

Додаток 7

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ПРО НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ТВЕРДИХ ТІЛ. ДИНАМІКА (теорія)

Д7.1. Постановка крайової динамічної задачі термопружності

Постановка крайової динамічної задачі термопружності з в'язким тертям (демпфіруванням) в більшості моментів співпадає з постановками крайової (квазі)статичної задачі термопружності (див. Додаток 5), тому звернемо увагу лише на розбіжності.

Примітка Д7.1. Динамічні задачі розглядають у межах теорії коливань і стійкості руху. Це дуже значний обсяг інформації. Тому тут розглядаємо лише основні відомості.

Звичайно задаються початкові умови для переміщень і швидкостей, тобто при $t_0 = 0$:

$$U_m(\vec{x}, 0) = \hat{U}_m(\vec{x}); \quad (Д7.1)$$

$$\frac{\partial U_m(\vec{x}, 0)}{\partial t} = \hat{g}_m(\vec{x}). \quad (Д7.2)$$

Рівняння рівноваги (Д5.2) із застосуванням принципу Д'аламбера заміняється на повне рівняння руху з урахуванням демпфірування:

$$\nabla_n \sigma_{mn} + \hat{O}_m = \bar{\rho} \frac{\partial^2 U_m}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial U_m}{\partial t} \quad \text{або} \quad \nabla_n \sigma_{mn} + \hat{O}_m = \bar{\rho} \ddot{U}_m + \alpha \dot{U}_m. \quad (Д7.3)$$

Систему рівнянь динамічної термопружності та природні граничні умови (Д5.46) можна виразити через компоненти тензора малих переміщень:

$$\nabla_n \left\{ E_{mnij}(T) \left[\frac{1}{2} (\nabla_i U_j + \nabla_j U_i) \right] \right\} - \bar{\rho} \ddot{U}_m - \alpha \dot{U}_m = \nabla_n E_{mnij}(T) \delta_{ij} \alpha_T \Delta \hat{T} - \hat{O}_m; \quad (Д7.4)$$

$$\left\{ E_{mnij}(T) \left[\frac{1}{2} (\nabla_i U_j + \nabla_j U_i) \right] \right\} v_n = E_{mnij}(T) \delta_{ij} \alpha_T \Delta \hat{T} v_n + \hat{P}_m. \quad (Д7.5)$$

У сукупності з ГУ (Д5.45), (Д7.5) та початковими умовами (Д7.1) і (Д7.2) рівняння (Д7.4) є системою диференціальних рівнянь в точці тіла, записаною відносно переміщень, розв'язок якої дає опис зміни НДС в часі з урахуванням динамічного навантаження і в'язкого тертя. Очевидно, що ця система у операційному вигляді може бути записана як:

$$M\ddot{\vec{U}} + C\dot{\vec{U}} + K\vec{U} = \vec{f}. \quad (Д7.6)$$

При варіаційній постановці динамічної задачі можна використати варіаційний принцип Лагранжа, якщо в якості об'ємної сили розглядати $\bar{O}_m = \hat{O}_m - \bar{\rho} \ddot{U}_m - \alpha \dot{U}_m$, тобто відповідно до принципу Д'аламбера врівноважити тіло інерційною силою та силою, що демпфірує. Як і для крайової задачі термопружності, знов одержуємо варіаційний функціонал (Д5.47).

Динамічна задача у загальній постановці звичайно розв'язується не завжди, а лише у випадках аналізу перехідних гармонійних процесів та коли сили, що вимушують, не є гармонійними. Існує деяке „критичне” значення коефіцієнта демпфірування, при перевищенні якого коливань у системі виникнути не може. При його зменшенні починають реалізовуватися нижчі форми коливань.

Д7.2. Скінченно-елементна апроксимація крайової динамічної задачі

Викладене у Розділі Д5.2 повторюється (але необоротні деформації відсутні) до формули (Д5.53), замість якої, з огляду на (Д7.3), запишемо:

$$F = \sum_e \int_{\Omega^e} \{ \delta q \}_e^T [B]^T [D] ([B] \{ q \}_e - \{ \alpha_T \} \Delta \hat{T}) d\Omega -$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_e \int_{\Omega^e} \{\delta q\}_e^T [\phi]^T \{\hat{O}\} d\Omega + \sum_e \int_{\Omega^e} \{\delta q\}_e^T [\phi]^T \bar{\rho} \frac{\partial^2 ([\phi] \{q\}_e)}{\partial t^2} d\Omega + \\
& + \sum_e \int_{\Omega^e} \{\delta q\}_e^T [\phi]^T \alpha \frac{\partial ([\phi] \{q\}_e)}{\partial t} d\Omega - \sum_e \int_{S_p^e} \{\delta q\}_e^T [\phi]^T \{\hat{P}\} dS - \{\delta q\}_e^T [\phi]^T \{\hat{R}\} = 0, \quad (Д7.7)
\end{aligned}$$

де, як і раніше, $\{q\}_e = \{q(t)\}_e$. У (Д7.7) матриця базисних функцій $[\phi]$ не залежить від часу, а вектори $\{\delta q\}_e$ і $\{q\}_e$ не залежать від параметрів інтегрування і їх можна винести за межі інтегралів (як звичайні константи). Тому (Д7.7) запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned}
F = \sum_e \{\delta q\}_e^T \left(\int_{\Omega^e} \bar{\rho} [\phi]^T [\phi] d\Omega \cdot \frac{d^2 \{q\}_e}{dt^2} + \int_{\Omega^e} \alpha [\phi]^T [\phi] d\Omega \cdot \frac{d \{q\}_e}{dt} + \int_{\Omega^e} [B]^T [D] [B] d\Omega \cdot \{q\}_e \right) + \\
+ \sum_e \{\delta q\}_e^T \left(- \int_{\Omega^e} [\phi]^T \{\hat{O}\} d\Omega - \int_{S_p^e} [\phi]^T \{\hat{P}\} dS - \int_{\Omega^e} [B]^T [D] \{\alpha_T\} \Delta \hat{T} d\Omega - [\phi]^T \{\hat{R}\} \right) = 0. \quad (Д7.8)
\end{aligned}$$

Позначимо:

$$[M]_e = \int_{\Omega^e} \bar{\rho} [\phi]^T [\phi] d\Omega; \quad [C]_e = \int_{\Omega^e} \alpha [\phi]^T [\phi] d\Omega. \quad (Д7.9)$$

Використовуючи позначення (Д7.9), (Д5.67) ... (Д5.69), з (Д7.8) отримаємо, що

$$F = \sum_e \{\delta q\}_e^T \left([M]_e \frac{d^2 \{q\}_e}{dt^2} + [C]_e \frac{d \{q\}_e}{dt} + [K]_e \{q\}_e - \{P\}_e - \{Q\}_e \right) = 0. \quad (Д7.10)$$

Оскільки вектор варіацій переміщень $\{\delta q\}_e^T$ є довільним, то отримуємо САР вигляду

$$[M] \frac{d^2 \{q(t)\}}{dt^2} + [C] \frac{d \{q(t)\}}{dt} + [K] \{q(t)\} = \{P(t)\} + \{Q(t)\} = \{f(t)\}, \quad (Д7.11-а)$$

або в іншому позначенні

$$[M] \{\ddot{q}(t)\} + [C] \{\dot{q}(t)\} + [K] \{q(t)\} = \{f(t)\} \quad (Д7.11-б)$$

відносно глобального вектора дійсних переміщень $\{q(t)\}$ у вузлах скінченно-елементної сітки, додатково враховуючи кінематичні ГУ з (Д5.32) і початкові умови (Д7.1) і (Д7.2). Цю САР ще необхідно наблизити у часі.

У NX Nastran розрізняють два типу демпфірування: внутрішнє (**internal**) та зовнішнє (**external**); кожне з них формує свою матрицю: $[C_I]$ та $[C_E]$ відповідно. Тому матриця $[C] = [C_I] + [C_E]$.

Д7.3. Скінченно-елементне розв'язування крайових динамічних задач

Існує декілька характерних варіантів крайових динамічних задач. Всі вони є окремими випадками сформульованої вище крайової динамічної задачі.

Д7.3.1. Безпосереднє розв'язування динамічного рівняння

Д7.3.1.1. Метод Ньюмарка

В якості одного із варіантів *безпосереднього* розв'язуванні динамічного рівняння (Д7.11) у NX Nastran застосована рекурентна тришарова схема другого порядку наближення за методом Ньюмарка (1959 р.), яка має вигляд:

$$\begin{aligned}
& ([M] + 0.5\Delta t_n [C] + (0.5\Delta t_n)^2 [K]) \{q\}^{(2n+2)} = \\
& = 2([M] - (0.5\Delta t_n)^2 [K]) \{q\}^{(2n+1)} - ([M] - 0.5\Delta t_n [C] + (0.5\Delta t_n)^2 [K]) \{q\}^{(2n)} + \\
& + (0.5\Delta t_n)^2 [\{f\}^{(2n+2)} + 2\{f\}^{(2n+1)} + \{f\}^{(2n)}]. \quad n = 0, 1, \dots \quad (Д7.12)
\end{aligned}$$

Д7.3.1.2. Явний центрально-різницеви алгоритм

Інший варіант безпосереднього розв'язуванні динамічного рівняння (Д7.11) у NX Nastran – явний центрально-різницеви алгоритм – CDM.

Алгоритм CDM є окремим випадком різницевої схеми. У ній використовуються різницеві оператори другого порядку наближення:

$$\{\ddot{q}\}^n \approx \frac{\{q\}^{n+1} - 2\{q\}^n + \{q\}^{n-1}}{\Delta t^2}; \quad \{\dot{q}\}^n \approx \frac{\{q\}^{n+1} - \{q\}^{n-1}}{2\Delta t}. \quad (Д7.13)$$

Якщо $[K]\{q\}$ наближити виразом $[K](\{q\}^{n+1} + \{q\}^{n-1})/2$, то різницева схема

$$(a_0[M] + a_1[C] + 0.5[K])\{q\}^{n+1} = [M](a_2\{\dot{q}\}^n - a_0\{\ddot{q}\}^{n-1}) + [C]a_1\{\dot{q}\}^{n-1} - [K]0.5\{q\}^{n-1} + \{f\}^n \quad (Д7.14)$$

одержує абсолютну стійкість. Введені коефіцієнти:

$$a_0 = 1/\Delta t^2; \quad a_1 = 1/(2\Delta t); \quad a_2 = 2a_0. \quad (Д7.15)$$

Якщо сумарна матриця $a_0[M] + a_1[C]$ є діагональною або такою, що легко обертається або приводиться до діагонального вигляду, а також у (Д7.11-б) складову $[K]\{q\}$ можна наближити виразом $[K]\{q\}^n$, то схема (Д7.14) записується у вигляді явної (рекурентної) схеми:

$$\{q\}^{n+1} = (a_0[M] + a_1[C])^{-1} ((a_2[M] - [K])\{\dot{q}\}^n - (a_0[M] - a_1[C])\{\ddot{q}\}^{n-1} + \{f\}^n), \quad (Д7.16)$$

яку називають *явним центральним різницевим алгоритмом* – CDM. Ця схема має умовну стійкість, тобто часовий крок є обмеженим зверху: $\Delta t \leq T_n / \pi$, де T_n – найменший з періодів власних коливань тіла. Це дуже жорстке обмеження, яке не можна проігнорувати, але велика кількість кроків компенсується відсутністю дій у збиранні та розв'язуванні СЛАР з недіагональною матрицею.

У NX Nastran 5.0 для того, щоб матриця $a_0[M] + a_1[C]$ була діагональною, уведене обмеження: $[C] = \alpha[M]$ (демпфірування Релея). Тоді матриця $a_0[M] + a_1[C] = (a_0 + \alpha a_1)[M]$.

Д7.3.1.3. Розв'язок на першому часовому кроці

Щоб зберегти другий порядок наближення за часом на першому часовому кроці, обчислимо $\{q\}^{(1)}$ як результат розкладу в ряд Тейлора в околі $t = 0$ на кроці Δt_n з потрібною точністю:

$$\{q\}^{(1)} = \{q\}^{(0)} + \Delta t_n \{\dot{q}\}^{(0)} + \Delta t_n^2 \{\ddot{q}\}^{(0)} / 2 + O(\Delta t_n^3). \quad (Д7.17)$$

З початкових умов відомо, що $\{\dot{q}\}^{(0)} = \{\hat{U}\}$ і $\{\ddot{q}\}^{(0)} = \{\hat{g}\}$ (див. (Д7.1) і (Д7.2)). Враховуючи, що згідно з основним рівнянням (Д7.11)

$$\{\ddot{q}\} = [M]^{-1} (-[C]\{\dot{q}\} - [K]\{q\} + \{f\}), \quad (Д7.18)$$

з (Д7.17) отримаємо

$$\{q\}^{(1)} \approx \{\hat{U}\} + \Delta t_n \{\hat{g}\} + \Delta t_n^2 [M]^{-1} (-[C]\{\hat{g}\} - [K]\{\hat{U}\} + \{f\}^{(0)}) / 2 + O(\Delta t_n^3) \quad (Д7.19-а)$$

або, якщо зневажити членами другого порядку наближення:

$$\{q\}^{(1)} \approx \{\hat{U}\} + \Delta t_n \{\hat{g}\} + O(\Delta t_n^2). \quad (Д7.19-б)$$

Отже, перш ніж використати тришарову схему (Д7.12) або (Д7.16), необхідно насамперед застосувати один з виразів (Д7.19), які на першому часовому кроці забезпечують другий та третій порядок наближення за часом. Для того, щоби можна було швидко обернути матрицю $[M]$, її звичайно при інтегруванні за формулою (Д7.9) діагоналізують (створюється *lumped*-матриця). Хоча процес діагоналізації – наближений, застосування (Д7.19-а) дає підвищену точність $O(\Delta t_n^3)$ при відносно незначних затратах часу, що добре впливає на точність подальшого розв'язку.

Д7.3.2. Задача про власні частоти та форми коливань

Розглядається нетривіальний розв'язок рівняння (Д7.11) за відсутності зовнішніх впливів і змінних кінематичних граничних умов, тобто рівняння

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [C]\{\dot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = \{0\}. \quad (Д7.20)$$

Примітка Д7.2. Для деяких задач дуже важливо врахувати вплив напруженого стану на власні частоти та форми коливань. Наприклад, розтяг лопатки газотурбінного двигуна від

відцентрових масових сил. У цьому випадку потрібно у рівнянні (Д7.20) замість матриці $[K]$ використовувати матрицю $([K] + [K_\sigma])$, де матриця геометричної жорсткості $[K_\sigma]$ відповідає формулі (Д5.99). Для її побудови необхідно мати розв'язок крайової задачі як статичної. Отже, тоді спочатку розв'язується статична задача при заданих силових навантаженнях та граничних умовах 1-го роду, а потім знаходяться власні частоти та форми коливань.

Д7.3.2.1. Розв'язування при відсутності демпфірування

3 (Д7.20) без врахування демпфірування

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = \{0\}. \quad (Д7.21)$$

Розв'язок можна шукати у вигляді

$$\{q(t)\} = \{A\} \cos(\omega t + \beta), \quad (Д7.22)$$

де $\{A\}$ – вектор амплітудних значень вузлових переміщень; $\omega = 2\pi f$ – колова частота, β – фаза коливань. Після прямої підстановки (Д7.22) у (Д7.21) та скорочення на $\cos(\omega t + \beta)$ отримаємо САР:

$$(-\omega^2[M] + [K])\{A\} = \{0\}. \quad (Д7.23)$$

У цієї системи ненульові значення компонент $\{A\}$ можливі лише при умові, що

$$\det[K - \omega^2 M] = 0. \quad (Д7.24)$$

Якщо квадратні матриці $[M]$ та $[K]$ визначені у додатний спосіб (звичайно для задачі лінійної пружності), то рівняння (Д7.24) має N додатних розв'язків – власних частот ω_k , причому можливі парні значення (тут N – кількість невідомих у САР (Д7.23)).

Маючи N значень власних частот ω_k , розв'язок системи (Д7.21) можна шукати у вигляді лінійної комбінації з N виразів (Д7.22):

$$\{q(t)\} = \sum_{k=1}^N \{A\}_k \cdot \cos(\omega_k t + \beta_k). \quad (Д7.25)$$

Оскільки значення компонент власних векторів $\{A\}_k$ можуть бути знайдені не однозначно, а з точністю до постійного множника, то звичайно їх нормують за правилом:

$$\{A\}_k^T [M] \{A\}_k = 1. \quad (Д7.26)$$

Доведено, що власні вектори $\{A\}_k$ ортогональні відносно матриць $[M]$ та $[K]$, тобто

$$\{A\}_k^T [M] \{A\}_m = 0; \quad \{A\}_k^T [K] \{A\}_m = 0; \quad k \neq m. \quad (Д7.27)$$

Ще можна відзначити, що звичайно шукаються не всі корені рівняння (Д7.24), а декілька (позначимо як N_a) найменших значень, оскільки тільки при нижчих власних частотах амплітуди коливань мають відносно великі значення. Інакше кажучи, декілька перших власних частот та форм коливань достатньо для отримання задовільного наближення розв'язку (Д7.25). Для цього розроблено декілька алгоритмів, кращі з них використовуються у NX Nastran.

Д7.3.2.2. Розв'язування при наявності демпфірування

Розв'язок системи (Д7.20) шукається у вигляді

$$\{q(t)\} = \{A\} \cdot e^{\lambda t}, \quad (Д7.28)$$

Після прямої підстановки (Д7.28) у (Д7.20) та скорочення на $e^{\lambda t}$ отримаємо:

$$(\lambda^2[M] + \lambda[C] + [K])\{A\} = \{0\}. \quad (Д7.29)$$

У цієї системи ненульові значення компонент $\{A\}$ можливі лише при умові, що

$$\det[\lambda^2[M] + \lambda[C] + [K]] = 0. \quad (Д7.30)$$

Розв'язок цього рівняння у загальному випадку дає $2N$ коренів λ_n , серед яких є дійсні $\lambda_n = -h_n \pm a_n$ та попарно-комплексні $\lambda_n = -h_n \pm i\bar{\omega}_n$. Дійсні корені – це слідство демпфірування, що перевищує критичне, коли коливань немає. Дійсна частина коренів, що позначена як h_n , є n -м коефіцієнтом демпфірування, а мніма частина попарно-комплексного кореня

$\bar{\omega}_n$ – коловою частотою тіла з наявним демпфіруванням. Серед власних форм також будуть дійсні та попарно-комплексні форми. Отримати такий розв’язок значно складніше, ніж для (Д7.24). Для цього теж розроблено декілька методів, три з них використовуються у NX Nastran.

Д7.3.3. Розв’язування динамічного рівняння із застосуванням методу розкладання розв’язку за власними формами коливань (модальний розв’язок)

Замість (Д7.25) вектор вузлових переміщень можна представити у вигляді розкладу

$$\{q(t)\} \approx \sum_{k=1}^{Na} (\{A\}_k \cdot u_k(t)), \quad (Д7.31)$$

яке дає точне значення при $Na = N$. Підставивши (Д7.31) у (Д7.11), помножимо отриманий вираз зліва на $\{A\}_m^T$ і, використовуючи властивості (Д7.27), тобто ортогональності форм власних коливань, отримаємо систему рівнянь відносно функцій $u_m(t)$:

$$M_m \ddot{u}_m + \{A\}_m^T [C] \{A\}_m \dot{u}_m + K_m u_m = F_m(t), \quad (Д7.32)$$

де позначено: $M_m = \{A\}_m^T [M] \{A\}_m$; $K_m = \{A\}_m^T [K] \{A\}_m$; $F_m = \{A\}_m^T \{f\}$.

Ця система у загальному випадку може бути проінтегрована аналогічно викладеному у Розділі Д7.3.2 або в інший спосіб.

Бувають випадки, коли $\{A\}_k^T [C] \{A\}_m = 0$ при $k \neq m$, наприклад, коли матрицю $[C]$ можна представити у вигляді лінійної комбінації матриць $[M]$ і $[K]$. Тоді (Д7.32) спрощується до Na незв’язаних між собою рівнянь

$$M_m \ddot{u}_m + C_m \dot{u}_m + K_m u_m = F_m(t), \quad (Д7.33)$$

де $C_m = \{A\}_m^T [C] \{A\}_m$. Функції $u_k(t)$ для (Д7.31) тепер можна шукати у вигляді

$$u_m(t) = U_m \cdot e^{i\omega t}, \quad (Д7.34)$$

де $i = \sqrt{-1}$; ω – колова частота. З (Д7.33) отримаємо Na незв’язаних між собою рівнянь

$$(-\omega^2 M_m + i\omega C_m + K_m) \cdot U_m = F_m(t) \cdot e^{-i\omega t} \quad (Д7.35)$$

відносно функцій U_m . Амплітудно-частотними характеристиками $W_m(\omega)$ (АЧХ, або передаточними функціями) називають вирази, що відповідають відношенню реакції U_m до вхідного сигналу $F_m(t) \cdot e^{-i\omega t}$. Отже, з (Д7.35) у цьому випадку АЧХ обчислюються за формулою

$$W_m(\omega) = 1/(-\omega^2 M_m + i\omega C_m + K_m). \quad (Д7.36)$$

Потім, згідно з формулою (Д7.34), функції $u_k(t)$ знаходяться як

$$u_m(t) = W_m(\omega) \cdot F_m(t). \quad (Д7.37)$$

Отже, коли АЧХ відомі, то для знаходження $\{q(t)\}$ послідовно застосовують формули (Д7.37) і (Д7.31). Якщо дисипація енергії не враховується, то матриця $[C]$ та її компоненти у наведених вище рівняннях відсутні.

Функція-розв’язок $u_m(t)$ – комплексна. Її можна представити у вигляді:

$$u_m(t) = \text{Re}(u_m(t)) + i \cdot \text{Im}(u_m(t)) = |u_m(t)| e^{i\phi}, \quad (Д7.38)$$

де $|u_m(t)|$ – амплітуда; $\phi = \arctg(\text{Im}(u_m(t))/\text{Re}(u_m(t)))$ – фаза коливального процесу.

Д7.3.4. Задача про стохастичне збудження тіла

Досить часто у природі збудження тіла є випадковим (імовірнісним, стохастичним). Наприклад, збудження споруд при землетрусу, автомобілів – при пересуванні бруківкою, споруд – вітровим навантаженням, кораблів – морськими хвилями. Відгук тіла на збудження завжди детермінований. Але реалізація випадкового збудження наперед невідома, тому оцінки можна робити суцільно статистично (щільність розподілу випадкової функції, стандартне

відхилення, імовірність перевищення деякого значення тощо). Точні розв'язки вимагають нескінченної кількості оцінок. У NX Nastran застосовують один з *кореляційних* методів, який дає досить добре наближення – метод *моментів* з кореляційною функцією *другого* порядку. Він обмежується лише двома оцінками: *математичним сподіванням* m_q та *кореляційною функцією* K_q , яка у свою чергу є математичним сподіванням від двох відцентрованих випадкових функцій:

$$m_q(t) = M(q(t)); \quad K_q(t_1, t_2) = M(\tilde{q}(t_1), \tilde{q}(t_2)); \quad \tilde{q}(t) = q(t) - m_q(t), \quad (Д7.39)$$

де $M()$ – оператор усереднення; t_1 та t_2 – випадкові значення часу. Доказано, що в цих двох функціях міститься значна частина інформації про випадковий процес.

Якщо m_q – постійна величина, а всі інші статистичні характеристики – незмінні відносно деякої величини зсуву у часі $\tau = t_1 - t_2$, то кореляційна функція залежить лише від цього зсуву у часі: $K_q(t_1, t_2) = K_q(\tau)$. Такі випадкові коливання називають *стаціонарними*. Вони можуть визначатися лише однією невинуватливою функцією – *спектральною щільністю* $S_q(\omega)$, яка є дисперсією, що припадає на одиницю довжини частотного інтервалу, тобто:

$$S_q(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} K_q(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau; \quad K_q(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_q(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (Д7.40)$$

Майже всі стаціонарні випадкові навантаження відповідають умовам *ергодичності*. Це означає, що достатньо довга реалізація цих навантажень несе в собі всю інформацію про їхні статистичні властивості. Тому для ергодичних процесів осереднення по ансамблю реалізацій може бути замінено осередненням у часі.

Отже, досить знати АЧХ усіх точок тіла, щоб знайти їх миттєві відгуки. Тому в NX Nastran при стохастичному збудженні тіла для m -го відгуку результуюча спектральної щільності реакції (дійсне число) розраховується як

$$S_m(\omega) = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} (W_m(\omega))_{\alpha} \cdot (\overline{W}_m(\omega))_{\beta} \cdot S_{\alpha\beta}(\omega), \quad (Д7.41)$$

де $W_m(\omega)$ – відповідна АЧХ; α та β означають два стану навантаження; риса вказує на комплексно-спряжене значення; $S_{\alpha\beta}(\omega)$ – функція спектральної щільності збудження (**Power Spectral Density**, скорочено **PSD**).

У таблиці Д7.1 представлено деякі аналітичні вирази для $K(\tau)$ і $S(\omega)$, а також їхній графічний вигляд. Випадки 1 та 2 відповідають процесам зі спектральною щільністю, яка монотонно зменшується. Випадки 3 та 4 можна застосовувати для опису процесів з частотами ω , які переважають та близькі до β . Випадок 5 відповідає рівномірному розподілу енергії для частотного діапазону $|\omega| < \omega_b$. Випадок 6 – „білий шум”, можна розглядати як випадок 5 при $\omega_b \rightarrow \infty$. Такий процес має нескінченну енергію, тому є абстракцією.

У старих версіях Nastran спектральна щільність реакції при стохастичному збудженні обчислювалася тільки для вказаних вузлів та їх ступенів свободи. Після 2000 року в Nastran з'явилася додаткова можливість побудови її *середньоквадратичного* значення $\bar{u}_m$ (RMS), яке може бути отримано або як інтеграл або як чисельне наближення (апроксимація):

$$\bar{u}_m = \sqrt{\int_f |S_{mf}| df} \cong \sqrt{\sum_f C_f S_m}, \quad (Д7.42)$$

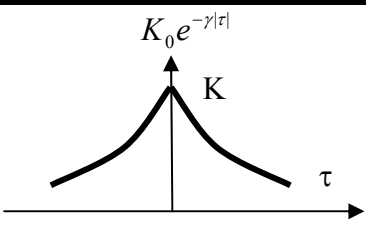
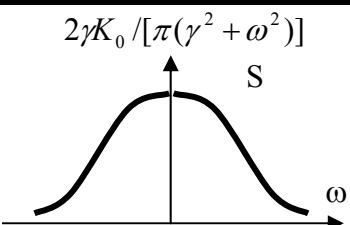
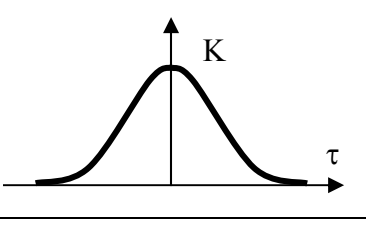
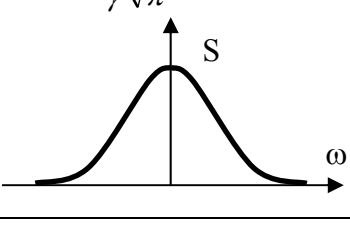
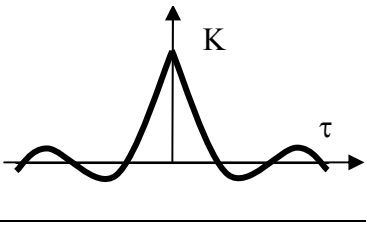
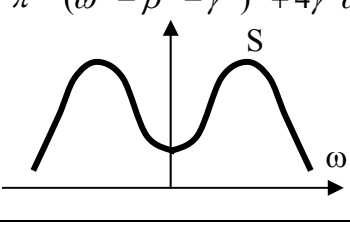
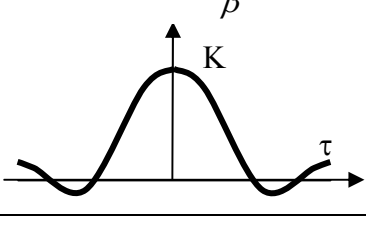
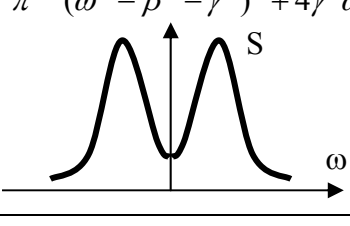
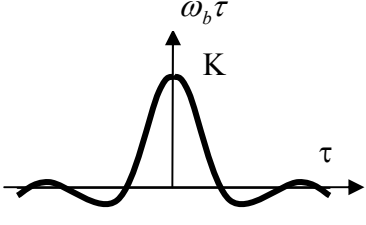
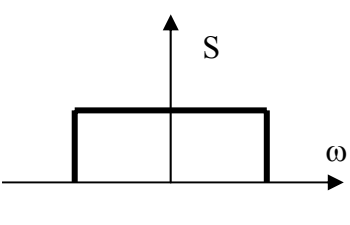
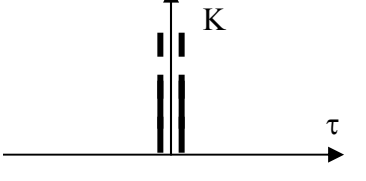
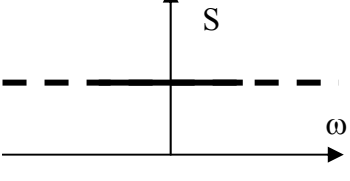
от трапецеїдального методу інтегрування, де частотно-залежні коефіцієнти S_{mf} (при $f = f_m$), помножені на частотні коефіцієнти:

$$C_{fi} = (f_{i+1} - f_{i-1})/2 \quad \text{при } 1 < i < N; \quad C_{f1} = (f_2 - f_1)/2; \quad C_{fN} = (f_N - f_{N-1})/2. \quad (Д7.43)$$

Чутливість конструкції – похідна середньоквадратичного значення $\bar{u}_m$ за кожної змінної проекту. Чутливість маємо для прискорення, швидкості та векторів зміщення. Фактично

похідні розраховані від скінчених приростів спектральної чутливості $\Delta S_m^x(\omega)$, які, у свою чергу, отримані від малих різниць у векторних величинах $\Delta W_{m\alpha}^x$. Із рівняння (Д7.42) можна отримати:

Таблиця Д7.1. $K(\tau)$ та $S(\omega)$ для стаціонарних випадкових процесів

№ з.п.	Кореляційна функція $K(\tau)$	Спектральна щільність $S(\omega)$
1	$K_0 e^{-\gamma \tau }$ 	$2\gamma K_0 / [\pi(\gamma^2 + \omega^2)]$ 
2	$K_0 e^{-(\gamma^2 \tau^2)/4}$ 	$\frac{2K_0}{\gamma\sqrt{\pi}} e^{-(\omega/\gamma)^2}$ 
3	$K_0 e^{-\gamma \tau } \cos \beta\tau$ 	$\frac{2\gamma K_0}{\pi} \frac{\omega^2 + \beta^2 + \gamma^2}{(\omega^2 - \beta^2 - \gamma^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}$ 
4	$K_0 e^{-\gamma \tau } (\cos \beta\tau + \frac{\gamma}{\beta} \sin \beta \tau)$ 	$\frac{2\gamma K_0}{\pi} \frac{\beta^2 + \gamma^2}{(\omega^2 - \beta^2 - \gamma^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}$ 
5	$K_0 \frac{\sin \omega_b \tau}{\omega_b \tau}$ 	$\frac{K_0}{\omega_b}$ при $ \omega < \omega_b$ та 0 при $ \omega > \omega_b$ 
6	$K_1 \delta(\tau)$ 	K_1 / π 

$$\Delta \bar{u}_m^x = \frac{1}{2\bar{u}_m^x} \sum_f C_f \cdot \Delta S_{mf}^x, \quad (Д7.44)$$

де з формули (Д7.41):

$$\Delta S_{mf}^x = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} S_{\alpha\beta} \cdot (\Delta W_{m\alpha} \cdot W_{m\alpha}^* + W_{m\alpha} \cdot \Delta W_{m\alpha}^*). \quad (Д7.45)$$

Тут $\Delta W_{m\alpha}$ обчислені для кожного значення x . З правої частини (Д7.45) для ΔS_{mf}^x вибирається дійсна частина.

Д7.4. Динамічна задача при наявності гіроскопічних сил

Відомо, що внаслідок обертання тіла навколо локальної осі у його точках виникають обертальне та доосьове прискорення, а внаслідок переміщення локальної осі обертання – ще і Коріолісове. Ці прискорення у свою чергу викликають сили, а сили – деформації тіла та реакції зв'язків. Крім того, можливе виникнення резонансу. Тому виникає потреба у відповідних розрахунках.

Лише один із характерних прикладів: літак з одним або декількома газотурбінними двигунами виконує віраж. І сам двигун, і система його кріплення, і фюзеляж літака, і його оперення навантажуються додатковими силами, які можуть зруйнувати конструкцію. Таку задачу зручно формулювати із застосуванням таких термінів, як швидкість літака, радіус віражу, кути обертання, швидкість обертання ротора тощо. Тому бажано мати таку постановку задачі, яка безпосередньо сприймає подібні параметри.

Як відомо з курсу теоретичної механіки, при складному русі точки тіла є сенс вводити *абсолютну* (нерухому) систему координат $O'\bar{x}'$ та *локальну* (рухому) систему координат $O\bar{x}$, яка тісно пов'язана з тілом. Тоді рух точки тіла можна розглядати як *абсолютний* (у системі $O'\bar{x}'$) та *локальний* (у системі $O\bar{x}$). Рух локальної системи координат відносно абсолютної називають *переносним* (тіло як би переноситься разом з нею).

Згідно з формулою Бура абсолютна похідна за часом $\dot{\vec{R}} = d\vec{R}/dt$ довільного вектора $\vec{R}$ складається із локальної похідної $\dot{\vec{R}}_{O\bar{x}} = (d\vec{R}/dt)_{O\bar{x}}$ та векторного добутку $\vec{\omega} \times \vec{R}$, де $\vec{\omega}$ є вектором кутової швидкості обертання рухомої системи координат відносно нерухомої. Тобто $\dot{\vec{R}} = \dot{\vec{R}}_{O\bar{x}} + \vec{\omega} \times \vec{R}$.

Згідно з теоремою про додавання швидкостей *абсолютна* швидкість $\vec{v}_a$ точки при складному русі дорівнює векторній сумі *відносної* $\vec{v}_r$ та *переносної* $\vec{v}_e$ швидкостей, тобто $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$.

Згідно з теоремою Коріоліса про додавання прискорень абсолютне прискорення $\vec{a}_a$ точки при складному русі дорівнює векторній сумі відносного $\vec{a}_r$, переносного $\vec{a}_e$ прискорення та прискорення Коріоліса $\vec{a}_c$, тобто $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$.

Прискорення Коріоліса обчислюється як $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$, де вектор кутової швидкості обертання $\vec{\omega}_e$ характеризує *переносний рух*.

Якщо тіло може деформуватися, то поточну координату точки можемо визначати як $\vec{R} = \vec{r} + \vec{U}$, де $\vec{r}$ є абсолютною координатою точки без врахування деформування, а $\vec{U}$ – переміщення точки, безпосередньо пов'язане з деформаціями. Очевидно, що $\dot{\vec{r}}_{O\bar{x}} = 0$ та $\dot{\vec{R}}_{O\bar{x}} = \dot{\vec{U}}$. Тоді з формули Бура абсолютна швидкість точки тіла

$$\vec{v}_a = \dot{\vec{R}} = \dot{\vec{R}}_{O\bar{x}} + \vec{\omega} \times (\vec{r} + \vec{U}) = \dot{\vec{U}} + \vec{\omega} \times (\vec{r} + \vec{U}). \quad (Д7.46)$$

Похідна за часом дає абсолютне прискорення:

$$\vec{a}_a = \ddot{\vec{U}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{U}) + 2(\vec{\omega} \times \dot{\vec{U}}). \quad (Д7.47)$$

Рівняння рівноваги (Д5.2) із застосуванням принципу Д'аламбера замінюється на повне рівняння руху з урахуванням демпфірування:

$$\nabla_n \sigma_{mn} + \hat{O}_m = \bar{\rho}(a_m)_a + \alpha(v_m)_a. \quad (\text{Д7.48})$$

Оскільки у системі рівнянь (Д7.1) ... (Д7.5) змінилися лише $\dot{U}$ на $\bar{v}_a$ та $\ddot{U}$ на $\ddot{\bar{a}}_a$, то замість системи (Д7.6), а саме $M\ddot{U} + C\dot{U} + K(\bar{U}) = \bar{f}$, буде отримана система

$$M\ddot{\bar{a}}_a + C\bar{v}_a + K(\bar{U}) = \bar{f}. \quad (\text{Д7.49})$$

Якщо тепер у (Д7.49) підставити вирази (Д7.46) та (Д7.47), а також застосувати МСЕ, то остаточно можна отримати систему рівнянь

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + (2\omega[\bar{M}] + [\bar{C}])\{\dot{q}(t)\} + (\omega^2[\underline{M}] + \omega[\underline{C}] + [K])\{q(t)\} = \{\underline{f}(t)\}, \quad (\text{Д7.50})$$

де як $[\bar{M}]$, $[\bar{C}]$, $[\underline{M}]$, $[\underline{C}]$ та $\{\underline{f}(t)\}$ позначені нові матриці та вектор навантаження (не розглядаємо).

Якщо немає переміщень локальної осі обертання, то система рівнянь (Д7.50) дещо спрощується.

Саме такі системи описують уведений у XN Nastran об'єкт з назвою „роторний region”. При заданій кутовій швидкості обертання ω збираються такі системи для „роторних регіонів”, вони вбудовуються у загальну систему для всього тіла, шукається розв'язок сформульованої задачі. У загальному випадку ω може змінюватися у часі, тобто $\omega = \omega(t)$.