Приложение 4

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ (теория)

П4.1 Постановка краевой задачи несвязанной теплопроводности

В каждой элементарной единице объема среды (подход Лагранжа) баланс потока тепла определяется соотношением

$$c_P\bar{\rho}\frac{\partial T}{\partial t}+c_P\bar{\rho}(\nabla_j T)V_j-\nabla_i(\lambda_{ij}\nabla_j T)=\hat{\omega} \qquad (П4.1)$$

при начальном условии

$$T(x^j,\,0)=\hat{T}_0(x^j)\,. \qquad (П4.2)$$

На поверхности (тела, объема, жидкости) граничные условия (ГУ):

- по температуре поверхности (ее части S_T)

$$T(x^j,\,t)\Big|_{S_T}=\hat{T}(x^j,\,t)\,; \qquad (П4.3)$$

- по тепловому потоку (в направлении внешней нормали $\vec{\nu}$ к поверхности)

$$\lambda_\nu\frac{\partial T}{\partial\nu}\bigg|_{S_G}=\hat{q}\big|_{S_q}+\tilde{q}\big|_{S_\alpha}+\breve{q}\big|_{S_\beta}\,, \qquad (П4.4)$$

где $\hat{q}=q(x^j,\,t)$ – известный поток тепла через границу S_q. Для конвективной составляющей теплового потока через поверхность в NX Nastran используют линейную

$$\tilde{q}\big|_{S_\alpha}=-\alpha\cdot u_{CN}\cdot(T-\hat{T}_\infty)\big|_{S_\alpha} \qquad (П4.5\text{-а})$$

или одну из нелинейных зависимостей

$$\tilde{q}\big|_{S_\alpha}=-\alpha\cdot u_{CN}\cdot(T-\hat{T}_\infty)^{\mu+1}\Big|_{S_\alpha}=-\alpha\tilde{Q}\Big|_{S_\alpha},\ \text{где}\quad \tilde{Q}=(T-\hat{T}_\infty)^{\mu+1}\,; \qquad (П4.5\text{-б})$$

$$\tilde{q}\big|_{S_\alpha}=-\alpha\cdot u_{CN}\cdot(T^\mu-\hat{T}_\infty^\mu)\Big|_{S_\alpha}=-\alpha\tilde{\tilde{Q}}\Big|_{S_\alpha},\ \text{где}\quad \tilde{\tilde{Q}}=(T^\mu-\hat{T}_\infty^\mu)\,; \qquad (П4.5\text{-в})$$

а для лучевой составляющей теплового потока – выражение

$$\breve{q}\big|_{S_\beta}=-\beta\cdot f\cdot u_{CN}\cdot[e_e(T+T_{abs})^4-a_e\hat{T}_a^4]\Big|_{S_\beta}=-\beta f[e_eW-a_e\hat{T}_a^4]\Big|_{S_\beta},\ \text{где}\quad W=(T+T_{abs})^4\,. \qquad (П4.6)$$

Обозначено: $\lambda_{ij},c_P,\alpha,\beta$ – коэффициенты теплопроводности (Вт/м град), теплоемкости (Дж/(кг град)), конвективной теплоотдачи (Вт/(м$^2\cdot$ град)) и постоянная Стефана-Больцмана (Вт/(м$^2\cdot$ град^4)) соответственно; $\bar{\rho}$ – плотность материала тела (кг/м^3); λ_ν – коэффициенты теплопроводности в направлении внешней нормали; $\hat{\omega}$ – мощность внутреннего источника (или стока) тепла; $u_{CN}=u_{ControlNode}$ – значение в контрольной точке (может равняться единице); поверхность с ГУ $S_G=S_q\cup S_\alpha\cup S_\beta\cup S_T$; $T=T(x^j,t)$ – температура; t – время; $\hat{T}_\infty=T_\infty(x^j,t)$ – температура среды возле поверхности S_α с конвективным теплообменом; T_{abs} – смещение расчетной температуры T от абсолютного нуля; $\hat{T}_a=\hat{T}_a(\vec{x},t)$ – абсолютная температура тела, с которым рассматриваемое тело (объем, жидкость) имеет лучевой теплообмен через поверхность S_β; $0\le\mu\le 1$ – показатель степенных зависимостей; $0\le a_e\le 1$ и $0\le e_e\le 1$ – коэффициенты излучения поверхностью источника и способности поверхности тела к поглощению соответственно. Значок „^” над переменной указывает на то, что ее величина задается.

Фактор освещенности поверхности $(S_\beta)_i$ тела лучевым источником из поверхности S_j вычисляется по формуле

$$f_{i-j} = \frac{1}{(S_\beta)_i} \int\limits_{(S_\beta)_i} \int\limits_{S_j} \frac{\cos\theta_i \cos\theta_j}{\pi r^2} d(S_\beta)_i dS_j \,, \qquad (П4.7)$$

где поверхность S_j – излучающая, а $(S_\beta)_i$ – поглощающая; r – расстояние между двумя точками на поверхностях S_j и $(S_\beta)_i$; θ_i и θ_j – углы между линией, соединяющей точки на поверхностях, и нормалями к этим поверхностям.

Уравнение стационарной теплопроводности выводится непосредственно из (П4.1) исключением компонент, зависящих от времени (т.е. при $\partial T / \partial t \equiv 0$):

$$c_P \bar{\rho} (\nabla_j T) V_j - \nabla_i (\lambda_{ij} \nabla_j T) = \hat{\omega}. \qquad (П4.8)$$

Для твердых тел характерны относительно малые перемещения точек тела, поэтому обычно пренебрегают конвективным переносом тепла в теле, т.е. в уравнениях (П4.1) и (П4.8) считают $c_P \bar{\rho} (\nabla_j T) V_j \equiv 0$, поэтому они принимают вид:

$$c_P \bar{\rho} \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla_i (\lambda_{ij} \nabla_j T) = \hat{\omega}; \qquad (П4.1\text{-а})$$

$$\nabla_i (\lambda_{ij} \nabla_j T) = -\hat{\omega}. \qquad (П4.8\text{-а})$$

В зависимости от конкретных условий задачи в уравнениях (П4.1), (П4.4) и (П4.8) возможное отсутствие заданных теплового потока ($S_q = 0$ или $\hat{q}\big|_{S_q} = 0$), конвективного теплообмена ($S_\alpha = 0$ или $\tilde{q}\big|_{S_\alpha} = 0$), лучевого теплообмена ($S_\beta = 0$ или $\breve{q}\big|_{S_\beta} = 0$) и объемного теплового источника ($\hat{\omega} = 0$). Для изотропного материала $\lambda_{ij} = \lambda_\nu = \lambda$ при $i = j$, $\lambda_{ij} = 0$ при $i \neq j$, поэтому $\nabla_i (\lambda_{ij} \nabla_j T) = \nabla_j (\lambda \nabla_j T)$. Дальше для упрощения рассматриваем изотропный материал.

П4.2 Учет температурной зависимости характеристик материала

Обычно коэффициент теплопроводности – слабая функция температуры, уменьшающаяся с увеличением температуры для твердых материалов и увеличивающаяся с увеличением температуры для жидкостей и газов. Кроме того, он может зависеть от направления (быть тензором второго ранга λ_{ij}) в анизотропном материале. Теплоемкость материала тоже является функцией температуры, но слабой.

Вообще, каждая характеристика материала может зависеть от температуры. Рассмотрим проблему на примере коэффициента теплопроводности λ. В диалоге FEMAP вводится значение $\lambda_{RM} = \lambda(T_{RM})$, где T_{RM} является температурой испытания материала (если она не указана, то обычно равна $20^o C$). Также вводится функция температуры $F(T)$. Итак, текущее значение $\lambda(T) = \lambda_{RM} \cdot F(T)$. Но все функции в FEMAP сохраняются в табличном (дискретном) виде. Поэтому для промежуточных значений температуры должна применяться аппроксимирующая формула. В SPLMS.Fv10.2.0 используется линейная аппроксимация, поэтому текущее значение:

$$\lambda(T) = \lambda_{RM} \cdot F(T) \approx \lambda_{RM} \cdot \left\{ F(T_{(k)}) + \frac{T - T_{(k)}}{T_{(k+1)} - T_{(k)}} \left[F(T_{(k+1)}) - F(T_{(k)}) \right] \right\}, \qquad (П4.9)$$

где k – номер точки на графике $F(T)$.

П4.3 Ослабление постановки краевой задачи теплопроводности

В „**Help**" NX Nastran указано, что для решения полученной системы уравнения применены метод Петрова-Галеркина, т.е. метод Петрова с выбором весовых функций такими же, как и базисные функции. Этот метод допускает нелинейность задачи, прост в использовании, поэтому применяется чаще всего.

Г.И. Петров исходил из фундаментальной теоремы о проекциях, согласно которой для каждого вектора $\vec{u}(\vec{x}) \in \Omega \subset H$, где Ω является замкнутым пространством гильбертового пространства H, существует лишь один вектор $\vec{u}^*(\vec{x}) \in \Omega$ такой, что $\| \vec{u}(\vec{x}) - \vec{u}^*(\vec{x}) \| <$ $< \| \vec{u}(\vec{x}) - \vec{u}^\#(\vec{x}) \|$, где вектор $\vec{u}^\#(\vec{x})$ – любой другой (не $\vec{u}^*(\vec{x})$). Необходимым и достаточным условием выполнения этого неравенства является ортогональность вектора $\vec{u}(\vec{x}) - \vec{u}^*(\vec{x})$ любому вектору $\vec{w}(\vec{x}) \in \Omega$.

Эта теорема не накладывает никаких требований на операторы краевой задачи, поэтому Петрова-Галеркина (взвешенных невязок – МВН) является универсальным.

Согласно этому методу приближенное решение задачи ищется из нужного количества равных нулю функционалов:

$$F_n = \int_\Omega \vec{R}_\Omega \vec{w}_n d\Omega = 0 \quad \text{или} \quad F_n = \int_\Omega \vec{R}_\Omega \vec{w}_n d\Omega + \int_S \vec{R}_S \vec{\bar{w}}_n dS = 0\,; \quad j = 1, 2, ..., J\,, \tag{П4.10}$$

где векторы $\vec{R}_\Omega$ и $\vec{R}_S$ – соответственно объемный и поверхностный N-мерные векторы погрешностей решения (невязок) краевой задачи; $\vec{w}_n$ и $\vec{\bar{w}}_n$ – полные по энергии системы весовых векторов, причем эти системы в общем случае могут быть независимыми, но всегда можно принять, что $\vec{\bar{w}}_n = \vec{w}_n$. Равенство нулю (П4.10) отражает общее требование сходимости приближенного решения к точному при $J \to \infty$. Доказана теорема, что при условии $J \to \infty$ сходимость метода существует.

Поскольку в задаче теплопроводности искомый результат – *скалярная* функция температуры $T = T(\vec{x}, t)$, то для формулы (П4.10) величина $N = 1$. Из выражений (П4.1), (П4.4), (П4.5-а) и (П4.6) в соответствии со второй формулой (П4.10) запишем J функционала

$$F_n = \int_\Omega \left(c_P \bar{\rho} \frac{\partial T}{\partial t} + \left(c_P \bar{\rho} \nabla_j T \right) V_j - \nabla_j (\lambda \nabla_j T) - \hat{\omega} \right) w_n d\Omega +$$
$$+ \int_S \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \nu} - \hat{q} \Big|_{S_q} + \alpha \cdot u_{CN} \cdot (T - \hat{T}_\infty) \Big|_{S_\alpha} + \beta f \cdot u_{CN} \cdot [e_e W - a_e \hat{T}_a^4] \Big|_{S_\beta} \right) w_n dS = 0; \;\; 1 \le n \le J. \tag{П4.11}$$

В формуле (П4.11) высший порядок производной – второй. Но с помощью формулы Грина-Стокса можно понизить его до первого. В нашем случае эта формула для скалярных функций w_n и T будет иметь вид:

$$\int_\Omega \nabla_j (\lambda \nabla_j T) w_n d\Omega = \int_S \lambda \frac{\partial T}{\partial \nu} w_n dS - \int_\Omega (\nabla_j w_n)(\lambda \nabla_j T) d\Omega\,. \tag{П4.12}$$

Она позволяет не только понизить порядок производной до первого, а также одновременно исключить из (П4.12) интеграл по всей площади тела S:

$$F_n = \int_\Omega \left(c_P \bar{\rho} \frac{\partial T}{\partial t} + \left(c_P \bar{\rho} \nabla_j T \right) V_j - \nabla_j (\lambda \nabla_j T) - \hat{\omega} \right) w_n d\Omega + \int_\Omega (\nabla_j T) \lambda (\nabla_j w_n) d\Omega +$$
$$+ \int_\Omega \lambda \nabla_j (\nabla_j T) w_n d\Omega - \int_{S_q} \hat{q} w_n dS + \int_{S_\alpha} \alpha \cdot u_{CN} \cdot (T - \hat{T}_\infty) w_n dS + \int_{S_\beta} \beta f \cdot u_{CN} \cdot [e_e W - a_e \hat{T}_a^4] w_n dS =$$
$$= \int_\Omega c_P \bar{\rho} \frac{\partial T}{\partial t} w_n d\Omega + \int_\Omega \left(c_P \bar{\rho} \nabla_j T \right) V_j w_n d\Omega + \int_\Omega (\nabla_j T) \lambda (\nabla_j w_n) d\Omega + \int_{S_\alpha} \alpha \cdot u_{CN} \cdot T w_n dS - \int_{S_q} \hat{q} w_n dS -$$
$$- \int_{S_\alpha} \alpha \cdot u_{CN} \cdot \hat{T}_\infty w_n dS + \int_{S_\beta} \beta f e_e \cdot u_{CN} \cdot W w_n dS - \int_{S_\beta} \beta f \cdot u_{CN} \cdot a_e \hat{T}_a^4 w_n dS - \int_\Omega \hat{\omega} w_n d\Omega = 0\,;$$
$$1 \le n \le J\,. \tag{П4.13-а}$$

Это и есть ослабленная формулировка метода Петрова (МВН) для задачи теплопроводности. Укажем, что требования для весовых функций изменились: кроме полноты они еще должны быть один раз дифференцируемыми. Это приемлемое условие.

Если вместо (П4.5-а) применять нелинейные зависимости (П4.5-б) или (П4.5-в), то вместо (П4.13-а) можно получить соответственно:

$$F_n = \int_\Omega c_P\bar{\rho}\frac{\partial T}{\partial t}w_n d\Omega + \int_\Omega \left(c_P\bar{\rho}\nabla_j T\right)V_j w_n d\Omega + \int_\Omega (\nabla_j T)\lambda(\nabla w_n)d\Omega + \int_{S_\alpha} \alpha\cdot u_{CN}\cdot\tilde{Q}w_n dS -$$
$$-\int_{S_q}\hat{q}w_n dS + \int_{S_\beta}\beta f\cdot u_{CN}\cdot e_e W w_n dS - \int_{S_\beta}\beta f\cdot u_{CN}\cdot a_e\widehat{T}_a^4 w_n dS - \int_\Omega \hat{\omega}w_n d\Omega = 0\,;$$
$$1\le n\le J\,. \qquad \text{(П4.13-б)}$$

$$F_n = \int_\Omega c_P\bar{\rho}\frac{\partial T}{\partial t}w_n d\Omega + \int_\Omega \left(c_P\bar{\rho}\nabla_j T\right)V_j w_n d\Omega + \int_\Omega (\nabla_j T)\lambda(\nabla w_n)d\Omega + \int_{S_\alpha} \alpha\cdot u_{CN}\cdot\tilde{\tilde{Q}}w_n dS -$$
$$-\int_{S_q}\hat{q}w_n dS + \int_{S_\beta}\beta f\cdot u_{CN}\cdot e_e W w_n dS - \int_{S_\beta}\beta f\cdot u_{CN}\cdot a_e\widehat{T}_a^4 w_n dS - \int_\Omega \hat{\omega}w_n d\Omega = 0\,;$$
$$1\le n\le J\,. \qquad \text{(П4.13-в)}$$

П4.4 Конечно-элементное представление краевой задачи теплопроводности

В соответствии с методом Фурье решение краевой задачи в объеме Ω можно искать в виде усеченного ряда:

$$T = T(\vec{x},t) \approx \sum_{m=1}^{J}\theta_m(t)\cdot\Phi_m(\vec{x})\,. \qquad \text{(П4.14)}$$

В результате конечно-элементного представления объема Ω в виде совокупности из N^e КЭ с объемами Ω^e сетка КЭ содержит N^U узлов. В соответствии с идеологией метода конечных элементов (МКЭ) функции $\Phi_m(x^i)$ разложения (П4.14) можно представить в виде

$$\Phi_m(x^i) = \sum_{\Omega^e\subset\Lambda_m}\chi^e(x^i)\cdot\varphi_m^e(x^i)\,, \qquad \text{(П4.15)}$$

где Λ_m – множество КЭ, что содержат узел m; $\varphi_m^e(x^i)$ – базисная функция (обычно это интерполяционный полином), что соответствует узлу m в пределах Ω^e; функция принадлежности к КЭ (оператор инцидентности):

$$\chi^e(x^i) = \begin{cases}1, & x^i\subset\Omega^e\,;\\ 0, & x^i\not\subset\Omega^e\,.\end{cases} \qquad \text{(П4.16)}$$

Иначе говоря, вместо (П4.14) имеем конечно-элементную аппроксимацию

$$T_N^h(x^i,t) = \sum_{m=1}^{N^U}\theta_m(t)\cdot\sum_{\Omega^e\subset\Lambda_m}\chi^e(x^i)\cdot\varphi_m^e(x^i)\,, \qquad \text{(П4.17)}$$

в которой N^U – количество узлов КЭС, которому должно быть равно число J – количество функционалов (П4.13); $\theta_m(t)$ – узловые значения температуры как функции времени.

В качестве весовых функций без ограничения общности и в соответствии с методу Бубнова-Галеркина примем те же базисные функции (П4.15), т.е.

$$w_n(x^i) = \Phi_n(x^i)\,. \qquad \text{(П4.18)}$$

Вектор W в (П4.13) можно аппроксимировать аналогично (П4.17):

$$W_N^h(x^i,t) = \sum_{m=1}^{N^U}\psi_m(t)\cdot\sum_{\Omega^e\subset\Lambda_m}\chi^e(x^i)\cdot\varphi_m^e(x^i)\,, \qquad \text{(П4.19)}$$

где $\psi_m(t)$ – узловые значения вектора W, т.е.

$$\psi_m(t) = [\theta_m(t)+T_{abs}]^4\,. \qquad \text{(П4.20)}$$

Подставим (П4.17) ... (П4.19) в (П4.13-а). С учетом (П4.16) и (П4.20) получим нелинейную систему уравнений

$$G_{mn}\frac{d\theta_m}{dt}+K_{mn}\theta_m+R_{mn}\cdot[\theta_m(t)+T_{abs}]^4=P_n\ ,\ \ 1\le m,n\le N^U\ , \qquad \text{(П4.21-а)}$$

с компонентами

$$G_{mn}=\sum_{\Omega^e\subset\Lambda_{mn}}G^e_{mn}\ ;\ \ K_{mn}=\sum_{\Omega^e\subset\Lambda_{mn}}K^e_{mn}\ ;\ \ R_{mn}=\sum_{m\Omega^e\subset\Lambda_n}R^e_{mn}\ ;\ \ P_n=\sum_{\Omega^e\subset\Lambda_n}P^e_n\ , \qquad \text{(П4.22)}$$

где Λ_m – множество КЭ, что содержат узел номер m; $\Lambda_{mn}=\Lambda_m\Lambda_n$ – пересечение указанных множеств (количество узлов в КЭ ограниченно величиной M^e, которая в разных КЭ может быть различной). Компоненты сборок (П4.22):

$$G^e_{mn}=\int_{\Omega^e}c_P\bar\rho\varphi^e_m\varphi^e_n d\Omega\ \ ;\ \ 1\le m,n\le N^U\ ; \qquad \text{(П4.23)}$$

$$K^e_{mn}=\int_{\Omega^e}(\nabla_j\varphi^e_m)\lambda(\nabla_j\varphi^e_n)d\Omega+\int_{\Omega^e}c_P\bar\rho V_j(\nabla_j\varphi^e_m)\varphi^e_n d\Omega+\int_{S^e_\alpha}\alpha\cdot u_{CN}\cdot\varphi^e_m\varphi^e_n dS\ ; \qquad \text{(П4.24-а)}$$

$$R^e_{mn}=\int_{S^e_\beta}\beta f\cdot u_{CN}\cdot e_e\varphi^e_m\varphi^e_n dS\ \ ;\ \ 1\le m,n\le N^U\ ; \qquad \text{(П4.25)}$$

$$P^e_n=\int_{S^e_q}\hat q\varphi^e_n dS+\int_{S^e_\alpha}\alpha\cdot u_{CN}\cdot\hat T_\infty\varphi^e_n dS+\int_{S^e_\beta}\beta f\cdot u_{CN}\cdot a_e\hat T_a^4\varphi^e_n dS+\int_{\Omega^e}\hat\omega\varphi^e_n d\Omega;\ \ 1\le n\le N^U. \qquad \text{(П4.26-а)}$$

Обозначено: S^e_q, S^e_α, S^e_β – поверхности КЭ, выходящие на S_q, S_α и S_β соответственно.

Начальное условие (П4.2) превратится в

$$T^h_N((x^i)_m,0)=\hat\theta_m(0)=\hat T_0((x^i)_m)\ , \qquad \text{(П4.27)}$$

а граничное (П4.3) – в

$$T^h_N((x^i)_m,t)\ _{|S_T}=\hat\theta_m(t)\ _{|S_T}=\hat T((x^i)_m,t)\ , \qquad \text{(П4.28)}$$

где $(x^i)_m$ – глобальные координаты узла с номером m.

В случае стационарной теплопроводности из (П4.21-а) исчезает член с производной по времени, поэтому остается система алгебраических уравнений (САУ)

$$K_{mn}\theta_m+R_{mn}\cdot(\theta_m+T_{abs})^4=P_n\ ;\ \ \ 1\le m,n\le N^U\ , \qquad \text{(П4.29-а)}$$

которая дополняется граничными условиями 1-го рода (П4.28) и решается относительно θ_m.

Если вместо (П4.13-а) применить (П4.13-б) или (П4.13-в), то нелинейную составляющую с вектором $\tilde Q$ или $\tilde{\tilde Q}$ (см. также (П4.5-б) или (П4.5-в) соответственно) целесообразно полностью вынести в правую часть. Тогда вместо (П4.24-а) и (П4.26-а) имеем

$$\tilde K^e_{mn}=\int_{\Omega^e}(\nabla_j\varphi^e_m)\lambda(\nabla_j\varphi^e_n)d\Omega+\int_{\Omega^e}c_P\bar\rho V_j(\nabla_j\varphi^e_m)\varphi^e_n d\Omega;\ \ 1\le m,n\le N^U;\qquad \text{(П4.24-б)}$$

$$\tilde P^e_n=\int_{S^e_q}\hat q\varphi^e_n dS+\int_{S^e_\beta}\beta f\cdot u_{CN}\cdot a_e\hat T_a^4\varphi^e_n dS+\int_{\Omega^e}\hat\omega\varphi^e_n d\Omega\ ;\ \ 1\le n\le N^U. \qquad \text{(П4.26-б)}$$

и вектор

$$N^e_n=\int_{S^e_\alpha}\alpha\cdot u_{CN}\cdot(T-\hat T_\infty)^{\mu+1}\varphi^e_n dS\ \ \text{или}\ \ N^e_n=\int_{S^e_\alpha}\alpha\cdot u_{CN}\cdot(T^\mu-\hat T^\mu_\infty)\varphi^e_n dS\ ;\ \ 1\le n\le N^U\ , \qquad \text{(П4.30)}$$

из которого собирается дополнительный глобальной вектор $N_n=\sum_{\Omega^e\subset\Lambda_n}N^e_n$. Формулы (П4.21) и (П4.29) несколько изменяются:

$$G_{mn}\frac{d\theta_m}{dt}+\tilde K_{mn}\theta_m+R_{mn}\cdot[\theta_m(t)+T_{abs}]^4=\tilde P_n+N_n\ ;\ \ 1\le m,n\le N^U\ ; \qquad \text{(П4.21-б)}$$

$$\tilde K_{mn}\theta_m+R_{mn}\cdot(\theta_m+T_{abs})^4=\tilde P_n+N_n\ ;\ \ \ 1\le m,n\le N^U\ . \qquad \text{(П4.29-б)}$$

Примечание. Это не единственно возможные варианты САУ для задач теплопроводности. Если САУ решается много раз, желательно иметь стабильную ее матрицу. Это достигается перемещением всех нелинейных составляющих САУ в правую часть.

П4.5 Алгоритм Ньютона-Рафсона решения нелинейной САУ краевой задачи стационарной теплопроводности

САУ (П4.29-а) – нелинейна при наличии лучевого теплообмена, а САУ (П4.29-б) – всегда. Они будут нелинейными и тогда, когда свойства материала будут зависеть от температуры. В NX Nastran такие САУ решаются методом Ньютона-Рафсона. Для случая (П4.29-б) на $(k+1)$-й итерации из САУ

$$\breve{K}_{mn}\Delta\theta_m = b_n ; \quad 1 \le m, n \le N^U \qquad (П4.31)$$

находятся компоненты $\Delta\theta_m$, потом $(\theta_m)^{(k+1)} = (\theta_m)^{(k)} + \Delta\theta_m$. В (П4.31) обозначено:

$$\breve{K}_{mn} = \left(\widetilde{K}_{mn} + 4R_{mn}\cdot(\theta_m + T_{abs})^3 - \partial N_n / \partial\theta_m\right)^{(k)} ; \qquad 1 \le m, n \le N^U ; \qquad (П4.32)$$

$$b_n = \left(\widetilde{P}_n + N_n - \widetilde{K}_{mn}\theta_m - R_{mn}\cdot(\theta_m(t) + T_{abs})^4\right)^{(k)} ; \qquad 1 \le n \le N^U . \qquad (П4.33)$$

В случае (П4.29-а) в последних формулах вместо $\widetilde{K}_{mn}$ используются K_{mn}, а компоненты N_n – отсутствуют.

Для остановки итераций используются три критерия (ε – заданная точность):

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{N^U}(\Delta\theta_n)^2} < \varepsilon\cdot\sqrt{\sum_{n=1}^{N^U}(\theta_n^{(k+1)})^2} , \quad \sum_{n=1}^{N^U}|\Delta\theta_n| < \varepsilon\cdot\sum_{n=1}^{N^U}|\theta_n^{(k+1)}| \ \text{ и } \max\{|\Delta\theta_n|/|\theta_n|\} < \varepsilon . \quad (П4.34)$$

П4.6. Алгоритм Ньюмарка решения краевой задачи нестационарной теплопроводности

Полученные системы (П4.21) содержат производную по времени. В NX Nastran применен один из возможных вариантов решения этой проблемы, использующий метод Ньюмарка. Этот метод при применении к параболическим уравнениям фактически совпадает с известными двухслойными весовыми схемами.

Для сокращения выражений введем обозначения:

$$Z_n(t) = -\widetilde{K}_{mn}\,\theta_m(t) - R_{mn}\cdot[\theta_m(t) + T_{abs}]^4 ; \quad F_n(t) = \widetilde{P}_n + N_n(t) ; \quad 1 \le m, n \le N^U . \quad (П4.35)$$

Умножим (П4.21-б) на dt и проведем интегрирование в пределах временного шага величиной $\Delta\tau$:

$$\int_{\theta_m{}^{\tau}}^{\theta_m{}^{\tau+\Delta\tau}} d\theta_m = \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau}\left(G_{mn}\right)^{-1}\cdot[Z_n(t) + F_n(t)]dt \ ; \quad m,\ n = 1, 2, ..., N^U . \qquad (П4.36)$$

Левый интеграл точно равен $\theta_m^{\tau+\Delta\tau} - \theta_m^{\tau}$, а правый точно вычисленным быть не может, поскольку он зависит от еще неизвестной температуры. Разложив подынтегральное выражение в правой части (П4.35) в ряд в окрестности τ и так же в окрестности $\tau + \Delta\tau$, ограничившись первыми членами ряда, получим после интегрирования и сложения результатов, умноженных на $(1-\omega)$ и ω соответственно, двухслойную весовую схему:

$$\theta_m^{\tau+\Delta t} - \theta_m^{\tau} = \Delta\tau\cdot\{(1-\omega)(G_{mn}^{\tau})^{-1}[Z_n^{\tau} + F_n^{\tau}] + \omega(G_{mn}^{\tau+\Delta\tau})^{-1}[Z_n^{\tau+\Delta\tau} + F_n^{\tau+\Delta\tau}]\} , \qquad (П4.37)$$

где $0 \le \omega \le 1$; $m, n = 1, 2, ..., N^U$. Приняв неизменность (на временном отрезке величиной $\Delta\tau$) матрицы G_{mn}, получим после приведения подобных САУ (для заданной величины ω):

$$(G_{mn} + \omega\Delta\tau\widetilde{K}_{mn}^{\tau+\Delta\tau})\cdot\theta_m^{\tau+\Delta\tau} + \omega\Delta\tau R_{mn}^{\tau+\Delta\tau}\cdot(\theta_m^{\tau+\Delta\tau} + T_{abs})^4 =$$

$$= \left(G_{mn} - (1-\omega)\Delta\tau\widetilde{K}_{mn}^{\tau}\right)\theta_m^{\tau} + (1-\omega)\Delta\tau R_{mn}^{\tau}\cdot(\theta_m^{\tau} + T_{abs})^4 + \omega\Delta\tau F_n^{\tau+\Delta t} + (1-\omega)\Delta\tau F_n^{\tau} , \qquad (П4.38)$$

где $m, n = 1, 2, ..., N^U$ и в которую при наличии S_T необходимо ввести граничные условия (П4.28).

Очевидно, что $\omega = (t - \tau)/\Delta\tau$; $\tau \le t \le \tau + \Delta\tau$; $0 \le \omega \le 1$; t – время, соответствующее ω.

В NX Nastran есть параметр NDAMP (см. Раздел 4.2.6 и Раздел 5.2), с помощью которого изменяется значение весового коэффициента ω: от NDAMP=0 – схема Кранка-Николсона ($\omega = 0.5$) до NDAMP=1 – неявная схема Эйлера ($\omega = 1$). Все двухслойные схемы в диапазоне $0.5 \le \omega \le 1$ являются А-устойчивыми, т.е. имеют операторы перехода от одного временного слоя к другому ограниченными по норме сверху единицей. Известно, что лишь схема Кранка-Николсона имеет второй порядок приближения во времени, но она подвергнута осцилляциям решения, поэтому может применяться лишь при малых временных шагах, когда такие осцилляции решения отсутствуют или почти незаметны. Неявная схема Эйлера имеет первый порядок приближения во времени, но совсем не поддана осцилляциям.

Нелинейность САУ (П4.38) может быть обусловлена температурной зависимостью коэффициентов λ, c_P, $\overline{\rho}$, наличием лучевого теплообмена или применением нелинейных законов конвективного теплообмена (П4.5-б) и (П4.5-в). Такая САУ на каждом временном шаге решаются в NX Nastran с применением итерационного метода Ньютона-Рафсона.

В NX Nastran для *первого* временного шага решения задачи нестационарной теплопроводности может применяться процедура оценки верхней границы временного шага по *приближенной* формуле (условие согласованности Куранта):

$$\Delta\tau \le (h^2 c_P \overline{\rho} / \lambda)/10\,, \qquad (П4.39)$$

где h – минимальное расстояние между узлами КЭС. Дальнейшие значения для временного шага NX Nastran рассчитывает автоматически в адаптивном процессе, или использует неизменную величину (нужный вариант задается в FEMAP).