Додаток 8

КРАЙОВІ КОНТАКТНІ ЗАДАЧІ ПРО НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ТВЕРДИХ ТІЛ (теорія)

Д8.1. Особливості постановки крайових контактних задач про напружено-деформований стан тіл

Для крайової контактної задачі характерно наявність *зони контакту* відомої (стабільної) або невідомої (нестабільної, змінної) конфігурації. У цій зоні *немає взаємопроникнення* поверхонь тіл, а передані в результаті контакту зусилля *не можуть бути такими, що розтягують* (при урахуванні сил поверхневого зчеплення в зоні контакту припускається деякий рівень „негативного тиску”). У відповідності зі слідством загального закону збереження (закон поверхневих взаємодій) зусилля контакту на двох контактних поверхнях повинні бути *рівними у розмірі і різнонаправленими.* Розрізняють силовий контакт *без тертя* та *з тертям.*

Отже, постановка крайової *контактної* задачі про напружено-деформований стан тіл відрізняється від постановки неконтактної задачі наявністю додаткових граничних умов і обмежень на поверхні контакту S_K. Опишемо їх формулами.

На спільній поверхні S_K з умовними номерами 1 та 2 повинні бути виконані *умови сполучення*:

- силові

$$(\sigma^{mn}{}_{(1)} - \sigma^{mn}{}_{(2)}) \cdot \nu_{m(j)} = 0\,; \quad ; \quad m,n = 1,2,3\,; \quad j = 1,2\,; \tag{Д8.1}$$

- кінематичні при зчепленні (переміщення в тому ж базисі, що й координати)

$$\left[(x_m + U_m)_{(1)} - (x_m + U_m)_{(2)}\right] \cdot \nu_m = 0\,; \quad m = 1,2,3\,; \tag{Д8.2}$$

$$\left[(x_m + U_m)_{(1)} - (x_m + U_m)_{(2)}\right] \cdot \tau_m = 0\,; \quad m = 1,2,3\,, \tag{Д8.3}$$

де ν_m, τ_m – компоненти векторів відповідно зовнішньої нормалі до поверхні контакту і дотичної до тієї ж поверхні. При прослизанні (із тертям або без тертя) умова (Д8.3) не використовується;

- негативних значень нормальних складових контактних зусиль

$$(\sigma^{mn}\,\nu_m\,\nu_n)_{(j)} < 0\,; \quad j = 1,2\,; \tag{Д8.4}$$

- взаємного непроникнення тіл

$$\left[(x_m + U_m)_{(1)} - (x_m + U_m)_{(2)}\right] \cdot \nu_m \le 0\,. \tag{Д8.5}$$

Дві останніх умови є основою для визначення конфігурації поточної поверхні контакту. Разом із ГУ (Д5.47) і (Д5.48) додатково залучаються ГУ на поверхні контакту S_K при:

- зчепленні, тобто при $|\sigma_\tau| \le \min\left\{\mu|\sigma_\nu|;\, (\sigma_S)_{\min}/\sqrt{3}\right\}$ (σ_S – межа плинності матеріалу)

$$\sigma_\nu = \sigma^{mn}\nu_m\nu_n \;\Big|_{S_K} = \widehat{F}_\nu\,; \tag{Д8.6}$$

$$\sigma_\tau = \left[\sum_{n=1}^{3}(\sigma^{mn}\nu_m)^2 - (\sigma^{mn}\nu_m\nu_n)^2\right]^{1/2} \;\Big|_{S_K} = \widehat{F}_\tau\,; \tag{Д8.7}$$

або

$$U_m \;\Big|_{S_K} = \widehat{U}_m\,; \tag{Д8.9}$$

- прослизанні, тобто при $|\sigma_\tau| > \min\left\{\mu|\sigma_\nu|;\, (\sigma_S)_{\min}/\sqrt{3}\right\}$

$$\sigma_\nu = \sigma^{mn}\nu_m\nu_n \;\Big|_{S_K} = \widehat{F}_\nu\,; \tag{Д8.10}$$

або

$$U_\nu = U_m \nu_m \Big|_{S_K} = \widehat{U}_\nu; \tag{Д8.11}$$

а також при $\mu \neq 0$

$$\sigma_\tau = -\left|\widehat{F}_\tau\right| \cdot sign(U_\tau), \tag{Д8.12}$$

де $U_\tau = (U_{m(1)} - U_{m(2)}) \cdot \tau_m$ – дотична до поверхні проекція вектора взаємних переміщень.

При не урахуванні тертя (при рівності нулю коефіцієнта тертя μ) ГУ на S_K спрощуються до

$$\sigma_\nu = \sigma^{mn} \nu_m \nu_n \Big|_{S_K} = \widehat{F}_\nu \quad \text{або} \quad U_\nu = U_m \nu_m \Big|_{S_K} = \widehat{U}_\nu. \tag{Д8.13}$$

Примітка Д8.1. Вище застосована схема сухого тертя Кулона (Амонтона-Кулона) – найпростіша робоча гіпотеза, що дозволяє в першому наближенні обчислити розмір сили тертя. Моделі коефіцієнта тертя Кулона – у наступному Розділі.

Отже, контактна крайова задача містить у крайових умовах нерівності і логічні умови. Це значно ускладнює її розв'язання.

Д8.2. Моделі коефіцієнта тертя Кулона

У NX Nastran застосовується модель тертя Кулона:

$$F_\tau \leq \mu \cdot F_n, \tag{Д8.14}$$

де F_τ – сила тертя; F_n – нормальна до поверхні контактна сила; μ – коефіцієнт тертя. У NX Nastran 5.0 є декілька моделей коефіцієнта тертя Кулона (див. табл.Д8.1).

Таблиця Д8.1. Моделі коефіцієнта тертя Кулона в NX Nastran 5.0

FRICMOD	**Вираз**
1..	$\mu = A_1$
2..	$\mu = \dfrac{1-\exp(-A_2 T_n)}{T_n / A_1}$
3..	$\mu = A_2 + (A_2 - A_1)\exp(-A_3 T_n)$
4..	$\mu = \begin{cases} A_1, & \text{якщо } \dot{u} \leq A_3 \\ A_2, & \text{якщо } \dot{u} > A_3 \end{cases}$
5..	$\mu = \begin{cases} A_1 + \dot{u}(A_3 - A_1)/A_2, & \text{якщо } \dot{u} < A_2 \\ A_3, & \text{якщо } \dot{u} > A_2 \end{cases}$
6..	$\mu = \begin{cases} \sqrt{(A_1 \chi_{(1)})^2 + (A_2 \chi_{(2)})^2 + (A_3 \chi_{(3)})^2}, & \text{якщо } \dot{u} > A_5 \\ A_4, \quad \text{якщо } \dot{u} \leq A_5 \end{cases}$
7..	$\mu = A_1 + A_2 F_n; \quad 0 \leq \mu \leq 1$
8..	$\mu = \begin{cases} A_1 + t(A_3 - A_1)/A_2, & \text{якщо } t < A_2 \\ A_3, & \text{якщо } t > A_2 \end{cases}$
9..	$\mu = \begin{cases} A_1 + A_3 x_{(2)} + A_4 x_{(3)}, & 2D \ (\textit{двовимірний випадок}); \\ A_1 + A_3 x_{(1)} + A_4 x_{(2)} + A_5 x_{(3)}, & 3D \ (\textit{тривимірний випадок}); \end{cases} \quad 0 \leq \mu \leq A_2$
12..	$\mu = \dfrac{1-\exp(-A_2 F_n)}{F_n / A_1}$
13..	$\mu = A_2 + (A_2 - A_1)\exp(-A_3 F_n)$
$A_1 \dots A_5$ – постійні, які уводяться в діалогу; $x_{(i)}$ – координати; $\chi_{(i)}$ – координати локальної системи ковзання (**sliding**); F_n, T_n контактні сили та тяга; $\dot{u}$ – швидкість взаємного ковзання; t – час	

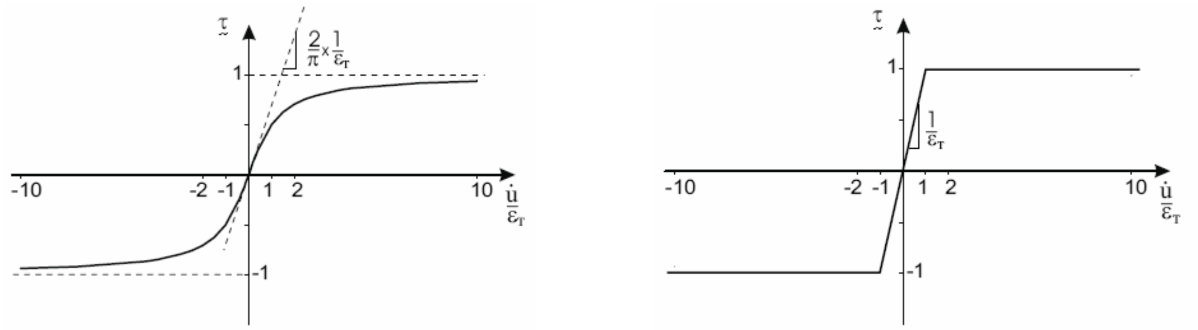
У цій таблиці **FRICMOD** – змінна, яка призначається у полі „**Friction Model**” на діалоговій панелі, зображеної на рис.8.3. А на рис.8.2 у полі „**Friction**” задається значення A_1.

Якщо розглядати величину $\underset{\sim}{\tau} = F_\tau / \mu \cdot F_n$, то $\underset{\sim}{\tau} \le 1$. Природно, що при відсутності взаємного проковзування $\dot{u} = 0$ та $|\underset{\sim}{\tau}| < 1$, а при проковзуванні $sign(\dot{u}) = sign(\underset{\sim}{\tau})$ та $|\underset{\sim}{\tau}| = 1$.

Для застосування закону тертя у NX Nastran створюється функція тертя. Старий варіант функції тертя (для SOL 101, 103, 111, 112) задавався неявно як безперервна функція $\underset{\sim}{v}(\dot{u}, \underset{\sim}{\tau}) = 0$ у вигляді

$$\underset{\sim}{\tau} + \underset{\sim}{v} - \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\dot{u} - \underset{\sim}{v}}{\varepsilon_T}\right) = 0, \qquad (Д8.15)$$

яка зображена на рис.Д8.1-а і де ε_T – малий параметр. Новий варіант функції тертя (для SOL 601, 701) зображений на рис.Д8.1-б (з „**Help**”). Це багатолінійна функція.



а) б)

Рис.Д8.1. Графіки функцій тертя

Д8.3. Моделі контакту

У NX Nastran 5.0 є три метода розв’язування контактних задач:

- метод функції кінематичних обмежень (**Constraint-function method**);
- метод множників Лагранжа (**Lagrange multiplier (segment) method**). Потребує, щоб всі тіла моделі мали окремі (свої) умови закріплення;
- метод жорстких обмежень (**Rigid target method**).

У *методі функції кінематичних обмежень* застосовується функція

$$w(g, \lambda) = g\lambda = 0; \quad g \ge 0; \ \lambda \ge 0 \qquad (Д8.16-а)$$

(старий варіант, для SOL 101, 103, 111, 112) або (новий варіант для SOL 601, 701) $w(g, \lambda) = g\lambda = \varepsilon_N; \quad g \ge 0; \ \lambda \ge 0$, яка має інший (еквівалентний) запис, наведений у „**Help**”

$$w(g, \lambda) = \frac{g + \lambda}{2} - \sqrt{\left(\frac{g - \lambda}{2}\right)^2 + \varepsilon_N} = 0, \qquad (Д8.16-б)$$

де g та λ – числа, які відповідають величинам зазору та нормальної контактної сили F_n відповідно, а ε_N – малий параметр. Графіки цих функцій зображені на рис.8.2 (збільшення ε_N збільшує радіус переходу від горизонталі до вертикалі графіка).

а) б)

Рис.Д8.2. Графіки функцій обмежень

Варіант (Д5.16-б) приводить до підвищеної швидкості збіжності алгоритму, оскільки функція (Д5.16-б) є такою, що не має зломів та диференціюється.

У методі функції кінематичних обмежень перший крок – неконтактний розв'язок. Виявляються зони проникнення одного тіла в інше, у цих місцях (у вузлах) прикладаються додаткові стискуючі (контактні) сили, які потім в ітераціях уточнюються так, щоб не було взаємопроникнення тіл. Для обчислення цих додаткових стискальних сил використовується оригінальний алгоритм, який забезпечує досить швидку збіжність контактних ітерацій.

Метод множників Лагранжа приводить до додавання до глобальної СЛАР додаткових рівнянь і невідомих – множників Лагранжа, що набувають смислу контактних зусиль. Записуються вирази для обмежень на поверхні контакту S_K у вигляді нерівностей:

$$([b]\{q\}-\{\delta\})\big|_{S_K} \geq 0\,, \qquad (Д8.17)$$

де $[b]$ – матриця кінематичних обмежень; $\{\delta\}$ – вектор натягів; які (нерівності) помножуються на множники Лагранжа λ_m та результат додається до повної енергії системи Π_0:

$$\Pi = \Pi_0 + \{\lambda\}^T([b]\{q\}-\{\delta\})\,, \qquad (Д8.18)$$

причому вважається, що (порівняйте з (Д8.16-а))

$$\lambda_m \geq 0\,; \quad \{\lambda\}^T([b]\{q\}-\{\delta\})\big|_{S_K} = 0\,. \qquad (Д8.19)$$

Відповідно до теорем Джона і Куна-Такера нелінійного програмування шукається мінімум функціонала (Д8.18), в результаті чого формується СЛАР і з'ясовується фізичний смисл множників Лагранжа для цього класу задач: вузлові контактні тиски. Шляхом вибору виду матриці кінематичних обмежень $[b]$ можна організувати схему контакту типу „вузол у поверхню". Зусилля прослизання можуть визначатися в ітераціях відповідно до закону тертя.

Метод жорстких обмежень (метод штрафу) застосовується в різноманітних формах. Крім прямого формулювання до нього зводяться методи введення безтовщинного контактного прошарку або контактних елементів із спеціальними властивостями. В результаті до функціонала, що описує загальну енергію системи тіл, що контактують, додається функціонал, що відбиває роботу контактних зусиль, квадратичний по вузловим переміщенням контактних вузлів, і параметри штрафу, що присутні у чистому вигляді, у вигляді характеристик контактного прошарку або у вигляді контактних скінченних елементів. Мінімізація отриманого функціонала приводить до створення симетричної, позитивно визначеної СЛАР. Недолік метода: точність розв'язку пов'язана з вибором параметрів штрафу. У NX Nastran 5.0 реалізований варіант зі створенням контактного прошарку, який має різні значення параметрів жорсткості (штрафу) у нормальному та дотичному до поверхні контакту напрямках.

У одновимірному випадку множники штрафу мають розмірність 1/довжина, а фізичну інтерпретацію – осева жорсткість стрижня довжиною L, з площею перерізу A та модулем Юнга матеріалу E, а саме $K = E \cdot A \cdot L$. Змінювати (від прийнятих розробниками NX Nastran) значення цих множників є сенс лише тоді, коли скінченно-елементна сітка зони контакту має або дуже великі, або дуже маленькі довжини поверхонь СЕ поблизу краю контакту.

Суттєво занижені значення множників штрафу (у нормальному напрямку) приводять до надмірного взаємного проникнення поверхонь контакту, а суттєве завищені значення – до зниження швидкості збіжності алгоритму. Звичайно вдається автоматизувати вибір оптимальних значень цих параметрів, що і зроблено в NX Nastran 5.0.

Підвищення швидкості збіжності алгоритму часто відбувається при збільшенні кількості точок на поверхні СЕ, з яких шукаються опозитні контактні точки. Можливість змінювати таку кількість уведена у NX Nastran 5.0 (див. табл.8.1).

Для отримання розв'язків *динамічних* задач типа 103, 11 та 112 (див. табл.4.2) вважається, що при коливаннях реалізується конфігурація контактних поверхонь, знайдена при розв'язанні статичної контактної задачі. Іноді це припущення є вірним (наприклад, при попередньо напруженому контакті), іноді – ні.