

Додаток 6

**КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ПРО НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ
СТАН ТВЕРДИХ ТІЛ. СТАТИКА. ВЕЛИКІ ДЕФОРМАЦІЇ
(теорія)****Д6.1. Про класичні типи формулювань алгоритмів розв’язування геометрично нелінійних крайових задач**

Після того, як будуть отримані системи алгебраїчних рівнянь (САР) для ітераційного розв’язування крайових задач з геометричною нелінійністю, проявляться *дві проблеми*:

- по-перше, на момент обчислення компонент САР поточна геометрія тіла не є визначеною;
- по-друге, напруження σ^{ij} (Ейлера-Коші), обчислені в різних конфігураціях, не можна просто так додавати, оскільки потрібно враховувати обертання площадок, на яких вони обчислювалися та обчислюються.

Перша проблема примушує шукати розв’язок на основі *попередньо* визначеної (*опорної*) геометрії тіла, друга – проводити перетворення напружень.

Якщо у якості опорної геометрії тіла на всіх етапах навантаження використовується *початкова* геометрія, то такий підхід називають „*повне формулювання Лагранжа*” (Total Lagrange – **TL**). Інакше, якщо у якості опорної геометрії тіла на всіх етапах навантаження використовується геометрія, що *створена попереднім етапом навантаження*, то такий підхід називають „*модифіковане формулювання Лагранжа*” (Updated Lagrange – **UL**).

TL-формулювання можна застосовувати лише тоді, коли при отриманні розв’язків не має значення *історія навантаження* тіла. Ця історія може бути значущою:

- при втраті стійкості геометрії тіла, якщо потрібно вивчати подальший його напружено-деформований стан, зокрема, після так званого „проклацювання” конструкції;
- при складному пружно-пластичному навантаженні, коли в різних частинах тіла реалізуються різні траєкторії деформування, зокрема, одночасно відбуваються процеси активного пружно-пластичного деформування та пружного розвантаження;
- при дійсно значних деформаціях, коли теоретично не можна складувати навіть деформації, а можна складувати тільки швидкості деформацій, тобто реалізовувати формулювання Ейлера. Похибка, яка виникає при простому додаванні деформацій, вважається невеликою десь у межах до 2 відсотків деформації.

При застосуванні **UL**-формулювання потрібно автоматично всю історію навантаження розділяти на окремі етапи та на всіх етапах забезпечувати відносно невеликі прирости навантаження. Наявність багатьох етапів звичайно збільшує час отримання розв’язку крайової задачі. Тому, якщо відсутні непружні деформації або пружне-пластичне навантаження – пропорційне, а деформації – відносно малі, використання формулювання **TL** звичайно ефективніше, ніж **UL** (все навантаження можна провести за один етап). І лише тоді, коли крайова задача зобов’язує застосування малих приростів навантаження, потрібно застосовувати формулювання **UL**.

Далі коротко розглянемо ці обидва формулювання та супутні проблеми.

Використання базової, а не поточної, конфігурації тіла потребує перераховувати величини, що фігурують у формулах, на базову конфігурацію. Тому змінюються навіть назви (міри) тензорів напружень та деформацій.

У таблиці Д6.1 наведена коротка інформація про характерні ситуації при наявності фізичної та/або геометричної нелінійності (формулювання Ейлера з нерухомою сіткою та ALE (змішане Ейлера-Лагранжа) – не розглядаються).

Таблиця Д6.1. Ситуації при моделюванні нелінійних крайових задач про НДС тіл

Тип аналізу	Опис ситуації	Типи формулювань	Міри деформацій та напружень
Тільки нелінійність властивостей матеріалу (тільки фізична нелінійність)	Нескінченно малі паралельні переміщення та обертання; співвідношення „напруження-деформації” є нелінійними	Тільки нелінійність властивостей матеріалу (Materially nonlinear only – MNO)	Напруження Ейлера-Коші, малі деформації Гріна-Лагранжа (Cauchy stress, small Green-Lagrange strain)
Великі паралельні переміщення, великі обертання, але малі деформації	Паралельні переміщення та обертання волокон є великими, але подовження волокон і кутові зміни між волокнами є малими; співвідношення „напруження-деформації” можуть бути лінійними або нелінійними	Повне формулювання Лагранжа (Total Lagrange – TL)	Напруження Піола-Кірхгофа 2-го роду, малі деформації Гріна-Лагранжа (Second Piola-Kirchhoff stress, small Green-Lagrange strain)
		Модифіковане формулювання Лагранжа (Updated Lagrange – UL)	Напруження Ейлера-Коші, малі деформації Альмансі (Cauchy stress, small Almansi strain)
Великі паралельні переміщення, великі обертання і великі деформації	Паралельні переміщення та обертання волокон є великими; подовження волокон та кутові зміни між волокнами також є великими, співвідношення „напруження-деформації” можуть бути лінійними або нелінійними	Повне формулювання Лагранжа (Total Lagrange – TL)	Напруження Піола-Кірхгофа 2-го роду, деформації Гріна-Лагранжа (Second Piola-Kirchhoff stress, large Green-Lagrange strain)
		Модифіковане формулювання Лагранжа (Updated Lagrangian – UL)	Напруження Ейлера-Коші, логарифмічні деформації Генкі (Cauchy stress, logarithmic strain Hencky)

Отже, потрібно розглянути питання про деформації Гріна-Лагранжа, про тензор Ейлера-Коші та другий тензор напружень Піола-Кірхгофа, а також про визначальні рівняння, які будуть використовуватися при формулюванні постановок крайових задач.

Д6.2. Основні визначення та співвідношення, необхідні для формулювання алгоритмів розв’язування геометрично нелінійних крайових задач

Постановку крайової задачі зроблено у Розділі Д5.1. Нагадаємо, що розгляд питань ведемо у „фізичній” (місцевій), тобто в нормованій, системі координат з базисом (Д6.1). При цьому не має значення, розташування індексів (верхнє або нижнє). Якщо зустрічається верхнє розташування індексів, то це означає, що мова йде про контраваріантні компоненти.

Д6.2.1. Системи координат. Метричний тензор

Системою відліку $\mathfrak{R}$ називають сукупність принаймні 4-х точок, що не лежать в одній площині. Очевидно, що її геометрія може бути й евклідовою.

У загальному випадку для описання стану тіла звичайно вводять декілька координатних систем. Введемо такі системи з ортогональними базисами:

- глобальну нерухому декартову систему координат з базисом $\vec{k}_i$, осями X^i ; $i = 1, 2, 3$ та точкою M^0 , в якій поміщається початок системи;
- глобальну нерухому, у загальному випадку криволінійну систему координат з базисом $\vec{e}_i$ та осями $a^i = a^i(X^j)$; $i, j = 1, 2, 3$. Звичайно вона теж має початок у точці M^0 , але це не є обов’язковим;

• локальну „вморожену”, в загальному випадку криволінійну не ортогональну, систему координат з базисом $\vec{G}_i$, яка супроводжує кожну матеріальну точку тіла з координатами $x^i = x^i(a^j, t)$; $i, j = 1, 2, 3$, тобто на кожну таку точку вказує вектор $\vec{r} = \vec{r}(a^1, a^2, a^3, t)$, проведений до неї з початку координат, в якому приймають $\vec{r} = \vec{0}$ (це завжди можна зробити шляхом паралельного переносу).

Умова $a^i = \text{const}$; $i = 1, 2, 3$ задає *координатну поверхню*. Дві координатні поверхні a^i та a^j пересікаються (при $i \neq j$). Лінія їх пересічення називається *координатною лінією*, вона відповідає третій координаті a^k .

Три вектори базису $\vec{e}_i$, який називається основним, задаються як

$$\vec{e}_i = \lim_{\Delta a^i \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{a}}{\Delta a^i} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial a^i}. \quad (\text{Д6.1})$$

Ці три вектора основного базису є дотичними до координатних ліній у точці M^0 , яка визначає початок координатної системи.

Якщо координатна система $a^i = x, y, z$, тобто є декартовою (ДСК), то всі модулі $|\vec{e}_i| = 1$.

Дев'ять величин $g_{ij} = (\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \frac{\partial \vec{a}}{\partial a^i} \cdot \frac{\partial \vec{a}}{\partial a^j}$ називають коваріантними компонентами симетричного метричного тензора. В ДСК

$$(g_{ij})_{\text{ДСК}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij}). \quad (\text{Д6.2})$$

Тут і всюди нижче в тексті δ_{ij} – символ Кронекера.

У точці M^0 початку координатної системи, поряд з основним, вводиться взаємний базис $\vec{e}^i$ у такий спосіб, щоб $\vec{e}^i \cdot \vec{e}_j = \delta_j^i = \delta_{ij}$ (вектори $\vec{e}_i$ вказують напрям координатних ліній, а вектори $\vec{e}^i$ – перпендикулярні до координатних поверхонь). Аналогічно g_{ij} вводиться контраваріантний симетричний метричний тензор з компонентами $g^{ij} = \vec{e}^i \cdot \vec{e}^j$. Тоді

$$(g_{ij})(g^{jk}) = (g_{ij} \cdot g^{jk}) = \delta_i^k; \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}; \quad \vec{e}^i = g^{ij} \vec{e}_j; \quad \vec{e}_i = g_{ij} \vec{e}^j. \quad (\text{Д6.3})$$

З урахуванням (Д6.2) і (Д6.3)

$$(g^{ij})_{\text{ДСК}} = (g_{ij})_{\text{ДСК}} = \delta_{ij}. \quad (\text{Д6.4})$$

Згідно з (Д6.1), нескінченно малий приріст $d\vec{r}$ вектора $\vec{r}$ представляється у вигляді $d\vec{a} = da^i \vec{e}_i$, з використанням (Д6.3) – аналогічно: $d\vec{a} = da_i \vec{e}^i$.

Для зручності, зокрема, щоб метрика простору не була присутня у фізичних рівняннях, вводиться локальний ортонормований „фізичний” (місцевий) базис $\vec{b}_i$, тобто такий, щоб усі три $|\vec{b}_i| = 1$. Цього можна досягти, якщо взяти $\vec{b}_i$ наступного вигляду (під радикалом тут не складати):

$$\vec{b}_i = \vec{e}_i / \sqrt{g_{ii}} = \sqrt{g^{ii}} \vec{e}_i. \quad (\text{Д6.5})$$

З (Д6.2), (Д6.4) і (Д6.5) випливає, що в ДСК основний, взаємний і „фізичний” базиси співпадають, чого не можна сказати про інші, де базиси звичайно різні.

Примітка Д6.1. Величина $\sqrt{g_{ii}} = |\vec{e}_i|$, тобто є модулем відповідного базисного вектора. Тому ще один варіант визначення базисних векторів: $\vec{e}_i = \sqrt{g_{ii}} \vec{b}_i$.

Будь-який вектор $\vec{F}$ в основному, взаємному і „фізичному” базисах має компоненти $F^i, F_i, \vec{F}_i$ відповідно. Він виражається як

$$\vec{F} = F^i \vec{e}_i = F_i \vec{e}^i = \vec{F}_i \vec{b}_i. \quad (Д6.6)$$

З (Д6.6) з урахуванням перетворень (Д6.3) і (Д6.5)

$$F_j = F^i g_{ij}; \quad F^j = F_i g^{ij}; \quad \vec{F}_j = F^j \sqrt{g_{ij}}. \quad (Д6.7)$$

Тому і координатний вектор $\vec{r}$ точки M , проведений до неї з початку координат, можна записати як

$$\vec{r} = a^i \vec{e}_i = a_i \vec{e}^i = \vec{a}_i \vec{b}_i. \quad (Д6.8)$$

Довільний тензор другого рангу $\vec{\sigma}$ в основному, взаємному і „фізичному” базисах визначається як:

$$\vec{\sigma} = \sigma^{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j = \sigma_{ij} \vec{e}^i \vec{e}^j = \vec{\sigma}_{ij} \vec{b}_i \vec{b}_j, \quad (Д6.9)$$

де σ_{ij}, σ^{ij} – компоненти тензора $\vec{\sigma}$ (строго кажучи, компоненти $\vec{\sigma}_{ij}$ не створюють тензор, оскільки не підкоряються правилам перерахунку тензора при обертанні системи координат). З (Д6.9) з урахуванням перетворень (Д6.3) і (Д6.5) отримаємо (під радикалом тут не складати):

$$\sigma^{ij} = \sigma_{mn} g^{im} g^{jn}; \quad \sigma_{ij} = \sigma^{mn} g_{im} g_{jn}; \quad \vec{\sigma}_{ij} = \sigma^{ij} \sqrt{g_{ii}} / g^{jj} = \sigma_{mn} g^{im} g^{jn} \sqrt{g_{ii}} / g^{jj}. \quad (Д6.10)$$

За визначенням, квадрат лінійного елемента $ds^2 = d\vec{a} \cdot d\vec{a} = da^i \vec{e}_i \cdot da_j \vec{e}^j = g_{ij} da^i da^j = g^{ij} da_i da_j$. Ще одна характеристика:

$$\sqrt{g} = \sqrt{g_{11} g_{22} g_{33}} = \sqrt{\det |g_{ij}|} = \vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = \vec{e}_2 \cdot (\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) = \vec{e}_3 \cdot (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2). \quad (Д6.11)$$

Зокрема, для ДСК $\det |g_{ij}| = 1$.

Д6.2.2. Тензор деформацій Гріна-Лагранжа

Позначимо початкову конфігурацію тіла як C_0 з координатним вектором $\vec{R} = \vec{r}_0$ в точці M^0 , а поточну – C з координатним вектором $\vec{r}$ в точці M^t . Відповідно до (Д6.1) у початковому стані:

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{R}}{\partial a^i}; \quad \vec{e}^j = \frac{\partial \vec{R}}{\partial a_j}; \quad d\vec{R} = da^i \vec{e}_i = da_j \vec{e}^j. \quad (Д6.12)$$

У поточному стані введемо локальний „вморожений” zdeформований базис

$$\vec{G}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial a^i}; \quad \vec{G}^j = \frac{\partial \vec{r}}{\partial a_j} = G^{ji} \vec{G}_i; \quad d\vec{r} = da^i \vec{G}_i = da_j \vec{G}^j \quad (Д6.13)$$

(про G^{ji} – нижче). Тоді квадрати довжини лінійного елемента, що зв'язує дві нескінченно близькі матеріальні точки, до і після деформування є, відповідно:

$$dR^2 = d\vec{R} \cdot d\vec{R} = da^i \vec{e}_i \cdot da_j \vec{e}^j = da^i da_j \delta_i^j = da^i da_i = da^i g_{ij} da^j = g_{ij} da^i da^j; \quad (Д6.14)$$

$$dr^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = da^i \vec{G}_i \cdot da_j \vec{G}^j = G_i^j da^i da_j = G_{ij} da^i da^j = G^{ij} da_i da_j. \quad (Д6.15)$$

За визначенням, інваріант

$$dr^2 - dR^2 \equiv 2\varepsilon_{ij} da^i da^j \quad (Д6.16)$$

є мірою деформації в точці тіла щодо *початкової* конфігурації, де ε_{ij} – компоненти тензора деформацій (деформацію можна розглядати і щодо будь-якої іншої конфігурації, але для TL-формулювання потрібна деформація саме відносно початкової конфігурації).

Якщо в усьому тілі $dr^2 - dR^2 = 0$, то рух тіла – *абсолютно жорсткий*. Інакше тіло перебуває у *здеформованому стані*.

Підставимо (Д6.14) і (Д6.15) у (Д6.16):

$$2\varepsilon_{ij} da^i da^j = G_{ij} da^i da^j - g_{ij} da^i da^j = (G_{ij} - g_{ij}) da^i da^j. \quad (Д6.17)$$

З (Д6.17) випливає, що *поточні* компоненти симетричного тензора деформації Гріна-Лагранжа (відносно *початкової* конфігурації):

$$\varepsilon_{ij} = 0.5(G_{ij} - g_{ij}), \quad (Д6.18-а)$$

або через компоненти вектора переміщень:

$$\varepsilon_{ij} = 0.5(\nabla_j U_i + \nabla_i U_j + \nabla_i U_k \nabla_j U^k); \quad i, j, k=1, 2, 3. \quad (Д6.19)$$

де позначено

$$\nabla_i U_k = \frac{\partial U_k}{\partial a^i} - U_m \Gamma_{ik}^m; \quad \nabla_j U^k = \frac{\partial U^k}{\partial a^j} + U^m \Gamma_{jm}^k; \quad (Д6.20)$$

Γ_{ij}^m – символи Крістофеля другого роду, що симетричні за нижніми індексами і є компонентами розкладу $\partial \vec{e}_j / \partial a^i$ по вихідному базису $\vec{e}_m$, виражаються формулою

$$\Gamma_{mi}^j = \Gamma_{im}^j = \frac{1}{2} g^{jn} \left(\frac{\partial g_{mn}}{\partial a^i} + \frac{\partial g_{in}}{\partial a^m} - \frac{\partial g_{mi}}{\partial a^n} \right). \quad (Д6.21)$$

Перший вектор з (Д6.13)

$$\vec{G}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial a^i} = \frac{\partial x^j}{\partial a^i} \vec{e}_j = \frac{\partial (\vec{a} + \vec{U})}{\partial a^i} = \vec{e}_i + \frac{\partial \vec{U}}{\partial a^i} = \frac{\partial (a^j + U^j)}{\partial a^i} \vec{e}_j = (\delta_i^j + \nabla_i U^j) \vec{e}_j = F_i^j \vec{e}_j, \quad (Д6.22)$$

називається *градієнтом деформацій* і визначає zdeформовані координатні осі локальної конвекційної („вмороженої”) системи координат з базисом $\vec{G}_i$.

Компоненти тензора міри деформації Коші-Гріна

$$G_{ij} = X_i^k X_j^k = \frac{\partial x^k}{\partial a^i} \frac{\partial x^k}{\partial a^j}, \quad \text{де } X_i^k = \frac{\partial x^k}{\partial a^i} = (\delta_i^k + \nabla_i U^k), \quad (Д6.23)$$

$x^i = x^i(a^j, t)$ – поточні координати точки; $x^i(a^j, 0) = a^i$ – початкові координати точки; $i, j=1, 2, 3$.

Представимо (Д6.18-а) у матричному вигляді:

$$[\varepsilon] = 0.5([C] - [g]), \quad (Д6.18-б)$$

де матриці

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}; & \varepsilon_{12}; & \varepsilon_{13} \\ & \varepsilon_{22}; & \varepsilon_{23} \\ \text{symm} & & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}; \quad [g] = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}; \quad (Д6.24)$$

$$[C] = [G]^T [G]. \quad (Д6.25)$$

Матриця $[G]$ відображає градієнти деформацій (Д6.20), тому має таке наповнення (позначено $h_{ij} = \partial U_i / \partial a^j$):

$$[G] = \begin{bmatrix} 1+h_{11}; & h_{12}; & h_{13} \\ h_{21}; & 1+h_{22}; & h_{23} \\ h_{31}; & h_{32}; & 1+h_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}; & s_{12}; & s_{13} \\ s_{21}; & s_{22}; & s_{23} \\ s_{31}; & s_{32}; & s_{33} \end{bmatrix}. \quad (Д6.26)$$

Тоді матриця

$$\begin{aligned} [C] &= [G]^T [G] = \begin{bmatrix} c_{11}; & c_{21}; & c_{31} \\ & c_{22}; & c_{32} \\ \text{symm} & & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}; & s_{21}; & s_{31} \\ s_{12}; & s_{22}; & s_{32} \\ s_{13}; & s_{23}; & s_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11}; & s_{12}; & s_{13} \\ s_{21}; & s_{22}; & s_{23} \\ s_{31}; & s_{32}; & s_{33} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (s_{11})^2 + (s_{21})^2 + (s_{31})^2; & s_{11}s_{12} + s_{21}s_{22} + s_{31}s_{32}; & s_{11}s_{13} + s_{21}s_{23} + s_{31}s_{33} \\ & (s_{12})^2 + (s_{22})^2 + (s_{32})^2; & s_{12}s_{13} + s_{22}s_{23} + s_{32}s_{33} \\ \text{symm} & & (s_{13})^2 + (s_{23})^2 + (s_{33})^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (Д6.27)$$

Оскільки фактично застосовуються компоненти $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$, $i \neq j$, то з використанням компонент c_{ij} матриці $[C]$ формула (Д6.18-а) набуває вигляд:

$$\varepsilon_{ij} = 0.5(c_{ij} - g_{ij}), \quad i = j; \quad \gamma_{ij} = \gamma_{ji} = c_{ij}, \quad i \neq j; \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (Д6.18-в)$$

Примітка Д6.2. Для обчислення компонент ε_{ij} частіше використовують саме формули (Д6.18), які у випадку відомих компонент G_{ij} мають значно меншу кількість дій, ніж формули (Д6.19).

Д6.2.3. Про міри тензорів напружень

При наявності геометричної нелінійності можуть використовуватися кілька мір (різновидів) тензорів напружень.

За визначенням Ейлера (1707... 1783 pp) та Коші (1789 ... 1857 pp), напруження – це внутрішня сила, яка діє на елементарній площадці, віднесена до її площі при умові прагнення цієї площі до нуля.

Результуючий вектор напружень на елементарній площадці dS_1 , яка перпендикулярна $\vec{e}_1$, позначимо як $\vec{\sigma}^1 dS_1$, де $\vec{\sigma}^1$ – вектор напружень на одиниці площі dS_1 . Аналогічно вводяться вектори напружень $\vec{\sigma}^2$ та $\vec{\sigma}^3$. Компоненти векторів $\vec{\sigma}^i$ в основному базисі $\vec{e}_j$, а саме σ^{ij} , називаються контраваріантними компонентами симетричного *тензора напружень Ейлера-Коші* (Ейлера, Коші):

$$\vec{\sigma}^i = \sigma^{ij} \vec{e}_j. \quad (\text{Д6.28})$$

Тобто цей тензор містить такі напруження: нормальні до елементарних площадок σ^{ij} ; $i = j = 1, 2, 3$, та дотичні до них $\sigma^{ij} = \sigma^{ji}$; $i \neq j$; $i, j = 1, 2, 3$. Перший індекс вказує, перпендикулярно до якої осі $\vec{e}_i$ розташована елементарна площадка, а другий – напрям напруження, тобто вздовж якої осі $\vec{e}_j$ направлена компонента тензора напружень. Підкреслимо, що не завжди напрям визначає вихідний *глобальний* базис $\vec{e}_i$. Є випадки, коли напрям компонент напружень визначає вихідний *локальний* базис, наприклад, в пластинах та оболонках вихідний вектор $\vec{e}_3$ звичайно перпендикулярний центральній поверхні; в стрижнях – паралельний поздовжній осі.

В кожній точці похилої площадки dS , зовнішня нормаль до якої $\vec{\nu}$ має компоненти ν_i , результуючий вектор напружень

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}^i \nu_i = \sigma^{ij} \nu_i \vec{e}_j. \quad (\text{Д6.29})$$

Компоненти векторів $\vec{\sigma}^i$ в *здеформованому* базисі $\vec{G}_j$, а саме $\vec{\sigma}^i$, називаються (контраваріантними) компонентами симетричного *другого тензора напружень Піола* (1836) – *Кірхгофа* (1850):

$$\vec{\sigma}^i = \vec{\sigma}^{ij} \vec{G}_j. \quad (\text{Д6.30})$$

В кожній точці похилої площадки dS , зовнішня нормаль до якої $\vec{\nu}$ має компоненти ν_i , результуючий вектор напружень

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}^i \nu_i = \vec{\sigma}^{ij} \nu_i \vec{G}_j. \quad (\text{Д6.31})$$

Але, оскільки при деформуванні базис $\vec{G}_j$ звичайно не є ортогональним, то $\vec{\sigma}$ з його компонентами застосовують лише як деяку розрахункову (допоміжну) дефініцію. Оскільки в різних точках здеформованого тіла напрямки локального здеформованого базису $\vec{G}_i$ відносно осей $\vec{e}_i$ будуть різними, то результати розрахунків є сенс представляти відносно осей $\vec{e}_i$, тобто відносно відомих початкових напрямів. Саме тому перед представленням результатів розрахунків, а саме напружень, потрібно перейти до тензора Ейлера-Коші.

Але це ще не все. Оскільки, як про це говорилося у Розділі Д6.1, на момент обчислення компонент САР поточна геометрія тіла не є визначеною, то приходиться використовувати опорну конфігурацію. У випадку **TL**-формулювання, яке ми розглядаємо, опорною конфігурацією є *вихідна* конфігурація.

Симетричний *другий тензор напружень Піола-Кірхгофа* $(\sigma^{ij})_0$ на поверхні початкової конфігурації $(dS)_0$ створює результуючий вектор напружень

$$(\vec{\sigma})_0 = (\sigma^{ij})_0 (v_i)_0 \vec{G}_j, \quad (Д6.32)$$

причому розглядається саме та поверхня $(dS)_0$, яка перетворилася при деформуванні у поверхню dS .

Компоненти векторів $(\vec{T}^i)_0$ в *основному базисі* $\vec{e}_j$, а саме $(T^{ij})_0$, називаються (контраваріантними) компонентами несиметричного *першого тензора напружень Піола-Кірхгофа*:

$$(\vec{T}^i)_0 = (T^{ij})_0 \vec{e}_j. \quad (Д6.33)$$

Його визначають шляхом проектування компонент тензора Ейлера-Коші до *початкової геометрії з повним* урахуванням змін елементарної площадки: як її розміру, так й орієнтації. Тому у кожній точці поверхні $(dS)_0$ він створює результуючий вектор напружень

$$(\vec{T})_0 = (T^{ij})_0 (v_i)_0 \vec{e}_j. \quad (Д6.34)$$

Надалі 1-й $(T^{ij})_0$ та 2-й $(\sigma^{ij})_0$ тензори напружень Піола-Кірхгофа, для стислості, будемо називати аббревіатурами ТН1ПК і ТН2ПК відповідно.

Є й інші тензори напружень, але для TL-формулювання вони не застосовуються, тому тут не розглядаються.

Між всіма видами тензорів напружень існують однозначні перетворення.

Примітка Д6.3. В літературі досить часто індекси, що позначають „прив’язку” величини до *етапу навантаження*, вказують *лівим верхнім* індексом, а до *базової* конфігурації – *ліvim нижнім* індексом. Наприклад, ${}^{n+1}_0 P$ – деяка величина P , яка визначена для $(n+1)$ -го етапу на основі вихідної конфігурації. Але, коли таких позначок багато, то формули читаються важко. Саме тому у подальшому тексті ми їх застосовувати не будемо.

Д6.2.4. Співвідношення між компонентами першого та другого тензорів напружень Піола-Кірхгофа в початковій конфігурації

Співвідношення між компонентами $(\vec{T})_0$ та $(\vec{\sigma})_0$ отримаємо із умови $(\vec{T})_0 = (\vec{\sigma})_0$. З урахуванням (Д6.32) та (Д6.34):

$$(T^{ij})_0 (v_i)_0 \vec{e}_j = (\sigma^{ij})_0 (v_i)_0 \vec{G}_j. \quad (Д6.35)$$

Згідно з (Д6.22) $\vec{G}_j = \partial \vec{r} / \partial a^j = (\delta_j^m + \nabla_j U^m) \vec{e}_m = \nabla_j x^m \vec{e}_m = X_j^m \vec{e}_m$. Тому

$$(T^{ij})_0 (v_i)_0 \vec{e}_j = (\sigma^{ij})_0 (v_i)_0 X_j^m \vec{e}_m. \quad (Д6.36)$$

Замінімо в лівій частині останньої формули індекс j на індекс m :

$$(T^{im})_0 (v_i)_0 \vec{e}_m = (\sigma^{ij})_0 (v_i)_0 X_j^m \vec{e}_m \quad \text{або} \quad ((T^{im})_0 - (\sigma^{ij})_0 X_j^m) (v_i)_0 \vec{e}_m = 0. \quad (Д6.37)$$

Ця рівність є справедливою при будь-яких $(v_i)_0 \vec{e}_m$. Тому остаточно отримаємо, що співвідношення між компонентами тензорів $(\vec{T})_0$ та $(\vec{\sigma})_0$:

$$(T^{im})_0 = (\sigma^{ij})_0 X_j^m. \quad (Д6.38-а)$$

Для отримання співвідношення між компонентами тензорів $(\vec{T})_0$ та $(\vec{\sigma})_0$ з компонентами тензора Ейлера-Коші $\vec{\sigma}$ необхідно спочатку розглянути деякі інші питання.

Д6.2.5. Символи Леві-Чівіта

Врахуємо, що результатом векторного добутку двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є новий вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, який перпендикулярний до обох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ і має модуль $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$, де α є кутом між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Тому $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$. Ще відомо, що $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$. Тому $\vec{a}_m \times \vec{a}_n = (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 - \vec{a}_2 \times \vec{a}_1) + (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3 - \vec{a}_3 \times \vec{a}_2) + (\vec{a}_3 \times \vec{a}_1 - \vec{a}_1 \times \vec{a}_3)$ при $m, n = 1, 2, 3$. Крім того, для

трьох ортогональних векторів основного базису: $\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = \vec{e}_2 \cdot (\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) = \vec{e}_3 \cdot (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) = \sqrt{g}$;
 $\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_3 \times \vec{e}_2) = \vec{e}_2 \cdot (\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) = \vec{e}_3 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_1) = -\sqrt{g}$; $\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) = \vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) = \vec{e}_2 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_1) = \vec{e}_2 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) =$
 $= \vec{e}_3 \cdot (\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) = \vec{e}_3 \cdot (\vec{e}_3 \times \vec{e}_2) = 0$.

Ці та аналогічні факти звичайно описують за допомогою символів Леві-Чівіта $E^{ijk} = E_{ijk}$ (тензор ці компоненти не створюють):

$$E_{ijk} = \begin{cases} 1; & \text{пряма кругова перестановка значень індексів;} \\ -1; & \text{обернена кругова перестановка значень індексів;} \\ 0; & \text{наявність двох або трьох однакових індексів.} \end{cases} \quad (\text{Д6.39})$$

Тоді замість багатьох виразів маємо лише один:

$$\vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) = E_{ijk} \sqrt{g} = \mathcal{E}_{ijk}. \quad (\text{Д6.40})$$

Якщо базис є декартовим, то $\sqrt{g} = 1$ та $\mathcal{E}_{ijk} = E_{ijk}$.

У загальному випадку, якщо деяка матриця A_n^k є матрицею переходу від однієї координатної системи до іншої, то

$$E_{qmn} \det \|A\| = E_{ijk} A_q^i A_m^j A_n^k. \quad (\text{Д6.41})$$

В якості компонент матриці A_n^k можна взяти, згідно з (Д6.22), компоненти $\partial x^k / \partial a^n = X_n^k$. Тоді відповідно до (Д6.41)

$$E_{qmn} \det \left\| \frac{\partial x^k}{\partial a^n} \right\| = E_{qmn} \det \|G_{kn}\| = E_{qmn} \sqrt{G} = E_{ijk} \frac{\partial x^i}{\partial a^q} \frac{\partial x^j}{\partial a^m} \frac{\partial x^k}{\partial a^n} = E_{ijk} X_q^i X_m^j X_n^k. \quad (\text{Д6.42})$$

Тут позначено

$$\sqrt{G} = \det \|G_{kn}\|. \quad (\text{Д6.43})$$

Д6.2.6. Зміна елементарного об'єму при деформуванні

Спочатку відзначимо, що, згідно з (Д6.13) та, відповідно, з (Д6.14) та (Д6.22):

$$d\vec{R} = \vec{e}_i da^i = \vec{e}_1 da^1 + \vec{e}_2 da^2 + \vec{e}_3 da^3, \quad (\text{Д6.44})$$

$$d\vec{r} = \vec{G}_i da^i = \vec{G}_1 da^1 + \vec{G}_2 da^2 + \vec{G}_3 da^3, \quad (\text{Д6.45})$$

тобто окремі вектори $\vec{e}_j da^j$ визначають довжини сторін елементарного паралелепіпеда до його деформування, а $\vec{G}_i da^i$ – після його деформування. Крім того, для трьох ортогональних векторів основного та сумісного базису:

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \vec{e}^k \sqrt{g}; \quad i \neq j \neq k \neq i = 1, 2, 3. \quad (\text{Д6.46})$$

Згідно з (Д6.46) та співвідношенням $\vec{e}_i \cdot \vec{e}^j = \delta_i^j$ (див. Розділ Д6.2.1) початкова величина елементарного об'єму (див. також (Д6.11)):

$$(d\Omega)_0 = (\vec{e}_1 da^1) \cdot ((\vec{e}_2 da^2) \times (\vec{e}_3 da^3)) = \vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) da^1 da^2 da^3 = \sqrt{g} da^1 da^2 da^3. \quad (\text{Д6.47})$$

Після деформування елементарного об'єму, з урахуванням Розділу Д6.2.4, формули (Д6.46) та $\vec{e}_i \cdot \vec{e}^j = \delta_i^j$:

$$\begin{aligned} d\Omega &= (\vec{G}_1 da^1) \cdot ((\vec{G}_2 da^2) \times (\vec{G}_3 da^3)) = \vec{G}_1 \cdot (\vec{G}_2 \times \vec{G}_3) da^1 da^2 da^3 = \\ &= \frac{\partial x^m}{\partial a^1} \vec{e}_m \cdot \left(\frac{\partial x^n}{\partial a^2} \vec{e}_n \times \frac{\partial x^k}{\partial a^3} \vec{e}_k \right) da^1 da^2 da^3 = \frac{\partial x^m}{\partial a^1} \vec{e}_m \cdot \left[\left(\frac{\partial x^1}{\partial a^2} \frac{\partial x^2}{\partial a^3} - \frac{\partial x^2}{\partial a^2} \frac{\partial x^1}{\partial a^3} \right) (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial x^2}{\partial a^2} \frac{\partial x^3}{\partial a^3} - \frac{\partial x^3}{\partial a^2} \frac{\partial x^2}{\partial a^3} \right) (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) + \left(\frac{\partial x^1}{\partial a^2} \frac{\partial x^3}{\partial a^3} - \frac{\partial x^3}{\partial a^2} \frac{\partial x^1}{\partial a^3} \right) (\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) \right] da^1 da^2 da^3 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial x^m}{\partial a^1} \vec{e}_m \cdot \left[\left(\frac{\partial x^1}{\partial a^2} \frac{\partial x^2}{\partial a^3} - \frac{\partial x^2}{\partial a^2} \frac{\partial x^1}{\partial a^3} \right) \sqrt{g} \vec{e}^3 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial a^2} \frac{\partial x^3}{\partial a^3} - \frac{\partial x^3}{\partial a^2} \frac{\partial x^2}{\partial a^3} \right) \sqrt{g} \vec{e}^1 + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial x^1}{\partial a^2} \frac{\partial x^3}{\partial a^3} - \frac{\partial x^3}{\partial a^2} \frac{\partial x^1}{\partial a^3} \right) \sqrt{g} \vec{e}^2 \right] da^1 da^2 da^3 = \\
&= \left[\frac{\partial x^3}{\partial a^1} \vec{e}_3 \cdot \left(\frac{\partial x^1}{\partial a^2} \frac{\partial x^2}{\partial a^3} - \frac{\partial x^2}{\partial a^2} \frac{\partial x^1}{\partial a^3} \right) \vec{e}^3 + \frac{\partial x^1}{\partial a^1} \vec{e}_1 \cdot \left(\frac{\partial x^2}{\partial a^2} \frac{\partial x^3}{\partial a^3} - \frac{\partial x^3}{\partial a^2} \frac{\partial x^2}{\partial a^3} \right) \vec{e}^1 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial x^2}{\partial a^1} \vec{e}_2 \cdot \left(\frac{\partial x^1}{\partial a^2} \frac{\partial x^3}{\partial a^3} - \frac{\partial x^3}{\partial a^2} \frac{\partial x^1}{\partial a^3} \right) \vec{e}^2 \right] \sqrt{g} da^1 da^2 da^3 = \\
&= \left[\frac{\partial x^3}{\partial a^1} \left(\frac{\partial x^1}{\partial a^2} \frac{\partial x^2}{\partial a^3} - \frac{\partial x^2}{\partial a^2} \frac{\partial x^1}{\partial a^3} \right) + \frac{\partial x^1}{\partial a^1} \left(\frac{\partial x^2}{\partial a^2} \frac{\partial x^3}{\partial a^3} - \frac{\partial x^3}{\partial a^2} \frac{\partial x^2}{\partial a^3} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial x^2}{\partial a^1} \left(\frac{\partial x^1}{\partial a^2} \frac{\partial x^3}{\partial a^3} - \frac{\partial x^3}{\partial a^2} \frac{\partial x^1}{\partial a^3} \right) \right] \sqrt{g} da^1 da^2 da^3 = \det \| G_{ij} \| \sqrt{g} da^1 da^2 da^3. \quad (Д6.48)
\end{aligned}$$

Враховано, що вираз у квадратних дужках є виразом для детермінанта матриці, зібраної з компонент тензора G_{ij} .

Тому, з урахуванням (Д6.43) та (Д6.47)

$$d\Omega = \sqrt{G} \sqrt{g} da^1 da^2 da^3 = \sqrt{G} (d\Omega)_0. \quad (Д6.49)$$

Отже, величина $\sqrt{G}$ визначає масштаб у зміні елементарного об'єму.

Д6.2.7. Слідство із закону збереження маси тіла

Відповідно до закону збереження маси, маса m об'єму при його деформуванні є незмінною, тобто для будь-якого об'єму

$$m = \int_{\Omega} \bar{\rho}(\vec{x}, t) d\Omega = \int_{\Omega_0} \bar{\rho}(\vec{a}, t_0) (d\Omega)_0 = m_0 = \text{const}, \quad (Д6.50)$$

де $\bar{\rho}$ – густина матеріалу. Позначимо $\bar{\rho}_0 = \bar{\rho}(\vec{a}, t_0)$, $\bar{\rho} = \bar{\rho}(\vec{x}, t)$. Оскільки в (Д6.50) об'єм є довільним, то і для елементарного об'єму:

$$dm = \bar{\rho} d\Omega = \bar{\rho}_0 (d\Omega)_0 = (dm)_0 = \text{const}. \quad (Д6.51)$$

Враховуючи (Д6.49), отримаємо, що

$$\bar{\rho} \sqrt{G} = \bar{\rho}_0, \quad \text{або} \quad \bar{\rho}_0 / \bar{\rho} = \sqrt{G}. \quad (Д6.52)$$

Отже, величина $\sqrt{G}$ ще визначає пропорцію у зміні густини матеріалу при умові збереження маси тіла.

Д6.2.8. Формула Нансона

Ця формула пов'язує площі та орієнтації елементарних поверхонь: початкової $(dS)_0$ та zdeформованої dS (на рис.Д6.1 поверхні ABC ліворуч та праворуч відповідно).

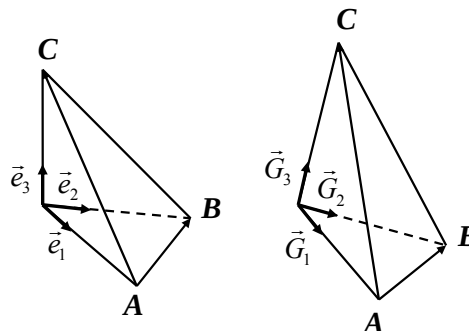


Рис.Д6.1. До виводу формули Нансона

Спочатку розглянемо елементарну площадку ABC з площею $(dS)_0$ (див. рис.Д6.1, ліворуч). Розглянемо два вектори, що належать цієї площадці та виходять з одного кута, наприклад, з A :

$$\overrightarrow{AB} = (d\vec{a})_{AB} = \vec{e}_1(da^1)_{AB} + \vec{e}_2(da^2)_{AB} + \vec{e}_3(da^3)_{AB} = \vec{e}_j(da^j)_{AB};$$

$$\overrightarrow{AC} = (d\vec{a})_{AC} = \vec{e}_1(da^1)_{AC} + \vec{e}_2(da^2)_{AC} + \vec{e}_3(da^3)_{AC} = \vec{e}_k(da^k)_{AC}; \quad j, k = 1, 2, 3. \quad (Д6.53)$$

Відомо, що векторний добуток таких векторів визначає подвоєну площу площадки ABC , а також напрямок нормалі до неї:

$$(d\vec{a})_{AB} \times (d\vec{a})_{AC} = 2(\vec{v})_0(dS)_0. \quad (Д6.54)$$

Вектор $(\vec{v})_0$ зовнішньої нормалі до поверхні площадки ABC в точці A визначимо як

$$(\vec{v})_0 = (v_1)_0 \vec{e}^1 + (v_2)_0 \vec{e}^2 + (v_3)_0 \vec{e}^3 = (v_n)_0 \vec{e}^n; \quad n = 1, 2, 3. \quad (Д6.55)$$

Якщо (Д6.55) у скалярний спосіб помножити на $\vec{e}_i$, то, з урахуванням $\vec{e}_i \cdot \vec{e}^n = \delta_i^n$, отримаємо:

$$\vec{e}_i \cdot (\vec{v})_0 = \vec{e}_i \cdot (v_n)_0 \vec{e}^n = (v_i)_0. \quad (Д6.56)$$

Враховуючи викладене у Розділі Д6.2.5 та (Д6.53), запишемо, що

$$\begin{aligned} \vec{e}_i \cdot ((d\vec{a})_{AB} \times (d\vec{a})_{AC}) &= \vec{e}_i \cdot ((\vec{e}_1(da^1)_{AB} + \vec{e}_2(da^2)_{AB} + \vec{e}_3(da^3)_{AB}) \times \\ &\times (\vec{e}_1(da^1)_{AC} + \vec{e}_2(da^2)_{AC} + \vec{e}_3(da^3)_{AC})) = \vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k)(da^j)_{AB}(da^k)_{AC} = \mathcal{E}_{ijk}(da^j)_{AB}(da^k)_{AC}. \end{aligned} \quad (Д6.57)$$

Отже, згідно з (Д6.54), (Д6.56) та (Д6.57):

$$\mathcal{E}_{ijk}(da^j)_{AB}(da^k)_{AC} = \vec{e}_i \cdot 2(\vec{v})_0(dS)_0 = 2(v_i)_0(dS)_0 = 2(dS_i)_0 \quad (Д6.58)$$

або, з урахуванням (Д6.40) при $E_{123} = E_{231} = E_{312} = 1$, тобто при $\mathcal{E}_{123} = \mathcal{E}_{231} = \mathcal{E}_{312} = \sqrt{g}$:

$$\begin{aligned} 2(v_1)_0(dS)_0 &= \sqrt{g}(da^2)_{AB}(da^3)_{AC}; \quad 2(v_2)_0(dS)_0 = \sqrt{g}(da^3)_{AB}(da^1)_{AC}; \\ 2(v_3)_0(dS)_0 &= \sqrt{g}(da^1)_{AB}(da^2)_{AC}. \end{aligned} \quad (Д6.59)$$

Також розглянемо zdeформовану елементарну площадку ABC (див. рис.Д6.1, праворуч) з площею dS . Після деформування вектори $(d\vec{a})_{AB}$ та $(d\vec{a})_{AC}$ перетворюються на вектори $(d\vec{x})_{AB}$ та $(d\vec{x})_{AC}$. Можна записати аналогічні (Д6.54) ... (Д6.59) вирази, зокрема, аналогічно до (Д6.54), (Д6.55), (Д6.58) та (Д6.59):

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (d\vec{x})_{AB} \times (d\vec{x})_{AC} = 2\vec{v}dS; \quad (Д6.60)$$

$$\vec{v} = v_1\vec{e}^1 + v_2\vec{e}^2 + v_3\vec{e}^3 = v_n\vec{e}^n; \quad n = 1, 2, 3; \quad (Д6.61)$$

$$\mathcal{E}_{ijk}(dx^j)_{AB}(dx^k)_{AC} = \vec{e}_i \cdot 2\vec{v}dS = 2v_idS = 2dS_i; \quad (Д6.62)$$

$$\begin{aligned} 2v_1dS &= \sqrt{g}(dx^2)_{AB}(dx^3)_{AC}; \quad 2v_2dS = \sqrt{g}(dx^3)_{AB}(dx^1)_{AC}; \\ 2v_3dS &= \sqrt{g}(dx^1)_{AB}(dx^2)_{AC}. \end{aligned} \quad (Д6.63)$$

За визначенням

$$(dx^j)_{AB} = \frac{\partial x^j}{\partial a^m}(da^m)_{AB}; \quad (dx^k)_{AC} = \frac{\partial x^k}{\partial a^n}(da^n)_{AC}, \quad (Д6.64)$$

тому з (Д6.62)

$$2v_idS = 2dS_i = \vec{e}_i \cdot 2\vec{v}dS = \mathcal{E}_{ijk} \frac{\partial x^j}{\partial a^m} \frac{\partial x^k}{\partial a^n} (da^m)_{AB}(da^n)_{AC}. \quad (Д6.65)$$

Умножимо цей вираз на $\partial x^i / \partial a^q$:

$$2 \frac{\partial x^i}{\partial a^q} v_idS = 2 \frac{\partial x^i}{\partial a^q} dS_i = \mathcal{E}_{ijk} \frac{\partial x^i}{\partial a^q} \frac{\partial x^j}{\partial a^m} \frac{\partial x^k}{\partial a^n} (da^m)_{AB}(da^n)_{AC}. \quad (Д6.66)$$

З (Д6.66) з урахуванням (Д6.42), (Д6.40) та (Д6.58):

$$2 \frac{\partial x^i}{\partial a^q} v_idS = 2 \frac{\partial x^i}{\partial a^q} dS_i = \sqrt{G} \mathcal{E}_{qmn} (da^m)_{AB}(da^n)_{AC} = 2\sqrt{G}(dS_q)_0 = 2\sqrt{G}(v_q)_0(dS)_0. \quad (Д6.67)$$

Крайні вирази з (Д6.67) створюють формулу Нансона. А саме, після врахування, що відповідно до (Д6.22) $\partial x^i / \partial a^q = (\delta_q^i + \nabla_q U^i) = X_q^i$, після скорочення на двійку, ділення на $\sqrt{G}$ та очевидних заміни індексів:

$$\frac{1}{\sqrt{G}} X_i^j v_j dS = (v_i)_0 (dS)_0; \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (\text{Д6.68-а})$$

Ще одна форма запису формули Нансона – матрична. Створимо матрицю

$$[G] = \begin{bmatrix} 1 + \nabla_1 U^1; & \nabla_2 U^1; & \nabla_3 U^1 \\ \nabla_1 U^2; & 1 + \nabla_2 U^2; & \nabla_3 U^2 \\ \nabla_1 U^3; & \nabla_2 U^3; & 1 + \nabla_3 U^3 \end{bmatrix}, \quad (\text{Д6.69})$$

яка відповідає транспонованому виразу $\delta_i^j + \nabla_i U^j = X_i^j$ (див. формули (Д6.68-а), (Д6.22) та (Д6.26)). Замість (Д6.68-а) маємо формулу Нансона в матричній формі:

$$\frac{1}{\sqrt{G}} [G]^T \{v\} dS = \{(v)_0\} (dS)_0, \quad (\text{Д6.68-б})$$

де позначені вектори $\{v\} = \{v_1, v_2, v_3\}^T$ та $\{(v)_0\} = \{(v_1)_0, (v_2)_0, (v_3)_0\}^T$, які визначають нормалі до поверхонь dS та відповідно $(dS)_0$ відносно базису $\vec{e}^i$.

Д6.2.9. Співвідношення між компонентами першого і другого тензорів напружень Піола-Кірхгофа з компонентами тензора Ейлера-Коші

Згідно з формулами (Д6.29), (Д6.32) і (Д6.35), на поверхнях dS та $(dS)_0$ тензори $\vec{\sigma}$ та $(\vec{T})_0$ створюють відповідно вектори внутрішніх зусиль $d\vec{F} = \sigma^{ij} v_i \vec{G}_j dS$ та $(d\vec{F})_0 = (T^{ij})_0 (v_i)_0 \vec{G}_j (dS)_0$ з компонентами $dF^j = \sigma^{ij} v_i dS$ та $(dF^j)_0 = (T^{ij})_0 (v_i)_0 (dS)_0$.

Далі зручно використовувати матричні позначення. Введемо матриці з компонентами тензорів напружень:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma^{11}; & \tau^{12}; & \tau^{13} \\ & \sigma^{22}; & \tau^{23} \\ \text{symm} & & \sigma^{33} \end{bmatrix}; \quad [T]_0 = \begin{bmatrix} (T^{11})_0; & (T^{12})_0; & (T^{13})_0 \\ (T^{21})_0; & (T^{22})_0; & (T^{23})_0 \\ (T^{31})_0; & (T^{32})_0; & (T^{33})_0 \end{bmatrix}. \quad (\text{Д6.70})$$

Тоді вирази для $d\vec{F}$ та $(d\vec{F})_0$ будуть мати вигляд:

$$\{dF\} = \{dF^1, dF^2, dF^3\}^T = [\sigma] \{v\} dS; \quad \{(dF)_0\} = \{(dF^1)_0, (dF^2)_0, (dF^3)_0\}^T = [T]_0 \{(v)_0\} (dS)_0. \quad (\text{Д6.71})$$

Оскільки ТН1ПК отримано шляхом проектування тензора Ейлера-Коші на вихідну конфігурацію, то прирівнюємо компоненти цих векторів:

$$[\sigma] \{v\} dS = [T]_0 \{(v)_0\} (dS)_0. \quad (\text{Д6.72})$$

Виключимо з (Д6.72) $\{(v)_0\} (dS)_0$ за допомогою формули Нансона (Д6.68-б):

$$[\sigma] \{v\} dS = [T]_0 \frac{1}{\sqrt{G}} [G]^T \{v\} dS. \quad (\text{Д6.73})$$

Ця рівність є справедливою при будь-яких $\{v\} dS$. Тому остаточно отримаємо співвідношення між компонентами матриць $[\sigma]$ та $[T]_0$:

$$[\sigma] = \frac{1}{\sqrt{G}} [T]_0 [G]^T \quad \text{або} \quad [T]_0 = \sqrt{G} [\sigma] ([G]^T)^{-1}. \quad (\text{Д6.74-а})$$

У матричній формі співвідношення (Д6.38-а) між компонентами тензорів $(\vec{T})_0$ та $(\vec{\sigma})_0$ буде мати вигляд:

$$[T]_0 = [\sigma]_0 [G] \quad \text{або} \quad [\sigma]_0 = [T]_0 [G]^{-1}, \quad (\text{Д6.38-б})$$

де введена матриця ТН2ПК

$$[\underline{\sigma}]_0 = \begin{bmatrix} (\underline{\sigma}^{11})_0; & (\underline{\sigma}^{12})_0; & (\underline{\sigma}^{13})_0 \\ & (\underline{\sigma}^{22})_0; & (\underline{\sigma}^{23})_0 \\ \text{symm} & & (\underline{\sigma}^{33})_0 \end{bmatrix}. \quad (Д6.75)$$

З (Д6.74-а) та (Д6.101-б) отримаємо співвідношення між матрицями $[\underline{\sigma}]_0$ та $[\sigma]$:

$$[\underline{\sigma}]_0 = \sqrt{G}[G]^{-1}[\sigma]([G]^T)^{-1} \quad (Д6.76-а)$$

або, навпаки

$$[\sigma] = \frac{1}{\sqrt{G}}[G][\underline{\sigma}]_0[G]^T. \quad (Д6.77-а)$$

Оскільки матриця $[\sigma]$ є симетричною, то конгруентна їй матриця $[\underline{\sigma}]_0$ теж є симетричною, тобто ТН2ПК дійсно є симетричним тензором.

В компонентній формі вирази (Д6.76-а) та (Д6.77-а) відповідно:

$$(\underline{\sigma}^{mn})_0 = \sqrt{G}(X_m^i)^{-1}(X_n^j)^{-1}\sigma^{ij}; \quad (Д6.76-б)$$

$$\sigma^{ij} = \frac{1}{\sqrt{G}}X_m^iX_n^j(\underline{\sigma}^{mn})_0. \quad (Д6.77-б)$$

Ще один варіант запису цих виразів – через вектори-стовпці $\{\sigma\}$ та $\{\underline{\sigma}\}_0$:

$$\{\underline{\sigma}\}_0 = \sqrt{G}[V]^{-1}\{\sigma\}; \quad (Д6.76-в)$$

$$\{\sigma\} = \frac{1}{\sqrt{G}}[V]\{\underline{\sigma}\}_0, \quad (Д6.77-в)$$

де матриця $[V]$ розміром 6х6 складається з комбінацій компонент X_m^i .

Д6.3. Принцип можливих переміщень в поточній конфігурації

Д6.3.1. Закони руху та рівноваги елементарного об'єму тіла

Кількість руху деякого поточного (здеформованого) об'єму Ω^* , кожна точка якого має швидкість $\vec{V}$ та густину матеріалу $\bar{\rho}$, визначається як

$$\mathfrak{Z} = \int_{\Omega^*} \vec{V} \bar{\rho} d\Omega. \quad (Д6.78)$$

Рівнянням кількості руху (другим законом Ньютона) називають рівняння

$$d\mathfrak{Z}/dt = \vec{R}, \quad (Д6.79)$$

де результуюча всіх сил, що діють на об'єм

$$\vec{R} = \int_{\Omega^*} \vec{O} d\Omega + \int_{S^*} \vec{P} dS, \quad (Д6.80)$$

$\vec{O} = O^j \vec{G}_j$ та $\vec{P} = P^j \vec{G}_j$ – відповідно щільність об'ємних (масових) та поверхневих сил; а вектори $\vec{G}_j$, як і раніше, визначають zdeформований базис.

З поверхневими силами пов'язують компоненти тензора напружень, які діють у тій же точці поверхні (природні граничні умови):

$$\vec{P} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\nu}|_{S^*}, \quad (Д6.81)$$

де $\vec{\nu}$ – зовнішня нормаль до точки поверхні тіла. Відмітимо, що вираз $\vec{\sigma} \cdot \vec{\nu}$ означає згортку тензора з вектором, яка має результатом вектор.

Застосуємо рівняння Остроградського-Гаусса:

$$\int_{S^*} \vec{\sigma} \cdot \vec{\nu} dS = \int_{\Omega^*} \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} d\Omega, \quad (Д6.82)$$

де $\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} = \text{div}(\vec{\sigma})$ є дивергенцією тензора другого рангу $\vec{\sigma}$, причому вектор-оператор коваріантного диференціювання $\vec{\nabla} = \vec{e}^i \nabla_i$.

Вважаємо, що всі фізичні величини, що розглядаються, у тілі є безперервні, а також виконується закон збереження маси, тобто $d(\bar{\rho}d\Omega)/dt = 0$. Тоді з використанням (Д6.78) для лівої частини (Д6.79) можна записати, що:

$$d\mathfrak{Z}/dt = \int_{\Omega^*} \frac{d\vec{V}}{dt} \bar{\rho}d\Omega = \int_{\Omega^*} \vec{V} \bar{\rho}d\Omega = \int_{\Omega^*} \vec{U} \bar{\rho}d\Omega, \quad (\text{Д6.83})$$

де $\vec{V} = d\vec{V}/dt = d^2\vec{U}/dt^2 = \vec{\ddot{U}}$ – вектор прискорення. Тепер рівняння (Д6.79):

$$\int_{\Omega^*} \bar{\rho} \vec{\ddot{U}} d\Omega = \int_{\Omega^*} \vec{O} d\Omega + \int_{\Omega^*} \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} d\Omega \quad (\text{Д6.84})$$

або у „зібраному” вигляді:

$$\int_{\Omega^*} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} + \vec{O} - \bar{\rho} \vec{\ddot{U}}) d\Omega = 0. \quad (\text{Д6.85})$$

Оскільки вираз (Д6.85) повинен виконуватися для будь-якого об'єму Ω^* , то вираз під інтегралом повинен дорівнюватися нулю (основна лема механіки), тобто рівняння руху елементарного об'єму тіла має вигляд:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} + \vec{O} = \bar{\rho} \vec{\ddot{U}}. \quad (\text{Д6.86})$$

Якщо прискорення відсутнє або їм можна знехотіти, то рівняння руху (Д6.86) перетворюється у рівняння рівноваги елементарного об'єму тіла:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} + \vec{O} = 0. \quad (\text{Д6.87})$$

Д6.3.2. Принцип (початок) можливих переміщень (в поточній конфігурації)

Візьмемо рівняння рівноваги (Д6.87) та у скалярний спосіб помножимо його на вектор варіації переміщень $\delta\vec{U}$:

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} + \vec{O}) \cdot \delta\vec{U} = 0. \quad (\text{Д6.88})$$

Після інтегрування у всьому об'ємі тіла:

$$\int_{\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} + \vec{O}) \cdot \delta\vec{U} d\Omega = 0. \quad (\text{Д6.89})$$

За правилами варіювання $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\sigma} \cdot \delta\vec{U}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}) \cdot \delta\vec{U} + \vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \delta\vec{U})$, тому

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}) \cdot \delta\vec{U} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\sigma} \cdot \delta\vec{U}) - \vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \delta\vec{U}). \quad (\text{Д6.90})$$

Після підставлення (Д6.90) у (Д6.89) отримуємо вираз:

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\sigma} \cdot \delta\vec{U}) d\Omega - \int_{\Omega} \vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \delta\vec{U}) d\Omega + \int_{\Omega} \vec{O} \cdot \delta\vec{U} d\Omega = 0. \quad (\text{Д6.91})$$

Згідно з теоремою Остроградського-Гаусса перший (об'ємний) інтеграл із (Д6.91) дорівнює (точне співвідношення) інтегралу по поверхні цього об'єму:

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\sigma} \cdot \delta\vec{U}) d\Omega = \int_S (\vec{\sigma} \cdot \vec{\nu}) \cdot \delta\vec{U} dS. \quad (\text{Д6.92-а})$$

Згідно з природними граничними умовами (Д6.81), а саме $\vec{P} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\nu}|_{S_p}$, на поверхні S_p задане силове навантаження $\vec{P}$. Інша частина поверхні тіла $S \setminus S_p$ є вільною від навантажень, тому $\vec{\sigma} \cdot \vec{\nu}|_{S \setminus S_p} = 0$ та $\int_{S \setminus S_p} \vec{\sigma} \cdot \vec{\nu} \cdot \delta\vec{U} dS = 0$. Тому співвідношення (Д6.92-а) можна змінити на

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\sigma} \cdot \delta\vec{U}) d\Omega = \int_{S_p} \vec{P} \cdot \delta\vec{U} dS. \quad (\text{Д6.92-б})$$

З використанням (Д6.92-б) вираз (Д6.91) запишеться у вигляді:

$$\int_{S_p} \vec{P} \cdot \delta\vec{U} dS - \int_{\Omega} \vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \delta\vec{U}) d\Omega + \int_{\Omega} \vec{O} \cdot \delta\vec{U} d\Omega = 0. \quad (\text{Д6.93})$$

Оскільки тензор напружень $\vec{\sigma}$ є симетричним, то можемо записати тотожність:

$$\vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \delta \vec{U}) = \vec{\sigma} \cdot 0.5(\vec{\nabla} \cdot \delta \vec{U} + \vec{\nabla} \cdot \delta \vec{U}) = \vec{\sigma} \cdot \delta \left[0.5(\vec{\nabla} \cdot \vec{U} + \vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \right] = \vec{\sigma} \cdot \delta \vec{\epsilon}, \quad (\text{Д6.94})$$

де введено позначення (через компоненти):

$$\epsilon_{ij} = 0.5(\nabla_i U_j + \nabla_j U_i). \quad (\text{Д6.95})$$

Остаточно замість (Д6.93) маємо (із заміною знаків на протилежні):

$$\delta \Psi = \int_{\Omega} \vec{\sigma} \cdot \delta \vec{\epsilon} d\Omega - \int_{\Omega} \vec{O} \cdot \delta \vec{U} d\Omega - \int_{S_p} \vec{P} \cdot \delta \vec{U} dS = 0. \quad (\text{Д6.96})$$

Позначимо:

$$\delta \Pi = \int_{\Omega} \vec{\sigma} \cdot \delta \vec{\epsilon} d\Omega; \quad \delta A = \int_{\Omega} \vec{O} \cdot \delta \vec{U} d\Omega + \int_{S_p} \vec{P} \cdot \delta \vec{U} dS. \quad (\text{Д6.97})$$

Тут $\delta \Pi$ – робота напружень на варіаціях деформацій; δA – робота масових і поверхневих зусиль на варіаціях переміщень (але не варіації робіт).

Тоді (Д6.96) можна записати як

$$\delta \Psi = \delta(\Pi - A) = \delta \Pi - \delta A = 0 \quad \text{або} \quad \delta \Pi = \delta A. \quad (\text{Д6.98})$$

Вирази (Д6.96) та (Д6.98) відображають варіаційний принцип можливих переміщень (Ж.Л. Лагранж, 1736 ... 1813 рр). Вираз $\delta(\Pi - A)$ визначає *повну віртуальну енергію* тіла ($\Psi = \Pi - A$ є *повною енергією* тіла). Зауважимо, що припускається незмінність напружень та зусиль, коли переміщення варіюються.

Д6.4. Принцип можливих переміщень при TL-формулюванні

Розглянемо питання: як зміниться вираз (Д6.96) принципу можливих переміщень при перерахунку від поточної конфігурації до початкової, яка застосовується у TL-формулюванні (див. Розділ Д6.1). Нагадаємо, що початкову конфігурацію характеризують три вектори основного базису $\vec{e}_i$, координатні лінії a^i , елемент площі $(dS)_0$, елемент об'єму $(d\Omega)_0$.

Д6.4.1. Вираз для роботи напружень на варіаціях переміщень у TL-формулюванні принципу можливих переміщень

Розглянемо перший інтеграл з функціонала (Д6.96), перетворимо його у початкову конфігурацію.

Спочатку отримаємо вираз для варіації деформації.

Скористаємося симетричними матрицями $[\varepsilon]$ та $[g]$, які створені з компонент тензорів ε_{ij} та g_{ij} (метричного) відповідно – формули (Д6.24). Тоді рівняння (Д6.29):

$$[\varepsilon] = 0.5([G]^T [G] - [g]), \quad (\text{Д6.99})$$

де матриця $[G]$ відповідає (Д6.69).

З цього виразу отримаємо варіацію, враховуючи, що $\delta[g] = 0$:

$$\delta[\varepsilon] = 0.5\left(\left(\delta[G]^T\right)[G] + [G]^T (\delta[G])\right). \quad (\text{Д6.100})$$

З компонент $\nabla_i(\delta x^m) = \nabla_i(a^m + \delta U^m)$ створимо матрицю

$$\delta[U] = \begin{bmatrix} \nabla_1(\delta x^1); & \nabla_2(\delta x^1); & \nabla_3(\delta x^1) \\ \nabla_1(\delta x^2); & \nabla_2(\delta x^2); & \nabla_3(\delta x^2) \\ \nabla_1(\delta x^3); & \nabla_2(\delta x^3); & \nabla_3(\delta x^3) \end{bmatrix}. \quad (\text{Д6.101})$$

Можна легко отримати, що

$$\delta[G] = (\delta[U])[G]; \quad \delta[G]^T = [G]^T (\delta[U]^T). \quad (\text{Д6.102})$$

Тому (Д6.100) визначитися як

$$\delta[\varepsilon] = 0.5\left([G]^T (\delta[U]^T)[G] + [G]^T (\delta[U])[G]\right) =$$

$$= [G]^T 0.5 \left((\delta[U]^T) + (\delta[U]) \right) [G] = [G]^T (\delta[\epsilon]) [G], \quad (Д6.103)$$

де позначена матриця

$$\delta[\epsilon] = 0.5 \left((\delta[U]^T) + (\delta[U]) \right), \quad (Д6.104)$$

яка містить варіації від компонент тензора (Д6.95).

Тепер спочатку запишемо перший інтеграл з функціонала (Д6.96) із застосуванням (Д6.77-а) та (Д6.49) як $\int_{\Omega} [\sigma] \delta[\epsilon] d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{G}} [G] [\sigma]_0 [G]^T \delta[\epsilon] d\Omega$, потім, помножуючи підінтегральний вираз на вираз, який нічого не змінює, а саме на $[G][G]^{-1} = [I]$, та проводячи заміну $[G]^T (\delta[\epsilon]) [G]$ згідно з (Д6.103), отримаємо, що:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\sigma] \delta[\epsilon] d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{G}} [G] [\sigma]_0 [G]^T \delta[\epsilon] d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{G}} [G] [\sigma]_0 ([G]^T \delta[\epsilon] [G]) [G]^{-1} d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{G}} [G] [\sigma]_0 \delta[\epsilon] [G]^{-1} d\Omega = \int_{\Omega} [\sigma]_0 \delta[\epsilon] \frac{1}{\sqrt{G}} d\Omega = \int_{\Omega_0} [\sigma]_0 \delta[\epsilon] (d\Omega)_0. \end{aligned} \quad (Д6.105-а)$$

В компонентній формі:

$$\int_{\Omega} \sigma^{ij} \delta \epsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega_0} (\sigma^{ij})_0 \delta \epsilon_{ij} (d\Omega)_0. \quad (Д6.105-б)$$

Отже, отримали запис першого інтеграла з функціонала (Д6.96) у початковій конфігурації.

Д6.4.2. Вираз для об'ємного інтеграла у TL-формулюванні принципу можливих переміщень

Отримаємо вираз для другого інтеграла з (Д6.96), а саме для $\int_{\Omega} \vec{O} \cdot \delta \vec{U} d\Omega$, після перетворення у початкову конфігурацію. Компоненти δU^i вектора варіації переміщень $\delta \vec{U} = \delta U^i \vec{e}_i$ перетворювати немає необхідності, оскільки вони визначаються щодо вихідної (недеформованої) конфігурації. Вектор $\vec{O}$ об'ємного навантаження запишемо у вигляді

$$\vec{O} = \bar{\rho} \vec{F}, \quad (Д6.106)$$

де $\bar{\rho}$ є густиною матеріалу. Згідно зі слідством закону про збереження маси тіла (див. формулу (Д6.50)) $\int_{\Omega} \bar{\rho} d\Omega = \int_{\Omega_0} (\bar{\rho})_0 (d\Omega)_0$. Тому

$$\int_{\Omega} \vec{O} \cdot \delta \vec{U} d\Omega = \int_{\Omega_0} (\bar{\rho})_0 \vec{F} \cdot (\delta U^i \vec{e}_i) (d\Omega)_0. \quad (Д6.107)$$

Залишилося виразити вектор одиничної масової сили $\vec{F}$ у початковій конфігурації. Можливі дві ситуації:

- сила $\vec{F}$ є „мертвою”, тобто не змінює свого положення та свою величину при наявності деформації в точці тіла, тому $\vec{F} = (F^i)_0 \vec{e}_i$ та

$$\int_{\Omega} \vec{O} \cdot \delta \vec{U} d\Omega = \int_{\Omega_0} (\bar{\rho})_0 (F^i)_0 \vec{e}_i \cdot (\delta U^i \vec{e}_i) (d\Omega)_0; \quad (Д6.108-а)$$

- сила $\vec{F}$ „слідкує” за деформацією точки тіла (змінює своє положення та свою величину при наявності деформації), тому $\vec{F} = F^i \vec{G}_i = F^i (\delta_i^j + \nabla_i U^j) \vec{e}_j = F^i X_i^j \vec{e}_j$ та

$$\int_{\Omega} \vec{O} \cdot \delta \vec{U} d\Omega = \int_{\Omega_0} (\bar{\rho})_0 F^i X_i^j \vec{e}_j \cdot (\delta U^i \vec{e}_i) (d\Omega)_0, \quad (Д6.108-б)$$

причому величина F^i може змінюватися як функція $\vec{x}$. До речі, густина матеріалу також може бути функцією координат.

Оскільки другий варіант для твердих тіл застосовується рідко, далі його не розглядаємо.

З урахуванням (Д6.7) $(F^i)_0 \vec{e}_i \cdot (\delta U^i \vec{e}_i) = (F^i)_0 \delta U^i g_{ii} = ((F^i)_0 \sqrt{g_{ii}}) (\delta U^i \sqrt{g_{ii}}) = (\tilde{F}^i)_0 \delta \tilde{U}_i$.

Позначимо:

$$(\tilde{O}_i)_0 \delta \tilde{U}_i = (\bar{\rho})_0 (\tilde{F}_i)_0 \delta \tilde{U}_i; \quad (Д6.109)$$

тоді формулу (Д6.108-а) запишемо:

$$\int_{\Omega} \tilde{O} \cdot \delta \tilde{U} d\Omega = \int_{\Omega_0} (\tilde{O}_i)_0 \delta \tilde{U}_i (d\Omega)_0. \quad (Д6.110)$$

Д6.4.3. Вираз для поверхневого інтеграла у TL-формулюванні принципу можливих переміщень

Розглянемо третій інтеграл з (Д6.96), а саме $\int_{S_p} \vec{P} \cdot \delta \vec{U} dS$. Результируючий вектор поверхневого навантаження на елементарній площадці $\vec{P} dS$ запишемо у вигляді $\vec{P} dS = q \vec{\nu} dS$, де $q = q(\vec{x}, t)$ – розподілене навантаження в точці поверхні; $\vec{\nu} = \nu_i \vec{G}^i$ – вектор нормалі до поверхні в тій же точці. Враховано, що саме контраваріантні вектори $\vec{G}^i$ нормальні до zdeформованої поверхні, яку визначають два вектори $\vec{G}_j$ та $\vec{G}_k$ (тут $i \neq j \neq k \neq i$; $i, j, k = 1, 2, 3$). Тоді

$$\int_{S_p} \vec{P} \cdot \delta \vec{U} dS = \int_{S_p} (q \nu_i \vec{G}^i) \cdot (\delta U^i \vec{e}_i) dS. \quad (Д6.111)$$

Компоненти δU^i вектора варіації переміщень $\delta \vec{U} = \delta U^i \vec{e}_i$ перетворювати немає необхідності, оскільки вони визначаються щодо вихідної (недеформованої) конфігурації. Представимо частину підінтегрального виразу, що залишилася, тобто $q \nu_i \vec{G}^i dS$, у вигляді

$$q \nu_i \vec{G}^i dS = (p^j)_0 \vec{G}_j (dS)_0, \quad \text{де} \quad (Д6.112)$$

$$(p^j)_0 = P^{ij} (\nu_i)_0 \quad (Д6.113)$$

є приведеними компонентами вектора навантаження до поверхні одиничної площі *вихідної* (недеформованої) конфігурації, які ще необхідно знайти.

Компоненти ν_i у (Д6.112) визначені відносно $\vec{G}_i$, тобто:

$$\nu_i = (\delta_i^j + \nabla_i U^j) \nu_j; \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (Д6.114)$$

де ν_j є компонентами вектора нормалі до елементарної поверхні dS , визначені відносно $\vec{e}_i$, $i = 1, 2, 3$. Отже, замість (Д6.112) запишемо:

$$q X_i^j \nu_j \vec{G}^i dS = (P^{ij})_0 (\nu_i)_0 \vec{G}_j (dS)_0. \quad (Д6.115)$$

Згідно з формулою Нансона $X_i^j \nu_j dS = \sqrt{G} (\nu_i)_0 (dS)_0$. Підставимо цей вираз у ліву частину формули (Д6.115). Після скорочення на $(dS)_0$ отримаємо:

$$q \sqrt{G} (\nu_i)_0 \vec{G}^i = (P^{ij})_0 (\nu_i)_0 \vec{G}_j. \quad (Д6.116)$$

З урахуванням (Д6.113) цей вираз прийме вигляд

$$q \sqrt{G} (\nu_i)_0 \vec{G}^i = (p^j)_0 \vec{G}_j. \quad (Д6.117)$$

Помножимо (Д6.117) у скалярний спосіб на $\vec{G}_k$. З огляду на те, що $\vec{G}^i \cdot \vec{G}_k = \delta_k^i$; $(\nu_i)_0 \delta_k^i = (\nu_k)_0$; $\vec{G}_j \cdot \vec{G}_k = G_{jk}$, одержимо спочатку, що

$$q \sqrt{G} (\nu_k)_0 = (p^j)_0 G_{jk}, \quad (Д6.118)$$

а з урахуванням $G^{jk} = (G_{jk})^{-1}$ та $G^{jk} (\nu_k)_0 = G^{ji} (\nu_i)_0$:

$$(p^j)_0 = q \sqrt{G} G^{ji} (\nu_i)_0. \quad (Д6.119)$$

Отже, замість (Д6.111), з врахуванням (Д6.112) та (Д6.119), маємо вираз

$$\begin{aligned}
\int_{S_P} \vec{P} \cdot \delta \vec{U} dS &= \int_{(S_P)_0} q \sqrt{G} G^{ji} (\nu_i)_0 \vec{G}_j \cdot (\delta U^i \vec{e}_i) (dS)_0 = \\
&= \int_{(S_P)_0} q \sqrt{G} \left(G^{ji} (\nu_i)_0 X_j^m \vec{e}_m \right) \cdot (\delta U^m \vec{e}_m) (dS)_0,
\end{aligned} \quad (Д6.120-а)$$

який обчислюється у *вихідній* (недеформованій) конфігурації.

З урахуванням (Д6.7) $(\delta_j^m + \nabla_j U^m) \vec{e}_m \cdot (\delta U^m \vec{e}_m) = (\delta_{jm} + \nabla_j \tilde{U}_m) \delta \tilde{U}_m$. Тому остаточно

$$\int_{S_P} \vec{P} \cdot \delta \vec{U} dS = \int_{(S_P)_0} q \sqrt{G} G^{ji} (\nu_i)_0 (\delta_{jm} + \nabla_j \tilde{U}_m) \delta \tilde{U}_m (dS)_0. \quad (Д6.120-б)$$

Д6.4.4. Вираз принципу можливих переміщень при TL-формулюванні

Якщо вирази (Д6.105-б), (Д6.110) та (Д6.120-б) підставити у принцип можливих переміщень (Д6.96), то отримаємо його вираз при TL-формулюванні (в компонентній формі):

$$\begin{aligned}
\delta \Psi &= \int_{\Omega_0} (\sigma^{ij})_0 \delta \varepsilon_{ij} (d\Omega)_0 - \int_{\Omega_0} (\tilde{O}_i)_0 \delta \tilde{U}_i (d\Omega)_0 - \\
&- \int_{(S_P)_0} q \sqrt{G} G^{ji} (\nu_i)_0 (\delta_{jm} + \nabla_j \tilde{U}_m) \delta \tilde{U}_m (dS)_0 = 0.
\end{aligned} \quad (Д6.121)$$

Нагадаємо, що при цьому вважали, що об'ємна сила $(\tilde{O}_i)_0 \in$ „мертвою”.

Д6.5. Скінченно-елементне наближення крайових задач при TL-формулюванні та метод розв'язування системи алгебраїчних рівнянь

Д6.5.1. Скінченно-елементне наближення

Для створення системи алгебраїчних рівнянь у NX Nastran застосовується принцип можливих переміщень. Розглядаємо його вираз при TL-формулюванні у випадку, коли сила $\vec{F}$ є „мертвою”, а саме вираз (Д6.121). Тут всі величини – у „фізичній” системі координат.

Позначимо:

$$(\underline{p}_m)_0 = q \sqrt{G} G^{ji} (\nu_i)_0 (\delta_{jm} + \nabla_j \tilde{U}_m). \quad (Д6.122)$$

Оскільки наближення буде шукатися на скінченно-елементній сітці, то замість (Д6.121) з урахуванням (Д6.122) запишемо наближене рівняння

$$\delta \Psi_h = \left(\int_{\Omega_0} (\sigma^{ij})_0 \delta \varepsilon_{ij} (d\Omega)_0 - \int_{\Omega_0} (\tilde{O}_i)_0 \delta \tilde{U}_i (d\Omega)_0 - \int_{(S_P)_0} (\underline{p}_m)_0 \delta \tilde{U}_m (dS)_0 \right)_h \approx 0. \quad (Д6.123)$$

Далі нижній індекс $_h$ опускаємо з метою спрощення записів.

Цей функціонал в поєднанні з кінематичними ГУ на поверхні S_U

$$\tilde{U}_m|_{S_U} = \hat{g}_m, \text{ тобто } \delta \tilde{U}_m|_{S_U} = 0 \quad (Д6.124)$$

визначає незліченну множину можливих НДС. Дійсний НДС – один з віртуальних, але додатково задовольняє рівнянням зв'язку між напруженнями та деформаціями.

Оскільки в першому інтегралі (Д6.123) компоненти виразу $(\sigma^{ij})_0 \delta \varepsilon_{ij}$ теж обчислюються у „фізичній” системі координат, то далі знак над величинами, який вказує на цей факт, будемо опускати.

Є декілька ітераційних алгоритмів (методів) розв'язування суттєво нелінійних крайових задач, досить добре вивчених. При постановці крайової задачі в переміщеннях з урахуванням непружних деформацій, а також при урахуванні геометричної нелінійності у NX Nastran застосовується метод додаткових навантажень одночасно з методом Ньютона-Рафсона розв'язування нелінійної САР, яка породжується методом.

Весь процес навантаження тіла розбивається на етапи, на кожному з яких розв'язується крайова задача. Результати поточного етапу є початковими умовами для наступного етапу. В окремому випадку розглядається лише один етап навантаження.

Для наближення майбутнього розв'язку застосовується метод скінченних елементів.

Введемо вектори: $\{O\}_0 = \{O_1, O_2, O_3\}_0^T$ – об'ємних та $\{p\}_0 = \{p_1, p_2, p_3\}_0^T$ – приведених поверхневих навантажень. Функціонал (Д6.123) з урахуванням матричних позначень, уведених у Додатку 5, буде мати вигляд:

$$\delta \Psi = \int_{\Omega_0} \{\delta \varepsilon\}^T \{\varpi\}_0 (d\Omega)_0 - \int_{\Omega_0} \{\delta U\}^T \{O\}_0 (d\Omega)_0 - \int_{(S_P)_0} \{\delta U\}^T \{p\}_0 (dS)_0 = 0. \quad (\text{Д6.125})$$

Визначимо, що $\{\delta \varepsilon\} = [\tilde{B}] \{\delta q\}_e$ (див. другий вираз у (Д5.92)) та $\{\delta \varepsilon\}^T = ([\tilde{B}])^T \{\delta q\}_e^T = \{\delta q\}_e^T [\tilde{B}]^T$; $\{\delta U\} = \delta([\phi] \{q\}_e) = [\phi] \{\delta q\}_e$ та $\{\delta U\}^T = \{\delta q\}_e^T [\phi]^T$. Функціонал (Д6.125) з урахуванням цих формул та можливості суперпозиції по СЕ робіт зовнішніх і внутрішніх сил, зумовленої тим, що СЕ не перетинаються, записується як

$$\delta \Psi = \sum_e \int_{(\Omega^e)_0} \{\delta q\}_e^T [\tilde{B}]^T \{\varpi\}_0 (d\Omega)_0 - \sum_e \int_{(\Omega^e)_0} \{\delta q\}_e^T [\phi]^T \{O\}_0 (d\Omega)_0 - \sum_e \int_{(S_P^e)_0} \{\delta q\}_e^T [\phi]^T \{p\}_0 (dS)_0 = 0, \quad (\text{Д6.126})$$

де знак $\sum_e$ означає підсумовування по всіх СЕ, що містять актуальний ступінь свободи конкретного вузла.

Оскільки вектори $\{\delta q\}_e^T$ не залежать від параметрів інтегрування, їх можна винести за межі інтегралів (як звичайні константи). З (Д6.126), згрупувавши інтеграли, отримаємо

$$\delta \Psi = \sum_e \{\delta q\}_e^T \left(\int_{(\Omega^e)_0} [\tilde{B}]^T \{\varpi\}_0 (d\Omega)_0 - \int_{(\Omega^e)_0} [\phi]^T \{O\}_0 (d\Omega)_0 - \int_{(S_P^e)_0} [\phi]^T \{p\}_0 (dS)_0 \right) = 0. \quad (\text{Д6.127})$$

Оскільки величини $\{\delta q\}_e^T$ – довільні, то з (Д6.127)

$$\sum_e \left(\int_{(\Omega^e)_0} [\tilde{B}]^T \{\varpi\}_0 (d\Omega)_0 - \int_{(\Omega^e)_0} [\phi]^T \{O\}_0 (d\Omega)_0 - \int_{(S_P^e)_0} [\phi]^T \{p\}_0 (dS)_0 \right) = 0. \quad (\text{Д6.128})$$

Позначимо:

$$\{P\}_0 = \sum_e (\{P\}_0)_e; \quad (\{P\}_0)_e = \int_{(\Omega^e)_0} [\phi]^T \{O\}_0 (d\Omega)_0 + \int_{(S_P^e)_0} [\phi]^T \{p\}_0 (dS)_0. \quad (\text{Д6.129-а})$$

Вираз (Д6.128) прийме вигляд

$$\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} [\tilde{B}]^T \{\varpi\}_0 (d\Omega)_0 = \{P\}_0. \quad (\text{Д6.130-а})$$

Д6.5.2. Алгоритм розв'язування крайової задачі з урахуванням геометричної нелінійності на основі методу Ньютона-Рафсона

Для розв'язування *нелінійних* САР у NX Nastran використовується метод Ньютона-Рафсона, який забезпечує високу швидкість збіжності.

Згідно з методом Ньютона-Рафсона розв'язування нелінійних САР вважається, що

$$\{\psi\}^{(k+1)} \approx \{\psi\}^{(k)} + \left(\frac{\partial \{\psi\}}{\partial \{q\}} \right)^{(k)} \{dq\} \approx \{0\}; \quad \{q\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k)} + \{dq\}, \quad (\text{Д6.131})$$

де вектор похибки наближення $\{\psi\}$ визначається як різниця між правою та лівою частинами САР; k – номер ітерації. Тому з (Д6.130-а) вектор похибок

$$\{\psi\}^{(k)} = (\{P\}_0)^{(k)} - \left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} [\tilde{B}]^T \{\varpi\}_0 (d\Omega)_0 \right)^{(k)}; \quad k = 0, 1, \dots \quad (\text{Д6.132})$$

З урахуванням (Д6.132) вираз (Д6.131) запишемо у вигляді ітераційної (рекурентної) послідовності СЛАР

$$-\left(\frac{\partial\{\psi\}}{\partial\{q\}}\right)^{(k)}\{dq\} = (\{P\}_0)^{(k)} - \left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} [\tilde{B}]^T \{\varpi\}_0(d\Omega)_0\right)^{(k)}; \quad \{q\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k)} + \{dq\}. \quad (Д6.133)$$

Залишилося визначитися з матрицею $(\partial\{\psi\}/\partial\{q\})^{(k)}$. Відповідно до (Д6.132) для послідовності СЛАР (Д6.133):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\{\psi\}}{\partial\{q\}}\right)^{(k)}\{dq\} &= \left(\frac{\partial}{\partial\{q\}}\left(\{P\}_0 - \sum_e \int_{(\Omega^e)_0} [\tilde{B}]^T \{\varpi\}_0(d\Omega)_0\right)\right)^{(k)}\{dq\} = \left(\frac{\partial\{P\}_0}{\partial\{q\}}\right)^{(k)}\{dq\} - \\ &- \left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} \frac{\partial[\tilde{B}]^T}{\partial\{q\}_e} \{\varpi\}_0(d\Omega)_0\right)^{(k)}\{dq\} - \left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} [\tilde{B}]^T \frac{\partial\{\varpi\}_0}{\partial\{q\}_e}(d\Omega)_0\right)^{(k)}\{dq\}. \end{aligned} \quad (Д6.134)$$

Окремо розглянемо кожний вираз із правої частини (Д6.134).

Приймемо, що, незважаючи на значні переміщення, повороти та деформації є відносно невеликими (до 2%). Тоді можна прийняти, що

$$\left(\frac{\partial\{P\}_0}{\partial\{q\}}\right)^{(k)}\{dq\} \approx \{0\}. \quad (Д6.135)$$

Оскільки $[\tilde{B}] = [B] + [\bar{B}]$, а $\partial[B]/\partial\{q\}_e = [0]$, то, з урахуванням (Д5.83) і (Д5.76) ... (Д5.80), перший інтеграл із правої частини (Д6.134):

$$\begin{aligned} \left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} \frac{\partial[\tilde{B}]^T}{\partial\{q\}_e} \{\varpi\}_0(d\Omega)_0\right)^{(k)} &= \left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} \frac{\partial[\bar{B}]^T}{\partial\{q\}_e} \{\varpi\}_0(d\Omega)_0\right)^{(k)} = \\ &= \left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} \frac{\partial([A][W])^T}{\partial\{q\}_e} \{\varpi\}_0(d\Omega)_0\right)^{(k)} = \left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} [W]^T \frac{\partial[A]^T}{\partial\{q\}_e} \{\varpi\}_0(d\Omega)_0\right)^{(k)} = \\ &= \left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} [W]^T [\varpi]_0 [W](d\Omega)_0\right)^{(k)}, \end{aligned} \quad (Д6.136)$$

де врахована симетрія матриці $[\varpi]_0$ з компонент вектора $\{\varpi\}_0$; що $([A][W])^T = [W]^T [A]^T$, $\partial[W]^T/\partial\{q\}_e = [0]$, а також, що матриця $\partial[A]^T/\partial\{q\}_e = [W]$.

Введемо глобальну симетричну матрицю:

$$[K_\sigma]_0 = \sum_e ([K_\sigma]_0)_e, \quad \text{де } ([K_\sigma]_0)_e = \int_{(\Omega^e)_0} [G^*]^T [\tilde{S}] [G^*](d\Omega)_0. \quad (Д6.137)$$

Тоді остаточно з першого інтеграла із правої частини (Д6.134) маємо

$$\left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} \frac{\partial[\tilde{B}]^T}{\partial\{q\}_e} \{\varpi\}_0(d\Omega)_0\right)^{(k)} = \sum_e ([K_\sigma]_0)_e^{(k)} = ([K_\sigma]_0)^{(k)}. \quad (Д6.138)$$

Розглянемо останній вираз із правої частини (Д6.134). Визначимо, що

$$\frac{\partial\{\varpi\}_0}{\partial\{q\}_e} = \frac{\partial\{\varpi\}_0}{\partial\{\varepsilon\}} \frac{\partial\{\varepsilon\}}{\partial\{q\}_e} = [D^{ep}] \frac{\partial\{\varepsilon\}}{\partial\{q\}_e}. \quad (Д6.139)$$

Згідно з (Д5.92)

$$\partial\{\varepsilon\}/\partial\{q\}_e = [\tilde{B}]. \quad (Д6.140)$$

Тому:

$$\left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} [\tilde{B}]^T \frac{\partial\{\varpi\}_0}{\partial\{q\}_e}(d\Omega)_0\right)^{(k)}\{dq\} = \left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} [\tilde{B}]^T [D^{ep}] [\tilde{B}](d\Omega)_0\right)^{(k)}\{dq\}. \quad (Д6.141)$$

Отже, залишилося визначитися з виразом для матриці

$$[D^{ep}] = \frac{\partial \{\underline{\sigma}\}_0}{\partial \{\underline{\varepsilon}\}}. \quad (\text{Д6.142-а})$$

Варіантів таких виразів стільки, скільки є моделей матеріалів, тобто багато. Тому тут вирази для матриці $[D^{ep}]$ не розглядаємо.

Позначимо:

$$([\tilde{K}]_0)_e = \int_{(\Omega^e)_0} [\tilde{B}]^T [D^{ep}] [\tilde{B}] (d\Omega)_0; \quad [\tilde{K}]_0 = \sum_e ([\tilde{K}]_0)_e. \quad (\text{Д6.143})$$

Тоді остаточно ліва частина першого виразу з (Д6.133) отримає вигляд:

$$-\left(\frac{\partial \{\psi\}}{\partial \{q\}}\right)^{(k)} \{dq\} = ([K_\sigma]_0 + [\tilde{K}]_0)^{(k)} \{dq\}. \quad (\text{Д6.144})$$

Вираз у дужках правої частині першої формули (Д6.133) позначимо як

$$\{R\}_0 = \sum_e (\{R\}_0)_e, \quad \text{де } (\{R\}_0)_e = \int_{(\Omega^e)_0} [\tilde{B}]^T \{\underline{\sigma}\}_0 (d\Omega)_0. \quad (\text{Д6.145-а})$$

Тоді остаточно вирази (Д6.133), тобто рівняння методу Ньютона-Рафсона отримають вигляд:

$$([K_\sigma]_0 + [\tilde{K}]_0)^{(k)} \{dq\} \approx (\{P\}_0)^{(k)} - (\{R\}_0)^{(k)}; \quad \{q\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k)} + \{dq\}. \quad (\text{Д6.146-а})$$

Перший вираз (Д6.146-а) є лінійною системою алгебраїчних рівнянь для знаходження вектора-розв'язку $\{dq\}$ на $(k+1)$ -й ітерації згідно з методом Ньютона-Рафсона. Вона зібрана на основі розв'язку, отриманого на попередній k -й ітерації: і матриця $([K_\sigma]_0 + [\tilde{K}]_0)$ СЛАР, і вектор правої частини СЛАР.

На нульовій ітерації, коли в тілі ще немає напружень та деформацій, компоненти виразу (Д6.146-а) $(\{R\}_0)^{(0)} = \{0\}$; $[K_\sigma]_0 = [0]$, а

$$[\tilde{K}]_0 = [K]_0, \quad \text{де } [K]_0 = \sum_e [K_0]_e; \quad [K_0]_e = \int_{(\Omega^e)_0} [B]^T [D] [B] (d\Omega)_0, \quad (\text{Д6.147})$$

тому на нульовій ітерації (Д6.146-а) вироджується у

$$[K]_0 \{dq\} \approx (\{P\}_0)^{(0)}; \quad \{q\}^{(1)} = \{q\}^{(0)} + \{dq\}. \quad (\text{Д6.148-а})$$

Реально розглядаються не нескінченне малі прирости, а такі, що мають кінцеві значення. Тому в (Д6.146-а) та (Д6.148-а) замість знаку диференціала d використовують знак приросту Δ :

$$([K_\sigma]_0 + [\tilde{K}]_0)^{(k)} \{\Delta q\} \approx (\{P\}_0)^{(k)} - (\{R\}_0)^{(k)}; \quad \{q\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k)} + \{\Delta q\}; \quad (\text{Д6.146-б})$$

$$[K]_0 \{\Delta q\} \approx (\{P\}_0)^{(0)}; \quad \{q\}^{(1)} = \{q\}^{(0)} + \{\Delta q\}. \quad (\text{Д6.148-б})$$

Для алгоритму Ньютона-Рафсона доведені теореми існування та єдиності розв'язку. Алгоритм має велику швидкість збіжності. Його основний недолік – нові матриці на кожній ітерації.

Матрицю $[K_\sigma]$ називають матрицею *геометричної жорсткості* (geometric stiffness matrix) або матрицею *початкових напружень* або матрицею *дотичної жорсткості*.

Д6.6. Основні положення UL-формулювання алгоритмів розв'язування геометрично нелінійних крайових задач

Згідно з таблицею Д6.1, при UL-формулюванні у загальному випадку геометричної нелінійності (великі паралельні переміщення, великі обертання і великі деформації) використовуються напруження Ейлера-Коші та логарифмічні деформації Генкі.

Отже, потрібно розглянути питання про логарифмічні деформації Генкі, а також про визначальні рівняння, які будуть використовуватися при формулюванні постановок крайових задач, для отримання системи алгебраїчних рівнянь.

Д6.6.1. Розкладання матриці градієнта деформації Гріна на матриці розтягнення та обертальну (теорема про полярну декомпозицію)

Покажемо, що (несиметричну) матрицю $[G]$ (Д6.26) завжди можна представити як

$$[G] = [R][H]_R, \quad (Д6.149)$$

де $[R]$ – обертальна матриця (ортогональна), а $[H]_R$ – права матриця чистої деформації (симетрична). Про це стверджує теорема про полярну декомпозицію.

Розглянемо не вироджену матрицю

$$[C] = [G]^T [G], \quad (Д6.150)$$

визначену у додатний спосіб. Якщо $[R]$ є обертальною матрицею, то $[R]^T [R] = [I]$, де $[I]$ – одинична матриця. Тому, із застосуванням (Д6.149):

$$[C] = ([R][H]_R)^T [R][H]_R = [H]_R^T ([R]^T [R]) [H]_R = [H]_R^T [I] [H]_R = [H]_R^T [H]_R = [H]_R^2. \quad (Д6.151)$$

Враховано, що матриця $[H]_R$ повинна бути симетричною, тоді $[H]_R^T [H]_R = [H]_R^2$.

Отже, оскільки у загальному випадку $[H]_R \neq [G]$, то

$$[H]_R = [C]^{1/2} = ([G]^T [G])^{1/2}. \quad (Д6.152)$$

Але легко обчислити $[H]_R$ з (Д6.152) вдається лише тоді, коли $[G]^T [G]$ є діагональною матрицею. У протилежному випадку для отримання компонент $[H]_R$ розглянемо стандартну симетричну проблему власних значень для симетричної матриці $[C]$:

$$[C]\{w\} = \lambda\{w\}. \quad (Д6.153)$$

З отриманих власних значень $\lambda_i > 0$; $i = 1, 2, 3$ складемо діагональну матрицю $[\lambda_C]$, а з власних векторів (стовпців) $\{w\}$ – матрицю власних векторів $[W]_R$.

Матриці $[H]_R$ відповідає тензор $\vec{H}_R$. Оскільки є прямий зв'язок між $[C]$ та $[H]_R$, а саме $[C] = [H]_R^2$, то будь-який головний базис тензора $\vec{C}$ буде одночасно головним базисом тензора $\vec{H}_R$, який породжує матрицю $[H]_R$ (та навпаки). Оскільки матриця $[C]$ є не виродженою, а також визначеною у додатний спосіб, то її власні значення є додатними, які водночас є квадратами власних значень матриці $[H]_R$. Тому з величин $\sqrt{\lambda_i} \geq 0$ можна зібрати нову діагональну матрицю, позначимо її як $[\underline{H}]$:

$$[\underline{H}] = [\lambda_C]^{1/2}. \quad (Д6.154)$$

Тоді із застосуванням матриці $[\underline{H}]$ та матриці власних векторів $[W]_R$ можна отримати матрицю, яка й буде саме та матриця $[H]_R$, що шукається:

$$[H]_R = [W]_R [\underline{H}] [W]_R^T. \quad (Д6.155)$$

Обертальну матрицю $[R]$ можна отримати з виразу (Д6.149):

$$[R] = [G][H]_R^{-1}. \quad (Д6.156)$$

Властивість $[R]^T [R] = [I]$, яка обов'язкова для обертальної матриці, була закладена при отриманні матриці $[H]_R$. Щоб матриця $[R]$ була обертальною матрицею, їй ще потрібно мати $\det[R] = 1$. Це дійсно так, оскільки:

$$\det[R] = \det[G] \cdot \det[H]_R^{-1} = \sqrt{G} / \det[H]_R = \sqrt{G} / \det[\underline{H}] = \sqrt{G} / \det[\lambda_C]^{1/2} = \sqrt{G} / \sqrt{G} = 1.$$

Симетрична проблема власних значень для не виродженої, визначеної у додатний спосіб матриці має лише один варіант розв'язку. Тому і полярна декомпозиція (Д6.149) теж має лише один варіант.

Окрім *правої* матриці чистої деформації $[H]_R$ ще розглядають *ліву* матрицю чистої деформації $[H]_L$, а саме, замість (Д6.149) – формулу

$$[G] = [H]_L [R]. \quad (\text{Д6.157})$$

Дії – аналогічні. З використанням (Д6.149) $[G] = [R][H]_R = [H]_L[R]$, тому

$$[H]_L = [R][H]_R[R]^T; \quad [H]_L = [W]_L[\underline{H}][W]_L^T; \quad [W]_L = [R][W]_R; \quad [W]_R = [R]^T[W]_L. \quad (\text{Д6.158})$$

Примітка Д6.4. Згідно з (Д6.149) деформування розглядається як процес, в якому послідовно реалізуються: спочатку чиста деформація елементарного об'єму, потім – його жорстке обертання. У випадку використання декомпозиції (Д6.157) процес відбувається строго навпаки: спочатку – жорстке обертання, потім – чиста деформація.

У обох випадках матриці $[H]_R$ та $[H]_L$ з чистою деформацією елементарного об'єму обчислюються через матрицю $[\underline{H}]$, яка фактично містить чисту деформацію у *напрямку головних осей* деформації, тобто матриця $[\underline{H}]$ не містить кутових деформацій (є діагональною). Це дозволяє інтерпретувати діагональні компоненти матриці $[\underline{H}]$ як представників головних деформацій тензорів деформацій та визначити, зокрема, тензор деформацій Гріна-Лагранжа як (матричне позначення, нормована ортогональна система координат)

$$[\varepsilon] = [W]_R \left(0.5([\underline{H}]^2 - [I]) \right) [W]_R^T. \quad (\text{Д6.159})$$

Д6.6.2. Логарифмічні деформації Генкі (Hencky)

Якщо вважати, що напрямок деформації волокна матеріалу з вихідною довжиною L_0 при деформуванні не змінюється, то поточну повздовжню деформацію волокна можна визначити як

$$\varepsilon = \int_{L_0}^L \frac{dx}{x} = \ln \left(\frac{L}{L_0} \right) = \ln \left(\frac{L_0 + \Delta L}{L_0} \right) = \ln(1 + \bar{\varepsilon}), \quad \text{де } \bar{\varepsilon} = \frac{\Delta L}{L_0}. \quad (\text{Д6.160})$$

Це і є логарифмічна деформація Генкі для волокна матеріалу.

Якщо використати матриці власних векторів $[W]_R$, то тензор деформації Генкі можна визначити як (матричне позначення)

$$[\varepsilon]_H = [W]_R [\Lambda] [W]_R^T, \quad (\text{Д6.161})$$

де діагональна матриця $[\Lambda]$ містить компоненти

$$\lambda_{ii} = \ln(1 + \bar{\varepsilon}_i), \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{Д6.162})$$

Примітка Д6.5. Оскільки у визначенні тензорів деформацій Гріна-Лагранжа (Д6.159) та Генкі (Д6.161) відсутня оберտальна матриця $[R]$ (є тільки головні деформації та матриці власних векторів), то це означає, що ці обидва тензори не залежать від жорсткого обертання та зміщення елементарного об'єму тіла.

Примітка Д6.6. З примітки Д6.5 виходить, що компоненти тензора малих деформацій (Д5.8) генерують паразитні (насправді відсутні) деформації при жорсткому обертанні та зміщенні елементарного об'єму тіла. Саме тому формулами (Д5.8) не можна користуватися при наявності жорсткого обертання та зміщення елементарного об'єму тіла.

Логарифмічні деформації Генкі при **UL**-формулюванні застосовуються для обчислення компонент матриці, аналогічної за змістом $[D^{ep}]$ (див. формулу (Д6.142-а)).

Д6.6.3. Подібності та особливості UL- та TL-формулювання алгоритмів розв'язування геометрично нелінійних крайових задач

Як було вказано у Розділі Д6.1, UL-формулювання відрізняється від TL-формулювання тим, яка геометрія вибирається опорною: для UL – початкова, для TL – така, що *створена попереднім етапом навантаження*. Тому істотних змін при отриманні системи алгебраїчних рівнянь не буде.

Уводиться внутрішній час, весь етап навантаження автоматично поділяється на декілька (наприклад, на 10) проміжних етапів – шарів. Верхнім індексом n будемо позначати такий часовий шар. Нижній індекс, як і раніше, визначає початкову конфігурацію.

Оскільки деформації завжди обчислюються відносно початкового стану, то почнемо майже з кінця: з рівняння (Д6.130-а) з урахуванням (Д6.129-а).

Будемо вважати, що є розв'язок на n -му часовому шарі, розглядається наступний, $(n+1)$ -й. Зміниться опорна геометрія: замість $(\Omega^e)_0$ та $(S_P^e)_0$ буде $(\Omega^e)_0^n$ та $(S_P^e)_0^n$. Напруження $\{\sigma\}_0$, об'ємні $\{O\}_0$ та поверхневі $\{p\}_0$ сили на опорній геометрії n -го часового шару позначимо як $\{\sigma\}_0^n$, $\{O\}_0^n$ та $\{p\}_0^n$ відповідно.

Рівняння (Д6.129-а) та (Д6.130-а) змінюються на:

$$(\{P\}_0^n)_h = \sum_e ((\{P\}_0^n)_e)_h; \quad ((\{P\}_0^n)_e)_h = \left(\int_{(\Omega^e)_0^n} [\phi]^T \{O\}_0^n (d\Omega)_0^n + \int_{(S_P^e)_0^n} [\phi]^T \{p\}_0^n (dS)_0^n \right)_h; \quad (\text{Д6.129-б})$$

$$\left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0^n} [\tilde{B}]^T \{\sigma\}_0^n (d\Omega)_0^n \right)_h \approx (\{P\}_0^n)_h. \quad (\text{Д6.130-б})$$

Замість (Д6.142-а) та (Д6.145-а) будемо мати відповідно

$$[D^{ep}] = \frac{\partial \{\sigma\}_0^n}{\partial \{\varepsilon\}}; \quad (\text{Д6.142-б})$$

$$\{R\}_0^n = \sum_e ((\{R\}_0^n)_e), \quad \text{де } ((\{R\}_0^n)_e) = \int_{(\Omega^e)_0^n} [\tilde{B}]^T \{\sigma\}_0^n (d\Omega)_0^n. \quad (\text{Д6.145-б})$$

Як і раніше відзначимо, що варіантів таких виразів стільки, скільки є моделей матеріалів, тобто багато. Тому тут вирази для матриці $[D^{ep}]$ не розглядаємо.

Замість (Д6.146-б) отримаємо таку систему рівнянь:

$$([K_\sigma]_0^n + [\tilde{K}]_0^n)^{(k)} \{\Delta q\} \approx (\{P\}_0^n)^{(k)} - (\{R\}_0^n)^{(k)}; \quad \{q\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k)} + \{\Delta q\}; \quad (\text{Д6.146-в})$$

Крім того $(\{\sigma\}_0^n)^{(0)} = \{\sigma\}_0^n$, тобто є напруженнями Ейлера-Коші з компонентами σ^{ij} , досягнутими на кінець попереднього (n -го) етапу навантаження. Стартове рівняння (Д6.148-б) залишається (лише при $n=0$), тобто старт обох алгоритмів є однаковим: пружним та за рівняннями нескінченно малих деформацій.

На завершення відзначимо таке:

- у NX Nastran алгоритми (Д6.146) звуться алгоритмами *континуальної механіки зростаючого TL- та UL-формулювання (Continuum Mechanics Incremental Total and Updated Lagrangian Formulations)*;

- на жаль, позначення у цьому Розділі іноді значно відрізняються від позначень, застосованих у „Help” NX Nastran. Причиною цього є намагання автора спростити позначення, а також зберегти однакову систему позначень для всіх Додатків, в яких викладається теоретичні основи;

- основною публікацією, на яку посиляється „Help” з цього питання, є книга [66].