Додаток 4

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ (теорія)

Д4.1. Постановка крайової задачі незв'язаної теплопровідності

У кожній елементарній одиниці об'єму середовища (підхід Лагранжа) баланс потоку тепла визначається співвідношенням

$$c_P \bar{\rho} \frac{\partial T}{\partial t} + c_P \bar{\rho} (\nabla_j T) V_j - \nabla_i (\lambda_{ij} \nabla_j T) = \widehat{\omega} \tag{Д4.1}$$

за початкової умовою

$$T(x^j,\, 0) = \widehat{T}_0(x^j)\,. \tag{Д4.2}$$

На поверхні (тіла, об'єму, рідини) граничні умови (ГУ):

- за температурою поверхні (її частини S_T)

$$T(x^j,\, t)\Big|_{S_T} = \widehat{T}(x^j,\, t)\,; \tag{Д4.3}$$

- за тепловим потоком (у напрямку зовнішньої нормалі $\vec{\nu}$ до поверхні)

$$\lambda_\nu \frac{\partial T}{\partial \nu}\bigg|_{S_G} = \widehat{q}\Big|_{S_q} + \tilde{q}\Big|_{S_\alpha} + \breve{q}\Big|_{S_\beta}\,, \tag{Д4.4}$$

де $\widehat{q} = q(x^j,\, t)$ – відомий потік тепла через границю S_q. Для конвекційної складової теплового потоку через поверхню у NX Nastran використовують лінійну

$$\tilde{q}\Big|_{S_\alpha} = -\alpha \cdot u_{CN} \cdot (T - \widehat{T}_\infty)\Big|_{S_\alpha} \tag{Д4.5-а}$$

або одну з нелінійних залежностей

$$\tilde{q}\Big|_{S_\alpha} = -\alpha \cdot u_{CN} \cdot (T - \widehat{T}_\infty)^{\mu+1}\Big|_{S_\alpha} = -\alpha \tilde{Q}\Big|_{S_\alpha}\,, \text{ де } \tilde{Q} = (T - \widehat{T}_\infty)^{\mu+1}\,; \tag{Д4.5-б}$$

$$\tilde{q}\Big|_{S_\alpha} = -\alpha \cdot u_{CN} \cdot (T^\mu - \widehat{T}_\infty^\mu)\Big|_{S_\alpha} = -\alpha \tilde{\tilde{Q}}\Big|_{S_\alpha}\,, \text{ де } \tilde{\tilde{Q}} = (T^\mu - \widehat{T}_\infty^\mu)\,; \tag{Д4.5-в}$$

а для променевої складової теплового потоку – вираз

$$\breve{q}\Big|_{S_\beta} = -\beta \cdot f \cdot u_{CN} \cdot [e_e (T + T_{abs})^4 - a_e \widehat{T}_a^4]\Big|_{S_\beta} = -\beta f [e_e W - a_e \widehat{T}_a^4]\Big|_{S_\beta}\,, \text{ де } W = (T + T_{abs})^4\,. \tag{Д4.6}$$

Позначено: $\lambda_{ij}, c_P, \alpha, \beta$ – коефіцієнти теплопровідності (Вт/м град), теплоємності (Дж/(кг град)), конвекційної тепловіддачі (Вт/(м$^2 \cdot$град)) і постійна Стефана-Больцмана (Вт/(м$^2 \cdot$град^4)) відповідно; $\bar{\rho}$ – густина матеріалу тіла (кг/м^3); λ_ν – коефіцієнти теплопровідності у напрямку зовнішньої нормалі; $\widehat{\omega}$ – потужність внутрішнього джерела (або стоку) тепла; $u_{CN} = u_{ControlNode}$ – значення у контрольній точці (може дорівнювати одиниці); поверхня з ГУ $S_G = S_q \cup S_\alpha \cup S_\beta \cup S_T$; $T = T(x^j,\, t)$ – температура; t – час; $\widehat{T}_\infty = T_\infty(x^j,\, t)$ – температура середовища біля поверхні S_α з конвекційним теплообміном; T_{abs} – зміщення розрахункової температури T від абсолютного нуля; $\widehat{T}_a = \widehat{T}_a(\vec{x}, t)$ – абсолютна температура тіла, з яким розглядуване тіло (об'єм, рідина) має променевий теплообмін через поверхню S_β; $0 \le \mu \le 1$ – показник степеневих залежностей; $0 \le a_e \le 1$ та $0 \le e_e \le 1$ – коефіцієнти випромінювання поверхнею джерела та спроможності поверхні тіла до поглинання відповідно. Значок „^" над змінною вказує на те, що її величина задається.

Фактор освітленості поверхні $(S_\beta)_i$ тіла променевим джерелом з поверхні S_j обчислюється за формулою

$$f_{i-j} = \frac{1}{(S_\beta)_i} \int\limits_{(S_\beta)_i} \int\limits_{S_j} \frac{\cos\theta_i \cos\theta_j}{\pi r^2} d(S_\beta)_i dS_j \,, \qquad (Д4.7)$$

де поверхня S_j – та, що випромінює, а $(S_\beta)_i$ – що поглинає; r – відстань між двома точками на поверхнях S_j та $(S_\beta)_i$; θ_i та θ_j – кути між лінією, що з'єднує точки на поверхнях, та нормалями до цих поверхонь.

Рівняння стаціонарної теплопровідності виводиться безпосередньо з (Д4.1) виключенням компонент, що залежать від часу (тобто при $\partial T / \partial t \equiv 0$):

$$c_P \overline{\rho} (\nabla_j T) V_j - \nabla_i (\lambda_{ij} \nabla_j T) = \widehat{\omega} \,. \qquad (Д4.8)$$

Для твердих тіл характерно відносно малі переміщення точок тіла, тому звичайно нехтують конвекційним переносом тепла у тілі, тобто у рівняннях (Д4.1) та (Д4.8) вважають $c_P \overline{\rho} (\nabla_j T) V_j \equiv 0$, тому вони приймають вигляд:

$$c_P \overline{\rho} \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla_i (\lambda_{ij} \nabla_j T) = \widehat{\omega} \,; \qquad (Д4.1\text{-a})$$

$$\nabla_i (\lambda_{ij} \nabla_j T) = -\widehat{\omega} \,. \qquad (Д4.8\text{-a})$$

У залежності від конкретних умов задачі у рівняннях (Д4.1), (Д4.4) і (Д4.8) можлива відсутність заданих теплового потоку ($S_q = 0$ або $\widehat{q}\big|_{S_q} = 0$), конвекційного теплообміну ($S_\alpha = 0$ або $\widetilde{q}\big|_{S_\alpha} = 0$), променевого теплообміну ($S_\beta = 0$ або $\breve{q}\big|_{S_\beta} = 0$) і об'ємного теплового джерела ($\widehat{\omega} = 0$). Для ізотропного матеріалу $\lambda_{ij} = \lambda_\nu = \lambda$ при $i = j$, $\lambda_{ij} = 0$ при $i \neq j$, тому $\nabla_i (\lambda_{ij} \nabla_j T) = \nabla_j (\lambda \nabla_j T)$. Далі для спрощення розглядаємо ізотропний матеріал.

Д4.2. Урахування температурної залежності характеристик матеріалу

Звичайно коефіцієнт теплопровідності – помірна функція температури, що зменшується зі збільшенням температури для твердих матеріалів і збільшується зі збільшенням температури для рідин і газів. Крім того, він може залежати від напрямку (бути тензором другого рангу λ_{ij}) в анізотропному матеріалі. Теплоємність матеріалу теж є функцією температури, але помірною.

Взагалі, кожна характеристика матеріалу може залежати від температури. Розглянемо проблему на прикладі коефіцієнта теплопровідності λ. У діалогу FEMAP вводиться значення $\lambda_{RM} = \lambda(T_{RM})$, де T_{RM} є температурою випробування матеріалу (якщо вона не вказана, то звичайно дорівнює $20^o C$). Також вводиться функція температури $F(T)$. Отже, поточне значення $\lambda(T) = \lambda_{RM} \cdot F(T)$. Але усі функції у FEMAP зберігаються у табличному (дискретному) вигляді. Тому для проміжних значень температури повинна застосовуватися апроксимаційна формула. У UGS.F93 використовується лінійна апроксимація, тому поточне значення:

$$\lambda(T) = \lambda_{RM} \cdot F(T) \approx \lambda_{RM} \cdot \left\{ F(T_{(k)}) + \frac{T - T_{(k)}}{T_{(k+1)} - T_{(k)}} \left[F(T_{(k+1)}) - F(T_{(k)}) \right] \right\}, \qquad (Д4.9)$$

де k – номер точки на графіку $F(T)$.

Д4.3. Ослаблення постановки крайової задачі теплопровідності

У „**Help**" NX Nastran зазначено, що для розв'язування отриманої системи рівнянь застосовано метод Петрова-Гальоркина, тобто метод Петрова з обиранням вагових функцій такими, що дорівнюють базисним функціям. Цей метод допускає нелінійність задачі, простий у використанні, тому застосовується найчастіше.

Г.І. Петров виходив з фундаментальної теореми о проекціях, згідно з якою для кожного вектора $\vec{u}(\vec{x}) \in \Omega \subset H$, де Ω є замкненим простором гільбертового простору H, існує лише один вектор $\vec{u}^*(\vec{x}) \in \Omega$ такий, що $\| \vec{u}(\vec{x}) - \vec{u}^*(\vec{x}) \| < \| \vec{u}(\vec{x}) - \vec{u}^\#(\vec{x}) \|$, де вектор $\vec{u}^\#(\vec{x})$ – будьякий інший (не $\vec{u}^*(\vec{x})$). Необхідною та достатньою умовою виконання цієї нерівності є ортогональність вектора $\vec{u}(\vec{x})-\vec{u}^*(\vec{x})$ будь-якому вектору $\vec{w}(\vec{x})\in\Omega$.

Ця теорема не накладає ніяких вимог на оператори крайової задачі, тому Петрова-Гальоркіна (зважених похибок наближення – МЗПН) є універсальним.

Згідно з цім методом наближений розв'язок задачі шукається із потрібної кількості функціоналів, які дорівнюють нулю:

$$F_n=\int_\Omega \vec{R}_\Omega \vec{w}_n d\Omega=0 \quad \text{або} \quad F_n=\int_\Omega \vec{R}_\Omega \vec{w}_n d\Omega+\int_S \vec{R}_S \vec{\tilde{w}}_n dS=0\,; \quad j=1,2,...,J\,, \quad (Д4.10)$$

де вектори $\vec{R}_\Omega$ і $\vec{R}_S$ – відповідно об'ємний і поверхневий N-вимірні вектори похибок наближення розв'язку крайової задачі; $\vec{w}_n$ і $\vec{\tilde{w}}_n$ – повні за енергією системи вагових векторів, причому ці системи в загальному випадку можуть бути незалежними, але завжди можна прийняти, що $\vec{\tilde{w}}_n=\vec{w}_n$. Рівність нулю (Д4.10) відбиває загальну вимогу збігання наближеного розв'язку до точного при $J\to\infty$. Доказано теорему, що при умові $J\to\infty$ збіжність методу існує.

Оскільки в задачі теплопровідності шуканий результат – *скалярна* функція температури $T=T(\vec{x},t)$, то для формули (Д4.10) величина $N=1$. З виразів (Д4.1), (Д4.4), (Д4.5-а) і (Д4.6) відповідно до другої формули (Д4.10) запишемо J функціоналів

$$F_n=\int_\Omega\left(c_P\bar{\rho}\frac{\partial T}{\partial t}+\left(c_P\bar{\rho}\nabla_j T\right)V_j-\nabla_j(\lambda\nabla_j T)-\hat{\omega}\right)w_n d\Omega+$$

$$+\int_S\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial\nu}-\hat{q}\Big|_{S_q}+\alpha\cdot u_{CN}\cdot(T-\hat{T}_\infty)\Big|_{S_\alpha}+\beta f\cdot u_{CN}\cdot[e_eW-a_e\hat{T}_a^4]\Big|_{S_\beta}\right)w_n dS=0;\ \ 1\le n\le J. \quad (Д4.11)$$

У формулі (Д4.11) найвищий порядок похідної – другий. Але за допомогою формули Гріна-Стокса можна понизити його до першого. У нашому випадку ця формула для скалярних функцій w_n і T буде мати вигляд:

$$\int_\Omega \nabla_j(\lambda\nabla_j T)w_n d\Omega=\int_S\lambda\frac{\partial T}{\partial\nu}w_n dS-\int_\Omega(\nabla_j w_n)(\lambda\nabla_j T)d\Omega\,. \quad (Д4.12)$$

Вона дозволяє не тільки понизити порядок похідної до першого, а також одночасно виключити з (Д4.12) інтеграл по всій площі тіла S:

$$F_n=\int_\Omega\left(c_P\bar{\rho}\frac{\partial T}{\partial t}+\left(c_P\bar{\rho}\nabla_j T\right)V_j-\nabla_j(\lambda\nabla_j T)-\hat{\omega}\right)w_n d\Omega+\int_\Omega(\nabla_j T)\lambda(\nabla_j w_n)d\Omega+$$

$$+\int_\Omega\lambda\nabla_j(\nabla_j T)w_n d\Omega-\int_{S_q}\hat{q}w_n dS+\int_{S_\alpha}\alpha\cdot u_{CN}\cdot(T-\hat{T}_\infty)w_n dS+\int_{S_\beta}\beta f\cdot u_{CN}\cdot[e_eW-a_e\hat{T}_a^4]w_n dS=$$

$$=\int_\Omega c_P\bar{\rho}\frac{\partial T}{\partial t}w_n d\Omega+\int_\Omega\left(c_P\bar{\rho}\nabla_j T\right)V_j w_n d\Omega+\int_\Omega(\nabla_j T)\lambda(\nabla_j w_n)d\Omega+\int_{S_\alpha}\alpha\cdot u_{CN}\cdot Tw_n dS-\int_{S_q}\hat{q}w_n dS-$$

$$-\int_{S_\alpha}\alpha\cdot u_{CN}\cdot\hat{T}_\infty w_n dS+\int_{S_\beta}\beta fe_e\cdot u_{CN}\cdot Ww_n dS-\int_{S_\beta}\beta f\cdot u_{CN}\cdot a_e\hat{T}_a^4 w_n dS-\int_\Omega\hat{\omega}w_n d\Omega=0\,;$$

$$1\le n\le J\,. \quad (Д4.13\text{-а})$$

Це й є послаблене формулювання методу Петрова (МЗПН) для задачі теплопровідності. Зазначимо, що вимоги для вагових функцій змінилися: окрім повноти вони ще повинні бути один раз диференційованими. Це прийнятна умова.

Якщо замість (Д4.5-а) застосовувати нелінійні залежності (Д4.5-б) або (Д4.5-в), то замість (Д4.13-а) можна отримати відповідно:

$$F_n=\int_\Omega c_P\bar{\rho}\frac{\partial T}{\partial t}w_n d\Omega+\int_\Omega\left(c_P\bar{\rho}\nabla_j T\right)V_j w_n d\Omega+\int_\Omega(\nabla_j T)\lambda(\nabla w_n)d\Omega+\int_{S_\alpha}\alpha\cdot u_{CN}\cdot\tilde{Q}w_n dS-$$

$$-\int_{S_q}\widehat{q}w_n dS+\int_{S_\beta}\beta f\cdot u_{CN}\cdot e_e W w_n dS-\int_{S_\beta}\beta f\cdot u_{CN}\cdot a_e\widehat{T}_a^4 w_n dS-\int_\Omega \widehat{\omega}w_n d\Omega=0\ ;$$

$$1\le n\le J\ . \qquad (Д4.13\text{-б})$$

$$F_n=\int_\Omega c_P\overline{\rho}\frac{\partial T}{\partial t}w_n d\Omega+\int_\Omega\left(c_P\overline{\rho}\nabla_j T\right)V_j w_n d\Omega+\int_\Omega(\nabla_j T)\lambda(\nabla w_n)d\Omega+\int_{S_\alpha}\alpha\cdot u_{CN}\cdot\tilde{\tilde{Q}}w_n dS-$$

$$-\int_{S_q}\widehat{q}w_n dS+\int_{S_\beta}\beta f\cdot u_{CN}\cdot e_e W w_n dS-\int_{S_\beta}\beta f\cdot u_{CN}\cdot a_e\widehat{T}_a^4 w_n dS-\int_\Omega \widehat{\omega}w_n d\Omega=0\ ;$$

$$1\le n\le J\ . \qquad (Д4.13\text{-в})$$

Д4.4. Скінченно-елементне представлення крайової задачі теплопровідності

Відповідно до методу Фур'є розв’язок крайової задачі в об’ємі Ω можна шукати у вигляді усіченого ряду:

$$T=T(\vec{x},t)\approx\sum_{m=1}^{J}\theta_m(t)\cdot\Phi_m(\vec{x})\ . \qquad (Д4.14)$$

У результаті скінченно-елементного представлення об’єму Ω у вигляді сукупності з N^e СЕ з об’ємами Ω^e сітка СЕ містить N^U вузлів. Відповідно до ідеології методу скінченних елементів (МСЕ) функції $\varPhi_m(x^i)$ розкладу (Д4.14) можна представити у вигляді

$$\varPhi_m(x^i)=\sum_{\Omega^e\subset\Lambda_m}\chi^e(x^i)\cdot\varphi_m^e(x^i)\ , \qquad (Д4.15)$$

де Λ_m – множина СЕ, що містять вузол m; $\varphi_m^e(x^i)$ – базисна функція (звичайно це інтерполяційний поліном), що відповідає вузлу m у межах Ω^e; функція приналежності до СЕ (оператор інцидентності):

$$\chi^e(x^i)=\begin{cases}1, & x^i\subset\Omega^e\ ;\\ 0, & x^i\not\subset\Omega^e\ .\end{cases} \qquad (Д4.16)$$

Інакше кажучи, замість (Д4.14) маємо скінченно-елементну апроксимацію

$$T_N^h(x^i,t)=\sum_{m=1}^{N^U}\theta_m(t)\cdot\sum_{\Omega^e\subset\Lambda_m}\chi^e(x^i)\cdot\varphi_m^e(x^i)\ , \qquad (Д4.17)$$

в якій N^U – кількість вузлів СЕС, що замінює раніше введене число J – кількість функціоналів (Д4.13); $\theta_m(t)$ – вузлові значення температури як функції часу.

У якості вагових функцій без обмеження загальності і відповідно до методу Бубнова-Гальоркіна приймемо ті ж базисні функції (Д4.15), тобто

$$w_n(x^i)=\varPhi_n(x^i)\ . \qquad (Д4.18)$$

Вектор W у (Д4.13) можна апроксимувати аналогічно (Д4.17):

$$W_N^h(x^i,t)=\sum_{m=1}^{N^U}\psi_m(t)\cdot\sum_{\Omega^e\subset\Lambda_m}\chi^e(x^i)\cdot\varphi_m^e(x^i)\ , \qquad (Д4.19)$$

де $\psi_m(t)$ – вузлові значення вектора W, тобто

$$\psi_m(t)=[\theta_m(t)+T_{abs}]^4\ . \qquad (Д4.20)$$

Підставимо (Д4.17) ... (Д4.19) у (Д4.13-а). З урахуванням (Д4.16) і (Д4.20) одержимо нелінійну систему рівнянь

$$G_{mn}\frac{d\theta_m}{dt}+K_{mn}\theta_m+R_{mn}\cdot[\theta_m(t)+T_{abs}]^4=P_n\ ,\ \ 1\le m,n\le N^U\ , \qquad (Д4.21\text{-а})$$

з компонентами

$$G_{mn}=\sum_{\Omega^e\subset\Lambda_{mn}}G_{mn}^e\ ;\quad K_{mn}=\sum_{\Omega^e\subset\Lambda_{mn}}K_{mn}^e\ ;\quad R_{mn}=\sum_{m\Omega^e\subset\Lambda_n}R_{mn}^e\ ;\quad P_n=\sum_{\Omega^e\subset\Lambda_n}P_n^e\ , \qquad (Д4.22)$$

де Λ_m – множина СЕ, що містять вузол номер m; $\Lambda_{mn} = \Lambda_m \Lambda_n$ – перетинання зазначених множин (кількість вузлів у СЕ обмежено величиною M^e, яка в різних СЕ може бути різною). Компоненти зборок (Д4.22):

$$G_{mn}^e = \int_{\Omega^e} c_P \bar{\rho} \varphi_m^e \varphi_n^e d\Omega \; ; \quad 1 \le m, n \le N^U ; \tag{Д4.23}$$

$$K_{mn}^e = \int_{\Omega^e} (\nabla_j \varphi_m^e) \lambda (\nabla_j \varphi_n^e) d\Omega + \int_{\Omega^e} c_P \bar{\rho} V_j (\nabla_j \varphi_m^e) \varphi_n^e d\Omega + \int_{S_\alpha^e} \alpha \cdot u_{CN} \cdot \varphi_m^e \varphi_n^e dS ; \tag{Д4.24-а}$$

$$R_{mn}^e = \int_{S_\beta^e} \beta f \cdot u_{CN} \cdot e_e \varphi_m^e \varphi_n^e dS \; ; \quad 1 \le m, n \le N^U ; \tag{Д4.25}$$

$$P_n^e = \int_{S_q^e} \widehat{q} \varphi_n^e dS + \int_{S_\alpha^e} \alpha \cdot u_{CN} \cdot \widehat{T}_\infty \varphi_n^e dS + \int_{S_\beta^e} \beta f \cdot u_{CN} \cdot a_e \widehat{T}_a^4 \varphi_n^e dS + \int_{\Omega^e} \widehat{\omega} \varphi_n^e d\Omega ; \quad 1 \le n \le N^U . \tag{Д4.26-а}$$

Позначено: S_q^e, S_α^e, S_β^e – поверхні СЕ, що виходять на S_q, S_α і S_β відповідно.

Початкова умова (Д4.2) перетвориться у

$$T_N^h((x^i)_m, 0) = \widehat{\theta}_m(0) = \widehat{T}_0((x^i)_m) , \tag{Д4.27}$$

а гранична (Д4.3) – у

$$T_N^h((x^i)_m, t) \,_{|S_T} = \widehat{\theta}_m(t) \,_{|S_T} = \widehat{T}((x^i)_m, t) , \tag{Д4.28}$$

де $(x^i)_m$ – глобальні координати вузла з номером m.

У випадку стаціонарної теплопровідності з (Д4.21-а) зникає член з похідної за часом, тому залишається система алгебраїчних рівнянь (САР)

$$K_{mn}\theta_m + R_{mn} \cdot (\theta_m + T_{abs})^4 = P_n ; \quad 1 \le m, n \le N^U , \tag{Д4.29-а}$$

яка доповнюється граничними умовами 1-го роду (Д4.28) і розв'язується відносно θ_m.

Якщо замість (Д4.13-а) застосувати (Д4.13-б) або (Д4.13-в), то нелінійну складову з вектором $\widetilde{Q}$ або $\widetilde{\widetilde{Q}}$ (див. також (Д4.5-б) або (Д4.5-в) відповідно) доцільно повністю винести в праву частину. Тоді замість (Д4.24-а) та (Д4.26-а) маємо

$$\widetilde{K}_{mn}^e = \int_{\Omega^e} (\nabla_j \varphi_m^e) \lambda (\nabla_j \varphi_n^e) d\Omega + \int_{\Omega^e} c_P \bar{\rho} V_j (\nabla_j \varphi_m^e) \varphi_n^e d\Omega ; \quad 1 \le m, n \le N^U ; \tag{Д4.24-б}$$

$$\widetilde{P}_n^e = \int_{S_q^e} \widehat{q} \varphi_n^e dS + \int_{S_\beta^e} \beta f \cdot u_{CN} \cdot a_e \widehat{T}_a^4 \varphi_n^e dS + \int_{\Omega^e} \widehat{\omega} \varphi_n^e d\Omega ; \quad 1 \le n \le N^U . \tag{Д4.26-б}$$

та вектор

$$N_n^e = \int_{S_\alpha^e} \alpha \cdot u_{CN} \cdot (T - \widehat{T}_\infty)^{\mu+1} \varphi_n^e dS \quad \text{або} \quad N_n^e = \int_{S_\alpha^e} \alpha \cdot u_{CN} \cdot (T^\mu - \widehat{T}_\infty^\mu) \varphi_n^e dS ; \quad 1 \le n \le N^U , \tag{Д4.30}$$

з якого збирається додатковий глобальній вектор $N_n = \sum_{\Omega^e \subset \Lambda_n} N_n^e$. Формули (Д4.21) та (Д4.29) дещо змінюються:

$$G_{mn} \frac{d\theta_m}{dt} + \widetilde{K}_{mn}\theta_m + R_{mn} \cdot [\theta_m(t) + T_{abs}]^4 = \widetilde{P}_n + N_n \; ; \; 1 \le m, n \le N^U ; \tag{Д4.21-б}$$

$$\widetilde{K}_{mn}\theta_m + R_{mn} \cdot (\theta_m + T_{abs})^4 = \widetilde{P}_n + N_n ; \quad 1 \le m, n \le N^U . \tag{Д4.29-б}$$

Примітка. Це не єдино можливі варіанти САР для задач теплопровідності. Якщо САР розв'язується багато разів, бажано мати стабільну її матрицю. Це досягається переміщенням усіх нелінійних складових САР у праву частину.

Д4.5. Алгоритм Ньютона-Рафсона розв'язування нелінійної САР крайової задачі стаціонарної теплопровідності

САР (Д4.29-а) – нелінійна при наявності променевого теплообміну, а САР (Д4.29-б) – завжди. Вони будуть нелінійними й тоді, коли властивості матеріалу будуть залежати від температури. У NX Nastran такі САР розв'язуються методом Ньютона-Рафсона. Для випадку (Д4.29-б) на $(k+1)$-й ітерації зі САР

$$\breve{K}_{mn}\Delta\theta_m = b_n\,; \quad 1 \le m, n \le N^U \tag{Д4.31}$$

знаходяться компоненти $\Delta\theta_m$, потім $(\theta_m)^{(k+1)} = (\theta_m)^{(k)} + \Delta\theta_m$. У (Д4.31) позначено:

$$\breve{K}_{mn} = \left(\widetilde{K}_{mn} + 4R_{mn}\cdot(\theta_m + T_{abs})^3 - \partial N_n/\partial\theta_m\right)^{(k)}; \qquad 1 \le m, n \le N^U\,; \tag{Д4.32}$$

$$b_n = \left(\widetilde{P}_n + N_n - \widetilde{K}_{mn}\theta_m - R_{mn}\cdot(\theta_m(t) + T_{abs})^4\right)^{(k)}; \qquad 1 \le n \le N^U\,. \tag{Д4.33}$$

У випадку (Д4.29-а) у останніх формулах замість $\widetilde{K}_{mn}$ використовуються K_{mn}, а компоненти N_n – відсутні.

Для зупинення ітерацій використовуються три критерії (ε – задана точність):

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{N^U}(\Delta\theta_n)^2} < \varepsilon\cdot\sqrt{\sum_{n=1}^{N^U}(\theta_n^{(k+1)})^2}\,, \quad \sum_{n=1}^{N^U}|\Delta\theta_n| < \varepsilon\cdot\sum_{n=1}^{N^U}|\theta_n^{(k+1)}| \ \text{ та } \ \max\{|\Delta\theta_n|/|\theta_n|\} < \varepsilon\,. \tag{Д4.34}$$

Д4.6. Алгоритм Ньюмарка розв'язування крайової задачі нестаціонарної теплопровідності

Отримані системи (Д4.21) містять похідну за часом. У NX Nastran застосований один з можливих варіантів розв'язання цієї проблеми, який використовує метод Ньюмарка. Цей метод при застосуванні до параболічних рівнянь фактично збігається з відомими двошаровими ваговими схемами.

Для скорочення виразів введемо позначення:

$$Z_n(t) = -\widetilde{K}_{mn}\,\theta_m(t) - R_{mn}\cdot[\theta_m(t) + T_{abs}]^4; \quad F_n(t) = \widetilde{P}_n + N_n(t); \quad 1 \le m, n \le N^U\,. \tag{Д4.35}$$

Умножимо (Д4.21-б) на dt та проведемо інтегрування у межах часового кроку величиною $\Delta\tau$:

$$\int_{\theta_m^{\tau}}^{\theta_m^{\tau+\Delta\tau}} d\theta_m = \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau}\left(G_{mn}\right)^{-1}\cdot[Z_n(t) + F_n(t)]dt\ ; \quad m,\ n = 1, 2, ..., N^U\,. \tag{Д4.36}$$

Лівий інтеграл точно дорівнює $\theta_m^{\tau+\Delta\tau} - \theta_m^{\tau}$, а правий обчисленим точно бути не може, оскільки він залежить від ще невідомої температури. Розклавши підінтегральний вираз в правій частині (Д4.35) у ряд в околі τ і так само в околі $\tau+\Delta\tau$, обмежившись першими членами ряду, одержимо після інтегрування і додавання результатів, помножених на $(1-\omega)$ і ω відповідно, двошарову вагову схему:

$$\theta_m^{\tau+\Delta t} - \theta_m^{\tau} = \Delta\tau\cdot\{(1-\omega)(G_{mn}^{\tau})^{-1}[Z_n^{\tau} + F_n^{\tau}] + \omega(G_{mn}^{\tau+\Delta\tau})^{-1}[Z_n^{\tau+\Delta\tau} + F_n^{\tau+\Delta\tau}]\}, \tag{Д4.37}$$

де $0 \le \omega \le 1$; $m, n = 1, 2, ..., N^U$. Прийнявши незмінність (на часовому відрізку величиною $\Delta\tau$) матриці G_{mn}, одержимо після приведення подібних САР (для заданої величини ω):

$$(G_{mn} + \omega\Delta\tau\widetilde{K}_{mn}^{\tau+\Delta\tau})\cdot\theta_m^{\tau+\Delta\tau} + \omega\Delta\tau R_{mn}^{\tau+\Delta\tau}\cdot(\theta_m^{\tau+\Delta\tau} + T_{abs})^4 =$$

$$= \left(G_{mn} - (1-\omega)\Delta\tau\widetilde{K}_{mn}^{\tau}\right)\theta_m^{\tau} + (1-\omega)\Delta\tau R_{mn}^{\tau}\cdot(\theta_m^{\tau} + T_{abs})^4 + \omega\Delta\tau F_n^{\tau+\Delta t} + (1-\omega)\Delta\tau F_n^{\tau}\,, \tag{Д4.38}$$

де $m, n = 1, 2, ..., N^U$ і в яку при наявності S_T необхідно ввести граничні умови (Д4.28).

Очевидно, що $\omega = (t-\tau)/\Delta\tau$; $\tau \le t \le \tau + \Delta\tau$; $0 \le \omega \le 1$; t – час, якому відповідає ω.

У NX Nastran є параметр NDAMP (див. Розділ 4.2.6 та Розділ 5.2), за допомогою якого змінюється значення вагового коефіцієнта ω: від NDAMP=0 – схема Кранка-Ніколсона ($\omega = 0.5$) до NDAMP=1 – неявна схема Ейлера ($\omega = 1$). Всі двошарові схеми у діапазоні $0.5 \le \omega \le 1$ є А-стійкими, тобто мають оператори переходу від одного часового шару до іншого обмеженими за нормою згори одиницею. Відомо, що лише схема Кранка-Ніколсона має другий порядок наближення у часі, але вона піддана осциляціям розв'язку, тому може застосовуватися лише при малих часових кроках, коли такі осциляції розв'язку відсутні або майже непомітні. Неявна схема Ейлера має перший порядок наближення у часі, але не піддана осциляціям зовсім.

Нелінійність САР (Д4.38) може бути обумовлено температурною залежністю коефіцієнтів λ, c_P, $\overline{\rho}$, наявністю променевого теплообміну або застосуванням нелінійних законів конвекційного теплообміну (Д4.5-б) та (Д4.5-в). Така САР на кожному часовому кроці розв'язуються у NX Nastran із застосуванням ітераційного метода Ньютона-Рафсона.

У NX Nastran для *першого* часового кроку розв'язування задачі нестаціонарної теплопровідності може застосовуватися процедура оцінки верхньої межі часового кроку за *наближеною* формулою (умова узгодженості Куранта):

$$\Delta\tau \le (h^2 c_P \overline{\rho} / \lambda)/10\,, \qquad (Д4.39)$$

де h – мінімальна відстань між вузлами СЕС. Подальші значення для часового кроку NX Nastran розраховує автоматично у адаптивному процесі, або використовує незмінну величину (потрібний варіант задається у FEMAP).