

## Приложение 8

# КРАЕВЫЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ (теория)

### П8.1 Особенности постановки краевых контактных задач о напряженно-деформированном состоянии тел

Для краевой контактной задачи характерно наличие *зоны контакта* известной (стабильной) или неизвестной (нестабильной, переменной) конфигурации. В этой зоне *нет взаимонепрониновения* поверхностей тел, а переданные в результате контакта усилия *не могут быть растягивающими* (при учете сил поверхностного сцепления в зоне контакта допускается некоторый уровень „отрицательного давления“). В соответствии со следствием общего закона сохранения (закон поверхностных взаимодействий) усилия контакта на двух контактных поверхностях должны быть *равными по величине и разнонаправленными*. Различают силовой контакт *без трения* и *с трением*.

Итак, постановка краевой *контактной* задачи о напряженно-деформированном состоянии тел отличается от постановки неконтактной задачи наличием дополнительных граничных условий и ограничений на поверхности контакта  $S_K$ . Опишем их формулами.

На общей поверхности  $S_K$  с условными номерами 1 и 2 должны быть выполнены *условия сопряжения*:

- силовые

$$(\sigma_{mn}^{(1)} - \sigma_{mn}^{(2)}) \cdot \nu_{m(j)} = 0; \quad ; \quad m, n = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2; \quad (\text{П8.1})$$

- кинематические при сцеплении (перемещения в том же базисе, что и координаты)

$$[(x_m + U_m)_{(1)} - (x_m + U_m)_{(2)}] \cdot \nu_m = 0; \quad m = 1, 2, 3; \quad (\text{П8.2})$$

$$[(x_m + U_m)_{(1)} - (x_m + U_m)_{(2)}] \cdot \tau_m = 0; \quad m = 1, 2, 3, \quad (\text{П8.3})$$

где  $\nu_m, \tau_m$  – компоненты векторов соответственно внешней нормали к поверхности контакта и касательной к той же поверхности. При проскальзывании (с трением или без трения) условие (П8.3) не используется;

- отрицательных значений нормальных составляющих контактных усилий

$$(\sigma^{mn} \nu_m \nu_n)_{(j)} < 0; \quad j = 1, 2; \quad (\text{П8.4})$$

- взаимного непрониновения тел

$$[(x_m + U_m)_{(1)} - (x_m + U_m)_{(2)}] \cdot \nu_m \leq 0. \quad (\text{П8.5})$$

Две последних условий являются основой для определения конфигурации текущей поверхности контакта.

Вместе с ГУ (Д5.47) и (Д5.48) дополнительно привлекаются ГУ на поверхности контакта  $S_K$  при:

- сцеплении, т.е. при  $|\sigma_\tau| \leq \min \{ \mu |\sigma_\nu|; (\sigma_S)_{\min} / \sqrt{3} \}$  ( $\sigma_S$  – актуальный предел текучести материала)

$$\sigma_\nu = \sigma^{mn} \nu_m \nu_n \Big|_{S_K} = \widehat{F}_\nu; \quad (\text{П8.6})$$

$$\sigma_\tau = \left[ \sum_{n=1}^3 (\sigma^{mn} \nu_m)^2 - (\sigma^{mn} \nu_m \nu_n)^2 \right]^{1/2} \Big|_{S_K} = \widehat{F}_\tau; \quad (\text{П8.7})$$

или

$$U_m \Big|_{S_K} = \widehat{U}_m; \quad (\text{П8.8})$$

- проскальзывании, т.е. при  $|\sigma_\tau| > \min\{\mu|\sigma_\nu|; (\sigma_S)_{\min} / \sqrt{3}\}$

$$\sigma_\nu = \sigma^{mn} v_m v_n \Big|_{S_k} = \widehat{F}_\nu; \tag{П8.9}$$

или

$$U_\nu = U_m v_m \Big|_{S_k} = \widehat{U}_\nu; \tag{П8.10}$$

а также при  $\mu \neq 0$

$$\sigma_\tau = -\left|\widehat{F}_\tau\right| \cdot \text{sign}(U_\tau), \tag{П8.11}$$

где  $U_\tau = (U_{m(1)} - U_{m(2)}) \cdot \tau_m$  – касательная к поверхности контакта проекция вектора взаимных перемещений.

При не учете трения (при равенстве нулю коэффициента трения  $\mu$ ) ГУ на  $S_k$  упрощаются до

$$\sigma_\nu = \sigma^{mn} v_m v_n \Big|_{S_k} = \widehat{F}_\nu \quad \text{или} \quad U_\nu = U_m v_m \Big|_{S_k} = \widehat{U}_\nu. \tag{П8.12}$$

**Примечание П8.1.** Выше применена схема сухого трения Кулона (Амонтона-Кулона) – простейшая рабочая гипотеза, которая позволяет в первом приближении вычислить величину силы трения. Модели коэффициента трения Кулона – в следующем Разделе.

Итак, контактная краевая задача содержит в краевых условиях неравенства и логические условия. Это значительно усложняет ее решение.

## П8.2 Модели коэффициента трения Кулона

В NX Nastran применяется модель трения Кулона:

$$F_\tau \leq \mu \cdot F_n, \tag{П8.13}$$

где  $F_\tau$  – сила трения;  $F_n$  – нормальная к поверхности контактная сила;  $\mu$  – коэффициент трения. В NX Nastran 7.1 есть несколько моделей коэффициента трения Кулона (см. табл.П8.1).

**Таблица П8.1. Модели коэффициента трения Кулона в NX Nastran 7.1**

FRICMOD	Выражение
1..	$\mu = A_1$
2..	$\mu = \frac{1 - \exp(-A_2 T_n)}{T_n / A_1}$
3..	$\mu = A_2 + (A_2 - A_1) \exp(-A_3 T_n)$
4..	$\mu = \begin{cases} A_1, & \text{если } \dot{i} \leq A_3 \\ A_2, & \text{если } \dot{i} > A_3 \end{cases}$
5..	$\mu = \begin{cases} A_1 + \dot{i}(A_3 - A_1) / A_2, & \text{если } \dot{i} < A_2 \\ A_3, & \text{если } \dot{i} > A_2 \end{cases}$
6..	$\mu = \begin{cases} \sqrt{(A_1 \chi_{(1)})^2 + (A_2 \chi_{(2)})^2 + (A_3 \chi_{(3)})^2}, & \text{если } \dot{i} > A_5 \\ A_4, & \text{если } \dot{i} \leq A_5 \end{cases}$
7..	$\mu = A_1 + A_2 F_n; \quad 0 \leq \mu \leq 1$
8..	$\mu = \begin{cases} A_1 + t(A_3 - A_1) / A_2, & \text{если } t < A_2 \\ A_3, & \text{если } t > A_2 \end{cases}$
9..	$\mu = \begin{cases} A_1 + A_3 x_{(2)} + A_4 x_{(3)}, & 2D \text{ (двухмерный случай)}; \\ A_1 + A_3 x_{(1)} + A_4 x_{(2)} + A_5 x_{(3)}, & 3D \text{ (трехмерный случай)}; \end{cases} \quad 0 \leq \mu \leq A_2$
12..	$\mu = \frac{1 - \exp(-A_2 F_n)}{F_n / A_1}$

13..	$\mu = A_2 + (A_2 - A_1) \exp(-A_3 F_n)$
$A_1 \dots A_3$ – постоянные, которые вводятся в диалоге; $x_{(i)}$ – координаты; $\chi_{(i)}$ – координаты локальной системы скольжения ( <b>sliding</b> ); $F_n, T_n$ контактные силы и тяга; $\dot{u}$ – скорость взаимного скольжения; $t$ – время	

В этой таблице **FRICMOD** – переменная, назначаемая в поле „**Friction Model**” на диалоговой панели, изображенной на рис.8.3. А на рис.8.2 в поле „**Friction**” задается значение  $A_1$ .

Если рассматривать величину  $\tau = F_\tau / \mu \cdot F_n$ , то  $\tau \leq 1$ . Естественно, что при отсутствии взаимного проскальзывания  $\dot{u} = 0$  и  $|\tau| < 1$ , а при проскальзывании  $sign(\dot{u}) = sign(\tau)$  и  $|\tau| = 1$ .

Для применения закона трения в NX Nastran создается функция трения. Старый вариант функции трения (для SOL 101, 103, 111, 112) задавался неявно как непрерывная функция  $\gamma(\dot{u}, \tau) = 0$  в виде

$$\tau + \gamma - \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\dot{u} - \gamma}{\varepsilon_T}\right) = 0, \tag{П8.14}$$

что изображена на рис.П8.1-а и где  $\varepsilon_T$  – малый параметр. Новый вариант функции трения (для SOL 601, 701) изображен на рис.П8.1-б (из „**Help**”). Это полилинейная функция.

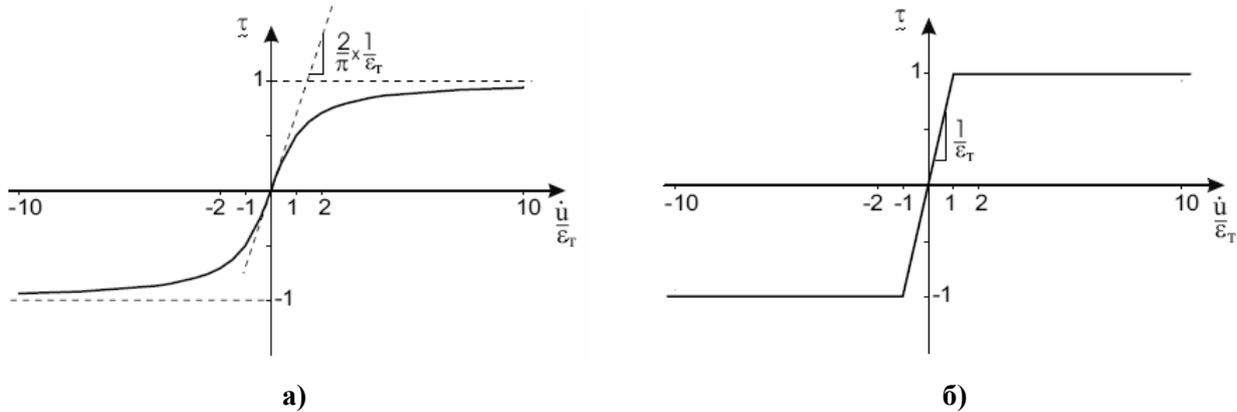


Рис.П8.1 – Графики функций трения

### П8.3 Модели контакта

В NX Nastran 7.1 есть три метода решения контактных задач:

- метод функции кинематических ограничений (**Constraint-function method**);
- метод множителей Лагранжа (**Lagrange multiplier (segment) method**). Требуется, чтобы все тела модели имели отдельные (свои) условия закрепления;
- метод жестких ограничений (**Rigid target method**).

В *методе функции кинематических ограничений* применяется функция

$$w(g, \lambda) = g\lambda = 0; \quad g \geq 0; \quad \lambda \geq 0 \tag{П8.15-а}$$

(старый вариант, для SOL 101, 103, 111, 112) или (новый вариант для SOL 601, 701)  $w(g, \lambda) = g\lambda = \varepsilon_N$ ;  $g \geq 0; \lambda \geq 0$ , которая имеет другую (эквивалентную) запись, приведенную в „**Help**”:

$$w(g, \lambda) = \frac{g + \lambda}{2} - \sqrt{\left(\frac{g - \lambda}{2}\right)^2 + \varepsilon_N} = 0, \tag{П8.15-б}$$

где  $g$  и  $\lambda$  – числа, соответствующие величинам зазора и нормальной контактной силы  $F_n$ , а  $\varepsilon_N$  – малый параметр. Графики этих функций изображены на рис.8.2 (увеличение  $\varepsilon_N$  увеличивает радиус перехода от горизонтали до вертикали графика).

Вариант (Д5.15-б) приводит к повышенной скорости сходимости алгоритма, поскольку функция (Д5.15-б) не имеет изломов и дифференцируется.



Рис.П8.2 – Графики функций ограничений

В методе функции кинематических ограничений первый шаг – неконтактное решение. Выявляются зоны проникновения одного тела в другое, в этих местах (в узлах) прикладываются дополнительные сжимаемые (контактные) силы, которые потом в итерациях уточняются так, чтобы не было взаимопроникновения тел. Для вычисления этих дополнительных сжимающих сил используется оригинальный алгоритм, обеспечивающий довольно быструю сходимость контактных итераций.

Метод множителей Лагранжа приводит к добавлению к глобальной СЛАУ дополнительных уравнений и неизвестных – множителей Лагранжа, приобретающих смысл контактных усилий. Записываются выражения для ограничений на поверхности контакта  $S_K$  в виде неравенств:

$$([b]\{q\} - \{\delta\})|_{S_K} \geq 0, \tag{П8.16}$$

где  $[b]$  – матрица кинематических ограничений;  $\{\delta\}$  – вектор натягов; которые (неравенства) умножаются на множители Лагранжа  $\lambda_m$  и результат прибавляется к полной энергии системы  $\Pi_0$ :

$$\Pi = \Pi_0 + \{\lambda\}^T ([b]\{q\} - \{\delta\}), \tag{П8.17}$$

причем считается, что (сравните с (П8.15-а))

$$\lambda_m \geq 0; \quad \{\lambda\}^T ([b]\{q\} - \{\delta\})|_{S_K} = 0. \tag{П8.18}$$

В соответствии с теоремами Джона и Куна-Такера нелинейного программирования ищется минимум функционала (П8.17), в результате чего формируется СЛАУ и выясняется физический смысл множителей Лагранжа для этого класса задач: узловые контактные давления. Путем выбора вида матрицы кинематических ограничений  $[b]$  можно организовать схему контакта типа „узел в поверхность”. Усилия проскальзывания могут определяться в итерациях в соответствии с законом трения.

Метод жестких ограничений (метод штрафа) применяется в разнообразных формах. Кроме прямого формулирования к нему сводятся методы введения безтолщинной контактной прослойки или контактных элементов со специальными свойствами. В результате к функционалу, описывающему общую энергию системы контактирующих тел, добавляется функционал, который отражает работу контактных усилий, квадратичный по узловым перемещениям контактных узлов, и параметры штрафа, что присутствуют в чистом виде, в виде характеристик контактной прослойки или в виде контактных конечных элементов. Минимизация полученного функционала приводит к созданию симметричной, положительно определенной СЛАУ. Недостаток метода: точность решения связана с выбором параметров штрафа. В NX Nastran 7.1 реализован вариант с созданием контактной прослойки, имеющей разные значения параметров жесткости (штрафа) в нормальном и касательном к поверхности контакта направлениях.

В одномерном случае множители штрафа имеют размерность 1/длина, а физическую интерпретацию – осевая жесткость стрежня длиной  $L$ , с площадью сечения  $A$  и модулем Юнга материала  $E$ , а именно  $K = E \cdot A \cdot L$ . Изменять (от принятых разработчиками NX Nastran) значения этих множителей есть смысл лишь тогда, когда конечно-элементная сетка

зоны контакта имеет или очень большие, или очень маленькие длины поверхностей КЭ вблизи края контакта.

Существенно заниженные значения множителей штрафа (в нормальном направлении) приводят к чрезмерному взаимному проникновению поверхностей контакта, а существенно завышенные значения – к снижению скорости сходимости алгоритма. Обычно удается автоматизировать выбор оптимальных значений этих параметров, что и сделано в NX Nastran 7.1.

Повышение скорости сходимости алгоритма часто происходит при увеличении количества точек на поверхности КЭ, из которых ищутся оппозитные контактные точки. Возможность изменять такое количество введено в NX Nastran 7.1 (см. табл.8.1).

Для получения решения *динамических* задач типа 103, 11 и 112 (см. табл.4.2) считается, что при колебаниях реализуется конфигурация контактных поверхностей, найденная при решении статической контактной задачи. Иногда это предположение верно (например, при предварительно напряженном контакте), иногда – нет.