8	249.3	153.4
10.3	686.8	166.4	235.8	161.4
10.4	686.5	155.8	224.1	168.5
10.5	686.1	146.0	213.4	175.9
10.6	685.8	136.8	203.8	182.8
10.7	685.5	128.1	194.9	190.0
10.8	685.2	119.7	186.7	197.0
10.9	684.9	111.7	179.2	204.2
11.0	684.7	103.9	172.4	211.7
11.1	684.4	96.4	166.7	219.2
11.2	684.2	89.4	162.1	227.6
11.3	683.9	83.7	160.4	235.7
11.4	683.7	79.5	161.0	245.6
11.5	683.5	79.6	169.5	254.6
11.6	683.4	84.2	183.4	267.5
11.7	683.2	100.0	216.2	277.5
11.8	683.1	122.9	259.4	344.2
11.9	683.0	167.2	347.1	420.2
12.0	683.0	223.7	462.2	543.6



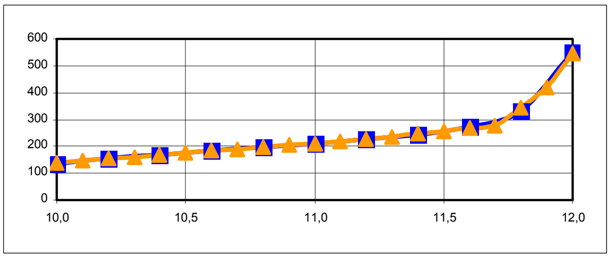
а)



б)



в)



г)

Рис.10. Графіки розподілу вздовж радіуса в небезпечному перерізі зразка: а) – температур, К; б) – σ_{Mizes} від температури, МПа; в) – σ_{Mizes}, МПа; г) – σ_{max}, МПа

Для зразка, який розглядається, номінальними вважають напруження, що виникають у тонкостінній трубці під дією внутрішнього тиску та сили, яка розтягує. Визначимо ці напруження, використовуючи формули опору матеріалів.

Номінальне напруження у трубці при розтягу:

$$(\sigma_z)_{Nom} = N / A = 4N / \pi(D_{np}^2 - D_{в}^2) = 4 \cdot 12000 / (\pi(24^2 - 20^2)) \approx 86.9 \text{ МПа}.$$

Номінальне напруження σ_θ в тонкостінній трубці під дією внутрішнього тиску p знаходимо за формулою Лапласа:

$$(\sigma_\theta)_{Nom} = pD_{cp} / 2\delta = p(D_{np} + D_{в}) / (2(D_{np} - D_{в})) = 25 \cdot (24 + 20) / (2 \cdot (24 - 20)) = 137.5 \text{ МПа}.$$

Радіальним напруженням у тонкостінній трубці нехтують. Тому:

$$(\sigma_{Mizes})_{Nom} = \sqrt{\sigma_\theta^2 + \sigma_z^2 - \sigma_\theta \sigma_z} = \sqrt{86.9^2 + 137.5^2 - 86.9 \cdot 137.5} \approx 120.4 \text{ МПа};$$

$$(\sigma_{Max})_{Nom} = (\sigma_z)_{Nom} = 137.5 \text{ МПа}.$$

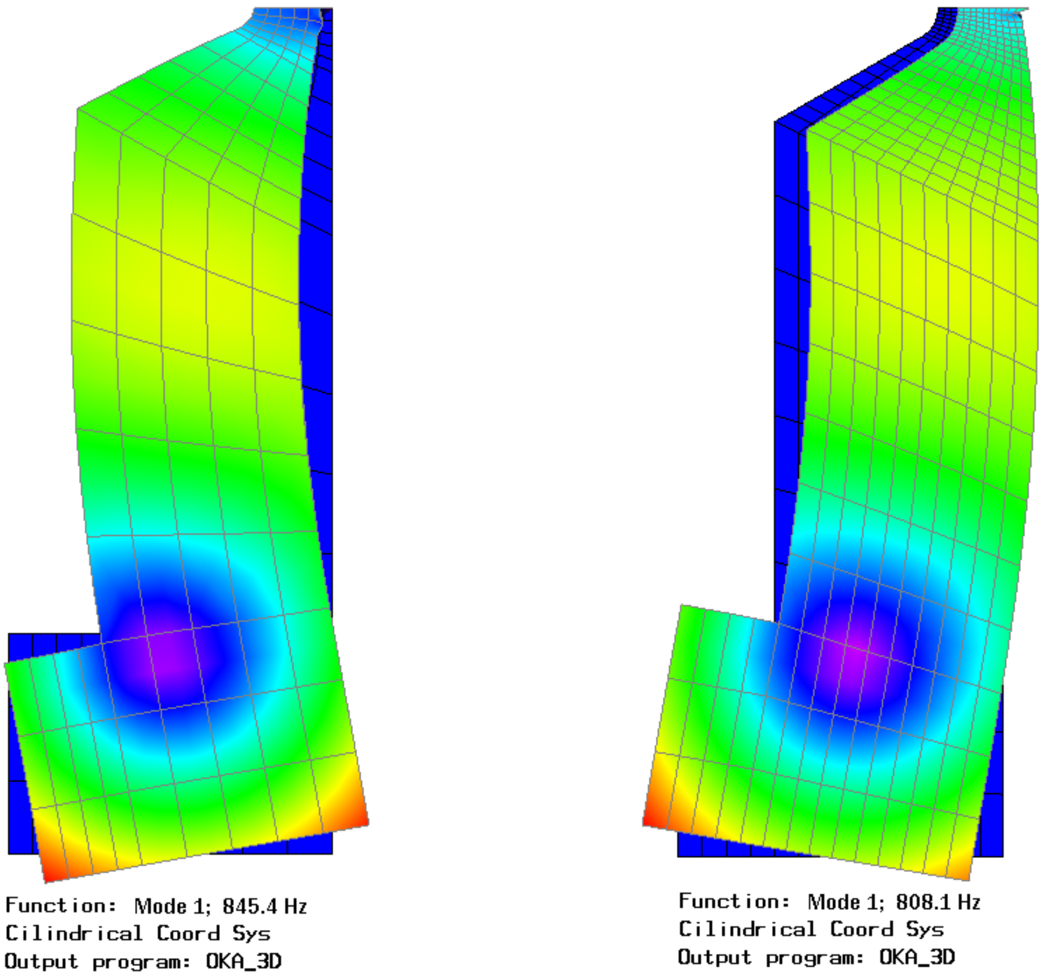
Отже, коефіцієнти концентрації напружень, отримані в розрахунках на

- першій сітці: $(K_\sigma)_{Mizes} = (\sigma_{Mizes})_{\max} / (\sigma_{Mizes})_{Nom} = 450.7 / 120.4 \approx 3.74$;
  $(K_\sigma)_{max} = (\sigma_{max})_{\max} / (\sigma_{max})_{Nom} = 548.6 / 137.5 \approx 3.99$.
- другій сітці: $(K_\sigma)_{Mizes} = (\sigma_{Mizes})_{\max} / (\sigma_{Mizes})_{Nom} = 462.2 / 120.4 \approx 3.84$;
  $(K_\sigma)_{max} = (\sigma_{max})_{\max} / (\sigma_{max})_{Nom} = 543.6 / 137.5 \approx 3.95$.

Всі розрахункові коефіцієнти концентрації напружень виявилися близькими. Можна прийняти, що зразок, в якому був розрахований напружено-деформований стан, має коефіцієнт концентрації напружень $K_\sigma \approx 3.9$.

На рис.11. зображено вигляд першої власної форми коливань зразка. Слід зазначити, що при осесиметричній постановці задачі можна визначити не всі власні форми коливань, а тільки осесиметричні. На різних сітках власні частоти коливань розрізняються приблизно на 4.6%, що можна вважати задовільної точністю.

Таким чином, відповідно до завдання курсової роботи на двох скінченно-елементних сітках, які за кроком у небезпечному перерізі відрізняються у два рази, проведені всі розрахунки теплового та напружено-деформованого стану зразка з концентратором напружень.



а) **б)**

Рис.11. Вигляд першої власної форми коливань зразка

6.7. Список літератури

1. Нейбер Г. Концентрация напряжений / Г. Нейбер. М.: Гостехиздат, 1946. 513 с.
2. Рудаков К. М. Чисельні методи аналізу в динаміці та міцності конструкцій: Навч. посібник / К. М. Рудаков. К.: НТУУ „КПІ", 2007. 379 с.
3. Опір матеріалів: Підручник / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський; За ред. Г. С. Писаренка. К.: Вища шк., 1993. 655 с.
4. Рудаков К.Н. FEMAP 10.2.0. Геометрическое и конечно-элементное моделирование конструкций / К. Н. Рудаков. К., 2011. 317 с. Електрон. аналог друк. вид. : URL: http://mmi-dmm.kpi.ua/vyklad/RUDAKOV/rudakov.html (дата звернення: 31.05.2016).
5. Методичні вказівки до виконання курсової роботи з дисципліни "Числові методи динаміки та міцності машин" для студентів напряму підготовки 6.050501 "Прикладна механіка" за програмами підготовки спеціальності 7.05050101/8.05050101 "Динаміка і міцність машин" / Нац. техн. ун-т України "КПІ ім. Ігоря Сікорського" : укл.: К.М. Рудаков. К. : НТУУ "КПІ ім. Ігоря Сікорського", 2015. 30 с.

7. РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Бате Н. Численные методы анализа и метод конечных элементов / Н. Бате, Е. Вилсон. М.: Стройиздат, 1982. 447 с.
2. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу. М.: Мир. 1986. 542 с.
3. Джордж А. Численное решение больших разреженных систем уравнений / А. Джордж, Дж. Лю. М.: Мир, 1984. 333 с.
4. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. М.: Мир, 1975. 539 с.
5. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган. М.: Мир, 1986. 318 с.
6. Колтунов М. А. Прикладная механика деформируемого твердого тела / М. А. Колтунов, А. С. Кравчук, В. П. Майборода. М.: Высшая школа, 1983. 349 с.
7. Морозов Е. М. Метод конечных элементов в механике разрушения / Е. М. Морозов, Г. П. Никишков. М.: Наука, 1980. 256 с.
8. Нейбер Г. Концентрация напряжений / Г. Нейбер. М.: Гостехиздат, 1946. 513 с.
9. Опір матеріалів: Підручник / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський; За ред. Г. С. Писаренка. К.: Вища шк., 1993. 655 с.
10. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы: Пер. с англ. / Б. Парлетт. М.: Мир, 1983. 384 с.
11. Победря Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности / Б. Е. Победря. М.: Изд-во МГУ, 1995. 366 с.
12. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. М.: Наука, 1988. 712 с.
13. Расчет на прочность деталей машин: Справочник / И. А. Биргер, Б. Ф. Шорр, Г. Б. Иосилевич. М.: Машиностроение, 1979. 702 с.
14. Рудаков К. М. Чисельні методи аналізу в динаміці та міцності конструкцій: Навч. Посібник / К. М. Рудаков. К.: НТУУ "КПІ", 2007. 379 с.
15. Рудаков К. Н. FEMAP 10.2.0. Геометрическое и конечно-элементное моделирование конструкций / К. Н. Рудаков. К., 2011. 317 с. Електрон. аналог друк. вид. : URL: http://mmi-dmm.kpi.ua/vyklad/RUDAKOV/rudakov.html (дата звернення: 31.05.2016).
16. Рычков С. П. MSC.visualNASTRAN для Windows / С. П. Рычков. М.: НТ Пресс, 2004. 552 с.: ил. (Проектирование и моделирование).
17. Термопрочность деталей машин / Под ред. И. А. Биргера, В. Ф. Шорра. М.: Машиностроение, 1975. 456 с.
18. Тьюарсон Р. Разреженные матрицы / Р. Тьюарсон. М.: Мир, 1976. 189 с.
19. Хейгеман Л. Прикладные итерационные методы / Пер. с англ. / Л. Хейгеман, Д. Янг. М.: Мир, 1986. 448 с.
20. Шимкович Д. Г. Расчет конструкций в MSC.visualNastran for Windows / Д. Г. Шимкович. М.: ДМК Пресс, 2004. 704 с.

ДОДАТОК 1 Зразок титульної сторінки пояснювальної записки

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
"КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО"
МЕХАНІКО-МАШИНОБУДІВНИЙ ІНСТИТУТ
КАФЕДРА ДИНАМІКИ І МІЦНОСТІ МАШИН ТА ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА
до курсової роботи
з дисципліни "Числові методи динаміці та міцності машин"

Тема завдання:
"ДОСЛІДЖЕННЯ ПРУЖНО ТА ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ТРУБЧАСТОГО ЗРАЗКА З КІЛЬЦЕВОЮ ПРОТОЧКОЮ У ЗОНІ КОНЦЕНТРАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ"

Виконав: студент(ка) групи МП -___

_____________________ _____________

Робота захищена
з оцінкою ____________
“ ____ “ _____________ 20__ р.
_________________ / ______________ /

КИЇВ – 20___

ДОДАТОК 2 Зразок аркушу завдання до курсової роботи

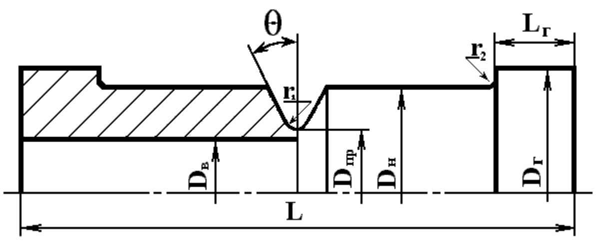
КУРСОВА РОБОТА
З ЧИСЛОВИХ МЕТОДІВ ДИНАМІЦІ ТА МІЦНОСТІ МАШИН

Студент(ка) : ______________________ , група МП - ____ Варіант № _____

Тема: „Розрахунок температурного й напружено-деформованого стану, власних частот і форм коливань трубчастого зразка з кільцевою проточкою”

Вихідні дані:

- **об'єкт:** трубчастий зразок з кільцевим концентратором



загальна довжина зразка L , мм	52
довжина голівки $L_Г$, мм	6.75
діаметр голівки $D_Г$, мм	40.0
зовнішній діаметр трубки D_H , мм	34.0
внутрішній діаметр трубки D_B , мм	20.0
кут проточки θ , град	30
радіус кривизни дна проточки r_1 , мм	1.0
діаметр проточки $D_{ПР}$, мм	24.0
радіус округлення r_2	1.0

- **властивості матеріалу**

Теплофізичні		**Механічні**	
коеф. теплопровідності, Вт/(мК)	37.0	модуль Юнга, МПа	$2\cdot10^5$
коеф. лінійного температурного подовження, 1/К	$1.25\cdot10^{-5}$	коеф. Пуассона	0.30
		щільність матеріалу, г/см^3	7.8
		границя плинності, МПа	600

- **умови термосилового навантаження**

початкова температура, К	293	внутрішній тиск, МПа	25
температура утворюючої голівки, К	330	сила, що розтягує зразок, КН	12
температура середовища (К), що прокачується	700		
коеф. тепловіддачі, Вт/(м^{2}К)	11300		

Додаткові умови:

- використати метод скінченних елементів: пакети програм, наявні в ауд. 254-1;
- у розрахунковій схемі використати властивості симетрії задачі;
- розв’язки одержати на двох осесиметричних скінченно-елементних сітках, що відрізняються друг від друга вузловим кроком приблизно у два рази, або застосувати СЕ 1-го й 2-го порядку апроксимації (тобто використати два варіанти сітки СЕ);
- окремо оцінити рівень напружень від температурного впливу;
- провести частотний аналіз (знайти перші 20 власних частот і форм коливань);
- отримані на двох варіантах сіток розв’язки в характерному перетині по компонентам (температура, напруження) порівняти (побудувати таблиці й графіки);
- роботу оформити стандартним чином, тобто у вигляді пояснювальної записки (бажано машинописний варіант), що містить всі необхідні компонента: вступ, постановка крайової задачі й метод її розв’язування (теорія), розрахункова схема, результати розрахунку і їхній аналіз, висновки, література, а також необхідні таблиці, графіки й рисунки (рисунки з результатами – тільки копії з екрана монітора).

Цей аркуш завдання вшивається другім аркушем після титульного і є обов'язковою частиною пояснювальної записки.

Лектор _______________

ЗМІСТ

Навчальне видання

Методичні вказівки
до виконання курсової роботи з дисципліни
"Числові методи динаміки та міцності машин"
для студентів
спеціальності "131 Прикладна механіка"
спеціалізації "Динаміка і міцність машин"

Укладач: Костянтин Миколайович Рудаков,
д.т.н., професор