Частина VII
АЛГОРИТМИ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ СТАЦІОНАРНИХ І ЕВОЛЮЦІЙНИХ ЗАДАЧ

Розділ 21

АЛГОРИТМИ РОЗРАХУНКУ ТЕПЛОВОГО СТАНУ ЗА МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

21.1. Просторова алгебраїзація крайової задачі теплопровідності на основі МСЕ

Нагадаємо, що в підрозділі 13.1 було зроблено постановку крайової задачі нестаціонарної теплопровідності (див. рівняння (13.3) ... (13.14)). Після цього в п.17.3.1 із застосуванням методу зважених похибок наближення після проведення процедури *послаблення* (для чого прийшлося прийняти $\widetilde{w}_j = w_j$) було отримано J рівних нулю функціоналів (17.37), а саме

$$F_j = \int\limits_{\Omega}\left(c_P\overline{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial t} + c_P\overline{\rho}(\nabla_k\theta)V^k + \nabla_k\theta\,\lambda\,\nabla_k - \widehat{\omega}\right)w_j d\Omega - \\ - \int\limits_{S_q}\widehat{q}w_j dS - \int\limits_{S_\alpha}\tilde{q}w_j dS - \int\limits_{S_\beta}\breve{q}w_j dS = 0;\quad j=1,...,J, \tag{21.1}$$

де $\tilde{q}$ та $\breve{q}$ даються формулами (13.7) і (13.8) відповідно.

Залишилися відкритими питання про: вибір функції для наближення температури $\theta(\vec{x},t)$; вибір вагових функцій $w_j(\vec{x})$, $j=1,2,...,J$; схеми чисельного інтегрування за часом. Тут розглянемо всі проблеми, що залишилися, при застосування для розв'язування крайової задачі методу скінченних елементів.

Оскільки скінченні елементи у МСЕ взаємно не перетинаються та щільно заповнюють Ω, то запишемо (21.1) через суму інтегралів

$$F_j = \sum_{e=1}^{E}\int\limits_{\Omega^e}\left(c_P\overline{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial t} + c_P\overline{\rho}(\nabla_k\theta)V^k + \nabla_k\theta\,\lambda\,\nabla_k - \widehat{\omega}\right)\left(\Lambda_j^n\right)^e w_n^e d\Omega - \sum_{e=1}^{E^*}\int\limits_{S_q^e}\widehat{q}\left(\Lambda_j^n\right)^e w_n^e dS - \\ - \sum_{e=1}^{E^*}\int\limits_{S_\alpha^e}\tilde{q}\left(\Lambda_j^n\right)^e w_n^e dS - \sum_{e=1}^{E^*}\int\limits_{S_\beta^e}\breve{q}\left(\Lambda_j^n\right)^e w_n^e dS = 0;\quad j=1,...,J;\ \ n=1,...,M_e, \tag{21.2}$$

© К.М. Рудаков, 2025

де $S_q^e, S_\alpha^e, S_\beta^e$ – поверхні СЕ, які виходять на поверхні тіла S_q, S_α, S_β відповідно; $\left(\Lambda_j^n\right)^e$ – оператор (масив) інцидентності, введений в Розділі 19.

Кількість вузлів у скінченно-елементній сітці дорівнює N, тому, щоб отримати квадратну матрицю САР, необхідно прийняти, що $J = N$.

Нагадаємо, що, згідно з методом Фур'є та формулою наближення у МСЕ (19.17) наближений розв'язок крайової задачі в об'ємі Ω тіла шукається у вигляді

$$\theta(\vec{x},t) \approx \sum_{e=1}^{E}\left(\sum_{m=1}^{M_e}\left(\varphi_m^e(\vec{r})\cdot\theta_m(t)\right)\right), \tag{21.3}$$

де $\vec{r}$ – вектор локальної в кожному СЕ з номером e системи координат; $\varphi_m^e(\vec{r})$ – локальні *базисні* функції вузлів з номером m, які лінійно незалежні, відповідають умові повноти та дорівнюють нулю за границями свого СЕ.

У межах кожного СЕ, згідно з (21.3), температура обчислюється за виразом апроксимації в СЕ:

$$\theta(\vec{r},t) \approx \sum_{m=1}^{M_e}\left(\varphi_m^e(\vec{r})\cdot\theta_m(t)\right). \tag{21.4}$$

Далі скористаємося рекомендацією І.Г. Бубнова (див. п.17.1.4) і застосуємо для функціоналів (21.2) за вагові функції базисні функції, тобто приймемо, що в межах СЕ

$$w_n^e = \varphi_n^e(\vec{r}); \quad n = 1,...,M_e. \tag{21.5}$$

Якщо для (13.8) задане значення $\theta_{abs}[^oC] \neq 0$, то для спрощення обчислень задачу краще розв'язувати відносно $\theta[^oK]$, тобто відносно температури за шкалою Кельвіна (абсолютної температури). Тоді (13.8) перетворюється на

$$\breve{q}\big|_{S_\beta} = -\beta f\left(e\theta^4 - a\widehat{\theta}_a^4\right)\Big|_{S_\beta} = -\beta f[eW - a\widehat{\theta}_a^4]\big|_{S_\beta}, \text{ де } \quad W = \theta^4, \tag{21.6}$$

а початкові умови (13.4) та ГУ 1-го роду (13.5) замінюються на

$$\theta(\vec{x},t_0)[^oK] = \widehat{\theta}_0(\vec{x})[^oC] + \theta_{abs}[^oC]; \tag{21.7}$$

$$\theta(\vec{x},t)[^oK]\big|_{S_\theta} = \widehat{\theta}(\vec{x},t)[^oC] + \theta_{abs}[^oC]. \tag{21.8}$$

Після отримання розв'язку крайової задачі проводиться повернення до вихідних температур.

Примітка 21.1. Окрім температурних шкал Цельсія та Кельвіна є й інші, зокрема, Фаренгейта та Реомюра. Відомо, що $1^oC = 1^oK = 1^oF/1.8 = 1^oR/0.8$, а також формули переходу між шкалами: $\theta[^oK] = \theta[^oC] + 273.15$; $\theta[^oC] = (\theta[^oF] - 32)/1.8$; $\theta[^oC] = \theta[^oR]/0.8$. Тому при застосуванні шкал Фаренгейта та Реомюра формули (21.7) і (21.8) необхідно відповідно скорегувати.

Функцію W з (21.6) можна наблизити в межах СЕ аналогічно (21.4):

$$W(\vec{r},t) = \theta^4(\vec{r},t) \approx (W)_h(\vec{r},t) = \sum_{m=1}^{M_e}\left(\varphi_m^e(\vec{r})\cdot\psi_m(t)\right), \tag{21.9}$$

© К.М. Рудаков, 2025

де $\psi_m(t)$ – вузлові значення функції W, тобто

$$\psi_m(t) = (\theta_m(t))^4 . \qquad (21.10)$$

Розглянемо докладно подальше перетворення першого інтеграла з (21.2). Спочатку підставимо (21.4) і (21.5) в цей інтеграл:

$$\sum_{e=1}^{E} \int_{\Omega^e} c_P \overline{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial t} \left(\Lambda_j^n\right)^e w_n^e d\Omega = \sum_{e=1}^{E} \int_{\Omega^e} c_P \overline{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial t} \sum_{m=1}^{M_e} \left(\left(\Lambda_i^m\right)^e \varphi_m^e(\vec{r}) \cdot \theta_m(t) \right) \right) \left(\Lambda_j^n\right)^e \varphi_n^e(\vec{r}) d\Omega .$$

Відомо, що похідна від суми дорівнює сумі похідних, тобто оператор похідної можна внести під знак суми. Оскільки від часу залежить тільки $\theta_m(t)$, то $\sum_{m=1}^{M_e} \frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi_m^e(\vec{r}) \cdot \theta_m(t) \right) = \sum_{m=1}^{M_e} \left(\varphi_m^e(\vec{r}) \frac{d\theta_m(t)}{dt} \right)$. Знак суми $\sum_{m=1}^{M_e}$ можна винести за границі інтеграла, оскільки інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів. Разом з цією сумою за межі інтеграла потрібно (і можна) винести $\frac{d\theta_m(t)}{dt}$, оскільки цей вираз не залежить від параметрів інтегрування, а також – оператори інцидентності $\left(\Lambda_i^m\right)^e$ й $\left(\Lambda_j^n\right)^e$. Застосуємо правило підсумовування за індексом, що повторюється (тут індекс m), тобто опустимо знак суми $\sum_{m=1}^{M_e}$. Отже:

$$\sum_{e=1}^{E} \int_{\Omega^e} c_P \overline{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial t} \left(\Lambda_j^n\right)^e w_n^e d\Omega = \sum_{e=1}^{E} \left(\left(\Lambda_i^m\right)^e \left(\Lambda_j^n\right)^e \int_{\Omega^e} c_P \overline{\rho} \varphi_m^e(\vec{r}) \varphi_n^e(\vec{r}) d\Omega \cdot \frac{d\theta_m(t)}{dt} \right).$$

Перетворення інших складових (21.2) проводиться аналогічно. Підставимо (13.7-а), тобто $\tilde{q}\big|_{S_\alpha} = -\alpha \cdot (\theta - \widehat{\theta}_\infty)\big|_{S_\alpha}$, а також (21.6), (21.4), (21.5) і (21.9) у функціонал (21.2). Отримаємо, що:

$$F_j(\theta)_h = \sum_{e=1}^{E} \left(\left(\Lambda_i^m\right)^e \left(\Lambda_j^n\right)^e \int_{\Omega^e} c_P \overline{\rho} \varphi_m^e \varphi_n^e d\Omega \cdot \frac{d\theta_m}{dt} \right) + \sum_{e=1}^{E} \left(\left(\Lambda_i^m\right)^e \left(\Lambda_j^n\right)^e \left(\int_{\Omega^e} \nabla_k \varphi_m^e \lambda \nabla_k \varphi_n^e d\Omega + \right.\right.$$

$$\left. + \int_{\Omega^e} c_P \overline{\rho} (\nabla_k \varphi_m^e) V^k \varphi_n^e d\Omega + \int_{S_\alpha^e} \alpha \varphi_m^e \varphi_n^e dS \right) \cdot \theta_m \Bigg) + \sum_{e=1}^{E} \left(\left(\left(\Lambda_i^m\right)^e \left(\Lambda_j^n\right)^e \int_{S_\beta^e} \beta f e \varphi_m^e \varphi_n^e dS \right) \cdot \psi_m \right) -$$

$$- \sum_{e=1}^{E} \left(\left(\Lambda_j^n\right)^e \left(\int_{\Omega^e} \widehat{\omega} \varphi_n^e d\Omega + \int_{S_q^e} \widehat{q} \varphi_n^e dS + \int_{S_\alpha^e} \alpha \widehat{\theta}_\infty \varphi_n^e dS + \int_{S_\beta^e} \beta f a \widehat{\theta}_a^4 \varphi_n^e dS \right) \right) = 0 , \qquad (21.11\text{-а})$$

де $i = 1,2,3$; $m,n = 1,...,M_e$; $i,j = 1,...,N$.

Позначимо компоненти матриць та вектора "навантажень":

$$G_{mn}^e = G_{nm}^e = \int_{\Omega^e} c_P \overline{\rho} \varphi_m^e \varphi_n^e d\Omega ; \qquad (21.12)$$

$$L_{mn}^e = L_{nm}^e = \int_{\Omega^e} \nabla_k \varphi_m^e \lambda \nabla_k \varphi_n^e d\Omega ; \quad M_{mn}^e = \int_{\Omega^e} c_P \overline{\rho} (\nabla_k \varphi_m^e) V^k \varphi_n^e d\Omega ; \qquad (21.13)$$

$$A_{mn}^e = A_{nm}^e = \int_{S_\alpha^e} \alpha \varphi_m^e \varphi_n^e dS ; \quad H_{mn}^e = H_{nm}^e = \int_{S_\beta^e} \beta f e \varphi_m^e \varphi_n^e dS ; \qquad (21.14)$$

© К.М. Рудаков, 2025

$$K^e_{mn} = L^e_{mn} + M^e_{mn} + A^e_{mn}; \quad m,n = 1,...,M_e; \tag{21.15}$$

$$P^e_n = \int_{\Omega^e} \hat{\omega}\varphi^e_n d\Omega + \int_{S^e_q} \hat{q}\varphi^e_n dS + \int_{S^e_\alpha} \alpha\hat{\theta}_\infty \varphi^e_n dS + \int_{S^e_\beta} \beta f a \hat{\theta}^4_a \varphi^e_n dS; \quad n = 1,...,M_e. \tag{21.16-а,б}$$

З урахуванням введених позначень функціонали (21.11-а) створюють систему алгебро-диференційних рівнянь

$$G_{ij}\frac{d\theta_i}{dt} + K_{ij}\theta_i + H_{ij}\psi_i = P_j; \quad i,j = 1,...,N. \tag{21.17-а}$$

Тут введено *глобальні* матриці та вектори, які "збираються" звичайним алгебраїчним додаванням, згідно з номерами вузлів та у відповідності із співвідношеннями інцидентності (відповідності) вузлів, із матриць і векторів, отриманих для кожного із СЕ:

$$G_{ij} = \sum_{e=1}^{E} \left(\Lambda^m_i\right)^e \left(\Lambda^n_j\right)^e G^e_{mn}; \quad K_{ij} = \sum_{e=1}^{E} \left(\Lambda^m_i\right)^e \left(\Lambda^n_j\right)^e K^e_{mn};$$

$$H_{ij} = \sum_{e=1}^{E} \left(\Lambda^m_i\right)^e \left(\Lambda^n_j\right)^e H^e_{mn}; \quad P_j = \sum_{e=1}^{E} \left(\Lambda^n_j\right)^e P^e_n. \tag{21.18}$$

Матрицю G_{ij} називають матрицею теплоємності, матрицю L_{ij} – теплопровідності; M_{ij} – конвекційного переносу тепла; A_{ij} – конвекційного теплообміну; H_{ij} – променевого теплообміну. Всі матриці є симетричними, окрім M_{ij}, тому і сумарна матриця K_{ij} САР буде несиметричною. А це потребує майже подвійного підвищення розміру пам'яті ЕОМ для роботи з матрицею K_{ij}. Але при малих швидкостях переміщення вузлів V^k, що характерно для твердих тіл, зазвичай матрицею M_{ij} нехтують, оскільки тоді її компоненти дуже малі порівняно з компонентами інших матриць. Тоді всі матриці системи (21.17-а) є симетричними.

Приклад 21.1. На рис.21.1 проілюстровано, як проводиться збирання глобальної матриці з матриць СЕ, згідно з другою формулою (21.18).

Прямокутна пластина апроксимована шістьома СЕ трикутної форми.

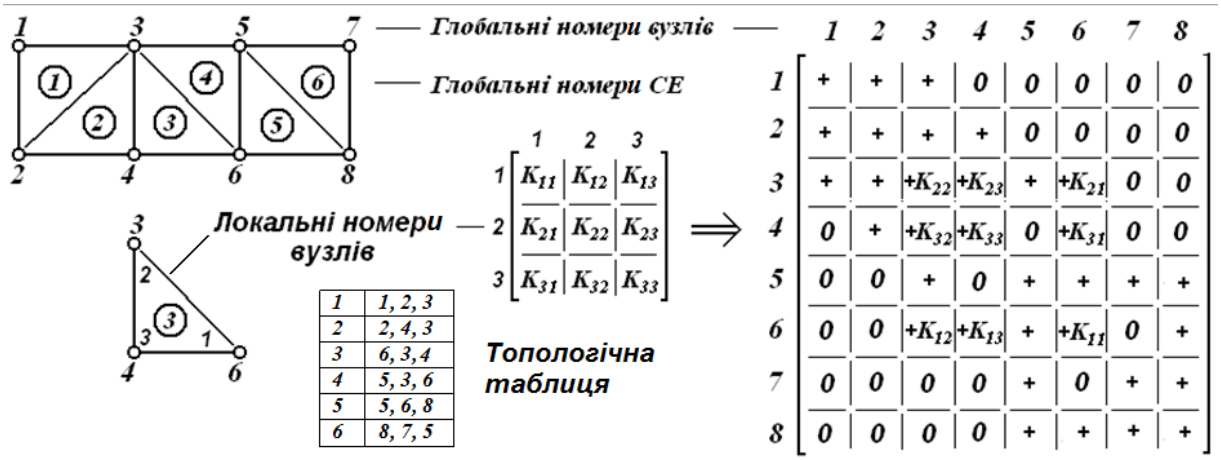


Рис.21.1 До збирання глобальної матриці з матриць СЕ, згідно з формулою

$$K_{ij} = \sum_{e=1}^{E} \left(\Lambda^m_i\right)^e \left(\Lambda^n_j\right)^e K^e_{mn}$$

© К.М. Рудаков, 2025

Для СЕ з номером 3 отримана матриця K^3_{mn} розміром *3*х*3*. Верхньому вузлу з локальним номером 2 відповідає вузол з глобальним номером 3. Тому при реалізації другої формули (21.18) компонента K^e_{22} алгебраїчно додається в глобальну матрицю на позицію 33. Вузлу з локальним номером 1 відповідає вузол з глобальним номером 6. Тому компонента K^e_{21} алгебраїчно додається в глобальну матрицю на позицію 36, а компонента K^e_{12} – на позицію 63. Аналогічно до глобальної матриці додаються останні 6 компонентів матриці K^3_{mn}. В результаті в ній модифіковані 9 позицій (див. рисунок). Такі ж дії проводяться для всіх СЕ пластини.

На рисунку знаком + помічені позиції в глобальній матриці, до значень компонент яких будуть додавання.

Нулями помічені позиції, до компонент яких додавання зовсім не буде. Чому? А тому, що немає ні одного СЕ, в який одночасно входять вузли з глобальними номерами 1 і 4, 1 і 5, 1 і 6, 1 і 7, 1 і 8, тому в позиціях 14, 15, 16, 17 і 18 і після закінчення збирання глобальної матриці залишаться нулі.

В підрозділі 4.4 йшлося про *профіль* матриці, який проілюстровано на рис.4.1. Все це справедливо й для матриці, зображеної на рис.21.1. Матриці з великою кількістю нулів є типовими для МСЕ, їх називають *розрідженими*, для розв'язування СЛАР з такими матрицями розроблені спеціальні методи, про що теж йдеться в підрозділі 4.4. Профілі матриць, що породжуються МСЕ, завжди є симетричними відносно діагоналі. Але самі матриці можуть бути як симетричними, так і несиметричними.

Початкова умова (21.7) перетворюється на

$$(\theta)_h\left((\vec{x})_l, t_0\right)[^oK] = \hat{\theta}_l(t_0)[^oK] = \hat{\theta}_0\left((\vec{x})_l\right)[^oC] + \theta_{abs}[^oC], \tag{21.19}$$

а гранична (21.8) – на

$$(\theta)_h\left((\vec{x})_l, t\right)_{|S_\theta} = \hat{\theta}_l(t)[^oK] = \left(\hat{\theta}_l(t)[^oC] + \theta_{abs}[^oC]\right)_{|S_\theta}, \tag{21.20}$$

де $(\vec{x})_l$ – глобальні координати вузла з номером l.

Якщо замість (13.7-а) застосувати нелінійну залежність (13.7-б), тобто $\tilde{q}\big|_{S_\alpha} = -\alpha \cdot \tilde{Q}\big|_{S_\alpha}$, де $\tilde{Q} = (\theta^\mu - \hat{\theta}^\mu_\infty)$, то спочатку як у (21.9) введемо наближення

$$\tilde{Q}(\vec{r}, t) = \theta^\mu(\vec{r}, t) \approx (\tilde{Q})_h(\vec{r}, t) = \sum_{m=1}^{M_e}\left(\varphi^{\,e}_m(\vec{r}) \cdot \phi_m(t)\right), \tag{21.21}$$

де $\phi_m(t)$ – вузлові значення вектора $(\tilde{Q})_h$, тобто

$$\phi_m(t) = \left(\theta^\mu(t)\right)_m. \tag{21.22}$$

Замість (21.11-а) одержимо

$$F_j(\theta)_h = \sum_{e=1}^{E}\left(\left(\Lambda^m_i\right)^e\left(\Lambda^n_j\right)^e \int_{\Omega^e} c_P\bar{\rho}\varphi^e_m\varphi^e_n d\Omega \cdot \frac{d\theta_m}{dt}\right) + \sum_{e=1}^{E}\left(\left(\Lambda^m_i\right)^e\left(\Lambda^n_j\right)^e\left(\int_{\Omega^e} \nabla_k\varphi^e_m \lambda \nabla_k\varphi^e_n d\Omega + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_{\Omega^e} c_P\bar{\rho}(\nabla_k\varphi^e_m)V^k\varphi^e_n d\Omega\right)\cdot\theta_m\right) + \sum_{e=1}^{E}\left(\left(\left(\Lambda^m_i\right)^e\left(\Lambda^n_j\right)^e\int_{S^e_\alpha}\alpha\varphi^e_m\varphi^e_n dS\right)\cdot\phi_m\right) + \sum_{e=1}^{E}\left(\left(\left(\Lambda^m_i\right)^e\left(\Lambda^n_j\right)^e\int_{S^e_\beta}\beta fe\varphi^e_m\varphi^e_n dS\right)\cdot\psi_m\right) -$$

© К.М. Рудаков, 2025

$$-\sum_{e=1}^{E}\left(\left(\Lambda_j^n\right)^e\left(\int_{\Omega^e}\widehat{\omega}\varphi_n^e d\Omega+\int_{S_q^e}\widehat{q}\varphi_n^e dS+\int_{S_\alpha^e}\alpha\widehat{\theta}_\infty^{\mu}\varphi_n^e dS+\int_{S_\beta^e}\beta fa\widehat{\theta}_a^4\varphi_n^e dS\right)\right)=0\,, \qquad (21.11\text{-б})$$

а замість (21.17-а):

$$G_{ij}\frac{d\theta_i}{dt}+\tilde{K}_{ij}\theta_i+A_{ij}\phi_i+H_{ij}\psi_i=P_j;\quad i,j=1,...,N\,, \qquad (21.17\text{-б})$$

де матриця

$$\tilde{K}_{ij}=L_{ij}+M_{ij}\,. \qquad (21.23)$$

Якщо замість (13.7-а) застосувати нелінійну залежність (13.7-в), тобто $\tilde{q}\big|_{S_\alpha}=-\alpha\cdot\tilde{\tilde{Q}}\Big|_{S_\alpha}$, де $\tilde{\tilde{Q}}=(\theta-\widehat{\theta}_\infty)^{\eta+1}$, то нелінійну складову з вектором $\tilde{\tilde{Q}}$ доцільно повністю винести в праву частину. Тоді замість (21.11-а) маємо

$$F_j(\theta)_h=\sum_{e=1}^{E}\left(\left(\Lambda_i^m\right)^e\left(\Lambda_j^n\right)^e\int_{\Omega^e}c_P\overline{\rho}\varphi_m^e\varphi_n^e d\Omega\cdot\frac{d\theta_m}{dt}\right)+$$

$$+\sum_{e=1}^{E}\left(\left(\Lambda_i^m\right)^e\left(\Lambda_j^n\right)^e\left(\int_{\Omega^e}\nabla_k\varphi_m^e\lambda\nabla_k\varphi_n^e d\Omega+\int_{\Omega^e}c_P\overline{\rho}(\nabla_k\varphi_m^e)V^k\varphi_n^e d\Omega\right)\cdot\theta_m\right)+\sum_{e=1}^{E}\left(\left(\left(\Lambda_i^m\right)^e\left(\Lambda_j^n\right)^e\int_{S_\beta^e}\beta fe\varphi_m^e\varphi_n^e dS\right)\cdot\psi_m\right)-$$

$$-\sum_{e=1}^{E}\left(\left(\Lambda_j^n\right)^e\left(\int_{\Omega^e}\widehat{\omega}\varphi_n^e d\Omega+\int_{S_q^e}\widehat{q}\varphi_n^e dS+\int_{S_\alpha^e}\alpha\tilde{\tilde{Q}}\varphi_n^e dS+\int_{S_\beta^e}\beta fa\widehat{\theta}_a^4\varphi_n^e dS\right)\right)=0\,. \qquad (21.11\text{-в})$$

Формула для глобальної САР знову дещо змінюється:

$$G_{ij}\frac{d\theta_i}{dt}+\tilde{K}_{ij}\theta_i+H_{ij}\psi_i=\tilde{P}_j+N_j\;;\quad i,j=1,...,N\,, \qquad (21.17\text{-в})$$

де компоненти $\tilde{P}_j^e$ та N_j "зібрані" з компонент, отриманих для кожного із СЕ

$$\tilde{P}_n^e=\int_{\Omega^e}\widehat{\omega}\varphi_n^e d\Omega+\int_{S_q^e}\widehat{q}\varphi_n^e dS+\int_{S_\beta^e}\beta fa\widehat{T}_a^4\varphi_n^e dS\,; \qquad (21.16\text{-в})$$

$$N_n^e=\int_{S_\alpha^e}\alpha\tilde{\tilde{Q}}\varphi_n^e dS=\int_{S_\alpha^e}\alpha\cdot(\theta-\widehat{\theta}_\infty)^{\eta+1}\varphi_n^e dS \qquad (21.24)$$

подібно до (21.18):

$$\tilde{P}_j=\sum_{e=1}^{E}\left(\Lambda_j^n\right)^e\tilde{P}_n^e\;;\quad N_j=\sum_{e=1}^{E}\left(\Lambda_j^n\right)^e N_n^e\,. \qquad (21.25)$$

У випадку *стаціонарної* теплопровідності з виразів видаляються всі залежності від часу, тому САР (21.17-а,б,в) спрощуються і приймають вигляд

$$(L_{ij}+M_{ij}+A_{ij})\theta_i+H_{ij}\psi_i=P_j;\quad i,j=1,...,N\,; \qquad (21.26\text{-а})$$

$$(L_{ij}+M_{ij})\theta_i+A_{ij}\phi_i+H_{ij}\psi_i=P_j;\quad i,j=1,...,N\,; \qquad (21.26\text{-б})$$

$$(L_{ij}+M_{ij})\theta_i+H_{ij}\psi_i=\tilde{P}_j+N_j\;;\quad i,j=1,...,N\,. \qquad (21.26\text{-в})$$

Примітка 21.2. Це не єдино можливі варіанти САР для задач теплопровідності. Зокрема, можна всі нелінійні члени САР перенести в її праву частину. Але саме нелінійні САР (21.26) дозволяють найбільш ефективно застосовувати метод Ньютона-Рафсона для їх швидкого розв'язування.

© К.М. Рудаков, 2025

21.2. Алгоритми розв'язування нелінійної САР крайової задачі стаціонарної теплопровідності

21.2.1. Алгоритм методу Ньютона-Рафсона

САР (21.26-а) нелінійна при наявності променевого теплообміну, а САР (21.26-б,в) – завжди. Всі САР будуть нелінійними й тоді, коли властивості матеріалу будуть залежати від температури. Такі САР доцільно розв'язувати згідно з алгоритмом Ньютона-Рафсона (див. п.8.3.1).

Для побудови цього алгоритму спочатку збирається вектор похибки розв'язку САР з компонентами $R_j^{(k)}$. Потім на $(k+1)$-й ітерації вважається (див. формулу (8.38)), що його компоненти

$$R_j^{(k+1)} \approx R_j^{(k)} + \left(\frac{\partial R_j}{\partial \theta_i}\right)^{(k)} \Delta\theta_i = 0; \quad i, j = 1, ..., N. \tag{21.27}$$

Цей вираз визначає САР

$$\bar{K}_{ij}^{(k)} \Delta\theta_i = R_j^{(k)}; \quad i, j = 1, ..., N, \tag{21.28}$$

де $\bar{K}_{ij}^{(k)} = -\left(\partial R_j / \partial \theta_i\right)^{(k)}$. З неї знаходяться компоненти $\Delta\theta_i$, потім обчислюються

$$(\theta_i)^{(k+1)} = (\theta_i)^{(k)} + \Delta\theta_i; \quad i = 1, ..., N, \tag{21.29}$$

після чого номер ітерації k збільшується на одиницю і всі дії повторюються. Для зупинення ітерацій використовують всі або деякі з трьох критеріїв (тут ε – призначена точність):

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{N} (\Delta\theta_i)^2} < \varepsilon \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (\theta_i^{(k+1)})^2}; \quad \sum_{i=1}^{N} |\Delta\theta_i| < \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^{N} |\theta_i^{(k+1)}|; \quad \max\{|\Delta\theta_i| / |\theta_{i+1}|\} < \varepsilon, \tag{21.30}$$

тобто застосовують різні норми, щоб кожна з норм похибок була мінімізована.

Застосуємо цей метод до нашої задачі.

У випадку (21.26-а) компоненти вектора похибки розв'язку САР

$$\left(R_j\right)^{(k)} = \left(P_j - (L_{ij} + M_{ij} + A_{ij})\theta_i - H_{ij}\psi_i\right)^{(k)}; \quad l, j = 1, ..., N. \tag{21.31-а}$$

З (21.31-а) для (21.27):

$$\frac{\partial R_j}{\partial \theta_i} = \frac{\partial P_j}{\partial \theta_i} - \left(\frac{\partial L_{lj}}{\partial \theta_i} + \frac{\partial M_{lj}}{\partial \theta_i} + \frac{\partial A_{lj}}{\partial \theta_i}\right)\theta_l - (L_{lj} + M_{lj} + A_{lj})\frac{\partial \theta_l}{\partial \theta_i} - \frac{\partial H_{lj}}{\partial \theta_i}\psi_l - H_{lj}\frac{\partial \psi_l}{\partial \theta_i}. \tag{21.32-а}$$

Зазвичай у цьому виразі нехтують компонентами $\frac{\partial P_j}{\partial \theta_i}, \frac{\partial L_{lj}}{\partial \theta_i}, \frac{\partial M_{lj}}{\partial \theta_i}, \frac{\partial A_{lj}}{\partial \theta_i}$ та $\frac{\partial H_{lj}}{\partial \theta_i}$, оскільки навіть при наявності залежностей $P_j, L_{lj}, M_{lj}, A_{lj}$ та H_{lj} від температури ці залежності є слабкими. Тому нехтування цими членами розкладу (21.32-а) практично не збільшує загальну кількість ітерацій для отримання призначеної точності ε розв'язку САР. Оскільки $\partial\theta_l / \partial\theta_i = \delta_{li}$ при $l, i = 1, ..., N$, тобто є одиничною матрицею, то $(L_{lj} + M_{lj} + A_{lj})\frac{\partial \theta_l}{\partial \theta_i} = L_{ij} + M_{ij} + A_{ij}$.

© К.М. Рудаков, 2025

Згідно з (21.10)

$$\frac{\partial \psi_l}{\partial \theta_i} = \frac{\partial (\theta_l)^4}{\partial \theta_l} \cdot \frac{\partial \theta_l}{\partial \theta_i} = 4(\theta_l)^3 \delta_{li} = F_{li}; \quad l,i = 1,...,N, \tag{21.33}$$

тобто діагональна матриця F_{li} містить на діагоналі компоненти $4(\theta_l)^3$.

Будь-яка діагональна матриця є симетричною, тому $F_{li} = F_{il} = F_{li}^T = F_{il}^T$. Матриця H_{lj} також є симетричною, тому $H_{lj} = H_{lj}^T$. Отже, оскільки $H_{lj}F_{li} = F_{li}^T H_{lj}^T = F_{li}H_{lj} = F_{il}H_{lj}$, то остаточно матриця САР (21.28)

$$\bar{K}_{ij}^{(k)} = -\left(\frac{\partial R_j}{\partial \theta_i}\right)^{(k)} \approx \left((L_{ij} + M_{ij} + A_{ij}) + F_{il}H_{lj}\right)^{(k)}; \quad l,i,j = 1,...,N. \tag{21.34-а}$$

У випадку розв'язування САР (21.26-б) аналогічно (21.33)

$$\frac{\partial \phi_l}{\partial \theta_i} = \frac{\partial (\theta_l)^\mu}{\partial \theta_m} \cdot \frac{\partial \theta_l}{\partial \theta_i} = (\mu\theta_l)^{\mu-1}\delta_{li} = B_{li}; \quad l,i = 1,...,N, \tag{21.35}$$

і у підсумку можна отримати, що

$$R_j^{(k)} = \left(P_j - L_{lj}\theta_l - A_{lj}(\theta_l)^\mu - H_{lj} \cdot (\theta_l)^{4\mu}\right)^{(k)}; \quad l,j = 1,...,N; \tag{21. 32-б}$$

$$\bar{K}_{ij} = \left(L_{ij} + B_{il}A_{lj} + F_{il}H_{lj}\right)^{(k)}; \quad l,i,j = 1,...,N. \tag{21.34-б}$$

У випадку (21.26-в):

$$R_j^{(k)} = \left(\tilde{P}_j + N_j - (L_{lj} + M_{lj})\theta_l - H_{lj} \cdot (\theta_l)^4\right)^{(k)}; \quad l,j = 1,...,N; \tag{21. 32-в}$$

$$\bar{K}_{ij} = \left((L_{ij} + M_{ij}) + F_{il}H_{lj} - \partial N_j / \partial \theta_i\right)^{(k)}; \quad l,i,j = 1,...,N, \tag{21.34-в}$$

де згідно з (21.24), (21.25) та (21.4)

$$\partial N_j / \partial \theta_i = \sum_{e=1}^{E}\left(\left(\Lambda_j^n\right)^e \partial N_n^e / \partial \theta\right);$$

$$\partial N_n^e / \partial \theta_i = (\Lambda_i^m)^e \int_{S_\alpha^e} \alpha \cdot (\eta+1) \cdot (\theta_m - \hat{\theta}_\infty)^\eta \varphi_m^e \varphi_n^e dS; \quad i,j = 1,...,N; \quad m,n = 1,...,M_e. \tag{21.36}$$

21.2.2. Алгоритм методу простих ітерацій

Алгоритм методу Ньютона-Рафсона має високу швидкість збіжності порівняно з іншими алгоритмами, зокрема з алгоритмом методу простих ітерацій. Але останній теж застосовують, оскільки він легше програмується. Вирази (13.7-а,б,в) запишемо у квазілінійному вигляді

$$\tilde{q}\big|_{S_\alpha} = -(\bar{\alpha} \cdot \hat{\theta} - \alpha\hat{\tilde{\theta}}_\infty)\Big|_{S_\alpha}, \tag{21.37}$$

де для випадків (13.7-а), (13.7-б) та (13.7-в) $\bar{\alpha} = \alpha$, $\hat{\tilde{\theta}}_\infty = \hat{\theta}_\infty$; $\bar{\alpha} = \alpha\theta^{\mu-1}$, $\hat{\tilde{\theta}}_\infty = \hat{\theta}_\infty^\mu$ та $\bar{\alpha} = \alpha \cdot \theta \cdot (\theta - \hat{\theta}_\infty)^\eta$, $\hat{\tilde{\theta}}_\infty = \hat{\theta}_\infty \cdot (\theta - \hat{\theta}_\infty)^\eta$ відповідно. Тоді після проведення процедури скінченно-елементного наближення з'являться нові матриця та вектор з компонентами

© К.М. Рудаков, 2025

$$\overline{A}^e_{mn} = \int\limits_{S^e_\alpha} \overline{\alpha}\varphi^e_m\varphi^e_n dS\,; \quad Z^e_n = \int\limits_{S^e_\alpha} \alpha\widehat{\overline{\theta}}_\infty\varphi^e_n dS\,. \tag{21.38}$$

Вираз (21.6) для променевої складової теплового потоку теж запишемо у квазілінійному вигляді:

$$\breve{q}\big|_{S_\beta} = -\beta f[e\gamma\theta - a\widehat{\theta}^4_a]\Big|_{S_\beta}\,. \tag{21.39}$$

де позначено $\gamma = \theta^3$. Після проведення процедури скінченно-елементного наближення з'явиться нова матриця з компонентами

$$E^e_{mn} = \int\limits_{S^e_\beta} \beta f e\gamma\varphi^e_m\varphi^e_n dS\,. \tag{21.40}$$

Формула для глобальної САР отримує вигляд:

$$G_{lj}\frac{d\theta_l}{dt} + \tilde{\tilde{K}}_{lj}\theta_l = \tilde{\tilde{P}}_j\,;\;\; l,j = 1,...,N\,, \tag{21.41}$$

де компоненти

$$\tilde{\tilde{K}}_{lj} = L_{lj} + M_{lj} + \overline{A}_{lj} + E_{lj}\,; \quad \tilde{\tilde{P}}_j = \tilde{P}_j + Z_j\,;\;\; l,j = 1,...,N\,; \tag{21.42}$$

матриці G_{lj}, L_{lj}, M_{lj} та A_{lj} "зібрані" з матриць (21.12) ... (21.14), а компоненти вектора $\tilde{P}_j$ – з компонент вектора (21.16-в) подібно до (21.18).

У випадку *стаціонарної* теплопровідності з виразів видаляються всі залежності від часу, тому САР (21.41) спрощується і прийме вигляд

$$\tilde{\tilde{K}}_{lj}\theta_l = \tilde{\tilde{P}}_j\,;\;\; l,j = 1,...,N\,. \tag{21.43}$$

Згідно з алгоритмом простих ітерацій на $(k+1)$-й ітерації

$$(\tilde{\tilde{K}}_{lj})^{(k)}\theta_l^{(k+1)} = (\tilde{\tilde{P}}_j)^{(k)}\,;\;\; l,j = 1,...,N\,; \quad k = 0,1,...\,. \tag{21.44}$$

Для зупинення ітерацій використовують критерії (21.30).

21.3. Алгебраїзація нестаціонарної задачі теплопровідності за часовим аргументом

Залишилося розглянути випадок нестаціонарної теплопровідності.

На відміну від позначень Розділу 16 під τ нижче будемо розуміти позначення *немасштабованого* часу на початок часового етапу, а під $\tau + \Delta\tau$ – на його кінець.

Розглянемо алгебраїзацію за часовим аргументом на прикладі САР

$$G_{lj}\frac{d\theta_l}{dt} + K_{lj}\theta_l = P_j\,;\;\; l,j = 1,...,N\,. \tag{21.45}$$

Для часового наближення використаємо двошарову схему. Помножимо (21.45) на $G_{lj}^{-1}dt$ та проінтегруємо на часовому відрізку від τ до $\tau + \Delta\tau$:

$$\int\limits_{\theta_l^\tau}^{\theta_l^{\tau+\Delta\tau}} d\theta_l = \int\limits_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} G_{lj}^{-1}\left(-K_{lj}\theta_l + P_j\right)dt\,; \quad l,j = 1,...,N\,. \tag{21.46}$$

© К.М. Рудаков, 2025

Лівий інтеграл інтегрується точно і дає вираз $\theta_l^{\tau+\Delta\tau}-\theta_l^{\tau}$. Правий інтеграл містить невідомі вузлові температури. Розкладемо підінтегральний вираз у правій частині (21.46) в ряд в околі τ, і так само в околі $\tau+\Delta\tau$, обмежившись першими членами ряду. Отримаємо після інтегрування і додавання результатів, помножених на $(1-\omega)$ і ω відповідно, *двошарову* вагову схему:

$$\theta_l^{\tau+\Delta\tau}-\theta_l^{\tau}=\Delta\tau\left\{(1-\omega)(G_{lj}^{\tau})^{-1}\left(P_j^{\tau}-K_{lj}^{\tau}\theta_l^{\tau}\right)+\omega(G_{lj}^{\tau+\Delta\tau})^{-1}\left(P_j^{\tau+\Delta\tau}-K_{lj}^{\tau+\Delta\tau}\theta_l^{\tau+\Delta\tau}\right)\right\}, \quad (21.47)$$

де $0\le\omega\le1$; $l,j=1,...,N$. Зазвичай припускають незмінність на часовому відрізку $\Delta\tau$ матриць G_{lj} і K_{lj}. Тоді після зведення подібних для заданого ω отримаємо САР

$$\left(G_{lj}+\omega\Delta\tau K_{lj}\right)\theta_l^{\tau+\Delta\tau}=$$
$$=\left(G_{lj}-(1-\omega)\Delta\tau K_{lj}\right)\theta_l^{\tau}+\Delta\tau\left(\omega P_j^{\tau+\Delta\tau}+(1-\omega)P_j^{\tau}\right);\quad l,j=1,...,N, \quad (21.48)$$

в яку необхідно ввести граничні умови 1-го роду (21.20) на поверхні S_θ.

Примітка 21.3. САР (21.48) можна отримати інакше. Приймемо лінійну зміну температури і теплового навантаження в межах малого часового відрізка – кроку $\Delta\tau$:

$$\theta_l=(1-\omega)\theta_l^{\tau}+\omega\theta_l^{\tau+\Delta\tau}; \quad (21.49)$$
$$P_j=(1-\omega)P_j^{\tau}+\omega P_j^{\tau+\Delta\tau}, \quad (21.50)$$

де

$$\omega=(t-\tau)/\Delta\tau;\qquad \tau\le t\le\tau+\Delta\tau;\qquad 0\le\omega\le1; \quad (21.51)$$

t – час, до якого віднесено θ_l і P_j (задавши ω, підрахуємо, що $t=\tau+\omega\Delta\tau$).

Проведемо диференціювання θ_l, задане формулою (21.49), за часом. З урахуванням (21.51) отримаємо для (21.45):

$$\frac{d\theta_l}{dt}=\frac{\theta_l^{\tau+\Delta\tau}-\theta_l^{\tau}}{\Delta\tau};\quad l=1,...,N. \quad (21.52)$$

Підставивши вирази (21.49), (21.50) і (21.52) в систему (21.45), після згрупування і звільнення від знаменника отримаємо для заданого ω ту ж САР (21.48), однак у цьому випадку не є явним прийняте обмеження для матриць G_{lj} і K_{lj}, а саме їхня незмінність у межах часового кроку $\Delta\tau$.

Згадаємо (див. п. 16.4.1), що САР типу (21.48) має другий порядок точності часового наближення рівнянь нестаціонарної теплопровідності лише при $\omega=0.5$ – схема Кранка-Ніколсона. При всіх $\omega\ge0.5$ схема (21.48) абсолютно стійка. При $0\le\omega<0.5$ стійкість схеми умовна, досягається зменшенням часового кроку $\Delta\tau$. Величина часового кроку залежить також від розмірів скінченно-елементної сітки, в результаті чого $\Delta\tau$ має обмеження як згори, так і знизу (умови погодженості). Також є обмеження на $\Delta\tau$ згори в результаті ефекту осциляції розв'язків у часі при ω, віддаленому від одиниці. Тому вибір конкретного значення ω є результатом компромісу між умовами погодженості,

© К.М. Рудаков, 2025

стійкості, відсутності осциляцій, точності і витратами машинного часу. Часто при розв'язуванні крайових задач з великою тривалістю в часі рекомендується застосовувати схему Гальоркіна ($\omega = 2/3$), при якій осциляції майже не спостерігаються, а точність ще достатня для багатьох задач.

Щоб зняти обмеження за часовим кроком *знизу*, в МСЕ рекомендується *діагоналізувати* матрицю теплоємності G_{lj} і в (21.48) застосовувати замість G_{lj} *діагональну* матрицю $\underset{\sim}{G}_{lj}$ з компонентами:

$$\underset{\sim}{G}_{lj} = \begin{cases} 0; \ l \neq j; \\ \sum\limits_{e=1}^{E} \left(\Lambda_l^m\right)^e \left(\Lambda_j^n\right)^e \underset{\sim}{G}{}^e_{mn}; \ l = j, \end{cases} \tag{21.53}$$

де діагональні члени (за індексами, що повторюються, не додавати)

$$\underset{\sim}{G}{}^e_{mm} = G^e_{mm} \cdot \alpha; \qquad \alpha = \left(\sum_{r=1}^{M_e} \sum_{s=1}^{M_e} G^e_{rs} \right) \Bigg/ \sum_{r=1}^{M_e} G^e_{rr}, \tag{21.54}$$

а M_e – кількість вузлів у скінченному елементі. Смисл множника α такий: у скільки разів повна теплоємність матриці перевищує теплоємність її діагональних членів. Саме у стільки разів збільшуються значення діагональних членів, щоб загальна теплоємність СЕ не змінилася. Для СЕ першого порядку наближення формула (21.54) може бути значно спрощеною: $\underset{\sim}{G}{}^e_{mm} = \sum\limits_{r=1}^{M_e} G^e_{mr}$.

21.4. Двошарова "економічна" факторизована схема розв'язування нестаціонарної задачі теплопровідності МСЕ

Після діагоналізації матриці теплоємності з'являється можливість розв'язувати САР (21.48) "економічним" методом, наприклад методом розщеплення, розглянутим у Розділах 16 і 18. Значне прискорення розв'язку САР (21.48) буде результатом того, що в методах розщеплення розв'язуються, нехай неодноразово (парну кількість разів), САР з трикутними, а не квадратними матрицями, що приблизно еквівалентно за часом стільком же зворотним ходам у методі Гаусса.

Нагадаємо, що факторизація – це розкладення на множники.

Схему розщеплення при залежності матриці САР від часу розглянуто в п.18.2.4: формули (18.60) і (18.61). Тут припустимо для спрощення, що матриця САР не залежить від часу. Тоді можна застосувати один з методів розщеплення, який називають методом *стабілізації*, також вже розглянутим у п.16.4.3.2 та п.18.2.3. Його суть полягає в тому, що САР (21.48) замінюється на дві інші, які з заданою через часовий крок точністю (див. п.18.2.3) наближають вихідну САР, причому кількість арифметичних дій для отримання результатів різко скорочується, оскільки матриці нових САР мають трикутний вигляд.

Спочатку формулу (21.48) перепишемо у вигляді

© К.М. Рудаков, 2025

$$\left(I_{lj}+\omega\Delta\tau R_{lj}\right)\theta_l^{\tau+\Delta\tau}=\left(I_{lj}-(1-\omega)\Delta\tau R_{lj}\right)\theta_l^{\tau}+\Delta\tau\underset{\sim}{Q}_j;\quad l,j=1,...,N,\qquad(21.55)$$

де позначено $R_{lj}=\underset{\sim}{G}_{il}^{-1}K_{ij}$ та $\underset{\sim}{Q}_j=\left(\omega\underset{\sim}{G}_{ij}^{-1}P_i^{\tau+\Delta\tau}+(1-\omega)\underset{\sim}{G}_{ij}^{-1}P_i^{\tau}\right)$, а I_{lj} – компоненти одиничної матриці.

Компоненти трикутних матриць, що введемо, зручно обрати як

$$R_{lj}^{+}=\begin{cases}R_{lj}, & l<j;\\ 0.5R_{lj}, & l=j;\\ 0, & l>j;\end{cases}\quad R_{lj}^{-}=(R_{lj}^{+})^{T},\qquad(21.56)$$

чим задовольняються необхідні умови методу: $R_{lj}^{+}+R_{lj}^{-}=R_{lj}$ і позитивна визначеність цих матриць.

Компоненти вектора $\theta_l^{\tau+\Delta\tau}$ запишемо у вигляді

$$\theta_l^{\tau+\Delta t}=\theta_l^{\tau}+\Delta\theta_l\qquad(21.57)$$

і підставимо (21.56) та (21.57) у (21.55). Після скорочення рівних членів при θ_l^{τ} отримаємо замість (21._55) САР

$$\left(I_{lj}+\omega\Delta\tau R_{lj}\right)\Delta\theta_l=-\Delta\tau\left(R_{lj}\theta_l^{\tau}-\underset{\sim}{Q}_j\right).\qquad(21.58)$$

Примітка 21.4. Можна показати, що зі САР (21.17-а,б,в) буде отримано той же самий вираз (21.58).

Замінимо САР (21.58) (з заданою відносною похибкою, яка впливає на часовий крок (див. п.18.2.3)) на еквівалентну систему з двох САР

$$\left(I_{lj}+\omega\Delta\tau R_{lj}^{+}\right)\eta_l=-\Delta\tau\left(R_{lj}\theta_l^{\tau}-\underset{\sim}{Q}_j\right);\qquad(21.59)$$

$$\left(I_{lj}+\omega\Delta\tau R_{lj}^{-}\right)\Delta\theta_l=\eta_l,\qquad(21.60)$$

де η_l – компоненти проміжного вектора. Позначимо $\gamma=\omega\Delta\tau,\ \beta=1-\omega$. Виділимо як самостійні компоненти векторів

$$H_j^{\tau}=(1-I_{1j})\sum_{r=1}^{j-1}R_{rj}\theta_r^{\tau};\quad S_j=1/(1+\gamma R_{jj}^{+});\qquad Y_j=\omega\eta_j+\theta_j^{\tau};\qquad(21.61)$$

$$Z_j=(1-I_{Nj})\sum_{l=j+1}^{N}R_{jl}Y_l;\qquad\Delta H_j=(1-I_{1j})\sum_{r=1}^{j-1}R_{rj}\Delta\theta_r.\qquad(21.62)$$

В індексній формі запису система з двох виразів (21.59) і (21.60) має розв'язок (за індексами, що повторюються, не додавати)

$$\eta_j=\Delta\tau S_j\left\{-R_{jj}\theta_j^{\tau}+\underset{\sim}{Q}_j-H_j^{\tau}-Z_j\right\};\quad j=N,...,1;\qquad(21.63)$$

$$\Delta\theta_j=S_j\left\{\eta_j-\gamma\cdot\Delta H_j\right\};\quad j=1,...,N.\qquad(21.64)$$

Описану схему розщеплення досліджено на лічильну стійкість і збіжність (див., наприклад, стор. 396 книги [38]).

Граничні умови 1-го роду (21.8) запишемо у вигляді

$$\theta_j^{\tau+\Delta\tau}=\widehat{\theta}_j(\tau+\Delta\tau).\qquad(21.65)$$

Їхнє врахування здійснюється таким чином. Недіагональні члени стовпців і рядків матриці $[R]$, відповідні вузлам j скінченно-елементної сітки з заданими ГУ 1-го роду (температурами), прирівнюються до нуля. Для цих вузлів обчис-

© К.М. Рудаков, 2025

лення виразів (21.61) ... (21.64) не проводиться. Значення η_j можна покласти будь-яким, наприклад нульовим, бо для інших вузлів при обчисленні сум (21.62) воно нейтралізується нульовим значенням R_{lj}. При підрахуванні $\Delta\theta_j$ у цих вузлах з ГУ 1-го роду замість виконання (21.64) слід призначити

$$\Delta\theta_j = \widehat{\theta}_j(\tau+\Delta\tau) - \theta_j(\tau). \qquad (21.66)$$

Система з двох виразів (21.59) і (21.60) еквівалентна вихідній (21.58), тому і системі (21.48).

Нагадаємо, що конкретна величина $\omega \in (0,1]$ призначається, а у п.18.2.3 розглянуто питання обирання часового кроку, який забезпечить достатню точність наближення факторизованого оператора.

Обчислювальні експерименти показують велику швидкість роботи алгоритму і достатню його точність.

21.5. Двошарова схема Ісполова-Шаброва розв'язування нестаціонарної задачі теплопровідності МСЕ

Двошарова схема Ісполова-Шаброва була вже розглянута у п.18.2.2. Вона має виняткові показники точності й стійкості. Тут наведемо її із застосуванням МСЕ. Позначимо (врахуємо, що компоненти $G_{\sim jl}^{-1} = G_{\sim ll}^{-1} = 1/G_{\sim ll}$):

$$R_{lj} = -G_{li}^{-1}K_{ij}; \quad Q_j = G_{jl}^{-1}P_l \quad \text{або} \quad R_{lj} = -K_{lj}/G_{\sim ll}; \quad Q_j = P_j/G_{\sim jj}; \quad l,j = 1,...,N. \qquad (21.67)$$

Тоді вираз (21.45) запишемо у вигляді

$$\dot{\theta}_j = \frac{d\theta_j}{dt} = R_{lj}\theta_l + Q_j; \;\; l,j = 1,...,N. \qquad (21.68)$$

Помножимо (21.68) на dt і проведемо інтегрування:

$$\int\limits_{\theta_j^{\tau}}^{\theta_j^{\tau+\Delta\tau}} d\theta_j = \int\limits_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \left(R_{lj}\theta_l + Q_j\right)dt; \quad l,j = 1,...,N. \qquad (21.69)$$

Лівий інтеграл інтегрується точно й дає вираз $\theta_j^{\tau+\Delta\tau} - \theta_j^{\tau}$. Правий інтеграл містить невідомі вузлові температури. Розклавши підінтегральний вираз в правій частині (21.69) у ряд в околі τ, отримаємо, що

$$R_{lj}\theta_l + Q_j \approx (R_{lj}\theta_l + Q_j)^{\tau} + (\dot{R}_{lj}\theta_l + R_{lj}\dot{\theta}_l + \dot{Q}_j)^{\tau}\Delta\tau + O(\Delta\tau^2). \qquad (21.70)$$

Підставимо (21.68) в (21.70) замість $\dot{\theta}_l = R_{il}\theta_i + Q_l$:

$$R_{lj}\theta_l + Q_j \approx (R_{lj}\theta_l + Q_j)^{\tau} + [\dot{R}_{lj}\theta_l + R_{lj}(R_{il}\theta_i + Q_l) + \dot{Q}_j]^{\tau}\Delta\tau + O(\Delta\tau^2). \qquad (21.71)$$

Залишилося підставити (21.71) в (21.69) і провести інтегрування:

$$\theta_j^{\tau+\Delta\tau} - \theta_j^{\tau} = \int\limits_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \left(R_{lj}\theta_l + Q_j\right)dt \approx$$

$$\approx \Delta\tau\left[\left(R_{lj}\theta_l + Q_j\right)^{\tau} + \left(\dot{R}_{lj}\theta_l + R_{lj}R_{il}\theta_i + R_{lj}Q_l + \dot{Q}_j\right)^{\tau}\Delta\tau\right] + O\left(\Delta\tau^3\right). \qquad (21.72)$$

Припустимо, що (21.69) після інтегрування можна представити як систему:

© К.М. Рудаков, 2025

$$\begin{cases}\left(I_{lj}-\alpha\Delta\tau R_{lj}^{\tau+\omega\Delta\tau}\right)\eta_l=\Delta\tau(R_{lj}^{\tau+\omega\Delta\tau}\theta_l^{\tau}+Q_j^{\tau+\omega\Delta\tau});\\ \left(I_{lj}-\alpha\Delta\tau R_{lj}^{\tau+\omega\Delta\tau}\right)\chi_l=\Delta\tau\left[R_{lj}^{\tau+\omega\Delta\tau}(\theta_l^{\tau}+\beta\eta_l)+Q_j^{\tau+\omega\Delta\tau}\right];\\ \theta_l^{\tau+\Delta\tau}=\theta_l^{\tau}+\chi_l,\end{cases} \tag{21.73}$$

де матриця I_{lj} є одиничною матрицею; α,β й ω необхідно призначити на основі міркувань про точність і стійкість процесу розв'язування, а компоненти

$$R_{lj}^{\tau+\omega\Delta\tau}=R_{lj}(\tau+\omega\Delta\tau)\approx R_{lj}^{\tau}+\dot{R}_{lj}^{\tau}\omega\Delta\tau+O(\Delta\tau^2); \tag{21.74}$$

$$Q_j^{\tau+\omega\Delta\tau}=Q_j(\tau+\omega\Delta\tau)\approx Q_j^{\tau}+\dot{Q}_j^{\tau}\omega\Delta\tau+O(\Delta\tau^2), \tag{21.75}$$

тобто відповідають деякому проміжному часу.

Підставивши перший і третій вираз із (21.73) у другий, з огляду на (21.74), (21.75) і (21.72), обмежуючись членами $O(\Delta\tau^2)$, одержимо, що

$$\theta_j^{\tau+\Delta\tau}\approx\theta_j^{\tau}+\Delta\tau\left(R_{lj}\theta_l+Q_j\right)^{\tau}+$$

$$+[2\omega\dot{R}_{lj}^{\tau}\theta_l^{\tau}+2(\alpha+\beta)R_{lj}^{\tau}R_{il}^{\tau}\theta_i^{\tau}+2(\alpha+\beta)R_{lj}^{\tau}Q_l^{\tau}+2\omega\dot{Q}_j^{\tau}]\Delta\tau^2+O(\Delta\tau^3). \tag{21.76}$$

Просте порівняння (21.76) з (21.72) приводить до висновку, що в (21.76) необхідно прийняти:

$$\alpha+\beta=0.5;\quad \omega=0.5. \tag{21.77}$$

Але цього недостатньо для визначення α та β. Додаткове рівняння у п.18.2.2 отримали з умови *асимптотичної стійкості* схеми (див. формули (18.34) ... (18.37)), а саме у вигляді

$$\alpha^2-\alpha+\beta=0. \tag{21.78}$$

Система із двох рівнянь має два варіанти розв'язку, один з яких:

$$\alpha_2=0.5(2+\sqrt{2});\quad \beta_2=-0.5(\sqrt{2}+1) \tag{21.79}$$

забезпечує відсутність осциляцій розв'язку для всіх власних форм САР.

Підставивши ці значення α,β та ω у систему (21.73), одержимо:

$$\begin{cases}\left(I_{lj}-0.5(2+\sqrt{2})\Delta\tau R_{lj}^{\tau+\Delta\tau/2}\right)\eta_l=\Delta\tau(R_{lj}^{\tau+\Delta\tau/2}\theta_l^{\tau}+Q_j^{\tau+\Delta\tau/2});\\ \left(I_{lj}-0.5(2+\sqrt{2})\Delta\tau R_{lj}^{\tau+\Delta\tau/2}\right)\chi_l=\Delta\tau\left[R_{lj}^{\tau+\Delta\tau/2}(\theta_l^{\tau}-0.5(\sqrt{2}+1)\eta_l)+Q_j^{\tau+\Delta\tau/2}\right];\\ \theta_l^{\tau+\Delta\tau}=\theta_l^{\tau}+\chi_l.\end{cases} \tag{21.80}$$

Це – схема, яку опублікували Ю.Г. Ісполов і М.М. Шабров у 1989 році. Вона не має ніяких обмежень щодо часового кроку, абсолютно стійка й позбавлена осциляцій розв'язку, має другий порядок апроксимації по часовому аргументу. Крім того, автори в числовому експерименті показали її високу стійкість при різких змінах теплового навантаження. Якщо матриця R_{lj} і часовий крок $\Delta\tau$ є незмінними, то із застосуванням методу квадратних коренів або розкладу Холецького (для розв'язування СЛАР) схема (21.80) є цілком ефективною. Якщо матриця R_{lj} залежить від часу (зазвичай – через температуру), то в ітераціях для обчислення поточної матриці $R_{lj}^{\tau+\Delta\tau/2}$ додатково обчис-

© К.М. Рудаков, 2025

люються (приблизно) компоненти вектора температур $\theta_j^{\tau+\Delta\tau/2} \approx \left(\theta_j^{\tau} + \theta_j^{\tau+\Delta\tau}\right)/2$, де $\theta_j^{\tau+\Delta\tau}$ береться з поточної ітерації.

Систему (21.80) можна записати у факторизованому вигляді, якщо компоненти матриці $[R]$ не залежать від часу:

$$\begin{cases} \left(I_{lj} - \alpha_2 \Delta\tau R_{lj}^{+}\right)\xi_l = \Delta t(R_{lj}\theta_l^{\tau} + Q_j^{\tau+\Delta\tau/2}); \\ \left(I_{lj} - \alpha_2 \Delta\tau R_{lj}^{-}\right)\eta_l = \xi_j; \\ \left(I_{lj} - \alpha_2 \Delta\tau R_{lj}^{-}\right)\mu_l = \Delta t\left(R_{lj}(\theta_l^{\tau} + \beta_2\eta_l) + Q_j^{\tau+\Delta\tau/2}\right); \\ \left(I_{lj} - \alpha_2 \Delta\tau R_{lj}^{+}\right)\chi_l = \mu_j; \\ \theta_l^{\tau+\Delta\tau} = \theta_l^{\tau} + \chi_l. \end{cases} \tag{21.81}$$

Тут сума компонентів матриць $R_{lj}^{+} + R_{lj}^{-} = R_{lj}$.

Можна показати, що ця заміна вихідного рівняння (21.80) проведена з точністю $O(\Delta\tau^2)$. Одночасно вона зберігає свої виняткові властивості стійкості схеми при повній відсутності осциляцій для будь-якого часового кроку, тому саме її можна рекомендувати для використання.

Контрольні питання до підрозділу 21.1

1. Яку властивість скінченних елементів застосували для переходу від виразу (21.1) до виразу (21.2)?

2. Як зветься масив (оператор) $\left(\Xi_j^n\right)^e$, й які властивості він має?

3. Яка сутність рекомендації І.Г. Бубнова з вибору вагових функцій? Що є слідством вибору вагових функцій за рекомендацією І.Г. Бубнова?

4. Які властивості операторів застосували для переходу від виразу (21.2) до виразу (21.11)?

5. Запишіть інтегральні вирази для матриці теплоємності, матриці теплопровідності, матриці конвекційного теплообміну, матриці променевого теплообміну.

Контрольні питання до підрозділу 21.2

1. У чому полягає ідея методу Ньютона-Рафсона розв'язування нелінійних систем алгебраїчних рівнянь?

2. Яку швидкість збіжності мають алгоритми методів Ньютона-Рафсона та простих ітерацій?

Контрольні питання до підрозділу 21.3

1. В якому часовому діапазоні створюються двошарові схеми інтегрування за часом?

2. В чому полягає ідея прямого інтегрування у часі?

3. Для чого замість проміжного часу $\xi \in [\tau_n, \tau_{n+1}]$ вводиться ваговий коефіцієнт $\omega \in [0,1]$? Як він вводиться?

4. Яка вагова двошарова схема має порядок наближення $O(\Delta\tau^2 + h^2)$?

5. З якою метою та за яким обов'язковим принципом діагоналізують матрицю теплоємності з компонентами G_{lj}?

6. Запишіть вирази для чотирьох класичних вагових схем, з використанням діагоналізованої матриці теплоємності з компонентами G_{lj}.

© К.М. Рудаков, 2025

Контрольні питання до підрозділу 21.4

1. Що означає поняття "економічні схеми" та "факторизовані" оператори?
2. Які схеми називають схемами розщеплення?
3. Отримайте схему методу стабілізації. В якому випадку її не можна застосовувати? Який порядок точності за часовим кроком має ця схема?

Контрольні питання до підрозділу 21.5

1. Які виняткові властивості має двошарова схема Ісполова-Шаброва?

© К.М. Рудаков, 2025

Розділ 22

АЛГОРИТМИ РОЗРАХУНКІВ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ В ТОЧЦІ ТІЛА

Постановку крайових задач про НДС тіл проведено у Розділі 13. Розглянемо методи їх розв'язування в межах методу скінченних елементів.

Загальний алгоритм розв'язування крайової задачі про напружено-деформований стан тіла містить наступні етапи:

а) розробка розрахункової схеми;

б) представлення тіла сукупністю скінченних елементів;

в) призначення термомеханічних властивостей матеріалів, початкових і граничних умов задачі, інших початкових даних;

г) призначення значень часового кроку, поточного часу;

д) призначення поточних ГУ;

е) за необхідності – розв'язування крайової задачі теплопровідності для визначення поточного температурного стану тіла;

ж) складання (на основі МСЕ) системи алгебраїчних рівнянь (САР). Для лінійної термопружної задачі це буде система лінійних алгебраїчних рівнянь – СЛАР. Для нелінійної задачі алгоритм складання САР залежить від застосованого ітераційного методу розв'язування нелінійних задач;

з) для нелінійної задачі – складання СЛАР на поточній ітерації;

і) введення в СЛАР кінематичних ГУ (створення *ефективної* СЛАР);

к) розв'язування СЛАР;

л) проведення обчислень напружень на основі отриманих у результаті розв'язування СЛАР вузлових значень переміщень;

м) у випадку нелінійної задачі – оцінка збіжності розв'язку і, якщо результат ще не досягнуто, початок нової ітерації (перехід на пункт ж));

н) оформлення результату на поточний момент часу у вигляді, зручному для подальшого використання і аналізу (відображення на екрані монітора, фіксація на носіях тривалого збереження);

о) проведення (за необхідності) чергового етапу навантаження (перехід на пункт г)).

Спочатку розглянемо проблеми, що виникають при обчисленні НДС в точці (елементарному об'ємі) тіла, тобто алгоритми, що відповідають пункту л).

22.1. Матричний запис тензорних і векторних об'єктів у МСЕ

При викладенні алгоритмів МСЕ для задачі про НДС тіла дуже зручно користуватися матричним записом тензорних та векторних об'єктів. Фігурними дужками оформлюються матриці-стовпці (їх називають векторами), а всі інші – прямокутними дужками (їх називають матрицями). Скалярні величини

© К.М. Рудаков, 2025

позначаються у звичайний спосіб. Дії з матрицями теж звичайні: алгебраїчне додавання, перемноження, знаходження норм, транспонування, обернення тощо.

Приймемо, що формулювання крайової задачі проведено в переміщеннях $u_j = u_j(\vec{x},t)$. Будемо використовувати декартову систему координат.

З компонент вектора переміщень $u_j = u_j(\vec{x},t)$; $j = 1,2,3$ при $\vec{x} \in \Omega^e$ вводяться вектори (матриці-стовпці) переміщень

$$\{u\} = \{u_1, u_2, u_3\}^T . \tag{22.1}$$

Нагадаємо, що згідно з Розділом 20 наближення будь-якої функції f у скінченному елементі проводиться за апроксимаційною формулою

$$f = \sum_{m=1}^{M_e} \varphi_m^e \, f_m , \tag{22.2}$$

де φ_m^e – базисні функції вузлів у СЕ; f_m – відомі вузлові значення функції f; M_e – кількість вузлів у СЕ. Тому формула для обчислення вектору $\{u\}$ в будь-якій точці СЕ через відомий вектор переміщень вузлів СЕ $\{q\}_e$ має вигляд

$$\{u\} = [\phi]\{q\}_e , \tag{22.3}$$

де вектор

$$\{q\}_e = \{(q_1)_1, (q_2)_1, (q_3)_1, ..., (q_1)_{M_e}, (q_2)_{M_e}, (q_3)_{M_e}\}^T = \{q_1, q_2, ..., q_{3M_e}\}^T , \tag{22.4}$$

в якому q_k, $k = 1,2,...,3M_e$ – ті самі вузлові переміщення, але з *наскрізною* у СЕ нумерацією. Цей вектор є результатом вибирання необхідних значень з глобального вектору переміщень у вузлах усього тіла $\{q\}$. Матриця $[\phi]$ зветься *матрицею базисних функцій*.

Лінійні співвідношення (13.16) між переміщеннями та нескінченно малими деформаціями, тобто $\varepsilon_{ij} = (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i)/2$, записуються у вигляді

$$\{\varepsilon\} = [B]\{q\}_e . \tag{22.5}$$

Тут вектор повних деформацій $\{\varepsilon\}$ традиційно має таке заповнення:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}\}^T , \tag{22.6-а}$$

тобто має компоненти $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ при $i \neq j$, а матриця $[B]$ є *матрицею диференціювання* компонент переміщень по глобальним координатам.

Конкретизація матриць $[\phi]$ та $[B]$ пов'язана лише з типом СЕ і системою глобальних координат, тут несуттєва, буде проведена в Розділі 24.

Ще буде застосовуватися вектор деформацій з дещо іншим наповненням

$$\{\breve{\varepsilon}\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}\}^T . \tag{22.6-б}$$

Лінійний закон Гука для обчислення вектора напружень

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}\}^T \tag{22.7}$$

записується у вигляді

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon^e\} \quad \text{або} \quad \{\sigma\} = [\breve{D}]\{\breve{\varepsilon}^e\}, \tag{22.8}$$

де $\{\varepsilon^e\}$ і $\{\breve{\varepsilon}^e\}$ – вектори пружних деформацій, заповнені аналогічно (22.6).

© К.М. Рудаков, 2025

У відповідності до структури заповнення векторів $\{\sigma\}$ та $\{\varepsilon^e\}$ матриця модулів пружності $[D]$ у випадку ізотропного матеріалу буде мати вигляд

$$[D]=[D(\theta)]=2G(\theta)\cdot\begin{pmatrix} a & b & b & 0 & 0 & 0\\ b & a & b & 0 & 0 & 0\\ b & b & a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \qquad (22.9)$$

де $2G(\theta)=E/(1+\mu)$; $a=(1-\mu)/(1-2\mu)$; $b=\mu/(1-2\mu)$; $c=0.5$; $E=E(\theta)$ – модуль Юнга; $\mu=\mu(\theta)$ – коефіцієнт Пуассона. Враховано, що модулі пружності багатьох матеріалів мають доволі значну залежність від температури. Матриця $[\breve{D}]$ відрізняється від матриці $[D]$ лише тім, що в ній $c=1$.

Вектор температурних деформацій, згідно з формулою (13.20-в), буде таким:

$$\{\varepsilon^\theta\}=\{1,1,1,0,0,0\}^T\left(\alpha_\theta(\theta)\cdot(\theta-\theta_{RM})-\alpha_\theta(\theta_0)\cdot(\theta_0-\theta_{RM})\right), \qquad (22.10\text{-а})$$

де $\alpha_\theta(\theta)=\alpha_\theta(\theta_{RM})\cdot F(\theta)$ – значення коефіцієнта температурного лінійного подовження при температурі θ; $\theta=\theta(\vec{x},t)$ – поточна, а $\theta_0=\theta(\vec{x},0)$ – початкова температури, причому при θ_0 температурні деформації відсутні; θ_{RM} – базова температура випробування матеріалу; $F(\theta)$ – функція, що описує температурну залежність коефіцієнта α_θ згідно з ідеологією рис.13.1 та формул (13.21). Для скорочення запису залучимо формулу (13.20-в), тоді замість (22.10-а) отримаємо, що

$$\{\varepsilon^\theta\}=\{\overline{\alpha}_\theta,\overline{\alpha}_\theta,\overline{\alpha}_\theta,0,0,0\}^T\cdot(\theta-\theta_0)=\{\overline{\alpha}_\theta\}\Delta\theta, \qquad (22.10\text{-б})$$

але при обчисленнях потрібно користуватися формулою (22.10-а).

Примітка 22.1. Якщо СЕ "створено" із декількох матеріалів (багатошаровий СЕ), то модулі пружності та інші характеристики матеріалу будуть залежати від матеріалу (номера шару). Крім цього, характеристики матеріалу мають деякі залежності від величин необоротної деформації та рівня пошкодження матеріалу, але ці залежності погано вивчені, тому ними зазвичай нехтують.

22.2. Основні формули обчислення напружень у точці тіла

22.2.1. Крайова задача термопружнопластичності та повзучості

З принципу суперпозиції *малих* деформацій різної природи

$$\{\varepsilon\}=\{\varepsilon^e\}+\{\varepsilon^\theta\}+\{\varepsilon^p\}+\{\varepsilon^c\}+\{\varepsilon\}_0, \qquad (22.11)$$

де вектори $\{\varepsilon^p\}$, $\{\varepsilon^c\}$ та $\{\varepsilon\}_0$ деформацій пластичності, повзучості та початкових, заповнені аналогічно (22.6). З використанням (22.10-б)

© К.М. Рудаков, 2025

$$\{\varepsilon^e\} = \{\varepsilon\} - \{\overline{\alpha}_\theta\}\Delta\theta - \{\varepsilon^p\} - \{\varepsilon^c\} - \{\varepsilon\}_0 . \qquad (22.12)$$

За законом Гука (22.8), з урахуванням (22.5), тобто $\{\varepsilon\} = [B]\{q\}_e$, маємо, що

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon^e\} = [D]\big([B]\{q\}_e - \{\overline{\alpha}_T\}\Delta\theta - \{\varepsilon\}_0\big) - [D](\{\varepsilon^p\} + \{\varepsilon^c\}) . \qquad (22.13)$$

Примітка 22.2. Іноді замість значень початкових деформацій $\{\varepsilon\}_0$ відомі значення початкових напружень $\{\sigma\}_0$. Тоді, щоб використати наведені формули, потрібно перерахувати початкові напруження у початкові деформації за формулою закону Гука $\{\varepsilon\}_0 = [D]^{-1}\{\sigma\}_0$.

Деяка частина пластичних деформацій та деформацій повзучості може бути відомою, позначимо їх як $\{\varepsilon^p\}_0$ та $\{\varepsilon^c\}_0$.

Введемо позначення для частини формули (22.13), яка буде легко обчислюватися (відомою) після розв'язування системи алгебраїчних рівнянь (САР)

$$\{\sigma^\#\} = [D]\big([B]\{q\}_e - \{\overline{\alpha}_\theta\}\Delta\theta - \{\varepsilon\}_0 - \{\varepsilon^p\}_0 - \{\varepsilon^c\}_0\big) . \qquad (22.14)$$

Тоді з (22.13) маємо, що напруження

$$\{\sigma\} = \{\sigma^\#\} - [D](\{\Delta\varepsilon^p\} + \{\Delta\varepsilon^c\}) \quad \text{або} \quad \{\sigma\} = \{\sigma^\#\} - [\breve{D}](\{\Delta\breve{\varepsilon}^p\} + \{\Delta\breve{\varepsilon}^c\}) , \qquad (22.15)$$

де $\{\Delta\varepsilon^p\}$ та $\{\Delta\varepsilon^c\}$ (чи $\{\Delta\breve{\varepsilon}^p\}$ та $\{\Delta\breve{\varepsilon}^c\}$) – приріст пластичних деформацій та деформації повзучості на етапі навантаження.

Формула (22.13) або сукупність формул (22.14) і (22.15) і є основними формулами для обчислення вектора напружень у будь-якій точці СЕ при відомих $\{q\}_e$, $\Delta\theta$, $\{\varepsilon\}_0$, а також $\{\varepsilon^p\}$, $\{\varepsilon^c\}$ або $\{\varepsilon^p\}_0$, $\{\varepsilon^c\}_0$, $\{\Delta\varepsilon^p\}$ та $\{\Delta\varepsilon^c\}$.

Примітка 22.3. При отриманні формул цього Розділу на матрицю модулів пружності $[D]$ не накладалися жодні обмеження з точки зору можливої анізотропії, тобто всі формули, окрім (22.9), є справедливими для матеріалу з будь-яким типом анізотропії, також і для ізотропного матеріалу.

22.2.2. Крайова задача термопружності

У випадку термопружності відсутні необоротні деформації (пластичності та повзучості). Рівняння (22.15) спрощуються і з урахуванням (22.14):

$$\{\sigma\} = \{\sigma^\#\} = [D]\big([B]\{q\}_e - \{\overline{\alpha}_\theta\}\Delta\theta - \{\varepsilon\}_0\big) . \qquad (22.16)$$

Після розв'язання СЛАР, яку породжує МСЕ (див. Розділ 23), вектор $\{q\}_e$ у (22.16) стає відомим, тому застосування виразу (22.16) дозволяє відразу отримати значення компонент вектора напружень $\{\sigma\}$ в будь-якій точці СЕ.

22.2.3. Урахування закону пружної зміни об'єму матеріалу

Майже всі відомі теорії пластичності та повзучості використовують експериментально доведений факт відсутності об'ємних необоротних деформацій (їхню появу пов'язують з дуже високим рівнем тиску). Тому, якщо скласти перші три рядка формули (22.15), можна отримати, що $\sigma_V = \sigma_V^\#$, а також ввести вектори $\{\sigma_V\} = \{\sigma_V, \sigma_V, \sigma_V, 0, 0, 0\}^T$ й $\{\sigma_V^\#\} = \{\sigma_V^\#, \sigma_V^\#, \sigma_V^\#, 0, 0, 0\}^T$, причому

$$\{\sigma_V\} = \{\sigma_V^\#\} , \qquad (22.17)$$

© К.М. Рудаков, 2025

де $\sigma_V = \delta_{mn}\sigma_{mn}/3$; $\sigma_V^{\#} = \delta_{mn}\sigma_{mn}^{\#}/3$; δ_{mn} – символ Кронекера. З урахуванням (22.17) з (22.15):

$$\{S\} = \{S^{\#}\} - [D](\{\Delta\varepsilon^p\} + \{\Delta\varepsilon^c\}) \quad \text{або} \quad \{S\} = \{S^{\#}\} - [\breve{D}](\{\Delta\breve{\varepsilon}^p\} + \{\Delta\breve{\varepsilon}^c\}), \qquad (22.18)$$

де $\{S\} = \{\sigma\} - \{\sigma_V\} = \{\sigma\} - \{\sigma_V^{\#}\}$ та $\{S^{\#}\} = \{\sigma^{\#}\} - \{\sigma_V^{\#}\}$ – вектори девіаторних значень компонент тензорів напружень $\{\sigma\}$ та $\{\sigma^{\#}\}$.

У випадку пружної ізотропії матеріалу, використовуючи вектор (22.6-б) $\{\breve{\varepsilon}\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}\}^T$ та закон пружної зміни об'єму, отримаємо, що:

$$[\breve{D}](\{\Delta\breve{\varepsilon}^p\} + \{\Delta\breve{\varepsilon}^c\}) = 2G(\theta)(\{\Delta\breve{\varepsilon}^p\} + \{\Delta\breve{\varepsilon}^c\}), \qquad (22.19)$$

і з виразів (22.16) та (22.18) відповідно

$$\{\sigma\} = \{\sigma^{\#}\} - 2G(\theta)(\{\Delta\breve{\varepsilon}^p\} + \{\Delta\breve{\varepsilon}^c\}); \qquad (22.20)$$

$$\{S\} = \{S^{\#}\} - 2G(\theta)(\{\Delta\breve{\varepsilon}^p\} + \{\Delta\breve{\varepsilon}^c\}). \qquad (22.21)$$

Отримані формули для обчислення векторів напружень та девіаторів напружень будуть застосовуватися в подальшому для побудови алгоритмів.

22.3. Побудовані на основі теорії пластичності Прандтля-Рейса алгоритми термопластичності ізотропного матеріалу з ізотропним зміцненням

Постановку крайової задачі термопластичності було зроблено у підрозділі 13.3. Тут розглянемо варіант теорії пластичності Прандтля-Рейса, яку узагальнено на термопластичність (див. п.13.3.2). Ця теорія є поширеною в практиці розрахунків.

Нагадаємо, що рівняння теорії можна уявити як сукупність трьох законів:

- закону пружної зміни об'єму (13.41), в результаті чого $de_V^p = 0$, а $de_{ij}^p = d\varepsilon_{ij}^p$;
- закону зміни форми елементарного об'єму (13.42), а саме:

$$de_{ij}^p = d\lambda^p S_{ij}, \qquad (22.22)$$

де $e_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^p - \delta_{ij}\varepsilon_V^p$ – компоненти девіаторної частини тензора пластичних деформацій ε_{ij}^p, що співпадають з ним внаслідок закону пружної зміни об'єму (13.41); $d\lambda^p$ – функціонал.

- рівняння "миттєвої термомеханічної поверхні" (рівняння стану) матеріалу (13.43). Ця поверхня – розширення поняття діаграми деформування на випадок врахування впливу температури. Деякі з варіантів рівнянь (13.43) буде розглянуто пізніше.

Закон зміни форми елементарного об'єму (22.22) запишемо у приростах, одночасно враховуючи закон пружної зміни об'єму (13.41):

$$\Delta e_{ij}^p = \Delta\varepsilon_{ij}^p = \Delta\lambda^p S_{ij}, \text{ або } \{\Delta\breve{\varepsilon}^p\} = \Delta\lambda^p\{S\}. \qquad (22.23)$$

Щоб використати формулу (22.21), а саме $\{S\} = \{S^{\#}\} - 2G(\theta)(\{\Delta\breve{\varepsilon}^p\} + \{\Delta\breve{\varepsilon}^c\})$, припустимо, що вектор $\{\Delta\breve{\varepsilon}^c\}$ фіксований (або дорівнює нулю), тобто визначений. Позначимо відому частину вектора девіатора напружень як

© К.М. Рудаков, 2025

$$\{\tilde{S}^*\} = \{S^\#\} - 2G(\theta)\{\Delta\breve{\varepsilon}^c\}, \tag{22.24}$$

тоді

$$\{S\} = \{\tilde{S}^*\} - 2G(\theta)\{\Delta\breve{\varepsilon}^p\}. \tag{22.25}$$

Згідно з (22.23) вектори $\{\Delta\breve{\varepsilon}^p\}$ і $\{S\}$ є співвісними. Тому в (22.25) їм співвісний і вектор $\{\tilde{S}^*\}$. У зв'язку з цим існує пропорція

$$\{S\} = r \cdot \{\tilde{S}^*\}, \tag{22.26}$$

де $r \le 1$ – скаляр. Підставимо (22.26) в (22.25):

$$r \cdot \{\tilde{S}^*\} = \{\tilde{S}^*\} - 2G(\theta)\{\Delta\breve{\varepsilon}^p\}; \quad (1-r)\{\tilde{S}^*\} = 2G(\theta)\{\Delta\breve{\varepsilon}^p\}; \tag{22.27}$$

$$\{\Delta\breve{\varepsilon}^p\} = \frac{1-r}{2G(\theta)}\{\tilde{S}^*\}. \tag{22.28}$$

Необхідно знайти значення скаляра r. Перемножимо вектори, що стоять в лівій і правій частинах (22.26), і результат помножимо на 3/2 (проведемо згортку):

$$(\sigma_u)^2 = \frac{3}{2}\{S\}^T\{S\} = r^2 \cdot \frac{3}{2}\{\tilde{S}^*\}^T\{\tilde{S}^*\} = r^2 \cdot (\tilde{\sigma}_u^*)^2. \tag{22.29}$$

Оскільки σ_u, $\tilde{\sigma}_u^*$, r – невід'ємні величини, то, звільнившись від квадратів, отримаємо, що

$$r = \frac{\sigma_u}{\tilde{\sigma}_u^*}. \tag{22.30}$$

У виразі (22.30) невідома величина σ_u. Її можна визначити, спираючись на "миттєву термомеханічну поверхню". Розглянемо два (з багатьох можливих) варіанти набора параметрів "миттєвої термомеханічної поверхні".

22.3.1. Застосування "миттєвої термомеханічної поверхні", вираженої через "активні" деформації

Найчастіше "миттєва термомеханічна поверхня" записується (узагальнено) рівнянням виду

$$\sigma_u = K(\varepsilon_u^a, \theta, \sigma_V), \tag{22.31}$$

де ε_u^a – інтенсивність "активних" деформацій

$$\{\varepsilon^a\} = \{\varepsilon\} - \{\varepsilon^\theta\}. \tag{22.32}$$

Формула (22.30), з урахуванням $\sigma_V = \sigma_V^\#$, набуває вигляду:

$$r = \frac{K(\varepsilon_u^a, \theta, \sigma_V^\#)}{\tilde{\sigma}_u^*}, \tag{22.33}$$

де ε_u^a, θ та $\tilde{\sigma}_u^*$ – відомі, так само як і $\sigma_V^\#$. Отже, значення r отримано, причому в принципі нелінійна задача розв'язана *без ітерацій* (на жаль, тільки в актуальній точці СЕ).

Такий варіант визначення r запропонував Уїлкінс (M.L. Wilkins) як *метод радіального повернення* (radial return method).

© К.М. Рудаков, 2025

Підставивши знайдене значення r в (22.28), отримаємо величини приросту пластичних деформацій $\{\Delta\breve{\varepsilon}^p\}$, а в (22.26) – величини напружень в актуальній точці СЕ:

$$\{\sigma\} = r \cdot \{\tilde{S}^*\} + \{\sigma_V^{\#}\}. \tag{22.34}$$

22.3.2. Застосування "миттєвої термомеханічної поверхні", вираженої через параметр Одквіста

"Миттєву термомеханічну поверхню" можна описати (узагальнено) рівнянням

$$\sigma_u = H(\chi, \theta, \sigma_V), \tag{22.35}$$

де χ – параметр Одквіста:

$$\chi = \int d\chi = \int d\bar{\varepsilon}_u^p \approx \sum \Delta\bar{\varepsilon}_u^p = \left(\sum \Delta\bar{\varepsilon}_u^p\right)_0 + \Delta\chi = \chi_0 + \Delta\chi. \tag{22.36}$$

Підставивши (22.35) в (22.30), з урахуванням $\sigma_V = \sigma_V^{\#}$ отримаємо, що

$$r = \frac{H(\chi, \theta, \sigma_V^{\#})}{\tilde{\sigma}_u^*}, \tag{22.37}$$

де значення $\sigma_V^{\#}$, θ та $\tilde{\sigma}_u^*$ – відомі, але параметра Одквіста χ – невідоме. Тому значення r стане відомим лише після визначення χ.

Використаємо той факт, що $\chi \approx \chi_0 + \Delta\chi$. Згорнемо другий вираз із (22.27), і з урахуванням того, що $\Delta\chi = \sqrt{2\{\Delta\breve{\varepsilon}^p\}^T\{\Delta\breve{\varepsilon}^p\}/3}$, отримаємо

$$(1-r)^2 \frac{3}{2}\{\tilde{S}^*\}^T\{\tilde{S}^*\} = (1-r)^2(\tilde{\sigma}_u^*)^2 =$$

$$= \frac{3}{2}(2G(\theta))^2 \frac{2}{3}\{\Delta\breve{\varepsilon}^p\}^T\{\Delta\breve{\varepsilon}^p\}\frac{3}{2} = (3G(\theta))^2(\Delta\chi)^2. \tag{22.38}$$

Оскільки всі скалярні величини в (22.38) невід'ємні, то, звільнившись від квадратів, маємо, що

$$(1-r)\tilde{\sigma}_u^* = 3G(\theta)\Delta\chi. \tag{22.39}$$

Але з (22.37)

$$r \cdot \tilde{\sigma}_u^* = H(\chi, \theta, \sigma_V^{\#}) \approx H(\chi_0 + \Delta\chi, \theta, \sigma_V^{\#}), \tag{22.40}$$

причому при пропорційному навантаженні $\chi = \chi_0 + \Delta\chi$ точно. Підставимо вираз (22.40) в (22.39), отримаємо нелінійне скалярне рівняння відносно $\Delta\chi$:

$$\tilde{\sigma}_u^* - H(\chi_0 + \Delta\chi, \theta, \sigma_V^{\#}) \approx 3G(\theta)\Delta\chi \geq 0. \tag{22.41}$$

Розв'язок рівняння (22.41) можна шукати різними методами. Наприклад, методом половинного ділення. Однак цей метод збігається дуже повільно (див. підрозділ 3.1). Розглянемо швидкий алгоритм на основі методу Ньютона. Розкладемо вираз для функції $H(\chi, \theta, \sigma_V^{\#})$ в околі χ_0 і обмежимося двома членами ряду:

$$H(\chi_0 + \Delta\chi, \theta, \sigma_V^{\#}) \approx H(\chi_0, \theta, \sigma_V^{\#}) + H'(\chi_0, \theta, \sigma_V^{\#})\Delta\chi, \tag{22.42}$$

де $H' = \partial H / \partial\chi$. Підставимо (22.42) в (22.41):

$$\tilde{\sigma}_u^* - H(\chi_0, \theta, \sigma_V^{\#}) - H'(\chi_0, \theta, \sigma_V^{\#})\Delta\chi \approx 3G(\theta)\Delta\chi, \text{ або відносно } \Delta\chi:$$

© К.М. Рудаков, 2025

$$\Delta\chi \approx \frac{\tilde{\sigma}_u^* - H(\chi_0, \theta, \sigma_V^{\#})}{3G(\theta) + H'(\chi_0, \theta, \sigma_V^{\#})}. \tag{22.43}$$

Розв'язування задачі про визначення параметра r через визначення приросту параметра Одквіста в скалярному рівнянні типу (22.41) вперше запропоновано, напевно, в роботі R.D. Krieg, D.B. Krieg (1977 р.) для ідеально пластичного матеріалу, а саме при $H = \sigma_T = const$ та $H' = 0$. Якщо $H = \sigma_T(\theta, \sigma_V^{\#})$, то тоді

$$\Delta\chi \approx \frac{\tilde{\sigma}_u^* - \sigma_T(\theta, \sigma_V^{\#})}{3G(\theta)}. \tag{22.44}$$

Якщо матеріал має лінійне зміцнення, то $H' = A(\theta, \sigma_V^{\#})$ і вираз (22.43) у вигляді $\Delta\chi = \dfrac{\tilde{\sigma}_u^* - H(\chi_0, \theta, \sigma_V^{\#})}{3G(\theta) + A(\theta, \sigma_V^{\#})}$ дає шукане значення $\Delta\chi$.

Залишився не розглянутим нелінійний випадок, коли $H' \neq const$. Враховуючи достатню гладкість функції $H(\chi, T, \sigma_V^{\#})$ відносно χ, ефективним буде наступний процес Ньютона:

$$\begin{gathered}
\Delta\chi^{(1)} = \frac{\tilde{\sigma}_u^* - H(\chi_0, \theta, \sigma_V^{\#})}{3G(\theta) + H'(\chi_0, \theta, \sigma_V^{\#})}; \quad k = 1; \\
(*) \qquad Q^{(k)} = \tilde{\sigma}_u^* - 3G(\theta)\Delta\chi^{(k)}; \\
\delta\chi = \frac{Q^{(k)} - H(\chi_0 + \Delta\chi^{(k)}, \theta, \sigma_V^{\#})}{3G(\theta) + H'(\chi_0 + \Delta\chi^{(k)}, \theta, \sigma_V^{\#})}; \\
\Delta\chi^{(k+1)} = \Delta\chi^{(k)} + \delta\chi; \\
\text{Якщо } |\delta\chi| > \xi \cdot \Delta\chi^{(k+1)}, \text{ то } k = k+1, \text{ перехід на рядок (*).} \\
\text{Інакше } \Delta\chi = \Delta\chi^{(k+1)} \text{ знайдено.}
\end{gathered} \tag{22.45}$$

Тут ξ – задана точність. При $\xi = 0.01$, зазвичай, достатньо двох ітерацій, при $\xi = 0.001$ – трьох.

На рис.22.1 зображено геометричну інтерпретацію ітераційного процесу (22.45) розв'язування рівняння (22.41). Одна ітерація – це задача про вписування прямокутного трикутника з заданим кутом α між трьома прямими: 1 – попередній рівень напружень, 2 – попереднє значення параметра Одквіста, 3 – дотична до діаграми деформування (для фіксо-

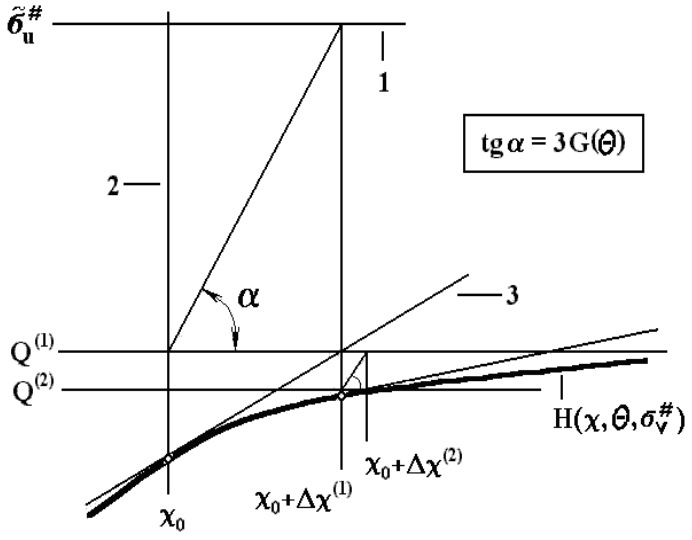


Рис.22.1 Геометрична інтерпретація ітераційного процесу Ньютона знаходження приросту параметра Одквіста

ваної температури θ) в точці, відповідній попередньому значенню параметра Одквіста. Очевидно, що вже третя ітерація дасть зовсім незначну поправку до цього розв'язку, тобто процес має велику швидкість збіжності.

Визначивши $\Delta\chi$, з $\chi \approx \chi_0 + \Delta\chi$ та виразу (22.39) знаходимо r, після цього згідно з (22.34) – величини напружень $\{\sigma\}$ в точці, і (за необхідності) згідно з (22.28) – компоненти вектора приросту пластичних деформацій $\{\Delta\breve{\varepsilon}^p\}$.

22.3.3. Приклад функції $H(\chi, \theta, \sigma_V)$

Часто вираз, що описує "миттєву термомеханічну поверхню" вигляду $H(\chi, \theta, \sigma_V)$, приймають таким:

$$H(\chi, \theta, \sigma_V) = \sigma_T(\theta) + A(\theta)\,\chi^{m(\theta)}. \qquad (22.46)$$

Ця формула при $A(\theta) = 0$ описує ідеально-пластичний матеріал, а при $m(\theta) = 1$ – матеріал з лінійним зміцненням (в загальному випадку $0 \le A(\theta) < 3G(\theta)$; $0 < m(\theta) \le 1$). Вплив середнього напруження σ_V не враховується.

При застосуванні формул (22.43) і (22.45) необхідно обчислювати похідну $H'(\chi, \theta, \sigma_V)$. З (22.46)

$$H'(\chi, \theta, \sigma_V) = \partial H / \partial\chi = m(\theta)\,A(\theta)\,\chi^{m(\theta)-1}. \qquad (22.47)$$

Але при $\chi_0 = 0$ (перша поява пластичних деформацій в точці) виникає ситуація "нуль у від'ємної степені", що є невизначеною операцією в ЕОМ (результат – нескінченність). Є простий і ефективний спосіб, щоб уникнути її. Достатньо замість (22.46) застосовувати формулу

$$H(\chi, \theta, \sigma_V) = \sigma_T(\theta) + A(\theta)(\delta + \chi)^{m(\theta)}, \qquad (22.48)$$

де δ – дуже мале число, наприклад $\delta = 10^{-20}$. Це тотожно призначенню початкового значення $\chi_0 = \delta$. Тоді

$$H'(\chi, \theta, \sigma_V) = \partial H / \partial\chi = m(\theta)\,A(\theta)(\delta + \chi)^{m(\theta)-1}. \qquad (22.49)$$

Цей вираз вже завжди визначений при $\chi \ge 0$. Як показали чисельні експерименти, вплив дуже малого δ на розв'язок задачі – незначний.

22.3.4. Умови активного навантаження, пружності, розвантаження

Оскільки допустимі значення $r \le 1$, то з (22.31) або (22.33) випливають еквівалентні умови активного навантаження в актуальній точці тіла:

$$\tilde{\sigma}_u^* > K(\varepsilon_u^a, \theta, \sigma_V^\#) \quad \text{або} \quad r = K(\varepsilon_u^a, \theta, \sigma_V^\#) / \tilde{\sigma}_u^* < 1. \qquad (22.50)$$

В (22.43) знаменник завжди більший за нуль, а от чисельник – ні. Тому враховуючи невід'ємність параметра Одквіста χ, вираз (22.43) можна застосовувати лише за умови

$$\tilde{\sigma}_u^* > H(\chi_0, \theta, \sigma_V^\#) \quad \text{або} \quad r = H(\chi_0, \theta, \sigma_V^\#) / \tilde{\sigma}_u^* < 1, \qquad (22.51)$$

що водночас є умовою активного навантаження в актуальній точці СЕ.

В пружній області і при розвантаженні завжди

$$\tilde{\sigma}_u^* - K(\varepsilon_u^a, \theta, \sigma_V^\#) \le 0 \quad \text{або} \quad \tilde{\sigma}_u^* - H(\chi_0, \theta, \sigma_V^\#) \le 0; \qquad (22.52)$$

$$\{\sigma\} = \{\tilde{\sigma}^*\} = \{\overline{S}^*\} + \{\sigma_V^\#\}. \qquad (22.53)$$

© К.М. Рудаков, 2025

22.4. Ефективна вагова схема інтегрування рівнянь технічної теорії повзучості – теорії зміцнення

Постановку крайової задачі термоповзучості було зроблено в підрозділі 13.4. Тут нагадаємо, що технічні теорії повзучості можна записати як сукупність трьох законів:

- закону пружної зміни об'єму (13.45); з нього $d\varepsilon_V^c = 0$, а $de_{ij}^c = d\varepsilon_{ij}^c$;
- закону зміни форми елементарного об'єму ізотропного матеріалу (13.46), а саме:

$$de_{ij}^c = d\lambda^c S_{ij}, \tag{22.54}$$

де $e_{ij}^c = \varepsilon_{ij}^c - \delta_{ij}\varepsilon_V^c$ – компоненти девіаторної частини тензора деформацій повзучості ε_{ij}^c, що співпадають з ним внаслідок закону пружної зміни об'єму; $d\lambda^c$ – функціонал; $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_V$ – компоненти девіаторної частини тензора напружень;

- рівняння стану матеріалу при повзучості (13.47). Введемо в нього можливий вплив середнього напруження σ_V, отримаємо:

$$\dot{\varepsilon}_u^c = d\overline{\varepsilon}_u^c / dt = \Phi(\sigma_u, \sigma_V, \varepsilon_u^c, \theta, t), \tag{22.55}$$

де $\dot{\varepsilon}_u^c$, ε_u^c і σ_u – інтенсивності: швидкості повзучості матеріалу, деформацій повзучості і напружень відповідно, θ – температура, t – час.

Проведемо інтегрування (22.54) на етапі навантаження. Згідно з однією із теорем про середнє при інтегруванні функцій:

$$\int\limits_{(e_{ij}^c)^n}^{(e_{ij}^c)^{n+1}} de_{ij}^c = \Delta e_{ij}^c = \int\limits_{(\lambda^c)^n}^{(\lambda^c)^{n+1}} S_{ij} d\lambda^c = < S_{ij} > \int\limits_{(\lambda^c)^n}^{(\lambda^c)^{n+1}} d\lambda^c = < S_{ij} > \Delta\lambda^c. \tag{22.56}$$

Тут і далі дужки $< >$ вказують на деяке проміжне значення на етапі навантаження (за інтервал часу Δt). Проводячи згортання виразу (22.56), отримаємо:

$$\Delta\lambda^c = \frac{3}{2}\frac{\Delta\overline{\varepsilon}_u^c}{<\sigma_u>}; \quad \{\Delta\breve{\varepsilon}^c\} = \frac{3}{2}\frac{\Delta\overline{\varepsilon}_u^c}{<\sigma_u>} < \{S\} > = \Delta\lambda^c < \{S\} >. \tag{22.57}$$

В (22.57) всі величини ще невідомі.

Позначено: $\Delta\overline{\varepsilon}_u^c = \sqrt{2\Delta e_{ij}^c \Delta e_{ij}^c / 3}$ – інтенсивність приростів деформацій повзучості за часовий крок Δt; $<\sigma_u> = \sqrt{3 < S_{ij} >< S_{ij} > /2}$.

Помножимо (22.55) на dt і проведемо інтегрування на часовому відрізку від t^n до t^{n+1}:

$$\int\limits_{(e_u^c)^n}^{(e_u^c)^{n+1}} d\overline{\varepsilon}_u^c = (e_u^c)^{n+1} - (e_u^c)^n = \Delta\varepsilon_u^c = \int\limits_{t^n}^{t^{n+1}} \Phi(\sigma_u, \sigma_V, \varepsilon_u^c, \theta, t) dt. \tag{22.58}$$

При пропорційному навантаженні $\Delta\varepsilon_u^c = \Delta\overline{\varepsilon}_u^c$.

Використовуючи теорему про середнє, отримаємо з (22.58), що

$$\Delta\varepsilon_u^c = < \Phi(\sigma_u, \sigma_V, \varepsilon_u^c, \theta, t) > \Delta t; \tag{22.59}$$

© К.М. Рудаков, 2025

$$\Delta\varepsilon_u^c / \Delta t = <\dot{\varepsilon}_u^c> = <\Phi(\sigma_u, \sigma_V, \varepsilon_u^c, \theta, t)> . \quad (22.60)$$

Функція повзучості Φ визначається на основі експериментів. Для обчислення $<\Phi(\sigma_u, \sigma_V, \varepsilon_u^c, T, t)>$ повернемося до рівняння (22.55). Розклавши функцію повзучості Φ у ряд Тейлора в околі t^n на часовому відрізку $\omega\Delta t$, де $0 < \omega \le 1$, і обмежившись лінійними членами розкладу, для (22.59) отримаємо, що

$$\Delta\varepsilon_u^c \approx \left[\overline{A} + \omega(\partial\Phi / \partial\sigma_u)^n \Delta\sigma_u + \omega(\partial\Phi / \partial\varepsilon_u^c)^n \Delta\varepsilon_u^c \right] \cdot \Delta t , \quad (22.61)$$

де позначена частина

$$\overline{A} = (\dot{\varepsilon}_u^c)^n + \omega\left[(\partial\Phi / \partial\sigma_V)^n \Delta\sigma_V + (\partial\Phi / \partial\theta)^n \Delta\theta + (\partial\Phi / \partial t)^n \Delta t \right]. \quad (22.62)$$

В (22.61) є дві невідомі величини: $\Delta\varepsilon_u^c$ і $\Delta\sigma_u$. Для їх визначення необхідно мати ще один вираз (ω призначається, а не обчислюється).

Щоб використати формулу (22.21), припустимо, що вектор $\{\Delta\breve{\varepsilon}^p\}$ фіксований (або нульовий), тобто визначений. Позначимо:

$$\{S^*\} = \{S^\#\} - 2G(\theta)\{\Delta\breve{\varepsilon}^p\} . \quad (22.63)$$

Тоді

$$\{S\}^{n+1} = \{S^*\} - 2G(\theta)\{\Delta\breve{\varepsilon}^c\} . \quad (22.64)$$

Для отримання $\{\Delta S\} = \{S\}^{n+1} - \{S\}^n$ віднімемо з (22.64) вектор $\{S\}^n$:

$$\{\Delta S\} = \{S\}^{n+1} - \{S\}^n = \{S^*\} - 2G(\theta)\{\Delta\breve{\varepsilon}^c\} - \{S\}^n = \{\Delta S^*\} - 2G(\theta)\{\Delta\breve{\varepsilon}^c\} , \quad (22.65)$$

де позначили $\{\Delta S^*\} = \{S^*\} - \{S\}^n$.

Для співвідношення (22.57), використовуючи (22.65), запишемо

$$<\{S\}> = \{S\}^n + \omega\{\Delta S\} = \{S\}^n + \omega\{\Delta S^*\} - \omega 2G(\theta)\{\Delta\breve{\varepsilon}^c\} . \quad (22.66)$$

Другий вираз (22.57), а саме $\{\Delta\breve{\varepsilon}^c\} = \Delta\lambda^c <\{S\}>$, постулює співвісність векторів $\{\Delta\breve{\varepsilon}^c\}$ і $<\{S\}>$, тому (22.66) вказує на співвісність цим двом векторам і вектора

$$\{\breve{S}\} = \{S\}^n + \omega\{\Delta S^*\} . \quad (22.67)$$

Тому справедливими є пропорції

$$<\{S\}> = r \cdot \{\breve{S}\} ; \quad <\sigma_u> = r \cdot \breve{\sigma}_u , \quad (22.68)$$

де $r < 1$, а $\breve{\sigma}_u = \sqrt{3\breve{S}_{ij}\breve{S}_{ij} / 2}$. З (22.66) з урахуванням (22.67) і (22.68)

$$\{\Delta\breve{\varepsilon}^c\} = \frac{1 - r}{\omega\ 2G(\theta)}\{\breve{S}\} . \quad (22.69)$$

Після згортання (22.69) і зворотного застосування другої пропорції з (22.68) отримаємо, що

$$<\sigma_u> = \breve{\sigma}_u - \omega\ 3G(\theta)\Delta\overline{\varepsilon}_u^c ; \quad r = <\sigma_u> / \breve{\sigma}_u = 1 - \omega\ 3G(\theta)\Delta\overline{\varepsilon}_u^c / \breve{\sigma}_u . \quad (22.70)$$

Оскільки в усіх *технічних* теоріях повзучості під σ_u розуміють *рівень* діючих напружень, то $\Delta\sigma_u$ в (22.61) – зміна *рівня* напружень. Тому $\Delta\sigma_u$ можна обчислити (з застосуванням (22.70)) з виразу

$$\omega\Delta\sigma_u = <\sigma_u> - (\sigma_u)^n = \breve{\sigma}_u - (\sigma_u)^n - \omega\ 3G(\theta)\Delta\overline{\varepsilon}_u^c . \quad (22.71)$$

© К.М. Рудаков, 2025

Відповідно до (22.71) $\Delta\sigma_u$ може бути як більше нуля (додаткове навантаження), так і менше (часткове розвантаження), але незалежно від цього йде зростання деформацій повзучості, тобто $\Delta\breve{\varepsilon}_u^c > 0$, що і відбувається в реальних матеріалах.

Підставивши (22.71) в (22.61) і виразивши (22.61) відносно $\Delta\varepsilon_u^c$, отримаємо, що при пропорційному навантаженні ($\Delta\varepsilon_u^c = \Delta\breve{\varepsilon}_u^c$)

$$\Delta\varepsilon_u^c \approx \frac{\overline{A} + (\partial\Phi / \partial\sigma_u)^n [\breve{\sigma}_u - (\sigma_u)^n]}{1 + [3G(\theta)(\partial\Phi / \partial\sigma_u)^n - (\partial\Phi / \partial\varepsilon_u^c)^n]\omega\Delta t} \cdot \Delta t . \qquad (22.72)$$

У моделі повзучості без врахування пошкодженості матеріалу завжди похідна $(\partial\Phi / \partial\varepsilon_u^c)^n < 0$. Для конструкційних матеріалів при повзучості завжди $(\partial\Phi / \partial\sigma_u)^n > 0$. Тому знаменник в (22.72) додатний і не вироджений. При значному падінні рівня навантажень другий доданок в чисельнику (22.72) може стати від'ємним, але оскільки $\overline{A}$ як основна компонента містить швидкість повзучості на початок етапу навантаження $(\dot{\varepsilon}_u^c)_0$, то і в цьому випадку залишиться $\Delta\varepsilon_u^c > 0$.

Очевидно, що випадок $\omega = 0$ (явна схема інтегрування, $r = 1$) зберігає незмінною досягнуту швидкість повзучості на всьому етапі навантаження, що в матеріалах трапляється рідко. Формула (22.72) не суперечить цьому випадку, оскільки при $\omega = 0$ в чисельнику відповідно до (22.67) $\breve{\sigma}_u - (\sigma_u)^n = 0$, з (22.62) $\overline{A} = (\dot{\varepsilon}_u^c)^n$, знаменник дорівнює одиниці, тоді $\Delta\varepsilon_u^c = (\dot{\varepsilon}_u^c)^n \Delta t$, що випливає і з виразу (22.61).

Вектор $\{\Delta\breve{\varepsilon}^c\}$ та $\Delta\lambda^c$ виражаються з (22.57), використовуючи (22.68) і отримане $\Delta\varepsilon_u^c \approx \Delta\breve{\varepsilon}_u^c$, як

$$\{\Delta\breve{\varepsilon}^c\} = \frac{3}{2}\frac{\Delta\varepsilon_u^c}{\breve{\sigma}_u}\{\breve{S}\} \;; \quad \Delta\lambda^c = \frac{3}{2}\frac{\Delta\varepsilon_u^c}{r\,\breve{\sigma}_u}. \qquad (22.73)$$

Підставивши значення $\{\Delta\breve{\varepsilon}^c\}$ в (22.64), отримаємо величини напружень *у точці* тіла *без ітерацій* на основі вибраної (величиною ω) вагової схеми інтегрування рівнянь повзучості:

$$\{\sigma\} = \{S^*\} - 2G(\theta)\{\Delta\breve{\varepsilon}^c\} + \{\sigma_V^*\}. \qquad (22.74)$$

Отже, розрахунок напружень базується на *збалансованому* розподілі приростів повних деформацій на прирости деформацій пружності, теплових, пластичності і повзучості.

Примітка 22.4. У деяких наукових публікаціях замість *приросту інтенсивності* напружень використовують *інтенсивність приростів* напружень. При непропорційному (складному) навантаженні це принципово різні величини. Але справа в тому, що технічні теорії повзучості не призначені (не обґрунтовані) для складного навантаження. Для них $\Delta\sigma_u$ – *приріст інтенсивності* напру-

© К.М. Рудаков, 2025

жень, тобто різниця між двома рівнями (значеннями) інтенсивностей напружень: $\Delta\sigma_u = \sigma_u - (\sigma_u)^n$.

Описана схема інтегрування рівнянь повзучості дозволяє, призначивши ω, з досить великою точністю простежувати процес знакопостійної повзучості в актуальних точках тіла, а значить і в усьому тілі. Числові експерименти показують, що при повільній зміні зовнішніх навантажень раціонально призначати $\omega \approx 0.5$. Тобто середні за етап швидкості повзучості та рівні напружень в розрахунках близькі до оптимальних.

22.5. Приклад використання рівняння технічної теорії повзучості

Один з найпростіших варіантів теорії зміцнення для ізотропного матеріалу конкретизує запис формули (22.55) у вигляді:

$$\Phi = \dot{\varepsilon}_u^c = \alpha(\theta)(\varepsilon_u^c)^{-\nu(\theta)}(\sigma_u)^{\mu(\theta)}, \qquad (22.75)$$

де $\alpha(\theta)$, $\nu(\theta)$ і $\mu(\theta)$ – коефіцієнти наближення як (можливі) функції температури. При $\nu(\theta) = 0$ вона переходить в технічну теорію течії:

$$\Phi = \dot{\varepsilon}_u^c = \alpha(\theta)(\sigma_u)^{\mu(\theta)}. \qquad (22.76)$$

Для формул (22.62) і (22.72) величини $(\dot{\varepsilon}_u^c)_0$, $(\partial\Phi/\partial t)_0$, $(\partial\Phi/\partial\sigma_V)_0$, $(\partial\Phi/\partial\sigma_u)_0$, $(\partial\Phi/\partial\varepsilon_u^c)_0$ та $(\partial\Phi/\partial\theta)_0$ обчислюються згідно з виразом (22.75) на *початок* етапу навантаження як

$$(\dot{\varepsilon}_u^c)_0 = \alpha_0 \cdot (\varepsilon_u^c)_0^{-\nu_0}(\sigma_u)_0^{\mu_0}; \quad (\partial\Phi/\partial t)_0 = 0; \quad (\partial\Phi/\partial\sigma_V)_0 = 0; \qquad (22.77)$$

$$(\partial\Phi/\partial\sigma_u)_0 = \mu_0\alpha_0 \cdot (\varepsilon_u^c)_0^{-\nu_0}(\sigma_u)_0^{\mu_0-1} = \mu_0 \cdot (\dot{\varepsilon}_u^c)_0(\sigma_u)_0^{-1}; \qquad (22.78)$$

$$(\partial\Phi/\partial\varepsilon_u^c)_0 = -\nu_0\alpha_0 \cdot (\varepsilon_u^c)_0^{-\nu_0-1}(\sigma_u)_0^{\mu_0} = -\nu_0 \cdot (\dot{\varepsilon}_u^c)_0(\varepsilon_u^c)_0^{-1}; \qquad (22.79)$$

$$(\partial\Phi/\partial\theta)_0 = (\dot{\varepsilon}_u^c)_0[\alpha_0'/\alpha_0 + \mu_0'\ln(\sigma_u)_0 - \nu_0'\ln(\varepsilon_u^c)_0], \qquad (22.80)$$

де $\alpha_0 = \alpha(\theta_0)$, $\nu_0 = \nu(\theta_0)$ і $\mu_0 = \mu(\theta_0)$; $\alpha_0' = (d\alpha(\theta)/d\theta)_0$ й $\mu_0' = (d\mu(\theta)/d\theta)_0$ – швидкості зміни означених величин.

Але при $(\sigma_u)_0 = 0$ і (або) $(\varepsilon_u^c)_0 = 0$ застосовувати (22.77) ... (22.80) неможливо, оскільки операція "нуль у від'ємній степені" є математично невизначеною. На перший погляд, достатньо задати деякі малі *довільні* значення для $(\varepsilon_u^c)_0$ і $(\sigma_u)_0$. Але виявилося, що від вибору $(\varepsilon_u^c)_0$ залежить, якою буде функція $\Delta\bar{\varepsilon}_u^c$ в часі: монотонно спадною, як прийнято в технічній теорії повзучості, або спочатку зростаючою і лише після цього спадною (при занижених значеннях $(\varepsilon_u^c)_0$). До речі, з точки зору фізичних основ процесу зміцнення при повзучості, що базуються на теорії дислокацій, процес повзучості відбувається саме так, як у другому випадку. Але в технічній теорії повзучості цей ефект не враховується.

Наявність максимуму функції $\Delta\bar{\varepsilon}_u^c((\varepsilon_u^c)_0)$ дозволяє знайти гідний вихід зі становища. Підставивши в (22.62) і (22.72) вирази (22.77) ... (22.80), взявши першу похідну за $(\varepsilon_u^c)_0$ і прирівнявши її до нуля, отримаємо, що функція $\Delta\bar{\varepsilon}_u^c((\varepsilon_u^c)_0)$ починає відразу спадати, якщо:

© К.М. Рудаков, 2025

$$\Delta t \le \frac{(\varepsilon_u^c)_0^{\,1+\nu_0}}{\omega\alpha_0(\sigma_u)_0^{\mu_0}} \cdot \frac{B+\nu_0'\omega\Delta\widehat{\theta}}{B+[\nu_0+3G\mu_0(\sigma_u)_0^{-1}(\varepsilon_u^c)_0]\nu_0'\omega\Delta\widehat{\theta}}, \qquad (22.81)$$

де позначено $B=\nu_0\{1+[\alpha_0'/\alpha_0+\mu_0'\ln(\sigma_u)_0-\nu_0'\ln(\varepsilon_u^c)_0]\omega\Delta\widehat{\theta}\}$. Але (22.81) – нелінійне рівняння відносно $(\varepsilon_u^c)_0$, тому користуватися їм незручно.

Очевидно, що при $\nu_0'=0$ або при $[\nu_0+3G\mu_0(\sigma_u)_0^{-1}(\varepsilon_u^c)_0]=1$ другий множник у (22.81) дорівнює одиниці, і (22.81) різко спрощується:

$$\Delta t \le \frac{(\varepsilon_u^c)_0^{\,1+\nu_0}}{\omega\alpha_0(\sigma_u)_0^{\mu_0}} = \frac{(\varepsilon_u^c)_0}{\omega\cdot(\dot{\varepsilon}_u^c)_0}. \qquad (22.82)$$

Однак $[\nu_0+3G\mu_0(\sigma_u)_0^{-1}(\varepsilon_u^c)_0]=1$ можливо лише при $(\varepsilon_u^c)_0=\frac{1-\nu_0}{\mu_0}\cdot\frac{(\sigma_u)_0}{3G}$. Оскільки на початку процесу повзучості $(\varepsilon_u^c)_0\approx(\sigma_u)_0/3G$, то потрібно $1-\nu_0\approx\mu_0$, що не має місця ($\mu(\theta)>1$). Тобто умова (22.82) є точною лише при $\nu_0'=0$.

Таким чином, існує початкове значення $(\varepsilon_u^c)_0\approx[\omega\alpha_0(\sigma_u)_0^{\mu_0}\Delta t]^{1/(1+\nu_0)}$, що надає функції $\Delta\bar{\varepsilon}_u^c$ необхідну властивість лише спадати. Це незручне обмеження, якщо ми хочемо збільшувати значення Δt на етапах навантаження, або якщо збільшилася інтенсивність напружень у точці, або несприятливим чином змінилися постійні наближення функції повзучості (адже вони є функціями температури): може трапитися, що накопичена до цього етапу деформація повзучості виявилася меншою, ніж необхідно для правильного підрахунку $\Delta\bar{\varepsilon}_u^c$ при бажаному (збільшеному або навіть зменшеному) Δt. Тому слід будувати адаптивну схему, тобто проводити перевірку відповідності і, за необхідності, – корегування часового кроку, що задається, відповідно до рівня накопиченої деформації повзучості, і завдяки цьому враховувати обмеження на часовий крок згори згідно з (22.81).

Отже, розв'язавши проблему призначення початкового значення $(\varepsilon_u^c)_0$, одночасно встановили дуже важливий факт *наявності обмеження для часового кроку згори при застосуванні технічної теорії зміцнення* і вивели відповідну формулу.

Але на першому етапі навантаження немає початкових напружень, що означає нульове значення $\Delta\bar{\varepsilon}_u^c$. Інакше кажучи, перший етап навантаження не буде містити деформацій повзучості, тобто буде "миттєвим". Це добре узгоджується зі звичайними уявленнями. Тільки не слід забувати, що відлік часу процесу повзучості тоді почнеться з другого етапу навантаження. До речі, ніщо не заважає нам прийняти час першого етапу навантаження відносно малим.

Очевидно, що формулами (22.81) і (22.82) не можна користуватися при $\sigma_u=0$, що можливо в деяких точках тіла в будь-який момент часу. При згині пластини, наприклад, завжди є "нейтральний" шар, в якому σ_u дорівнює нулю

© К.М. Рудаков, 2025

або близька до нього. Щоб уникнути невизначених ситуацій, можна діяти двома шляхами:

- якщо в точці виявилося, що $\sigma_u = 0$, то штучно призначати $\sigma_u = \delta$, де δ – деяке мале значення;
- для всього матеріалу вводити деяку "межу повзучості", нижче якої деформації повзучості в точці не розглядати (припущення про наявність "межі повзучості" неодноразово висувалися експериментаторами). При цьому згідно з (22.82) можливий крок Δt буде зменшуватися при збільшенні "межі повзучості", а значні зони матеріалу може бути виключено з процесу повзучості. Очевидно, що цей варіант вимагає більшого обґрунтування, ніж попередній.

22.6. Одночасні повзучість і термопластичність при активному навантаженні

Припускається одночасний розвиток деформацій: як пластичних, так і повзучості. Необхідно врахувати наступне.

Повзучість як процес може відбуватися в матеріалі конструкцій при напруженнях, нижчих за межу плинності. Для цієї ситуації проблеми немає, оскільки всі необоротні деформації є деформаціями повзучості.

Якщо ж межу плинності матеріалу перевищено, то одночасно є деформації і пластичності, і повзучості. З'являється проблема збалансованого розподілу повної деформації на пружні, температурні, пластичності та повзучості. Неминучим є ітераційний процес. Хоча навантаження вважаємо квазістатичним, тобто досить повільним, пластичні деформації розвіваються значно швидше, ніж деформації повзучості, тому логічно спочатку припустити розвиток деформацій пластичності (зрозуміло, поряд з пружними і температурними). Проводиться попереднє обчислення напружень відповідно до алгоритму підрозділу 22.3. Потім обчислюються деформації повзучості згідно з алгоритмом підрозділу 22.4.

Виникає питання про взаємовплив деформацій пластичності і повзучості на процеси повзучості і пластичності відповідно. Ця проблема не має однозначного вирішення, але, на думку Ю.М. Работнова (дуже авторитетного вченого з питань повзучості), за малого рівня деформацій впливом пластичних деформацій на процес повзучості можна знехтувати, а от навпаки – не можна.

Ми розглядали малі деформації. Тому можемо припустити, що немає впливу пластичних деформацій на процес повзучості. Для врахування впливу деформацій повзучості на пластичність, у припущенні про навантаження, близьке до пропорційного, будемо додавати інтенсивність деформацій повзучості та накопичену пластичну деформацію. При використанні виразу типу (22.31) це відбувається автоматично, а типу (22.6) – у рівняннях (22.41) і наступних необхідно замість χ_0 використовувати $\chi_0 + \varepsilon_u^c$.

© К.М. Рудаков, 2025

22.7. Побудований на основі деформаційної теорії пластичності алгоритм термопластичності ізотропного матеріалу з ізотропним зміцненням

Підставимо рівняння стану (13.35) (що визначається експериментально), записане в більш загальному вигляді:

$$\sigma_u = K(\varepsilon_u^a, \theta, \sigma_V), \tag{22.83}$$

в закон зміни форми деформаційної теорії пластичності (13.34); в матричній формі, з урахуванням $\varepsilon_u^a = \varepsilon_u - \varepsilon_u^\theta$:

$$\{\breve{e}^a\} = \frac{1}{2G(\theta)}\varphi \cdot \{S\}; \quad \{\breve{e}^a\} = \{\breve{\varepsilon}^a\} - \{\varepsilon_V^a\}; \quad \varphi = \frac{3G(\theta)\cdot\varepsilon_u^a}{\sigma_u} \geq 1. \tag{22.84}$$

де $G(\theta)$ – модуль зсуву; θ – температура. З урахуванням (22.83) функціонал

$$\varphi = \frac{3G(\theta)\cdot\varepsilon_u^a}{K(\varepsilon_u^a, \theta, \sigma_V)}. \tag{22.85}$$

Для (22.85) інтенсивність "активних" деформацій ε_u^a отримаємо, використовуючи компоненти вектора деформацій та принцип суперпозиції деформацій різної природи (повзучість відсутня):

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^e\} + \{\varepsilon^p\} + \{\varepsilon^\theta\} + \{\varepsilon\}_0 = \{\varepsilon^a\} + \{\varepsilon^\theta\} + \{\varepsilon\}_0, \tag{22.86}$$

де $\{\varepsilon^\theta\} = \{\overline{\alpha}_\theta\}\Delta\theta$ (див. формулу (22.10-б)), а $\Delta\theta$ відраховується від початкового розподілу температур. Отримаємо, враховуючи вирази (22.5)

$$\{\varepsilon^a\} = \{\varepsilon^e\} + \{\varepsilon^p\} = \{\varepsilon\} - \{\overline{\alpha}_\theta\}\Delta\theta - \{\varepsilon\}_0 = [B]\{q\}_e - \{\overline{\alpha}_T\}\Delta\theta - \{\varepsilon\}_0. \tag{22.87}$$

Щоб підрахувати останню невідому величину σ_V, що залишалася у (22.85), використаємо закон пружної зміни об'єму (пластичної нестискувальності) (13.33), з якого

$$\sigma_V = 3k\varepsilon_V^a, \quad \text{де:} \quad 3k = E/(1-2\mu); \quad \varepsilon_V^a = \delta_{mn}\varepsilon_{mn}^a/3. \tag{22.88}$$

Отже, для (22.85) всі величини: ε_u^a, θ, σ_V та φ є відомими.

Напруження визначимо, використовуючи перший вираз з (22.84):

$$\{\sigma\} = \{S\} + \{\sigma_V\} = \frac{2G(\theta)}{\varphi}(\{\breve{\varepsilon}^a\} - \{\varepsilon_V^a\}) + \{\sigma_V\}. \tag{22.89}$$

Умова $\varphi \neq 0$ виконується завжди, оскільки своє мінімальне значення функціонал φ приймає за відсутності пластичних деформацій: для пружно-ізотропного матеріалу $\varphi = 1$.

Значення пластичних деформацій легко отримати з виразу (22.87), використовуючи закон Гука:

$$\{\varepsilon^p\} = \{\varepsilon^a\} - \{\varepsilon^e\} = \{\varepsilon^a\} - [D]^{-1}\{\sigma\}, \tag{22.90}$$

де $\{\varepsilon^a\}$ вже підраховано згідно з (22.87).

22.8. Завершення

Запропоновано величезну кількість теорій пластичності та повзучості, розгляд яких є неможливим в рамках учбового курсу. В залежності від

© К.М. Рудаков, 2025

специфіки конкретних фізичних рівнянь чисельні алгоритми можуть бути більш-менш складними. Однак у кожному разі варто віддавати перевагу алгоритмам, які роблять збалансований розподіл деформацій різних типів у точці тіла навіть із використанням локальних ітерацій, не переносячи цю проблему на глобальні ітерації розв'язування нелінійної системи алгебраїчних рівнянь, оскільки в останньому випадку кількість таких ітерацій збільшується, що займає більше часу при розрахунках крайової задачі.

Контрольні питання до підрозділу 22.1

1. Запишіть, як виглядає закон Гука у матричному запису.
2. Запишіть, як виглядає формула обчислення температурних деформацій у матричному запису.

Контрольні питання до підрозділу 22.2

1. Які напруження обчислюються за формулами (22.14)?
2. Який ефект виникає від урахування закону пружної зміни об'єму матеріалу?

Контрольні питання до підрозділу 22.3

1. В якому випадку для теорії пластичності Прандтля-Рейса застосовується метод радіального повернення Уілкінса?
2. Що визначає параметр Одквіста?
3. Які три випадку моделі матеріалу зручно моделювати із застосуванням параметра Одквіста?
4. Чому вирази (22.50) та (22.51) є умовами активного навантаження?

Контрольні питання до підрозділу 22.4

1. Як формулюються три закону технічної теорії повзучості – теорії зміцнення?
2. Яка математична теорема з теорії інтегралів застосовується при прямому інтегруванні у часі рівнянь теорії повзучості?
3. На основі яких даних визначається функція повзучості Φ?
4. Рівняння (22.61) має 2 невідомі величини. Які властивості векторів $\{\Delta\breve{\varepsilon}^c\}$, $<\{S\}>$ та $\{\breve{S}\}$ застосовуються для отримання ще одного рівняння?
5. Чи допускає вираз (22.72) зниженні рівня навантаження в точці тіла?
6. Чи суперечить формула (22.72) випадку $\omega = 0$, тобто явній схемі?

Контрольні питання до підрозділу 22.5

1. Яка проблема виникає при застосуванні за функціонал повзучості виразу $\Phi = \dot{\varepsilon}_u^c = \alpha(\theta)(\varepsilon_u^c)^{-\nu(\theta)}(\sigma_u)^{\mu(\theta)}$?
2. За якої умови визначається початкове значення інтенсивності деформації повзучості, яке надає функції $\Delta\bar{\varepsilon}_u^c$ необхідну властивість лише спадати?
3. Яке додаткове обмеження виявилося при визначенні початкового значення інтенсивності деформації повзучості, яке надає функції $\Delta\bar{\varepsilon}_u^c$ необхідну властивість лише спадати?

Контрольні питання до підрозділу 22.7

1. Як обчислити інтенсивність температурних деформацій ε_u^θ?
2. В яких випадках можна застосовувати деформаційну теорію пластичності?

© К.М. Рудаков, 2025

Розділ 23

АЛГОРИТМИ СТВОРЕННЯ СИСТЕМ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕРМОПРУЖНОСТІ, ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТІ ТА ПОВЗУЧОСТІ ЗА МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

На початку Розділу 22 було стисло описано загальний алгоритм розв'язування крайової задачі про напружено-деформований стан (НДС) тіла. В підрозділах цього Розділу розглянуто проблеми, що виникають при розрахунку НДС в точці (елементарному об'ємі) тіла (пункт л) загального алгоритму). Тут розглянемо пункт ж) загального алгоритму. Нагадаємо, що йдеться про породження (на основі МСЕ) системи алгебраїчних рівнянь (САР). Для лінійної термопружної задачі це буде система лінійних алгебраїчних рівнянь – СЛАР. Для нелінійної задачі алгоритм побудови САР залежить від використаного ітераційного методу розв'язування нелінійних задач.

Щоб отримати САР для нелінійної крайової задачі, можна скористатися, як мінімум, трьома сучасними підходами, а саме застосувати:

- метод Бубнова-Гальоркіна (див. п.17.1.4);
- метод зважених похибок наближення і процедуру отримання послабленої форми цього методу (див. п.17.1.5 та п.17.3.2);
- варіаційні принципи (див. п.17.1.6).

Для методу Бубнова-Гальоркіна необхідно досліджувати, чи є основний оператор потенційним. Обидва інші підходи – загальні, без обмежень. Всі ці методи дають ідентичні результати. Однак застосування принципу можливих переміщень менш трудомістке, тому є сенс надати перевагу йому. Ще одна причина цього – прагнення використовувати загальні принципи при побудові алгоритмів наближень, в даному випадку – *принципу консервативності* (див. Передмову). Метод зважених похибок наближення і процедуру його послаблення вже задіяли в Розділі 21. Тут продемонструємо застосування функціонала (13.31), а саме

$$\Psi(\delta)=\int\limits_{\Omega}\sigma_{mn}\delta\varepsilon_{mn}d\Omega-\int\limits_{\Omega}\widehat{O}_m\delta u_m d\Omega-\int\limits_{S_P}\widehat{P}_m\delta u_m dS=0. \qquad (23.1\text{-а})$$

Функціонал (23.1-а) в поєднанні з кінематичними ГУ на поверхні S_U:

$$u_m\ \big|_{S_U}=\widehat{u}_m \qquad (23.2)$$

а також з рівнянням (13.16) $\varepsilon_{ij}=0.5(\nabla_i u_j+\nabla_j u_i)$, визначає незліченну множину можливих (віртуальних) НДС. Дійсний НДС – один з віртуальних, але додатково задовольняє рівнянням зв'язку між напруженнями та деформаціями.

Крайові задачі термопластичності суттєво нелінійні. Є декілька ітераційних алгоритмів (методів) їх розв'язування, досить добре вивчених. При поста-

© К.М. Рудаков, 2025

новці крайової задачі в переміщеннях це методи: додаткових навантажень, змінних параметрів пружності, дотичної жорсткості та пружних довантажень. Розглянемо ці методи.

Незалежно від методу, що застосовується, весь процес навантаження тіла розбивається на етапи, на кожному з яких розв'язується крайова задача. Результати поточного етапу є початковими умовами для наступного етапу. В окремому випадку розглядається лише один етап навантаження.

23.1. Отримання САР при розв'язуванні крайової задачі лінійної термопружності на основі методу додаткових навантажень

Застосуємо формулу (22.16), а саме

$$\{\sigma\} = [D]\left([B]\{q\}_e - \{\overline{\alpha}_\theta\}\Delta\theta - \{\varepsilon\}_0\right), \tag{23.3}$$

а також введемо вектори: $\{\widehat{O}\} = \{\widehat{O}_1, \widehat{O}_2, \widehat{O}_3\}^T$ – об'ємних та $\{\widehat{p}\} = \{\widehat{p}_1, \widehat{p}_2, \widehat{p}_3\}^T$ – поверхневих навантажень. Нагадаємо, що в (23.3) матриця $[D]$ є матрицею модулів пружності (для ізотропного матеріалу дається формулою (22.9)); матриця $[B]$ є матрицею диференціювання, яка введена у формулі (22.5).

Функціонал (23.1-а) з урахуванням матричних позначень та можливості суперпозиції по СЕ робіт зовнішніх і внутрішніх сил, зумовленої тим, що СЕ *не перетинаються*, буде мати вигляд:

$$\Psi(\delta) = \sum_e \int_{\Omega^e} \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} d\Omega - \sum_e \int_{\Omega^e} \{\delta u\}^T \{\widehat{O}\} d\Omega - \sum_e \int_{S_P^e} \{\delta u\}^T \{\widehat{p}\} dS = 0, \tag{23.1-б}$$

де знак $\sum_e$ означає алгебраїчне додавання по всіх СЕ, що містять актуальний ступінь свободи вузла.

З використанням (22.3) й (22.5) маємо, що (матриці $[B]$ та $[\varphi]$ не варіюються) $\{\delta\varepsilon\} = \delta\left([B]\{q\}_e\right) = [B]\{\delta q\}_e$, $\{\delta u\} = \delta\left([\phi]\{q\}_e\right) = [\phi]\{\delta q\}_e$; $\{\delta\varepsilon\}^T = \left([B]\{\delta q\}_e\right)^T = \{\delta q\}_e^T [B]^T$ та $\{\delta u\}^T = \left([\phi]\{\delta q\}_e\right)^T = \{\delta q\}_e^T [\phi]^T$. Функціонал (23.1-б) з урахуванням цих формул та формули (23.3) записується як

$$\Psi(\delta) = \sum_e \int_{\Omega^e} \{\delta q\}_e^T [B]^T [D]\left([B]\{q\}_e - \{\overline{\alpha}_T\}\Delta\theta - \{\varepsilon\}_0\right) d\Omega -$$
$$- \sum_e \int_{\Omega^e} \{\delta q\}_e^T [\phi]^T \{\widehat{O}\} d\Omega - \sum_e \int_{S_P^e} \{\delta q\}_e^T [\phi]^T \{\widehat{p}\} dS = 0. \tag{23.4}$$

Оскільки вектори $\{\delta q\}_e^T$ і $\{q\}_e$ не залежать від параметрів інтегрування, їх можна винести за межі інтегралів. З (23.4) отримаємо

$$\Psi(\delta) = \sum_e \{\delta q\}_e^T \int_{\Omega^e} [B]^T [D][B] d\Omega \cdot \{q\}_e -$$
$$- \sum_e \{\delta q\}_e^T \cdot \left(\int_{\Omega^e} [\phi]^T \{\widehat{O}\} d\Omega + \int_{S_P^e} [\phi]^T \{\widehat{p}\} dS - \int_{\Omega^e} [B]^T [D]\left(\{\overline{\alpha}_\theta\}\Delta\theta + \{\varepsilon\}_0\right) d\Omega \right) = 0. \tag{23.5}$$

Введемо матриці та вектори, перепишемо (23.5):

$$[K]_e = \int_{\Omega^e} [B]^T [D][B] d\Omega; \tag{23.6}$$

© К.М. Рудаков, 2025

$$\{P\}_e = \int\limits_{\Omega^e} [\phi]^T \{\widehat{O}\} d\Omega + \int\limits_{S_p^e} [\phi]^T \{\widehat{p}\} dS\,; \tag{23.7-а}$$

$$\{R\}_e = \int\limits_{\Omega^e} [B]^T [D] \left(\{\overline{\alpha}_\theta\} \Delta\theta + \{\varepsilon\}_0 \right) d\Omega\,; \tag{23.8}$$

$$\Psi(\delta) = \sum_e \{\delta q\}_e^T \left([K]_e \{q\}_e - \{P\}_e - \{R\}_e \right) = 0\,. \tag{23.9}$$

Оскільки значення компонент у $\{\delta q\}_e^T$ є довільними, то з (23.9) маємо СЛАР

$$[K]\{q\} = \{P\} + \{R\}\,, \tag{23.10}$$

яка після введення до неї кінематичних ГУ (23.2) розв'язується відносно глобального вектора дійсних переміщень $\{q\}$ у вузлах скінченно-елементної сітки. У (23.10) позначено додавання за ступенями свободи вузлів: $[K] = \sum_e [K]_e$; $\{P\} = \sum_e \{P\}_e$; $\{R\} = \sum_e \{R\}_e$. Вираз $\{q\} = \sum_e \{q\}_e$ не є вірним, оскільки вектор $\{q\}_e$ є результатом вибирання значень переміщень у вузлах СЕ із глобального вектора $\{q\}$ переміщень у вузлах.

Якщо на поверхні задано декілька (позначимо як $N_{\bar{P}}$) зосереджених сил $\bar{\bar{P}}_i$; $i = 1,...,N_{\bar{P}}$ з компонентами $(\overline{P}_m)_i$, то для СЕ з таким вузлом $\int\limits_{S_p^e} [\phi]^T \{\widehat{p}\} dS = \{\overline{P}\}$, оскільки у вузлах матриця $[\phi]$ має всі нульові значення, окрім одиниці в актуальному вузлу, а площа вироджується у точку. Введемо вектор зосередженої сили $\{\widehat{\overline{P}}\} = \{\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3\}^T$. Вираз (23.7-а) модифікується:

$$\{P\}_e = \int\limits_{\Omega^e} [\phi]^T \{\widehat{O}\} d\Omega + \int\limits_{S_p^e} [\phi]^T \{\widehat{p}\} dS + \sum_{i=1}^{N_{\bar{P}}} \{\widehat{\overline{P}}\}_i\,. \tag{23.7-б}$$

Матриця $[K]_e$ називається *матрицею жорсткості* СЕ, а матриця $[K]$ – (*глобальною*) *матрицею жорсткості* тіла. Вектор $\{P\}$ зумовлюється зовнішніми силовими навантаженнями і масовими силами; вектор $\{R\}$ – фіктивними навантаженнями, що відображають вплив температури та початкових деформацій. Наявність саме вектора $\{R\}$ як додаткового до вектора зовнішніх навантажень $\{P\}$ і обумовило назву: *метод додаткових навантажень*.

23.2. Алгоритм розв'язування крайової задачі термопружнопластичності та повзучості на основі методу додаткових навантажень

23.2.1. Отримання системи алгебраїчних рівнянь

Всі дії – аналогічні дій підрозділу 23.1. Застосуємо формулу (22.13), а саме:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon^e\} = [D]\left([B]\{q\}_e - \{\overline{\alpha}_\theta\}\Delta\theta - \{\varepsilon\}_0 \right) - [D](\{\varepsilon^p\} + \{\varepsilon^c\})\,. \tag{23.11}$$

© К.М. Рудаков, 2025

Функціонал (23.1-б) з урахуванням (22.3), (22.5), (23.11) і можливості суперпозиції по СЕ робіт зовнішніх і внутрішніх сил, зумовленої тим, що СЕ не перетинаються, записується як

$$\Psi(\delta)=\sum_e \int\limits_{\Omega^e} \{\delta q\}_e^T [B]^T \Big([D]\Big([B]\{q\}_e - \{\overline{\alpha}_\theta\}\Delta\theta - \{\varepsilon\}_0\Big) - [D](\{\varepsilon^p\}+\{\varepsilon^c\})\Big) d\Omega - $$

$$-\sum_e \int\limits_{\Omega^e} \{\delta q\}_e^T [\phi]^T \{\widehat{O}\} d\Omega - \sum_e \int\limits_{S_P^e} \{\delta q\}_e^T [\phi]^T \{\widehat{p}\} dS = 0. \qquad (23.12)$$

Оскільки вектори $\{\delta q\}_e^T$ і $\{q\}_e$ не залежать від параметрів інтегрування, їх можна винести за межі інтегралів. З (23.12) отримаємо

$$\Psi(\delta)=\sum_e \{\delta q\}_e^T \int\limits_{\Omega^e} [B]^T [D][B] d\Omega \cdot \{q\}_e +$$

$$-\sum_e \{\delta q\}_e^T \cdot \Bigg(\int\limits_{\Omega^e} [\phi]^T \{\widehat{O}\} d\Omega + \int\limits_{S_P^e} [\phi]^T \{\widehat{p}\} dS + \int\limits_{\Omega^e} [B]^T [D]\big(\{\overline{\alpha}_\theta\}\Delta\theta + \{\varepsilon\}_0\big) d\Omega +$$

$$+ \int\limits_{\Omega^e} [B]^T [D](\{\varepsilon^p\}+\{\varepsilon^c\}) d\Omega \Bigg) = 0. \qquad (23.13)$$

Позначимо:

$$\{H\}_e = \{H_0\}_e + \{\Delta H\}_e; \quad \{H_0\}_e = \int\limits_{\Omega^e} [B]^T [D](\{\varepsilon^p\}_0 + \{\varepsilon^c\}_0) d\Omega;$$

$$\{\Delta H\}_e = \int\limits_{\Omega^e} [B]^T [D](\{\Delta\varepsilon^p\} + \{\Delta\varepsilon^c\}) d\Omega; \qquad (23.14)$$

Вирази (23.6) … (23.8) для $[K]_e$, $\{P\}_e$ і $\{R\}_e$ зберігаються. Тоді

$$\Psi(\delta)=\sum_e \{\delta q\}_e^T \big([K]_e\{q\}_e - \{P\}_e - \{R\}_e - \{H\}_e\big) = 0. \qquad (23.15)$$

Оскільки значення компонент у $\{\delta q\}_e^T$ – довільні, то отримали нелінійну САР

$$[K]\{q\} = \{P\} + \{R\} + \{H\}, \qquad (23.16)$$

яка після введення до неї кінематичних ГУ (23.2) розв'язується відносно глобального вектора дійсних переміщень $\{q\}$ у вузлах скінченно-елементної сітки. В (23.16) позначено додавання за ступенями свободи вузлів: $\{H\} = \sum_e \{H\}_e$ (інші позначення введено в підрозділі 23.1). Вектори $\{R\}$ і $\{H\}$ зумовлені *фіктивними* навантаженнями, що відображають вплив температури і початкових деформацій (вектор $\{R\}$) і необоротних деформацій (вектор $\{H\}$).

23.2.2. Алгоритм збереження матриці САР незмінною

Матриця $[K]=[K(\theta)]$ незмінна лише при незмінному температурному полі або при нехтуванні температурною залежністю модулів пружності. Якщо врахувати, що існують методи розв'язування СЛАР, більшість дій яких проводиться без застосування правої частини системи (наприклад, розклад Холецького, див. п.п. 5.3.5 … 5.3.7), то є бажання зберігати матрицю САР незмінною для різних правих частин САР, тобто на різних етапах навантаження. Покажемо, як можна це зробити.

© К.М. Рудаков, 2025

Введемо у розгляд постійне поле температур $\theta^*(\vec{x})$. Зазвичай приймають $\theta^*(\vec{x}) = \theta(\vec{x},0)$. Для цієї температури можна обчислити

$$[D^*] = [D(\theta^*)]; \quad [K^*]_e = \int_{\Omega^e} [B]^T [D^*][B] d\Omega; \quad [K^*] = \sum_e [K^*]_e. \tag{23.17}$$

Замість (23.11) після введення незмінної матриці пружності будемо мати, що

$$\{\sigma\} = [D^*][B]\{q\}_e - ([D^*] - [D])\{\varepsilon\} - [D]\left(\{\overline{\alpha}_\theta\}\Delta\theta + \{\varepsilon\}_0 + \{\varepsilon^p\} + \{\varepsilon^c\}\right). \tag{23.18}$$

Проводячи вже викладену процедуру застосування функціонала (23.1-б), одержуємо САР

$$[K^*]\{q\} = \{P\} + \{R\} + \{H\} + \{Q\}, \tag{23.19}$$

де новий вектор

$$\{Q\} = \sum_e \{Q\}_e; \quad \{Q\}_e = \int_{\Omega^e} [B]^T ([D^*] - [D])\{\varepsilon\} d\Omega. \tag{23.20}$$

Таким чином, отримали САР (23.19), в якій глобальна матриця жорсткості системи $[K^*]$ є незмінною. Але така САР завдяки наявності вектора (23.20) нелінійна завжди, тому її є сенс застосовувати лише при одночасній наявності фізичної нелінійності задачі та багатьох кроків навантаження.

23.2.3. Алгоритми методу Ньютона-Рафсона розв'язування нелінійних САР у задачах термопружно-пластичності та повзучості

Для задачі термопружно-пластичності та/або повзучості САР (23.16) чи (23.19) завжди нелінійні. Нагадаємо, що алгоритм методу Ньютона-Рафсона розглянуто в п.8.3.1, а в підрозділі 21.2 його було застосовано для розв'язування нелінійної САР крайової задачі стаціонарної теплопровідності. Для задачі про НДС тіл є два варіанти застосування цього методу.

Варіант 1. Згідно з (23.19) на k-й ітерації введемо вектор-похибку $\{\psi\}^{(k)}$

$$\{\psi\}^{(k)} = \{P\} + \{R\} + \{H\}^{(k)} + \{Q\}^{(k)} - [K^*]\{q\}^{(k)}. \tag{23.21}$$

Очевидно, що він може бути нульовим лише при наявності точного розв'язку САР (23.19). Приймемо, що на k-й ітерації розв'язування САР (23.19) $\{\psi\}^{(k)} = \{\psi(\{q\}^{(k)})\} \neq \{0\}$, а на $(k+1)$-й вже $\{\psi\}^{(k+1)} = \{\psi(\{q\}^{(k+1)})\} \approx \{0\}$.

Позначимо

$$\{q\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k)} + \{\Delta q\}. \tag{23.22}$$

Розкладемо $\{\psi\}^{(k+1)}$ в ряд Тейлора в околі $\{\psi\}^{(k)}$ і обмежимося двома членами ряду:

$$\{\psi\}^{(k+1)} \approx \{\psi\}^{(k)} + \left(\frac{\partial\{\psi\}}{\partial\{q\}}\right)^{(k)} \{\Delta q\} \approx \{0\}. \tag{23.23}$$

Оскільки $\{P\}$, $\{R\}$ та $[K^*]$ не залежать від $\{q\}$, то

$$\frac{\partial\{\psi\}}{\partial\{q\}}\{\Delta q\} = \left(\frac{\partial\{H\}}{\partial\{q\}} + \frac{\partial\{Q\}}{\partial\{q\}} - [K^*]\right)\{\Delta q\}. \tag{23.24}$$

© К.М. Рудаков, 2025

Примітка 23.1. У загальному випадку вектор $\{P\}$ може залежати від $\{q\}$ (коли сили "слідкують" за переміщеннями), але й тоді зазвичай складовою $\partial\{P\}/\partial\{q\}$ нехтують.

Складовою $\partial\{H\}/\partial\{q\}$ зазвичай нехтують, оскільки обчислити її можна тільки наближено. А от

$$\frac{\partial\{Q\}}{\partial\{q\}}\{\Delta q\} = \frac{\partial}{\partial\{q\}}\left(\sum_e \int_{\Omega^e} [B]^T([D^*]-[D])\{\varepsilon\}d\Omega\right)\{\Delta q\} =$$

$$= \sum_e \int_{\Omega^e} [B]^T([D^*]-[D])\frac{\partial\{\varepsilon\}}{\partial\{q\}_e}\{\Delta q\}_e d\Omega = \sum_e \int_{\Omega^e} [B]^T([D^*]-[D])\{\Delta\varepsilon\}d\Omega. \qquad (23.25)$$

Враховано, що $\{\varepsilon\} = [B]\{q\}_e$; $\partial\left([B]\{q\}_e\right)/\partial\{q\}_e = [B]$, а $[B]\{\Delta q\}_e = \{\Delta\varepsilon\}$.

Отже,

$$\frac{\partial\{\psi\}}{\partial\{q\}}\{\Delta q\} \approx \sum_e \int_{\Omega^e} [B]^T([D^*]-[D])\{\Delta\varepsilon\}d\Omega - [K^*]\{\Delta q\}. \qquad (23.26)$$

Згідно з основною формулою методу Ньютона-Рафсона (23.23), із застосуванням (23.26) отримаємо для $(k+1)$-ї ітерації СЛАР

$$[K^*]\{\Delta q\} = \{\psi\}^{(k)} + \sum_e \int_{\Omega^e} [B]^T([D^*]-[D])\{\Delta\varepsilon\}d\Omega \qquad (23.27)$$

відносно вектору $\{\Delta q\}$, де вектор $\{\psi\}^{(k)}$ відповідає формулі (23.21). Позначимо:

$$\{\psi^*\}^{(k)} = \{\psi\}^{(k)} + \sum_e \int_{\Omega^e} [B]^T([D^*]-[D])\{\Delta\varepsilon\}d\Omega. \qquad (23.28)$$

Тоді СЛАР (23.27) прийме вигляд

$$[K^*]\{\Delta q\} = \{\psi^*\}^{(k)}. \qquad (23.29)$$

Але виразом (23.21) для обчислення $\{\psi\}^{(k)}$ користуватися незручно, оскільки він містить добуток глобальної матриці на вектор. Виявляється, вектор похибки наближення можна обчислювати в інший спосіб.

Якщо застосувати функціонал (23.1-б), не виражаючи вектор $\{\sigma\}$ через деформації, кінець-кінцем отримаємо, що

$$\sum_e \int_{\Omega^e} [B]^T\{\sigma\}d\Omega = \{P\}. \qquad (23.30)$$

З (23.30) одержуємо вектор похибки наближення

$$\{\psi\}^{(k)} = \{P\} - \sum_e \int_{\Omega^e} [B]^T\{\sigma\}^{(k)}d\Omega. \qquad (23.31)$$

Для отримання за допомогою (23.31) вектору-похибки $\{\psi^*\}^{(k)}$ для СЛАР (23.29) застосуємо формулу (23.28). Отже, остаточно

$$\{\psi^*\}^{(k)} = \{P\} - \sum_e \int_{\Omega^e} [B]^T\{\sigma\}^{(k)}d\Omega + \sum_e \int_{\Omega^e} [B]^T([D^*]-[D])\{\Delta\varepsilon\}d\Omega =$$

$$= \{P\} - \sum_e \int_{\Omega^e} [B]^T\left(\{\sigma\} + ([D]-[D^*])[B]\{\Delta q\}_e\right)^{(k)}d\Omega. \qquad (23.32)$$

Початковий вектор $\{\psi^*\}^{(0)}$ зручно отримати з (23.28) і (23.21), враховуючи, що при цьому $\{q\}^{(0)} = \{\Delta q\} = \{Q\}^{(0)} = \{\Delta H\}^{(0)} = \{0\}$, тому:

© К.М. Рудаков, 2025

$$\{\psi^*\}^{(0)} = \{\psi\}^{(0)} = \{P\} + \{R\} + \{H\}^{(0)}, \tag{23.33}$$

де для вектору $\{H\}^{(0)} = \sum_e \{H\}_e^{(0)}$ відомі тільки (але це – важлива складова!)

$$\{H\}_e^{(0)} = \int_{\Omega^e} [B]^T [D](\{\varepsilon^p\}_0 + \{\varepsilon^c\}_0) d\Omega . \tag{23.34}$$

Очевидно, що в лінійному випадку (пружність) $\{H_0\} = \{\Delta H\}^{(k)} = \{0\}$, однак САР (23.29) залишається нелінійною, оскільки невідомим є вектор $\{Q\}$. Для усунення нелінійності необхідно повернутися до глобальної матриці $[K]$, тоді відповідно до (23.16) отримаємо лінійну САР

$$[K]\{\Delta q\} = \{P\} + \{R\}. \tag{23.35}$$

Тоді (у випадку лінійної пружності) ітерацій не буде.

Алгоритм методу Ньютона-Рафсона має високу швидкість збіжності, яка дещо зменшується при нехтуванні $\partial\{H\}/\partial\{q\}$ та $\partial\{Q\}/\partial\{q\}$.

Варіант 2. Є ще один варіант застосування алгоритму методу Ньютона-Рафсона. З (23.31) для (23.23) маємо, що

$$-\left(\frac{\partial\{\psi\}}{\partial\{q\}}\right)^{(k)} = -\left(\frac{\partial\{P\}}{\partial\{q\}} - \frac{\partial}{\partial\{q\}} \sum_e \int_{\Omega^e} [B]^T \{\sigma\} d\Omega\right)^{(k)} =$$

$$= \left(\sum_e \int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial\{q\}_e} [\left([B]^T \{\sigma\}\right) d\Omega\right)^{(k)} = \sum_e \int_{\Omega^e} [B]^T \frac{\partial\{\sigma\}^{(k)}}{\partial\{q\}_e} d\Omega = \sum_e \int_{\Omega^e} [B]^T [\underline{D}]^{(k)} [B] d\Omega . \tag{23.36}$$

Тут врахували, що $\partial\{P\}/\partial\{q\} \approx 0$, а також, що

$$\frac{\partial\{\sigma\}}{\partial\{q\}_e} = \frac{\partial\{\sigma\}}{\partial\{\varepsilon\}} \frac{\partial\{\varepsilon\}}{\partial\{q\}_e} = [\underline{D}] \frac{\partial\{\varepsilon\}}{\partial\{q\}_e} = [\underline{D}][B], \tag{23.37}$$

оскільки згідно з (22.5), а саме $\{\varepsilon\} = [B]\{q\}_e$, похідна

$$\partial\{\varepsilon\}/\partial\{q\}_e = [B]. \tag{23.38}$$

В інтегралі (23.36) залишилося визначитися з виразом для матриці

$$[\underline{D}] = \partial\{\sigma\}/\partial\{\varepsilon\}. \tag{23.39}$$

Про це йдеться в підрозділі 24.4. Позначимо

$$[\underline{K}]_e^{(k)} = \int_{\Omega^e} [B]^T [\underline{D}]^{(k)} [B] d\Omega ; \quad [\underline{K}]^{(k)} = \sum_e [\underline{K}]_e^{(k)} . \tag{23.40}$$

Згідно з основною формулою методу Ньютона-Рафсона (23.23), із застосуванням (23.36) і (23.40) отримали для $(k+1)$-ї ітерації СЛАР

$$[\underline{K}]^{(k)} \{\Delta q\} = \{\psi\}^{(k)} \tag{23.41}$$

відносно вектора $\{\Delta q\}$, де вектор $\{\psi\}^{(k)}$ відповідає формулі (23.31) на всіх ітераціях, окрім початкової, на якій застосовується вираз (23.33).

Це – не модифікований алгоритм Ньютона-Рафсона. Він не зберігає незмінною матрицю СЛАР в ітераціях, тому використовує найменшу кількість ітерацій. Але він потребує обчислення матриць $[\underline{D}]^{(k)} = (\partial\{\sigma\}/\partial\{\varepsilon\})^{(k)}$ в кожній точці СЕ та глобальної матриці жорсткості $[\underline{K}]^{(k)}$. І не факт, що загальний час розв'язку нелінійної крайової задачі буде меншим, ніж при засто-

© К.М. Рудаков, 2025

суванні алгоритму зі САР (23.29), яка має незмінну матрицю. Але саме цей, другий, варіант є найбільш популярним у використанні.

23.2.4. Повна схема алгоритму методу додаткових навантажень

Варіант 1. Алгоритм запишемо у вигляді, що враховує як вплив температури, так і необоротні деформації, а також застосовує незмінну матрицю жорсткості.

Призначимо $\{q\}_0 = \{P\}_0 = \{\bar{P}\}_0 = \{0\}$; t_0; $\{\theta^*\} = \{\theta\}_0$;

$[K^*] = \sum_e [K^*]_e = \sum_e \int_{\Omega^e} [B]^T [D^*][B] d\Omega$;

$[K^*] = [U]^T [W][U]$;

(*) Крок за часом Δt; час $t = t_0 + \Delta t$;

Розв'язуємо (при необхідності) задачу теплопровідності;

$\{P\} = \{P\}_0 + \{\Delta P\}$; $\{\Delta\theta\} = \{\theta\} - \{\theta\}_0$;

$k = 0$; $\{\Delta q\} = \{0\}$;

$\{\psi^*\}^{(0)} = \{P\} + \{R\} + \sum_e \int_{\Omega^e} [B]^T [D^*](\{\varepsilon^p\}_0 + \{\varepsilon^c\}_0 + \{\Delta\varepsilon^c\}_0) d\Omega$;

врахувати ГУ 1-го роду (23.2);

(**) $k = k + 1$;

$\{\eta\} = [U]^{-T}\{\psi^*\}^{(k-1)}$; $\{\mu\} = [W]^{-1}\{\eta\}$; $\{\Delta q\} = [U]^{-1}\{\mu\}$;

$\{q\}^{(k)} = \{q\}^{(k-1)} + \alpha \cdot \{\Delta q\}$;

В актуальних точках СЕ:

$\{\varepsilon\}^{(k)} = [B]\{q\}_e^{(k)}$; $\{\Delta\varepsilon\} = [B]\{\Delta q\}_e$;

$\{\sigma\}^{(k)} = \{\sigma(\{\varepsilon\}^{(k)}, \{\varepsilon^p\}^{(k)}, \{\varepsilon^c\}^{(k)}, \theta, t)\}$;

$\{\psi^*\}^{(k)} = \{P\} - \sum_e \int_{\Omega^e} [B]^T (\{\sigma\}^{(k)} + ([D] - [D^*])\{\Delta\varepsilon\}) d\Omega$.

Чи досягнуто збіжність? Якщо "ні", то перехід на (**). Інакше:

$\{q\}_0 = \{q\}^{(k)}$; $\{\sigma\}_0 = \{\sigma\}^{(k)}$; $\{P\}_0 = \{P\}$; $\{\theta\}_0 = \{\theta\}$; $t_0 = t$.

Чи закінчено процес навантаження?

Якщо "ні", то перехід на (*).

Інакше процес розв'язування крайової задачі завершено.

(23.42-а)

В (23.42-а) $\{\sigma\}^{(k)}$ – вектор напружень у точці СЕ на k-й ітерації; $[U], [W]$ – трикутна та діагональна матриці схеми Холецького з діагональною матрицею (див. п.5.3.7).

Особливості, що зумовлюють точність і ефективність алгоритму:

- у шостому рядку (23.42-а) $\{\Delta\varepsilon^c\}_0$ – значення $\{\Delta\varepsilon^c\}$, яке було би при збереженні на даному етапі навантаження рівня напружень $\{\sigma\}_0$. Інтеграл з $\{\Delta\varepsilon^c\}_0$ важливий в чисельній стійкості методу при наявності деформацій повзучості: він надає максимально можливу стійкість. Крім того, його наявність різко скорочує кількість глобальних ітерацій, тобто підвищує ефективність обчис-

© К.М. Рудаков, 2025

лення крайової задачі при врахуванні повзучості. Згідно з формулою (22.73) вектор

$$\{\Delta\breve{\varepsilon}^c\}_0 = \frac{3}{2}\frac{(\Delta\varepsilon_u^c)_0}{\breve{\sigma}_u}\{\breve{S}\}_0, \tag{23.43}$$

де $(\Delta\varepsilon_u^c)_0$ відповідає початку етапу навантаження. Оскільки на початок етапу $\Delta\sigma_u = 0$, то для (23.68) з (22.72) отримаємо, що

$$(\Delta\varepsilon_u^c)_0 = \frac{\overline{A}\Delta t}{1-(\partial\Phi/\partial\varepsilon_u^c)_0\,\omega\Delta t}. \tag{23.44}$$

- матриця САР є незмінною на всіх ітераціях і етапах навантаження;
- застосовано α – прискорення.

"Прискорювальний" коефіцієнт α дозволяє зменшити кількість ітерацій при врахуванні нелінійності, в даному випадку фізичної. На першій ітерації, яка може виявитися і чисто пружною, приймається $\alpha = 1$. З появою нелінійності (необоротних деформацій) призначається $\alpha = 2$; $2+\Delta\alpha$ і т.д., де $\Delta\alpha$ рекомендується приймати зростаючим кратне 0.5. Таке підвищення значення α проводиться аж до першого перевищення норми $\left\|\{\psi^*\}^{(k+1)}\right\|$ над $1.2\cdot\left\|\{\psi^*\}^{(k)}\right\|$, тобто на 20 відсотків (можна й на інший відсоток), після чого приймається $\alpha = 1$. Пояснення – на рис.23.1. Саме при розвинених зонах необоротних деформацій застосування методики α – прискорення дозволяє значно зменшити кількість глобальних ітерацій. Чому? Тому, що ця процедура штучно (у обчисленнях) прискорює (обчислювальний) розвиток зон з необоротними деформаціями і самі необоротні деформації. Зниження загальної кількості ітерацій тим більше, чим більший розмір пластичних зон в тілі.

Примітка 23.2. Крім α – прискорення є й інші методи прискорення, складніші в реалізації.

Чотирнадцятий і наступний рядки в (23.42-а) означають обчислювальний блок прогнозу напружень $\{\sigma\}^{(k)}$ за заданим вектором $\{q\}_e^{(k)}$ і виконуються для всіх потрібних точок в СЕ. Від точності цього блоку залежить кількість загальних ітерацій, тобто ефективність усього алгоритму.

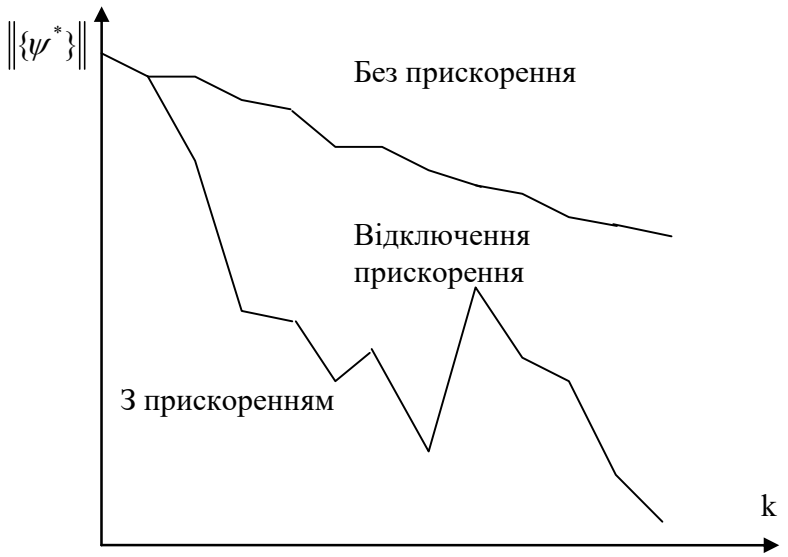


Рис.23.1. Характерне поводження норми вектора-похибки в ітераціях

Проблема полягає в тому, щоб у кожній матеріальній точці вектор повних

деформацій $\{\varepsilon\}=[B]\{q\}_e$ після вилучення з нього температурної складової, збалансовано розподілити між $\{\varepsilon^e\}$, $\{\varepsilon^p\}$ та $\{\varepsilon^c\}$. Відповідні алгоритми розглянуто в Розділі 22.

Варіант 2. Цей варіант відповідає варіанту 2 з п.23.2.3.

Призначимо $\{q\}_0=\{P\}_0=\{\overline{P}\}_0=\{0\}$; t_0; $\{\theta^*\}=\{\theta\}_0$;

(*) Крок за часом Δt; час $t=t_0+\Delta t$;

Розв'язуємо (при необхідності) задачу теплопровідності;

$\{P\}=\{P\}_0+\{\Delta P\}$; $\{\Delta\theta\}=\{\theta\}-\{\theta\}_0$;

$k=0$; $\{\Delta q\}=\{0\}$;

$\{\psi\}^{(0)}=\{P\}+\{R\}+\{H\}^{(0)}$

(**) $k=k+1$;

$[\underline{K}]^{(k)}=\sum\limits_e[\underline{K}]_e^{(k)}=\sum\limits_e\int\limits_{\Omega^e}[B]^T[\underline{D}]^{(k)}[B]d\Omega$; врахувати ГУ (23.2);

$\{\Delta q\}=\left([\underline{K}]^{(k)}\right)^{-1}\{\psi^*\}^{(k-1)}$;

$\{q\}^{(k)}=\{q\}^{(k-1)}+\{\Delta q\}$;

В актуальних точках СЕ:

$\{\varepsilon\}^{(k)}=[B]\{q\}_e^{(k)}$;

$\{\sigma\}^{(k)}=\{\sigma(\{\varepsilon\}^{(k)},\{\varepsilon^p\}^{(k)},\{\varepsilon^c\}^{(k)},\theta,t)\}$;

$\{\psi^*\}^{(k)}=\{P\}-\sum\limits_e\int\limits_{\Omega^e}[B]^T\{\sigma\}^{(k)}d\Omega$.

Чи досягнуто збіжність? Якщо "ні", то перехід на (**). Інакше:

$\{q\}_0=\{q\}^{(k)}$; $\{\sigma\}_0=\{\sigma\}^{(k)}$; $\{P\}_0=\{P\}$; $\{\theta\}_0=\{\theta\}$; $t_0=t$.

Чи закінчено процес навантаження?

Якщо "ні", то перехід на (*).

Інакше процес розв'язування крайової задачі завершено.

(23.42-б)

У цьому варіанті не можна застосовувати α – прискорення, матриця жорсткості збирається знову на кожній ітерації, але кількість ітерації – мінімальна, оскільки використовується не модифікований алгоритм Ньютона-Рафсона.

23.3. Інші алгоритми розв'язування нелінійних крайових задач

23.3.1. Метод змінних параметрів пружності

Метод змінних параметрів пружності запропонував І.А. Біргер для розв'язування крайових задач теорії пластичності.

Згідно з цим методом припускається можливість у явному вигляді отримати залежність типу узагальненого закону Гука. Узагальнюючи метод на термопружність, запишемо основне рівняння методу подібно до закону Гука:

$$\{\sigma\}=[\tilde{D}]\left(\{\varepsilon\}-\{\varepsilon^\theta\}-\{\varepsilon\}_0\right). \qquad (23.45)$$

© К.М. Рудаков, 2025

Продемонструємо метод на прикладі деформаційної теорії пластичності Іллюшина.

В явному вигляді, використовуючи формули (13.33) і (22.84), можна отримати матрицю, аналогічну за заповненням матриці (22.9):

$$[\tilde{D}] = 2\tilde{G}\cdot\begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} & \tilde{b} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{b} & \tilde{a} & \tilde{b} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{b} & \tilde{b} & \tilde{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \tag{23.46}$$

де $2\tilde{G} = 2G(\theta)/\varphi = \tilde{E}/(1+\tilde{\mu})$; $\tilde{a} = (1-\tilde{\mu})/(1-2\tilde{\mu})$; $\tilde{b} = \tilde{\mu}/(1-2\tilde{\mu})$; $c = 0.5$;

$$\tilde{E} = 3E/\left[2(1+\mu)\varphi + (1-2\mu)\right]; \tag{23.47}$$

$$\tilde{\mu} = \frac{(1+\mu)\varphi - (1-2\mu)}{2(1+\mu)\varphi + (1-2\mu)}; \tag{23.48}$$

$E = E(\theta)$ – модуль Юнга; $\mu = \mu(\theta)$ – коефіцієнт Пуассона; $2G = E/(1+\mu)$.

Функціонал φ для виразів (23.47) і (23.48) отримано раніше (див. формулу (22.85)), а саме:

$$\varphi = \frac{3G(\theta)\cdot\varepsilon_u^a}{K(\varepsilon_u^a,\, \theta,\, \sigma_V)}. \tag{23.49}$$

Функціонал (23.1-б) з урахуванням (22.3), (22.5), (23.46) і можливості суперпозиції по СЕ робіт зовнішніх і внутрішніх сил, зумовленої тим, що СЕ не перетинаються, записується як

$$\Psi(\delta) = \sum_e \int_{\Omega^e} \{\delta q\}_e^T [B]^T [\tilde{D}][B]\{q\}_e d\Omega - \sum_e \int_{\Omega^e} \{\delta q\}_e^T [B]^T [\tilde{D}]\left(\{\varepsilon^\theta\} + \{\varepsilon\}_0\right) d\Omega - $$
$$- \sum_e \int_{\Omega^e} \{\delta q\}_e^T [\phi]^T \{\hat{O}\} d\Omega - \sum_e \int_{S_P^e} \{\delta q\}_e^T [\phi]^T \{\hat{p}\} dS = 0. \tag{23.50}$$

Позначимо нові вирази:

$$[\tilde{K}]_e = \int_{\Omega^e} [B]^T [\tilde{D}][B] d\Omega; \tag{23.51}$$

$$\{\tilde{R}\}_e = \int_{\Omega^e} [B]^T [\tilde{D}]\left(\{\varepsilon^\theta\} + \{\varepsilon\}_0\right) d\Omega. \tag{23.52}$$

Тоді з урахуванням позначення (23.7) для $\{P\}_e$, з (23.50) отримуємо вираз

$$\Psi(\delta) = \sum_e \{\delta q\}_e^T \left([\tilde{K}]_e \{q\}_e - \{P\}_e - \{\tilde{R}\}_e \right) = 0. \tag{23.53}$$

Оскільки значення компонент у $\{\delta q\}_e^T$ є довільними, то отримуємо САР

$$[\tilde{K}]\{q\} = \{P\} + \{\tilde{R}\}, \tag{23.54}$$

яка після введення до неї кінематичних ГУ (23.2) розв'язується відносно глобального вектора дійсних переміщень $\{q\}$ у вузлах сітки СЕ.

© К.М. Рудаков, 2025

У САР (23.54) позначено додавання за ступенями свободи вузлів: $[\tilde{K}]=\sum_e [\tilde{K}]_e$; $\{\tilde{R}\}=\sum_e \{\tilde{R}\}_e$.

Матриця $[\tilde{K}]$ і вектор $\{\tilde{R}\}$ нелінійно залежать від $\{q\}$. Тому необхідно організовувати ітераційний процес розв'язування нелінійної САР (23.54).

Найпростіше реалізувати метод простих ітерацій:

$$[\tilde{K}(\{q\}^{(k)})]\{q\}^{(k+1)}=\{P\}+\{\tilde{R}\}^{(k)}. \qquad (23.55)$$

Можна створити САУ з незмінною матрицею жорсткості $[K^*]$ (див. формулу (23.17)), якщо у (23.50) замість $[\tilde{D}]$ ввести $[D^*]-[D^*]+[\tilde{D}]$, а також врахувати, що $-([D^*]-[\tilde{D}])[B]\{q\}_e=-([D^*]-[\tilde{D}])\{\varepsilon\}$. Позначимо:

$$\{\tilde{Q}^*\}_e=\int_{\Omega^e}[B]^T([D^*]-[\tilde{D}])\{\varepsilon\}d\Omega;\quad \{\tilde{Q}^*\}=\sum_e\{\tilde{Q}^*\}_e. \qquad (23.56)$$

Тоді замість (23.54) отримуємо САР

$$[K^*]\{q\}=\{P\}+\{\tilde{R}\}+\{\tilde{Q}^*\}. \qquad (23.57)$$

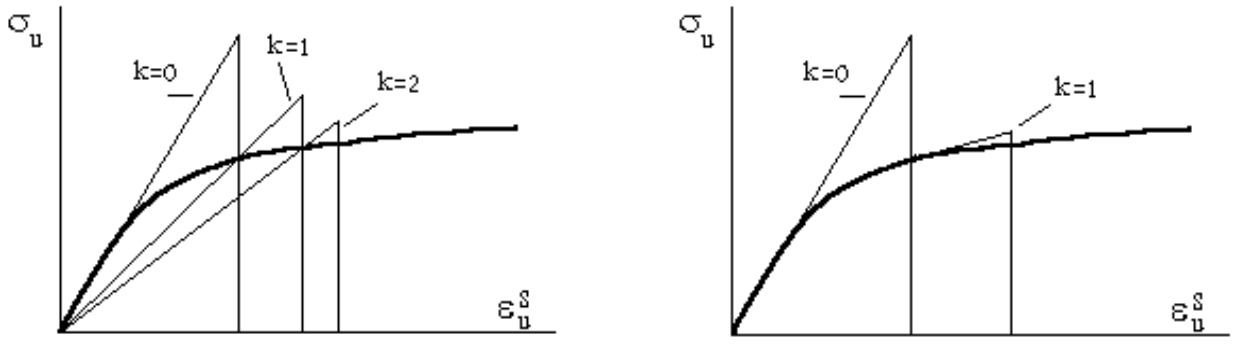
Згідно з методом простих ітерацій:

$$[K^*]\{q\}^{(k+1)}=\{P\}+\{\tilde{R}\}^{(k)}+\{\tilde{Q}^*\}^{(k)}. \qquad (23.58)$$

Щодо алгоритму методу Ньютона-Рафсона (див. п.23.2.3), то його реалізація в цьому випадку вимагає або обчислення матриці $[\underline{D}]=\partial\{\sigma\}/\partial\{q\}_e$, що можливо тільки у наближеному варіанті (див. підрозділ 24.4), або зберігання глобальної матриці з попередньої ітерації, що не завжди доцільно.

Ітерації тривають до виконання умови збіжності, вираженої, наприклад, через умову стабілізації модуля вектора $\{q\}$. При відсутності необоротних деформацій (зокрема, на першій ітерації першого етапу навантаження) $\varphi=1$ (пружна деформація), при цьому $[\tilde{D}]=[D]$, $[\tilde{K}]=[K]$, $\{\tilde{R}\}=\{R\}$; $\{\tilde{H}\}=\{0\}$.

Геометричну інтерпретацію методу змінних параметрів пружності *для точки тіла з необоротними деформаціями* зображено на рис.23.2-а.



а) **б)**

Рис.23.2 Геометрична інтерпретація методів змінних параметрів пружності (а) і дотичної жорсткості (б) для точки тіла з необоротними деформаціями

© К.М. Рудаков, 2025

23.3.2. Про методи дотичної жорсткості і пружних довантажень у задачах термопружно-пластичності

Метод дотичної жорсткості в задачах пружно-пластичності ще називають *методом Ямада*, за прізвищем його автора. Метод було створено для розв'язування задач пружно-пластичності з використанням теорії пластичності типу теорії плинності (в приростах). Ямада запропонував у явному вигляді одержувати вираз типу узагальненого закону Гука в приростах.

При відсутності температурних деформацій це є співвідношення

$$\{\Delta\sigma\} = [\tilde{\tilde{D}}](\{\Delta\varepsilon^e\} + \{\Delta\varepsilon^p\}) = [\tilde{\tilde{D}}]\{\Delta\varepsilon^a\}. \tag{23.59}$$

Узагальнимо метод на термопружно-пластичність.

З повного диференціала закону Гука, записаного відносно пружних деформацій $\{\varepsilon^e\} = [D]^{-1}\{\sigma\}$, можна легко отримати, що

$$\{\Delta\varepsilon^e\} = [D]^{-1}\{\Delta\sigma\} + \frac{\partial[D]^{-1}}{\partial\theta}\Delta\hat{\theta}\{\sigma\}, \text{ або}$$

$$\{\Delta\varepsilon^e\} = \{\varepsilon^e\} - \{\varepsilon^e\}_0 = [D]^{-1}\{\sigma\} - [D]_0^{-1}\{\sigma\}_0 =$$

$$= [D]^{-1}(\{\sigma\}_0 + \{\Delta\sigma\}) - [D]_0^{-1}\{\sigma\}_0 =$$

$$= [D]^{-1}\{\Delta\sigma\} + ([D]^{-1} - [D]_0^{-1})\{\sigma\}_0 = [D]^{-1}\{\Delta\sigma\} + \{\Delta\varepsilon^{eT}\}. \tag{23.60}$$

Вектор $\{\Delta\varepsilon^{e\theta}\} = \frac{\partial[D]^{-1}}{\partial\theta}\Delta\hat{\theta}\{\sigma\} = ([D]^{-1} - [D]_0^{-1})\{\sigma\}_0$ вперше запровадив І.А. Біргер. З (23.60) випливає, що

$$\{\Delta\sigma\} = [D]\left(\{\Delta\varepsilon^e\} - \{\Delta\varepsilon^{e\theta}\}\right). \tag{23.61}$$

Порівнюючи (23.61) з (23.59), приходимо до висновку, що основне співвідношення методу дотичної жорсткості повинно містити в круглих дужках правої частини вектор ($-\{\Delta\varepsilon^{e\theta}\}$), тобто:

$$\{\Delta\sigma\} = [\tilde{\tilde{D}}]\left(\{\Delta\varepsilon^a\} - \{\Delta\varepsilon^{e\theta}\}\right) = [\tilde{\tilde{D}}]\left(\{\Delta\varepsilon\} - \{\bar{\alpha}_\theta\}\Delta\hat{\theta} - \{\Delta\varepsilon^{e\theta}\}\right). \tag{23.62}$$

Застосуємо (23.62) для функціонала (23.1-б), враховуючи, що $\{\sigma\} = \{\sigma\}_0 + \{\Delta\sigma\}$. Отримаємо, що

$$\Psi(\delta) = \sum_e \{\delta q\}_e^T \int_{\Omega^e} [B]^T [\tilde{\tilde{D}}][B] d\Omega \cdot \{\Delta q\}_e +$$

$$+ \sum_e \{\delta q\}_e^T \cdot \left(\int_{\Omega^e} [B]^T \{\sigma\}_0 d\Omega - \int_{\Omega^e} [\phi]^T \{\hat{O}\} d\Omega - \int_{S_P^e} [\phi]^T \{\hat{p}\} dS - \right.$$

$$\left. - \int_{\Omega^e} [B]^T [\tilde{\tilde{D}}]\{\bar{\alpha}_\theta\}\Delta\hat{\theta} d\Omega - \int_{\Omega^e} [B]^T [\tilde{\tilde{D}}]\{\Delta\varepsilon^{e\theta}\} d\Omega \right) = 0. \tag{23.63}$$

Позначимо:

$$[\tilde{\tilde{K}}]_e = \int_{\Omega^e} [B]^T [\tilde{\tilde{D}}][B] d\Omega; \tag{23.64}$$

$$\{\Delta\tilde{\tilde{R}}\}_e = \int_{\Omega^e} [B]^T [\tilde{\tilde{D}}]\{\bar{\alpha}_\theta\}\Delta\hat{\theta} d\Omega + \int_{\Omega^e} [B]^T [\tilde{\tilde{D}}]\{\Delta\varepsilon^{e\theta}\} d\Omega; \tag{23.65}$$

© К.М. Рудаков, 2025

$$\{S_0\}_e = \int_{\Omega^e} [B]^T \{\sigma\}_0 d\Omega . \qquad (23.66)$$

Тоді з урахуванням раніше введеного вектору (23.7) функціонал (23.1-б)

$$\Psi(\delta) = \sum_e \{\delta q\}_e^T \left([\tilde{\tilde{K}}]_e \{\Delta q\}_e + \{S_0\}_e - \{P\}_e - \{\Delta\tilde{\tilde{R}}\}_e \right) = 0 . \qquad (23.67)$$

Оскільки значення компонент у $\{\delta q\}_e^T$ є довільними, то отримаємо САР

$$[\tilde{\tilde{K}}]\{\Delta q\} = \{P\} - \{S_0\} + \{\Delta\tilde{\tilde{R}}\} , \qquad (23.68)$$

яка після введення до неї кінематичних ГУ (23.2) розв'язується відносно глобального вектора приростів дійсних переміщень $\{\Delta q\}$ у вузлах скінченно-елементної сітки. В (23.68) позначено додавання за ступенями свободи вузлів: $[\tilde{\tilde{K}}] = \sum_e [\tilde{\tilde{K}}]_e$; $\{S_0\} = \sum_e \{S_0\}_e$; $\{\Delta\tilde{\tilde{R}}\} = \sum_e \{\Delta\tilde{\tilde{R}}\}_e$.

Матриця $[\tilde{\tilde{K}}]$ і вектор $\{\tilde{\tilde{R}}\}$ нелінійно залежать від $\{\Delta q\}$. Тому необхідно організовувати ітераційний процес розв'язування нелінійної САР (23.68). Найпростіше реалізувати метод простих ітерацій:

$$[\tilde{\tilde{K}}(\{\Delta q\}^{(k)})]\{\Delta q\}^{(k+1)} = \{P\} - \{S_0\} + \{\Delta\tilde{\tilde{R}}\}^{(k)} . \qquad (23.69)$$

Можна створити САУ з незмінною матрицею жорсткості $[K^*]$ (див. формулу (23.17)), якщо у (23.63) замість $[\tilde{\tilde{D}}]$ ввести $[D^*] - [D^*] + [\tilde{\tilde{D}}]$, а також врахувати, що $-([D^*] - [\tilde{\tilde{D}}])[B]\{\Delta q\}_e = -([D^*] - [\tilde{\tilde{D}}])\{\Delta\varepsilon\}$. Позначимо:

$$\{\Delta\tilde{\tilde{Q}}^*\}_e = \int_{\Omega^e} [B]^T ([D^*] - [\tilde{\tilde{D}}])\{\Delta\varepsilon\} d\Omega ; \quad \{\Delta\tilde{\tilde{Q}}^*\} = \sum_e \{\Delta\tilde{\tilde{Q}}^*\}_e . \qquad (23.70)$$

Тоді замість (23.68) отримаємо САР

$$[K^*]\{\Delta q\} = \{P\} - \{S_0\} + \{\Delta\tilde{\tilde{R}}\} + \{\Delta\tilde{\tilde{Q}}^*\} . \qquad (23.71)$$

Згідно з методом простих ітерацій:

$$[K^*]\{\Delta q\}^{(k+1)} = \{P\} - \{S_0\} + \{\Delta\tilde{\tilde{R}}\}^{(k)} + \{\Delta\tilde{\tilde{Q}}^*\}^{(k)} . \qquad (23.72)$$

Щодо алгоритму методу Ньютона-Рафсона (див. п.23.2.3), то його реалізація в цьому випадку вимагає або обчислення матриці $[\underline{D}] = \partial\{\sigma\} / \partial\{q\}_e$, що зазвичай можливо тільки у наближеному варіанті (див. підрозділ 24.4), або зберігання глобальної матриці з попередньої ітерації, що не завжди є доцільним.

Ітерації тривають до виконання умови збіжності, вираженої, наприклад, через умову стабілізації модуля вектора $\{\Delta q\}$. На першій ітерації $[\tilde{\tilde{D}}] = [D]$, при цьому $[\tilde{\tilde{K}}] = [K]$, $\{\Delta\tilde{\tilde{R}}\} = \{\Delta R\}$. Відомо, що (23.69) збігається значно швидше, ніж (23.55).

Геометричну інтерпретацію методу дотичної жорсткості *для точки тіла з необоротними деформаціями* зображено на рис.23.2-б.

У методі *пружних довантажень* припускається, що навантаження твердого тіла, що деформується, проводиться настільки *малими* приростами довантажень $\{\Delta\hat{O}\}$, $\{\Delta\hat{p}\}$ і малими змінами температурного поля $\Delta\hat{\theta}$, що

© К.М. Рудаков, 2025

реакція матеріалу тіла на ці зміни довантажень – *лінійна* (за рівняннями методу дотичної жорсткості). Послідовність кусково-лінійних реакцій наближено описує нелінійність у поведінці матеріалу. Для реалізації цього методу можна використати САР (23.68) або (23.72). Але в (23.68) матрицю $[\tilde{\tilde{K}}]$ та вектор $\{\Delta\tilde{\tilde{R}}\}$ необхідно задати відразу ж, спираючись на розв'язок на попередньому етапі (в (23.72) це необхідно робити для $\{\Delta\tilde{\tilde{R}}\}$ та $\{\Delta\tilde{\tilde{Q}}^*\}$). Ітерації не проводяться. Підвищення точності досягається подрібненням часового кроку. Метод фактично є явним рекурентним методом, стійкість якого є умовною. Рекомендують застосовувати в поєднанні з алгоритмом методу Ньютона-Рафсона: методом пружних довантажень одержувати прогноз результатів на кількох етапах, який після цього уточнювати з заданою точністю у невеликій кількості ітерацій згідно з алгоритмом методу Ньютона-Рафсона.

23.4. Переваги та недоліки розглянутих методів розв'язування нелінійних крайових задач для тіла, що деформується

Сформулюємо спочатку недоліки:

- у методах дотичної жорсткості і змінних параметрів пружності при ускладненні формул, які описують пружно-пластичні властивості матеріалу, труднощі для визначення матриць $[\tilde{D}]$ і $[\tilde{\tilde{D}}]$ різко зростають;
- метод пружних довантажень є стійким умовно, його похибки тим більші, чим більшими є нелінійність процесу або часовий крок;
- всі розглянуті методи відносять весь етап (у точці тіла) або до активного навантаження, або до розвантаження (хоча можна побудувати так звані адаптивні схеми, коли часовий крок при необхідності автоматично дробиться на декілька менших кроків).

Очевидними є такі переваги розглянутих методів:

- для методу додаткових навантажень нескладно отримувати всі вектори і матриці, він не має більшості з недоліків, характерних для інших методів;
- метод пружних довантажень може бути досить хорошим першим наближенням для інших нелінійних методів.

Відзначимо, що розглянуто тільки основні методі та алгоритми.

Контрольні питання до підрозділу 23.1

1. Із застосуванням якого функціонала доцільно проводити отримання системи алгебраїчних рівнянь (САР) для задачі про напружено-деформований стан тіла?
2. Яка властивість скінченно-елементних моделей дозволяє застосовувати суми віртуальних робіт у окремих елементах?
3. Чому матриця жорсткості тіла має саме таку назву?

Контрольні питання до підрозділу 23.2

1. Для чого доцільно мати незмінною матрицю САР?
2. Які члени САР (23.19) додають нелінійність в цю систему? Випишіть їхні формули.

© К.М. Рудаков, 2025

3. Якою є ідея алгоритму Ньютона-Рафсона розв’язування нелінійних САР?

4. Чи вдається отримати всі необхідні похідні від САР в алгоритмі Ньютона-Рафсона? Якщо "ні", то чому, та які наслідки з цього? Якщо "так", то яким чином?

5. Який сенс у застосуванні α –прискорення?

6. Який член в алгоритмі (23.42) є важливим в чисельній стійкості методу при наявності деформацій повзучості?

Контрольні питання до підрозділам 23.3 й 23.4

1. Які труднощі виникають при застосування методу змінних параметрів пружності?

2. Які труднощі виникають при застосування методу дотичної жорсткості?

3. Які є переваги та недоліки розглянутих методів розв’язування нелінійних крайових задач?

© К.М. Рудаков, 2025

Розділ 24

АЛГЕБРА СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТА І СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ, ПОРОДЖЕНИХ МСЕ

24.1. Відображення в параметричному СЕ

Нагадаємо, що у скінченних елементах часто запроваджують локальну систему координат r_j з початком у геометричному центрі СЕ. Отримують параметричні СЕ (див. підрозділ 20.4). Причини введення локальних координат в СЕ викладено на початку вказаного підрозділу.

Через r_j глобальні координати x^i виразимо як

$$x^i = f_i(r_j); \quad -1 \le r_j \le 1; \quad i, j = 1,2,3. \tag{24.1}$$

Цей функціональний зв'язок – взаємно однозначний:

$$r_j = \overline{f}_j(x^i). \tag{24.2}$$

Під *відображенням* розуміють саме таку взаємно однозначну відповідність між координатами r_j й x^i. Простий приклад: перехід від полярних координат до декартових і у зворотному напрямку за формулами:

$$x = r\cos\vartheta; \quad y = r\sin\vartheta \quad \text{та} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}; \ \vartheta = arctg(y/x). \tag{24.3}$$

Доведено, що безперервність скінченно-елементного наближення простору після відображення не порушується. Інакше кажучи, якщо два сусідніх СЕ щільно стикуються, описуються і відображаються однаковими параметричними функціями, то і після відображення вони залишаються сусідами і їхні сторони і надалі стикуються без розривів і взаємного налягання.

Дуже зручним є *ізопараметричне* відображення, коли і координати (форма), і будь-які інші величини відображаються одними і тими ж функціями. Нагадаємо, що СЕ, що використовують такі відображення, називають *ізопараметричними*.

Як ми вже розглядали у підрозділі 20.4, в локальних координатах базисні функції ізопараметричного СЕ (вони ж – функції форми СЕ) записуються аналогічно формулам (24.1):

$$\varphi_m^e = \varphi_m^e(r_j); \quad -1 \le r_j \le 1; \quad j = 1,2,3; \quad m = 1,2,...,M_e, \tag{24.4}$$

де M_e – кількість вузлів у СЕ. Через функції форми СЕ координати будь-якої точки СЕ обчислюються як (див. п.20.4.3)

$$x^i = \sum_{m=1}^{M_e} \varphi_m^e(r_j) \cdot (x^i)_m, \tag{24.5}$$

де $(x^i)_m$ – вузлові значення координат, r_j – локальні координати цієї точки.

Параметричні СЕ з внутрішніми локальними координатами дозволяють з достатньою точністю описувати реальну складну геометрію тіл. Так, напри-

© К.М. Рудаков, 2025

клад, двовимірний параметричний СЕ другого порядку наближення з функціями форми у вигляді поліномів другого степеня може описувати границю двовимірного тіла відрізками парабол.

Наприкінці відзначимо, що при відображенні (24.1) елемент об'єму перетворюється за формулою

$$dx^1 dx^2 dx^3 = \det[J]\, dr_1\, dr_2\, dr_3, \tag{24.6}$$

де $[J]$ – матриця Якобі (про неї – в наступному підрозділі).

24.2. Матриці базисних функцій і диференціювання у СЕ

У Розділі 22 для визначення векторів переміщень, зусиль або їхніх приростів у СЕ використовувалися формули, в яких фігурувала матриця базисних функцій $[\phi]$. Зокрема, у формулі (22.3):

$$\{u\} = [\phi]\{q\}_e. \tag{24.7}$$

Там же для визначення векторів деформацій або їхніх приростів у СЕ використовувалися формули з матрицею диференціювання $[B]$, введеною у формулі (22.5), а саме:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{q\}_e. \tag{24.8}$$

Розглянемо розмірності, побудову та наповнення цих матриць. Позначимо як k – розмірність задачі (три-, дво-, одновимірна), L – кількість невідомих у вузлі для кожного напрямку. Наприклад, $L=1$ – тільки переміщення: u_1, u_2, u_3; $L=2$ – переміщення та кути поворотів: $u_1, \vartheta_1, u_2, \vartheta_2, u_3, \vartheta_3$.

24.2.1. Матриці базисних функцій

Визначимо розмірність матриці $[\phi]$. Розмірність вектора $\{q\}_e$ дорівнює $kLM_e \times 1$. Розмірність вектора $\{u\}$ дорівнює $kL \times 1$. Тому розмірність матриці базисних функцій $[\phi]$ дорівнює $kL \times kLM_e$.

Вираз (24.7) при $k=3$ та $L=1$ записують таким чином:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} \varphi_1^e; & 0; & 0; \\ 0; & \varphi_1^e; & 0; \\ 0; & 0; & \varphi_1^e; \end{bmatrix} \ \dots \ \begin{bmatrix} \varphi_m^e; & 0; & 0; \\ 0; & \varphi_m^e; & 0; \\ 0; & 0; & \varphi_m^e; \end{bmatrix} \ \dots \ \begin{bmatrix} \varphi_{M_e}^e; & 0; & 0 \\ 0; & \varphi_{M_e}^e; & 0; \\ 0; & 0; & \varphi_{M_e}^e \end{bmatrix} \right] \times$$

$$\times \left\{ \{q_1; q_2; q_3;\}_1 \ \dots \ \{q_1; q_2; q_3;\}_m \ \dots \ \{q_1; q_2; q_3\}_{M_e} \right\}_e^T =$$

$$= \left\{ \sum_{m=1}^{M_e} \varphi_m^e \cdot (q_1)_m; \quad \sum_{m=1}^{M_e} \varphi_m^e \cdot (q_2)_m; \quad \sum_{m=1}^{M_e} \varphi_m^e \cdot (q_3)_m \right\}^T, \tag{24.9}$$

де M_e – кількість вузлів у СЕ.

Отже, матриця $[\phi]$ – блочна, кількість блоків дорівнює кількості вузлів у СЕ:

$$[\phi] = \left[[\phi]_1, \ [\phi]_2, \ \dots, \ [\phi]_{M_e} \right]. \tag{24.10}$$

© К.М. Рудаков, 2025

При $L=1$ для тривимірних, двовимірних і одновимірних задач відповідно вузлові блоки мають вигляд

$$[\phi]_m=\begin{bmatrix}\varphi_m^e; & 0; & 0\\ 0; & \varphi_m^e; & 0\\ 0; & 0; & \varphi_m^e\end{bmatrix};\quad [\phi]_m=\begin{bmatrix}\varphi_m^e; & 0\\ 0; & \varphi_m^e\end{bmatrix};\quad [\phi]_m=\varphi_m^e. \tag{24.11}$$

Очевидно, що кожний з блоків містить лише одне значуще ненульове число, яке відповідає φ_m^e. Тому з метою скорочення часу перемноження векторів з матрицею $[\phi]$ зазвичай програмують *результати* такого перемноження.

Призначають координати r_j потрібної точки СЕ, обчислюють всі $\varphi_m^e(r_j)$, а потім – вектор $\{u\}$ в даній точці СЕ.

24.2.2. Матриці диференціювання у СЕ

У формулі (24.8) розмірність вектора $\{\varepsilon\}$ позначимо як $K\times 1$ (K – кількість деформацій у векторі, див. нижче). Тому розмірність матриці диференціювання $[B]$ дорівнює $K\times kLM_e$. Очевидно, що при $L=1$ для тривимірної крайової задачі з лінійними геометричними рівняннями типу (24.8) $K=6$.

Матриця $[B]$ теж блочна, кількість блоків дорівнює кількості вузлів у СЕ:

$$[B]=\Big[[B]_1,\ [B]_2,\ ...,\ [B]_{M_e}\Big]. \tag{24.12}$$

Ще матриця $[B]$ залежить від типу глобальних координат. Для геометрично-лінійної задачі та декартової системи координат (ДСК) при $L=1$ та $K=6$ блок матриці $[B]$ має вигляд:

$$([B]_m)_{ДСК}=\begin{bmatrix}p_{1m}; & 0; & 0\\ 0; & p_{2m}; & 0\\ 0; & 0; & p_{3m}\\ p_{2m}; & p_{1m}; & 0\\ 0; & p_{3m}; & p_{2m}\\ p_{3m}; & 0; & p_{1m}\end{bmatrix}. \tag{24.13}$$

Для циліндричної системи координат (ЦСК):

$$([B]_m)_{ЦСК}=\begin{bmatrix}p_{1m}; & 0; & 0\\ 0; & \tilde{p}_{2m}; & 0\\ 0; & 0; & p_{3m}\\ \tilde{p}_{2m}; & p_{1m}; & 0\\ 0; & p_{3m}; & \tilde{p}_{2m}\\ p_{3m}; & 0; & p_{1m}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0; & 0; & 0\\ \psi_m; & 0; & 0\\ 0; & 0; & 0\\ 0; & -\psi_m; & 0\\ 0; & 0; & 0\\ 0; & 0; & 0\end{bmatrix}, \tag{24.14}$$

© К.М. Рудаков, 2025

де позначені величини

$$p_{im} = \partial\varphi_m(r_j)/\partial x^i; \quad \widetilde{p}_{2m} = p_{2m}/\rho; \quad \psi_m = \varphi_m^e/\rho. \tag{24.15}$$

Щоб переконатися в правильності структури цих формул, достатньо звернутися до геометричних рівнянь для ДСК і ЦСК. Дійсно, вираз (24.8) при $L=1$ та $K=6$ у тривимірному випадку з лінійними геометричними рівняннями (12.51) в декартовій системі координат записується таким чином:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} p_{11}; & 0; & 0; \\ 0; & p_{21}; & 0; \\ 0; & 0; & p_{31}; \\ p_{21}; & p_{11}; & 0; \\ 0; & p_{31}; & p_{21}; \\ p_{31}; & 0; & p_{11}; \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} p_{1m}; & 0; & 0; \\ 0; & p_{2m}; & 0; \\ 0; & 0; & p_{3m}; \\ p_{2m}; & p_{1m}; & 0; \\ 0; & p_{3m}; & p_{2m}; \\ p_{3m}; & 0; & p_{1m}; \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} p_{1M_e}; & 0; & 0 \\ 0; & p_{2M_e}; & 0 \\ 0; & 0; & p_{3M_e} \\ p_{2M_e}; & p_{1M_e}; & 0 \\ 0; & p_{3M_e}; & p_{2M_e} \\ p_{3M_e}; & 0; & p_{1M_e} \end{bmatrix} \right] \times$$

$$\times \left\{ \{q_1; q_2; q_3;\}_1 \quad \dots \quad \{q_1; q_2; q_3;\}_m \quad \dots \quad \{q_1; q_2; q_3\}_{M_e} \right\}_e^T =$$

$$= \left\{ \sum_{m=1}^{M_e} p_{1m} \cdot (q_1)_m; \ \sum_{m=1}^{M_e} p_{2m} \cdot (q_2)_m; \ \sum_{m=1}^{M_e} p_{3m} \cdot (q_3)_m; \right.$$

$$\left. \sum_{m=1}^{M_e} \left(p_{2m} \cdot (q_1)_m + p_{1m} \cdot (q_2)_m \right); \ \sum_{m=1}^{M_e} \left(p_{3m} \cdot (q_2)_m + p_{2m} \cdot (q_3)_m \right); \ \sum_{m=1}^{M_e} \left(p_{3m} \cdot (q_1)_m + p_{1m} \cdot (q_3)_m \right) \right\}^T . \tag{24.16}$$

Деякі інші ситуації відображені в таблиці 24.1.

Таблиця 24.1. Заповнення матриць $[B]_m$ та $[D]$ **при** $L=1$ **для двовимірних і осесиметричних крайових задач**

Тип задачі, координатна система	$\{\varepsilon\}$	$[B]_m$	$[D]$	*k, K*
ПДС[*]: ДСК (*x*,*y*), Полярна (*r*, ϑ)	$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$	$\begin{bmatrix} p_{1m}; & 0 \\ 0; & p_{2m} \\ p_{2m}; & p_{1m} \end{bmatrix}$	$2G \cdot \begin{bmatrix} a; & b; & 0 \\ b; & a; & 0 \\ 0; & 0; & c \end{bmatrix}$	2, 3
ПНС[**], ДСК (*x*,*y*), Полярна (*r*, ϑ)	$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$	$\begin{bmatrix} p_{1m}; & 0 \\ 0; & p_{2m} \\ p_{2m}; & p_{1m} \end{bmatrix}$	$2G \cdot \begin{bmatrix} \breve{a}; & \breve{b}; & 0 \\ \breve{b}; & \breve{a}; & 0 \\ 0; & 0; & c \end{bmatrix}$	2, 3
Осесиметрична, ЦСК	$\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{zr} \end{Bmatrix}$	$\begin{bmatrix} p_{1m}; & 0 \\ 0; & 0 \\ 0; & p_{3m} \\ p_{3m}; & p_{1m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0; & 0 \\ \psi_m; & 0 \\ 0; & 0 \\ 0; & 0 \end{bmatrix}$	$2G \cdot \begin{bmatrix} a; & b; & b; & 0 \\ b; & a; & b; & 0 \\ b; & b; & a; & 0 \\ 0; & 0; & 0; & c \end{bmatrix}$	2, 4
[*] $\sigma_z = 2Gb(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$; [**] $\varepsilon_z = -\breve{b}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$. Для полярної: $\widetilde{p}_{2m}$ замість p_{2m}.				
$a=(1-\mu)/(1-2\mu)$; $b=\mu/(1-2\mu)$; $\breve{a}=1/(1-\mu)$; $\breve{b}=\mu/(1-\mu)$; $c=0.5$				

© К.М. Рудаков, 2025

У таблиці також показано заповнення матриць модулів пружності $[D]$. Бажано, щоб ця матриця в МСЕ була *симетричною*. Для цього достатньо, щоб у випадку плоского деформованого стану (ПДС) і плоского напруженого стану (ПНС) вона відображала не всі рівняння закону Гука, а тільки для тих напружень та варіацій деформацій, що дають вклад у внутрішню енергію здеформованого тіла (якщо компоненти добутку $\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} \neq 0$ при конкретних i та j, див. варіаційний функціонал (23.1-а)). Ті рівняння, яких не вистачає, у таблиці позначено зірочками. За необхідності ці рівняння застосовуються за наведеними формулами поза матричного співвідношення $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon^e\}$.

Примітка 24.1. Оскільки в задачах про згін стержнів, пластин і оболонок застосовуються особливі рівняння та моделі, то ці випадки в таблиці 24.1 не відображено.

Визначимо частинні похідні базисних функцій за глобальними координатами p_{im}, з яких складаються блоки матриці $[B]_m$.

Оскільки в *параметричних* СЕ базисні функції виражено через локальні координати, то:

$$p_{im} = \frac{\partial \varphi_m(r_j)}{\partial x^i} = \frac{\partial \varphi_m(r_j)}{\partial r_1}\frac{\partial r_1}{\partial x^i} + \frac{\partial \varphi_m(r_j)}{\partial r_2}\frac{\partial r_2}{\partial x^i} + \frac{\partial \varphi_m(r_j)}{\partial r_3}\frac{\partial r_3}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial \varphi_m(r_j)}{\partial r_k}\frac{\partial r_k}{\partial x^i}. \qquad (24.17)$$

Але тут невідомими є похідні $\partial r_k / \partial x^i$. Щоб їх визначити, спочатку вираз (24.17) записують у розгорнутому *матричному* вигляді:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_m(r_j)}{\partial x^1} \\ \frac{\partial \varphi_m(r_j)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \varphi_m(r_j)}{\partial x^3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial x^1} & ; & \frac{\partial r_2}{\partial x^1} & ; & \frac{\partial r_3}{\partial x^1} \\ \frac{\partial r_1}{\partial x^2} & ; & \frac{\partial r_2}{\partial x^2} & ; & \frac{\partial r_3}{\partial x^2} \\ \frac{\partial r_1}{\partial x^3} & ; & \frac{\partial r_2}{\partial x^3} & ; & \frac{\partial r_3}{\partial x^3} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_m(r_j)}{\partial r_1} \\ \frac{\partial \varphi_m(r_j)}{\partial r_2} \\ \frac{\partial \varphi_m(r_j)}{\partial r_3} \end{Bmatrix}, \qquad (24.18)$$

після цього – в узагальненому

$$\{p\} = \left([J]^T\right)^{-1}\{b\}, \qquad (24.19)$$

де невироджена матриця Якобі $[J]$ в *ізопараметричному* СЕ має компоненти

$$J_{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial r_k} = \frac{\partial}{\partial r_k}\left[\sum_{m=1}^{M_e}\varphi_m(r_j)\cdot(x^i)_m\right] = \sum_{m=1}^{M_e}\left(\frac{\partial \varphi_m(r_j)}{\partial r_k}\cdot(x^i)_m\right). \qquad (24.20)$$

Вирази для похідних $\dfrac{\partial \varphi_m(r_j)}{\partial r_k}$ легко виводяться (в явному вигляді) з виразів для базисних функцій СЕ $\varphi_m(r_j)$. Компоненти χ_{ij} матриці $\left([J]^T\right)^{-1}$ після цього обчислюються за формулами ($d = \det[J]$ – детермінант матриці Якобі):

$$\chi_{11} = \left(J_{22}J_{33} - J_{23}J_{32}\right)/d\,; \quad \chi_{12} = \left(-J_{21}J_{33} + J_{23}J_{31}\right)/d\,;$$
$$\chi_{13} = \left(J_{21}J_{32} - J_{22}J_{31}\right)/d\,; \quad \chi_{21} = \left(-J_{12}J_{33} + J_{13}J_{32}\right)/d\,;$$

© К.М. Рудаков, 2025

$$\chi_{22}=\left(J_{11}J_{33}-J_{13}J_{31}\right)/d\,;\quad \chi_{23}=\left(-J_{11}J_{32}+J_{12}J_{31}\right)/d\,;$$
$$\chi_{31}=\left(J_{12}J_{23}-J_{13}J_{22}\right)/d\,;\quad \chi_{32}=\left(-J_{11}J_{23}+J_{13}J_{21}\right)/d\,;$$
$$\chi_{33}=\left(J_{11}J_{22}-J_{12}J_{21}\right)/d\,. \qquad (24.21)$$

У двовимірному випадку:

$$\chi_{11}=J_{22}/d\,;\quad \chi_{12}=-J_{21}/d\,;\quad \chi_{21}=-J_{12}/d\,;\quad \chi_{22}=J_{11}/d\,, \qquad (24.22)$$

а в одновимірному $\chi_{11}=1/J_{11}$.

При оберненні матриці Якобі необхідно стежити, щоб вона не була виродженою ($d\le 0$). Це може трапитися при значному викривленні форми СЕ в результаті його деформування (чисто обчислюваний ефект).

У випадку застосування симплексної моделі СЕ (див. підрозділ 20.2) компонентами матриці $[B]$ будуть постійні коефіцієнти з базисних функцій: $p_{1m}=\beta_m/6\Delta^e$; $p_{2m}=\gamma_m/6\Delta^e$; $p_{3m}=\lambda_m/6\Delta^e$ при $m=1,2,3,4$ – для тривимірного; $p_{1m}=\beta_m/2\Delta^e$; $p_{2m}=\gamma_m/2\Delta^e$ при $m=1,2,3$ – для двовимірного; $p_{11}=-(1/s)$; $p_{21}=1/s=-p_{11}$ – для одновимірного.

24.3. Підінтегральні функції в СЕ, їхні властивості

У МСЕ підінтегральні функцій – це компоненти матриць і векторів, одержані в результаті операцій з матрицями, векторами та скалярами.

Глобальна матриця жорсткості САР будується в результаті збирання матриць жорсткості СЕ, одержаних інтегруванням по об'єму СЕ (див. формулу (23.6)). Під інтегралом стоять компоненти матриці $[K^e]=[B]^T[D][B]$ розмірністю $kLM_e\times kLM_e$.

В тривимірному випадку використовується повне співвідношення $\varepsilon_{ij}=0.5(\partial u_j/\partial x^i+\partial u_i/\partial x^j)$. Інша ситуація для одно- та двовимірних СЕ, оскільки вони зазвичай моделюють об'єкти з використанням додаткових моделей, які враховують специфіку одно- та двовимірних об'єктів.

24.3.1. Тривимірний СЕ

Якщо матеріал – ізотропний (матриця модулів пружності $[D]$ відповідає виразу (22.9)), а також $L=1$, то типова підматриця $[K^e]$, пов'язана з вузлами номер m та n, остаточно має такі компоненти:

$$[K^e]_{mn}=2G(\theta)\cdot\begin{bmatrix} ap_{1m}p_{1n}+c(p_{2m}p_{2n}+p_{3m}p_{3n})\,; & bp_{1m}p_{2n}+cp_{2m}p_{1n}\,; & bp_{1m}p_{3n}+cp_{3m}p_{1n}\\ bp_{2m}p_{1n}+cp_{1m}p_{2n}\,; & ap_{2m}p_{2n}+c(p_{1m}p_{1n}+p_{3m}p_{3n})\,; & bp_{2m}p_{3n}+cp_{3m}p_{2n}\\ bp_{3m}p_{1n}+cp_{1m}p_{3n}\,; & bp_{3m}p_{2n}+cp_{2m}p_{3n}\,; & ap_{3m}p_{3n}+c(p_{2m}p_{2n}+p_{1m}p_{1n}) \end{bmatrix}, \qquad (24.23)$$

де $G(\theta)$ – модуль зсуву; $a=(1-\mu)/(1-2\mu)$; $b=\mu/(1-2\mu)$; $\mu=\mu(\theta)$ – коефіцієнт Пуассона; $c=0.5$.

Для ЦСК в (24.23) замість p_{2m} використовується $\widetilde{p}_{2m}$; крім того, додаються компоненти:

© К.М. Рудаков, 2025

$$[\tilde{K}^e]_{mn_{ЦСК}} = 2G(\theta)\cdot\begin{bmatrix} bp_{1m}\Psi_n + \Psi_m(bp_{1n} + a\Psi_n)\ ; & a\Psi_m\tilde{p}_{2n} - c\tilde{p}_{2m}\Psi_n\ ; & b\Psi_m p_{3n} \\ a\tilde{p}_{2m}\Psi_n - c\Psi_m\tilde{p}_{2n}\ ; & c(-p_{1m}\Psi_n - \Psi_m p_{1n} + \Psi_m\Psi_n)\ ; & 0 \\ bp_{3m}\Psi_n\ ; & 0\ ; & 0 \end{bmatrix}, \tag{24.24}$$

де $\tilde{p}_{2m}$ і Ψ_m відповідають формулам (24.15).

Оскільки матриця $[D]$ – симетрична, то і конгруентна їй матриця $[K^e]$ теж симетрична, що зумовлює і симетричність глобальної матриці САР.

У п.23.2.3 була введена матриця $[\underline{D}] = \partial\{\sigma\}/\partial\{\varepsilon\}$, яка потрібна для обчислення інтегралу (23.36), а саме $\int\limits_{\Omega^e}[B]^T[\underline{D}]^{(k)}[B]d\Omega$. Тут під інтегралом стоять компоненти матриці $[\underline{K}^e] = [B]^T[\underline{D}][B]$. Для ізотропного матеріалу матриця $[\underline{D}]$ має таку ж структуру заповнення, як і матриця $[D]$ у (22.9). Тому обчислення компонент підматриці $[\underline{K}^e]_{mn}$, пов'язаної з вузлами номер m та n, проводиться аналогічно (24.23) або (24.24). Обчислення компонент матриці $[\underline{D}]$ розглянуто в підрозділі 24.4.

Існує декілька прикладів підінтегральних векторів. Всі вони мають розмірність $kLM_e\times 1$. Характерні вектори: $\{P^e\} = [\phi]^T\{\hat{O}\}$; $\{\Delta R^e\}_\theta = [B]^T[D]\{\bar{\alpha}_\theta\}\Delta\theta$; $\{\Delta H^e\} = [B]^T[D]\{\Delta\varepsilon^p\}$; $\{Q^e\} = [B]^T([D]-[D^*])\{\varepsilon\}$ (див. підрозділи 23.1, 23.2).

Так, наприклад, типовий підвектор вектора $\{\Delta R^e\}_\theta$ в тривимірній ДСК, а також $L=1$, при матриці модулів пружності $[D]$, яка відповідає (22.9), має остаточний вигляд

$$\{\Delta R^e_m\}_\theta = 2G(\theta)\cdot(a+2b)\bar{\alpha}_\theta\Delta\theta\begin{Bmatrix} p_{1m} \\ p_{2m} \\ p_{3m} \end{Bmatrix}. \tag{24.25}$$

Тут загалом є 8 арифметичних операцій: 7 множення і одна операція додавання, в той час як в повному варіанті їх 105, тобто значно більше.

24.3.2. Двовимірний СЕ

Застосовують декілька різновидів двовимірних СЕ: панель зсуву (Shear Panel), мембранний (Membrane), тільки згинальний (Bending Only), пластина (Plate), шарувата пластина або композит (Laminate), плоска деформація (Plane Strain), осесиметрична оболонка (Axisymmetric Shell). З них у табл.24.1 розглянуто СЕ, що моделює плоску деформацію (Plane Strain), а також зсувні (Shear Panel) та мембранні (Membrane) деформації/напруження як окремі випадки плоского напруженого стану.

Двовимірний трикутний або чотирикутний СЕ типу пластина (Plate) повинен моделювати всі типи деформацій: як в площині СЕ (зсувні, мембранні); так й згинальні. Обов'язковий параметр, який потрібно вводити, – товщина СЕ.

© К.М. Рудаков, 2025

Кожен вузол СЕ типу Plate має по шість ступенів свободи, тому, наприклад, у чотирикутному СЕ з 4-ма вузлами (СЕ першого порядку наближення) вектор вузлових "переміщень"

$$\{q\}_e = \{\{q_1;q_2;q_3;\vartheta_1;\vartheta_2;\vartheta_3\}_1;\ ...;\{q_1;q_2;q_3;\vartheta_1;\vartheta_2;\vartheta_3\}_4\}_e^T = \{q_1;q_2;...\,q_{24}\}_e^T, \qquad (24.26)$$

причому в останньому векторі q_m, $m = 1,2,...,24$ – ті самі вузлові переміщення та повороти, але з наскрізною у СЕ нумерацією.

Загальної теорії СЕ типу Plate не існує, оскільки немає загальної теорії пластин та оболонок. Є моделі СЕ [4, 13, 18, 39-41, 46, 54, 67, 68, 84, 91, 92 та ін.], що відповідають окремим випадкам. Більш того, майже до всіх відомих моделей СЕ типів Plate та Shell є претензії: несумісність, залежність розв'язків від жорстких зміщень/поворотів, інші. Додамо, що альтернативою моделей конструкцій із СЕ типів Plate та Shell є моделі з тривимірними СЕ. Зокрема, лише один на всю товщину гексагональний СЕ 1-го порядку наближення фактично відповідає моделі оболонки типу Кірхгофа-Лява, оскільки дає лінійний характер зміни переміщень по товщині (в напрямку нормалі до серединної поверхні оболонки).

Для поглибленого вивчення проблем СЕ типів Plate та Shell можна рекомендувати книгу [40].

24.3.3. Одновимірний СЕ

Є декілька різновидів одновимірних СЕ: стрижень (Rod, Tube), криволінійний стрижень (Curved Tube), балка (Bar, Beam), криволінійна балка (Curved Beam), жорсткий зв'язок (Link), пружно-демпфуючий стрижень (Spring/Damper, DOF Spring), зазор (Gap). Кожен вузол таких СЕ має по шість ступенів свободи. В таблиці 24.1 цей варіант не розглянуто.

Одновимірний СЕ типу Beam (або Bar) повинен одночасно моделювати розтяг-стиск, кручення й згин. Обов'язкові параметри, що потрібно вводити – геометричні характеристики перетину стрижня або балки, що моделюється. Але загальна теорія СЕ типу Beam відсутня. Розроблено не менш десяти моделей СЕ типу Bar та Beam, зокрема й такі, що враховують депланацію перетину. Цьому питанню можна присвятити книгу чималого об'єму.

У випадку складної геометрії балки та властивостей її матеріалу часто використовують такий підхід: проводять апроксимацію елементу балки тривимірними СЕ у вигляді пентаедра та/або гексаедра, витягнутими вздовж балки (тобто перетин балки апроксимується незначною кількістю трикутних та/або чотирикутних поверхонь основ тривимірних СЕ). Потім зазвичай проводиться "конденсування" внутрішніх ступенів свобод (див. підрозділ 24.12), тобто застосування суперелементної техніки. Це дозволяє врахувати не тільки складну форму перетину, а й неоднорідність матеріалу (шаруватість, металеву арматуру в бетоні, інше), а також не застосовувати додаткові припущення про поведінку балочного СЕ. Але часто балки мають відносно просту геометрію перетину, однорідний матеріал та невеликі пружні деформації. Для них розроблено спрощені моделі СЕ. Одна з них буде розглянута у підрозділі 24.6.

© К.М. Рудаков, 2025

24.4. Обчислення матриці $[\underline{D}]$ для методу Ньютона-Рафсона

В п.23.2.3 формулою (23.39) була введена матриця $[\underline{D}] = \partial\{\sigma\} / \partial\{\varepsilon\}$. Отримаємо в явному вигляді заповнення цієї матриці для ізотропного матеріалу при наявності всіх основних типів деформацій (температурних, пружних, необоротних).

Спочатку врахуємо, що перші три компоненти вектора напружень $\{\sigma\}$ можна представити як суму компоненти девіатора та об'ємного напруження:

$$\sigma_i = \begin{cases} S_i + \sigma_V; & i = 1,2,3; \\ S_i; & i = 4,5,6. \end{cases} \tag{24.27}$$

Тому матрицю $[\underline{D}] = \partial\{\sigma\} / \partial\{\varepsilon\}$ представимо як сукупність двох частин:

$$[\underline{D}] = [\underline{D}_D] + [\underline{D}_V], \tag{24.28}$$

причому компоненти цих матриць

$$(\underline{D}_D)_{ij} = \frac{\partial S_i}{\partial \varepsilon_j};\ i,j = 1,...,6; \quad (\underline{D}_V)_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_V}{\partial \varepsilon_j}; & i,j = 1,2,3; \\ 0; & i,j = 4,5,6. \end{cases} \tag{24.29}$$

24.4.1. "Об'ємна" складова матриці $[\underline{D}]$

Оскільки $\sigma_V = 3k\varepsilon_V^a$, де $\varepsilon_V^a = (\varepsilon_1^a + \varepsilon_2^a + \varepsilon_3^a)/3$, k – об'ємний модуль пружності, то спочатку потрібно обчислити компоненти ε_i^a, $i = 1,2,3$, тобто "активних" деформацій, які не містять температурної складової:

$$\varepsilon_{ij}^a = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^\theta. \tag{24.30}$$

Тепер можна визначитися, що

$$\sigma_V = 3k\varepsilon_V^a = 3k(\varepsilon_V - \varepsilon_V^\theta). \tag{24.31}$$

Величина $k = k(\theta)$ є характеристикою матеріалу, вважається незалежною від деформацій. Оскільки температурні деформації завжди реалізуються незалежно від інших, то $\partial\varepsilon_V^\theta / \partial\varepsilon_j = 0$. Залишилося, що $\partial\sigma_V / \partial\varepsilon_j = 3k(\theta)(\partial\varepsilon_V / \partial\varepsilon_j)$. Тому остаточно для ізотропного матеріалу

$$[\underline{D}_V] = k(\theta)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{E(\theta)}{3(1-2\mu(\theta))}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{24.32}$$

24.4.2. "Девіаторна" складова матриці $[\underline{D}]$

Підставивши вирази (22.22) та (22.54), а саме $\{d\breve{\varepsilon}^p\} = d\lambda^p\{S\}$ та $\{d\breve{\varepsilon}^c\} = d\lambda^c\{S\}$ у вираз (22.20) $\{S\} = \{S^\#\} - 2G(\theta)(\{\Delta\breve{\varepsilon}^p\} + \{\Delta\breve{\varepsilon}^c\})$, отримаємо спочатку, що $\{S\} = \{S\}^\# - 2G(\theta)\cdot(d\lambda^p + d\lambda^c)\{S\}$, а після групування:

© К.М. Рудаков, 2025

$$\{S\} = \frac{1}{1/2G(\theta) + d\lambda^p + d\lambda^c} \cdot \frac{\{S\}^{\#}}{2G(\theta)}. \tag{24.33}$$

Згідно з гіпотезою про суперпозицію малих деформацій та з виразом (22.14-б) маємо, що

$$\{\sigma\}^{\#} = [\breve{D}](\{\breve{\varepsilon}\} - \{\breve{\varepsilon}^{\theta}\} - \{\breve{\varepsilon}^{p}\}_0 - \{\breve{\varepsilon}^{c}\}_0) = [\breve{D}]\{\breve{\varepsilon}\}^{\#}. \tag{24.34}$$

З урахуванням (22.17), а саме $\{\sigma_V\} = \{\sigma_V^{\#}\}$, де середнє напруження $\sigma_V^{\#} = \delta^{ij}(\sigma^{ij})^{\#}/3$, маємо девіатор напружень

$$\{S\}^{\#} = \{\sigma\}^{\#} - \{\sigma_V\}^{\#} = \{\sigma\}^{\#} - \sigma_V^{\#} \cdot \{1,1,1,0,0,0\}^T. \tag{24.35}$$

Оскільки для ізотропного матеріалу між компонентами девіатора напружень та пружних деформацій існує пропорційний лінійний зв'язок

$$S_n = 2G(\theta)\breve{e}_n^{\mathrm{e}}, \tag{24.36}$$

де G – модуль зсуву матеріалу, то маємо, що

$$S_n^{\#} = 2G(\theta)\breve{e}_n^{\#} \quad \text{або} \quad \{S\}^{\#} = 2G(\theta)\{\breve{e}^{\#}\}. \tag{24.37}$$

Підставимо (24.37) у (24.33):

$$\{S\} = \frac{1}{\alpha(\theta) + d\lambda^p + d\lambda^c}\{\breve{e}^{\#}\}; \quad \alpha(\theta) = 1/(2G(\theta)). \tag{24.38}$$

З огляду на формулу (24.38) запишемо, що "девіаторні" компоненти матриці $[\underline{D}]$, тобто $(\underline{D}_D)_{ij}$ можна обчислити як

$$(\underline{D}_D)_{ij} = \frac{\partial S_i}{\partial \varepsilon_j} = \frac{\partial S_i}{\partial \breve{e}_m^{\#}} \frac{\partial \breve{e}_m^{\#}}{\partial \breve{e}_n^{a}} \frac{\partial \breve{e}_n^{a}}{\partial \breve{\varepsilon}_k^{a}} \frac{\partial \breve{\varepsilon}_k^{a}}{\partial \breve{\varepsilon}_j}. \tag{24.39}$$

Послідовно розглянемо кожну з похідних, починаючи з останньої.

Із (24.30), а саме $\breve{\varepsilon}_{ij}^{a} = \breve{\varepsilon}_{ij} - \breve{\varepsilon}_{ij}^{\theta}$, маємо, що матриця

$$\left[\frac{\partial \breve{\varepsilon}_k^{a}}{\partial \breve{\varepsilon}_j}\right] = [I]_6, \tag{24.40}$$

де одинична матриця $[I]_6$ має розмірність 6x6. З огляду на відоме співвідношення між компонентами девіатора та повного тензора

$$\breve{e}_n^{a} = \breve{\varepsilon}_n^{a} - (\breve{\varepsilon}_1^{a} + \breve{\varepsilon}_2^{a} + \breve{\varepsilon}_3^{a})/3; \quad n = 1,2,3; \qquad \breve{e}_n^{a} = \breve{\varepsilon}_n^{a}; \quad n = 4,5,6, \tag{24.41}$$

маємо матрицю

$$\left[\frac{\partial \breve{e}_n^{a}}{\partial \breve{\varepsilon}_k^{a}}\right] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \tag{24.42}$$

З (24.34) спочатку виділимо $\{\breve{\varepsilon}\} - \{\breve{\varepsilon}^{\theta}\} - \{\breve{\varepsilon}^{p}\}_0 - \{\breve{\varepsilon}^{c}\}_0 = \{\breve{\varepsilon}\}^{\#}$, а потім – девіаторні компоненти

$$\breve{e}_m^{\#} = (\breve{e}_m) - (\breve{e}_m^{\theta}) - (\breve{e}_m^{p})_0 - (\breve{e}_m^{c})_0 = (\breve{e}_m^{a}) - (\breve{e}_m^{p})_0 - (\breve{e}_m^{c})_0. \tag{24.43}$$

З цього виразу

© К.М. Рудаков, 2025

$$\left[\frac{\partial \breve{e}_m^{\#}}{\partial \breve{e}_n^{a}}\right] = [I]_6 . \tag{24.44}$$

А з виразу (24.38) для (24.39) маємо, що

$$\frac{\partial S_i}{\partial \breve{e}_n^{\#}} \approx \frac{1}{\alpha(\theta) + d\lambda^p + d\lambda^c} \frac{\partial \breve{e}_i^{\#}}{\partial \breve{e}_n^{\#}} + \frac{\partial}{\partial \breve{e}_n^{\#}} \left(\frac{1}{\alpha(\theta) + d\lambda^p + d\lambda^c} \right) \breve{e}_i^{\#} . \tag{24.45}$$

Тут незалежною від $\breve{e}_n^{\#}$ є тільки $\alpha(\theta)$. Тому

$$\frac{\partial S_i}{\partial e_n^{\#}} = \frac{1}{\alpha(\theta) + d\lambda^p + d\lambda^c} \left([I]_6 + \frac{1}{\alpha(\theta) + d\lambda^p + d\lambda^c} \frac{\partial (d\lambda^p + d\lambda^c)}{\partial e_n^{\#}} e_i^{\#} \right). \tag{24.46}$$

. (46._25)

На першій ітерації обчислити похідну в (24.46) не вдається навіть наближено. Тому приймається, що $\frac{\partial (d\lambda^p + d\lambda^c)}{\partial \breve{e}_n^{\#}} = 0$, із (24.46) залишається:

$$\left[\frac{\partial S_i}{\partial \breve{e}_n^{\#}}\right] \approx \frac{1}{\alpha(\theta) + d\lambda^p + d\lambda^c} [I]_6 . \tag{24.47}$$

Підставив отримані похідні в (24.39), для першої ітерації маємо матрицю

$$[\underline{D}_D] = \frac{1}{3(\alpha(\theta) + d\lambda^p + d\lambda^c)} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \tag{24.48}$$

Як виявилося в чисельних експериментах (розрахунках), нехтування часткою $\frac{\partial}{\partial e_n^{\#}} \left(\frac{1}{\alpha(\theta) + d\lambda^p + d\lambda^c} \right) e_i^{\#}$ матриці $[\underline{D}_D]$ не призводить до зростання кількості ітерацій, тому цією часткою можна нехтувати у всіх ітераціях.

24.4.3. Повна матриця $[\underline{D}]$

Згідно з (24.28) $[\underline{D}] = [\underline{D}_D] + [\underline{D}_V]$, тому з (24.32) та (24.48) зберемо повну матрицю

$$[\underline{D}] = \begin{bmatrix} \underline{a} & \underline{b} & \underline{b} & 0 & 0 & 0 \\ \underline{b} & \underline{a} & \underline{b} & 0 & 0 & 0 \\ \underline{b} & \underline{b} & \underline{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{c} \end{bmatrix}, \tag{24.49}$$

де позначено компоненти

$$\underline{a} = \frac{\beta_1 + 2\beta_2}{3};\ \ \underline{b} = \frac{\beta_1 - \beta_2}{3};\ \underline{c} = \frac{\beta_2}{2};\ \beta_1 = \frac{E(\theta)}{1 - 2\mu(\theta)};\ \beta_2 = \frac{2G(\theta)}{1 + 2G(\theta)(d\lambda^p + d\lambda^c)}. \tag{24.50}$$

© К.М. Рудаков, 2025

У компоненті $\underline{c}$ враховано, що у формулах (23.37), (23.38), (23.40) матриця диференціювання $[B]$ записана для кутових деформацій $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$, а не ε_{ij}.

Можна перевірити, що при $d\lambda^p + d\lambda^c = 0$ значення компонент матриць (24.49) та (22.9) співпадають.

Такий алгоритм призначення компонент матриці $[\underline{D}]$ автори назвали алгоритмом *ефективної функції напружень* (Effective Stress Function – ESF).

24.5. Інтегрування у СЕ

Ідеологія МСЕ призводить до необхідності обчислювати об'ємні та поверхневі інтеграли. Для деяких типів СЕ це вдається зробити *аналітично* (точно), зокрема, для симплексних СЕ. Але в більшості випадків точне інтегрування є неможливим. Застосовують *чисельне* інтегрування. Цій проблемі був присвячений Розділ 10. Перевагу віддають застосуванню квадратур Гаусса-Лежандра, тобто методу з підвищеною точністю інтегрування.

24.5.1. Точне інтегрування у СЕ

Як було зазначено наприкінці п.24.2.2, у випадку застосування симплексної моделі СЕ (див. підрозділ 20.2) компоненти матриці $[B]$ будуть постійними величинами. Якщо й інші компоненти підінтегрального виразу не будуть залежати від координат, то їх можна винести за межі інтеграла. Тоді, наприклад, інтеграл (23.6) для матриці жорсткості СЕ буде обчисленим як

$$[K]_e = \int_{\Omega^e} [B]^T [D][B] d\Omega = [B]^T [D][B] \int_{\Omega^e} d\Omega = [B]^T [D][B] \cdot \Omega^e . \qquad (24.51)$$

В залежності від розмірності симплексного СЕ, його об'єм Ω^e буде дорівнювати (величини t, s, A в кожному СЕ можуть мати оригінальні значення):

- Δ^e – згідно з формулою (20.23) у тривимірному випадку;
- $\Delta^e t$, де Δ^e відповідає формулі (20.17); t – товщина двовимірного СЕ;
- sA, де s є довжиною СЕ згідно з формулою (20.10); A – площа перетину одновимірного СЕ.

24.5.2. Чисельне інтегрування у СЕ

Перехід від інтеграла до алгебраїчного виразу в методі чисельного інтегрування Гаусса-Лежандра відбувається у два етапи: спочатку проводиться відображення підінтегрального виразу на локальні координати, після цього використовується одна з квадратурних формул Гаусса-Лежандра.

Отже, будь-який об'ємний інтеграл в СЕ можна записати як

$$\int_{\Omega^e} f(x^1, x^2, x^3) d\Omega = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(r_1, r_2, r_3) \det[J] dr_1 dr_2 dr_3 \approx$$

© К.М. Рудаков, 2025

$$\approx \sum_{i=1}^{N_i}\sum_{j=1}^{N_j}\sum_{k=1}^{N_k} c_i\, c_j\, c_k\, f(r_1^{(i)},\, r_2^{(j)}, r_3^{(k)})\ \det[J]^{(i,j,k)}\,. \qquad (24.52)$$

В ЦСК ще необхідно помножити $\det[J]^{(i,j,k)}$ на поточний радіус $\rho^{(i,j,k)}$.

Інтеграл по поверхні СЕ (при $r_3 = \mp 1$):

$$\int_{S^e} f(x^1, x^2, x^3)\, dS = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(r_1, r_2, \mp 1)\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\cdot dr_1\, dr_2 \approx$$

$$\approx \sum_{i=1}^{N_i}\sum_{j=1}^{N_j} c_i\, c_j\, f(r_1^{(i)}, r_2^{(j)}, \mp 1)\sqrt{g_{11}\, g_{22} - g_{12}^2}^{(i,j)}\,, \qquad (24.53)$$

де компоненти метричного тензора

$$(g_{ij})_{ДСК} = \sum_{m=1}^{3} J_{im} J_{jm}\,; \quad (g_{ij})_{ЦСК} = J_{i1}J_{j1} + \rho J_{i2}J_{j2} + J_{i3}J_{j3}\,. \qquad (24.54)$$

Для інших поверхонь необхідно відповідно змінити місцями індекси.

У формулах (24.52) й (24.53) N_j – кількість точок інтегрування на відрізках $-1 \le r_j \le 1$. Можна застосувати одну, дві, три і більше точок. При одній точці інтегрування $r^{(1)} = 0$ і $c_1 = 2$; при двох: $r^{(2)} = -r^{(1)} = \sqrt{1/3}$ і $c_1 = c_2 = 1$; при трьох: $r^{(3)} = -r^{(1)} = \sqrt{3/5}$, $r^{(2)} = 0$ і $c_1 = c_3 = 5/9,\ c_2 = 8/9$ (див. п.10.5.2, табл.10.4).

Чим більше точок інтегрування, тим вище точність наближення інтеграла. Але при цьому зростають витрати часу на обчислення. Доказано, що при інтегруванні за формулою (24.52) мінімально достатня кількість точок інтегрування є такою, коли об'єм обчислюється точно, тобто $\int_{\Omega^e} d\Omega = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \det[J] dr_1 dr_2 dr_3 =$ $= \sum_{i=1}^{N_i}\sum_{j=1}^{N_j}\sum_{k=1}^{N_k} c_i\, c_j\, c_k \det[J]^{(i,j,k)}$. В ізопараметричних СЕ першого порядку наближення мінімально достатньо однієї точки інтегрування по локальній координаті, в СЕ другого порядку наближення – двох. Але в практичних розрахунках рекомендують використовувати на одну точку більше, оскільки підінтегральні функції обчислюються наближено.

Наприклад, у тривимірному ізопараметричному СЕ серендипового сімейства 2-го порядку наближення (має 20 вузлів) об'ємні інтеграли зазвичай обчислюються за схемою $2\times2\times2$, а поверхневі – 3×3. Але виявилося, що навіть при застосуванні схеми $2\times2\times2$ прямі методи розв'язування СЛАР можуть виявити майже нуль на діагоналі, тобто матриця СЛАР буде признана виродженою. Оскільки метод спряжених градієнтів успішно розв'язує таку СЛАР, то йдеться про фактичну погану обумовленість матриці цієї СЛАР. Ітераційні методи в меншій мірі накопичують похибки обчислень, ніж прямі, тому перші розв'язують таку СЛАР, а другі – не завжди. Вихід є: застосовувати схему $3\times3\times3$.

© К.М. Рудаков, 2025

Характерна схема інтегрування та збирання матриці жорсткості:

Початок циклу по СЕ
  Початок циклу по точках інтегрування вздовж r_1
    Початок циклу по точках інтегрування вздовж r_2
      Початок циклу по точках інтегрування вздовж r_3
      Для вибраної в такий спосіб точки СЕ:
        Обчислення компонент матриці $[D]$;
        Початок циклу по вузлах СЕ m
          – обчислення компонент матриці $[B]_m$;
          Початок циклу по вузлах СЕ n
            – обчислення компонент матриці $[B]_n$;
            – перемноження матриць: $[B]_m^T[D][B]_n$;
            – обчислення вкладу в значення інтеграла.
          Кінець циклу по вузлах СЕ n
        Кінець циклу по вузлах СЕ m
      Кінець циклу по точках інтегрування вздовж r_3
    Кінець циклу по точках інтегрування вздовж r_2
  Кінець циклу по точках інтегрування вздовж r_1
  Додавання компонент матриці СЕ до компонент глобальної матриці
Кінець циклу по СЕ

Оскільки матриці, що беруть участь в підінтегральних виразах, заповнені слабко і частіше величинами, що повторюються, то проводиться багато дій з множенням на нуль або просто таких, що повторюються. Крім того, їх глибоко вкладено в декілька циклів, тобто вони повторюються багаторазово. Можна отримати суттєвий виграш у часі (в десятки та сотні разів), якщо програмувати не матрично-векторні перемноження, а результати цих дій.

24.6. Спрощена скінченно-елементна модель балки

24.6.1. Загальні відомості

Розглянемо лише простіший випадок: СЕ балочного типу (Bar або Beam першого порядку наближення) з двома вузлами, незмінним вздовж СЕ та симетричним перетином, прямолінійний, довжиною s; матеріал СЕ – ізотропний лінійно-пружний, деформації – малі.

Для абстрагування від положення такого СЕ в просторі, у СЕ вводять локальні координати: вісь $\xi \in [0, s]$ – вздовж осі стрижня (СЕ), а осі ζ та η є осями симетричного перетину стрижня. Потім отриманні співвідношення перераховують на глобальну координатну систему.

Кожний вузол одновимірного СЕ балочного типу може мати переміщення $q_1 = u_\xi$, $q_2 = w_\zeta$ та $q_3 = w_\eta$ в трьох напрямках: вздовж осі ξ (від розтягу-стиску) і

© К.М. Рудаков, 2025

вздовж осей ζ та η (від згину), а також кути повороту $\vartheta_1 = \vartheta_\xi$, $\vartheta_2 = \vartheta_\eta$ та $\vartheta_3 = \vartheta_\zeta$ навколо цих осей: від скручування (навколо ξ), від згину в площині $\xi\zeta$ та від згину в площині $\xi\eta$ відповідно.

Зазначимо, що пружний характер деформування дозволяє застосовувати принцип суперпозиції розв'язків, тобто окремо розглядати розтяг-стиск, скручування та згин в різних площинах, а потім результати додавати.

Оскільки в СЕ першого порядку наближення кількість вузлів $M_e = 2$, то вектор "переміщень" СЕ $\{\underset{\sim}{q}\}_e$ в локальній системі координат буде таким:

$$\{\underset{\sim}{q}\}_e = \left\{\{u_\xi; w_\zeta; w_\eta; \vartheta_\xi; \vartheta_\eta; \vartheta_\zeta\}_1; \{u_\xi; w_\zeta; w_\eta; \vartheta_\xi; \vartheta_\eta; \vartheta_\zeta\}_2\right\}_e^T = \left\{\underset{\sim}{q}_1; \underset{\sim}{q}_2; ...; \underset{\sim}{q}_{12}\right\}_e^T, \qquad (24.55)$$

причому в останньому векторі величини $\underset{\sim}{q}_m$, $m = 1,2,...,12$ – ті ж самі вузлові переміщення й кути поворотів, але з *наскрізною* нумерацією. Йому відповідає вектор навантажень

$$\{\underset{\sim}{P}\}_e = \left\{\{N_\xi; Q_\zeta; Q_\eta; M_\xi; M_\eta; M_\zeta\}_1; \{N_\xi; Q_\zeta; Q_\eta; M_\xi; M_\eta; M_\zeta\}_2\right\}_e^T = \left\{\underset{\sim}{P}_1; \underset{\sim}{P}_2; ..., \underset{\sim}{P}_{12}\right\}_e^T, \qquad (24.56)$$

де компоненти $\underset{\sim}{P}_m$, $m = 1,2,...,12$ – ті ж самі вузлові навантаження, але з наскрізною у СЕ нумерацією.

Підсумкова (симетрична) матриця жорсткості в *локальній* системі координат СЕ $[\underset{\sim}{K}]_e = \int\limits_{\Omega^e} [B]^T [D][B] d\Omega$ буде зв'язувати вектори $\{\underset{\sim}{q}\}_e$ та $\{\underset{\sim}{P}\}_e$ виразом

$$[\underset{\sim}{K}]_e \{\underset{\sim}{q}\}_e = \{\underset{\sim}{P}\}_e. \qquad (24.57)$$

Ця матриця буде остаточно конкретизована в п.24.6.5.

Розглянемо окремі вклади в цю матрицю від різних видів деформації.

24.6.2. Моделювання осьової деформації під дією осьової сили

Вклад у матрицю $[\underset{\sim}{K}]_e$ з (24.57) від осьової деформації під дією *осьової* сили N_ξ надається компонентами

$$p = EA / s, \qquad (24.58)$$

де E – модуль Юнга матеріалу; s – довжина стрижневого СЕ; A – площа перерізу СЕ. Враховано, що її вклад у варіаційний функціонал відповідає виразу $\int\limits_{\Omega^e} \sigma_{\xi\xi}\delta\varepsilon_{\xi\xi} d\Omega = s\int\limits_A \sigma_{\xi\xi}\delta\varepsilon_{\xi\xi} dA = \sigma_{\xi\xi}\delta\varepsilon_{\xi\xi} sA$, при цьому $\varepsilon_{\xi\xi} = \dfrac{(u_\xi)_1 - (u_\xi)_2}{s} = \dfrac{\underset{\sim}{q}_1 - \underset{\sim}{q}_7}{s}$, $\sigma_{\xi\xi} = E\varepsilon_{\xi\xi}$ та $\delta\varepsilon_{\xi\xi} = \dfrac{\delta\underset{\sim}{q}_1 - \delta\underset{\sim}{q}_7}{s}$. Тому $\sigma_{\xi\xi}\delta\varepsilon_{\xi\xi} = \dfrac{E(\underset{\sim}{q}_1 - \underset{\sim}{q}_7)}{s} \cdot \dfrac{(\delta\underset{\sim}{q}_1 - \delta\underset{\sim}{q}_7)}{s}$.

Можна використовувати інший – прямий підхід. Напруження $\sigma_{\xi\xi}$ пов'язане з осьовою силою N_ξ формулою розтягу/стиску прямого стрижня з незмінним перетином: $\sigma_{\xi\xi} = N_\xi / A$. Напруження $\sigma_{\xi\xi} = E\varepsilon_{\xi\xi} = E\dfrac{(u_\xi)_1 - (u_\xi)_2}{s} = E\dfrac{\underset{\sim}{q}_1 - \underset{\sim}{q}_7}{s}$, а осьова сила у вузлі $(N_\xi)_1 = A\sigma_{\xi\xi} = AE(\underset{\sim}{q}_1 - \underset{\sim}{q}_7)/s$. Для стрижня довжиною s маємо, що

© К.М. Рудаков, 2025

$\Omega^e = \int\limits_{\Omega^e} d\Omega = \int\limits_A sdA = sA$. Тому рівняння рівноваги стрижня під дією осьових сил, прикладених до вузлів СЕ: $(N_\xi)_1 = \dfrac{E}{s^2}(\underset{\sim}{q}_1 - \underset{\sim}{q}_7)sA$ та $(N_\xi)_2 = -(N_\xi)_1$.

Якщо би СЕ моделював тільки осьові деформації, то вектор (24.55) $\{\underset{\sim}{q}\}_e = \{\underset{\sim}{q}_1; \underset{\sim}{q}_7\}_e^T$, вектор (24.56) $\{\underset{\sim}{P}\}_e = \{(N_\xi)_1; (N_\xi)_2\}_e^T$, матриця у (24.57) $[\underset{\sim}{K}]_e = \begin{bmatrix} p & -p \\ -p & p \end{bmatrix}$, а рівняння рівноваги

$$[\underset{\sim}{K}]_e\{\underset{\sim}{q}\}_e = \begin{bmatrix} E/s^2 & -E/s^2 \\ -E/s^2 & E/s^2 \end{bmatrix} sA \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{q}_1 \\ \underset{\sim}{q}_7 \end{Bmatrix}_e = \begin{bmatrix} p & -p \\ -p & p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{q}_1 \\ \underset{\sim}{q}_7 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} (N_\xi)_1 \\ (N_\xi)_2 \end{Bmatrix}, \qquad (24.59)$$

де $p = EA/s$ згідно з виразом (24.58).

24.6.3. Моделювання скручування під дією крутильного моменту

Визначимося зі вкладом у матрицю $[\underset{\sim}{K}]_e$ з (24.57) від *кручення*. З механіки матеріалів та конструкцій відомо, що кут скручування стрижня ϑ_ξ від дії крутильного моменту M_ξ визначається формулою $\vartheta_\xi = \dfrac{M_\xi s}{GI_k}$, де I_k – умовний момент інерції при крученні стрижня, вирази для обчислення якого є в довідковій літературі. Якщо стрижень має круглий перетин, то $I_k = I_p$. Оскільки кут скручування на довжині СЕ $\vartheta_\xi = (\vartheta_\xi)_1 - (\vartheta_\xi)_2$, то

$$(M_\xi)_1 = \frac{GI_k}{s}((\vartheta_\xi)_1 - (\vartheta_\xi)_2); \quad (M_\xi)_2 = -(M_\xi)_1 = \frac{GI_k}{s}((\vartheta_\xi)_2 - (\vartheta_\xi)_1). \qquad (24.60)$$

Якщо б СЕ моделював тільки деформації від кручення, то у (24.57) вектор $\{\underset{\sim}{q}\}_e = \{\underset{\sim}{q}_4; \underset{\sim}{q}_{10}\}_e^T$, матриця $[\underset{\sim}{K}]_e = \begin{bmatrix} r & -r \\ -r & r \end{bmatrix}$, а рівняння рівноваги, згідно з (24.60)

$$[\underset{\sim}{K}]_e\{\underset{\sim}{q}\}_e = \begin{bmatrix} GI_k/\mathrm{s} & -GI_k/s \\ -GI_k/s & GI_k/s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{q}_4 \\ \underset{\sim}{q}_{10} \end{Bmatrix}_e = \begin{bmatrix} r & -r \\ -r & r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{q}_4 \\ \underset{\sim}{q}_{10} \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} (M_\xi)_1 \\ (M_\xi)_2 \end{Bmatrix}, \qquad (24.61)$$

де введене позначення

$$r = GI_k/s. \qquad (24.62)$$

Примітка 24.2. При крученні стрижня з не круглим перетином виникає депланація перетину: споконвічно плоский перетин перестає бути плоским. Але застосовані формули опору матеріалів цього не враховують.

24.6.4. Моделювання згину від згинальних моментів та поперечних сил

Визначимося зі вкладом в матрицю $[\underset{\sim}{K}]_e$ з (24.57) від *згину*. Є декілька моделей пружного згину балки. Розглянемо лише модель Ейлера-Бернуллі.

© К.М. Рудаков, 2025

24.6.4.1. Основні рівняння технічної моделі пружного згину балки (моделі Ейлера-Бернуллі)

Згідно з технічною моделлю згину прямолінійної балки, яка зазвичай вивчається в курсі механіки матеріалів та конструкцій, функціями переміщень є функції прогину $w_\zeta(\xi)$ та $w_\eta(\xi)$. Кути поворотів площини перетину пов'язують з прогинами:

$$\vartheta_\eta(\xi) = dw_\zeta(\xi)/d\xi = w'_\zeta(\xi); \quad \vartheta_\zeta(\xi) = dw_\eta(\xi)/d\xi = w'_\eta(\xi), \tag{24.63}$$

тобто ця площина є перпендикулярною до проекцій "середньої лінії" балки на площини $\xi\zeta$ та $\xi\eta$ відповідно. В цій моделі згину балки вважається, що в площинах $\xi\zeta$ та $\xi\eta$ можуть діяти відповідно згинальні моменти M_η та M_ζ, а також поперечні сили Q_ζ та Q_η. Від них у вказаних площинах виникають повздовжні напруження $\sigma_{\xi\xi}$ та дотичні $\tau_{\xi\zeta}$ й $\tau_{\xi\eta}$ відповідно, причому $\sigma_{\xi\xi}$ змінюються в перетині лінійно, а $\tau_{\xi\zeta}$ й $\tau_{\xi\eta}$ – за квадратичним законом Журавського.

Згинальні моменти M_η та M_ζ пов'язують з прогинами балки виразами

$$M_\eta = EI_\eta \frac{\partial^2 w_\zeta}{\partial\xi^2}; \quad M_\zeta = EI_\zeta \frac{\partial^2 w_\eta}{\partial\xi^2}, \tag{24.64}$$

де $I_\eta = \int_A \zeta^2 dA$ та $I_\zeta = \int_A \eta^2 dA$ – моменти інерції перетину балки відносно вказаних осей η та ζ.

Поперечні сили визначають як

$$Q_\zeta(\xi) = \frac{\partial M_\eta(\xi)}{\partial\xi} = EI_\eta \frac{\partial^3 w_\zeta(\xi)}{\partial\xi^3}; \quad Q_\eta(\xi) = \frac{\partial M_\zeta(\xi)}{\partial\xi} = EI_\zeta \frac{\partial^2 w_\eta(\xi)}{\partial\xi^2}. \tag{24.65}$$

Для врахування дотичних напружень у спрощених моделях СЕ балки застосовують *приведені* дотичні напруження $\tilde{\tau}_{\xi\zeta}$ та $\tilde{\tau}_{\xi\eta}$ й пов'язані з ними *приведені* кутові деформації (кути зсуву) $\tilde{\gamma}_{\xi\zeta}$ та $\tilde{\gamma}_{\xi\eta}$. Ці напруження та деформації (кути) повинні бути величинами, постійними в площинах $\xi\zeta$ та $\xi\eta$.

Для їх обчислення вводять приведені площі перетину $\tilde{A}_i$, $i = \zeta, \eta$, та записують умову однаковості пружної енергії зсуву Π_i, $i = \zeta, \eta$, на кожній цій поверхні та на дійсній поверхні з площею A. Позначимо

$$\tilde{\tau}_{\xi i} = Q_i / \tilde{A}_i, \quad \tilde{\gamma}_{\xi i} = \tilde{\tau}_{\xi i} / G, \quad k_i = \tilde{A}_i / A; \quad i = \zeta, \eta, \tag{24.66}$$

де поперечні сили Q_i пов'язані з дотичними напруженнями виразом

$$Q_i = \int_A \tau_{\xi i} dA; \quad i = \zeta, \eta. \tag{24.67}$$

Тоді пружна енергія зсуву $\Pi_i = \frac{1}{2}\int_A \tau_{\xi i}\gamma_{\xi i} dA = \frac{1}{2}\int_A \tau_{\xi i}\frac{\tau_{\xi i}}{G} dA = \frac{1}{2}\int_A \frac{\tau_{\xi i}^2}{G} dA = \frac{1}{2}\int_{\tilde{A}_i} \frac{\tilde{\tau}_{\xi i}^2}{G} d\tilde{A}_i$. З урахуванням умови $\tilde{\tau}_{\xi i} = const$ маємо, що

© К.М. Рудаков, 2025

$$\int_A \tau_{\xi i}{}^2 dA = \tilde{\tau}_{\xi i}{}^2 \int_{\tilde{A}_i} d\tilde{A} = \tilde{\tau}_{\xi i}{}^2 \tilde{A}_i = (Q_i / \tilde{A}_i)^2 \tilde{A}_i = Q_i^2 / \tilde{A}_i = Q_i^2 / (k_i A); \quad i = \zeta, \eta, \qquad (24.68)$$

звідкіля коефіцієнт приведення

$$k_i = \frac{Q_i^2}{A\int_A \tau_{\xi i}{}^2 dA}; \quad i = \zeta, \eta. \qquad (24.69)$$

Якщо балка має прямокутний перетин з площею $A = b_\zeta b_\eta$, де b_i – розмір перетину в напрямку вказаної осі, то для $\tau_{\xi i}$ є формула Журавського, тут

$$\tau_{\xi\zeta} = \frac{3}{2}\frac{Q_\zeta}{A}\left[1 - \left(\frac{2\zeta}{b_\zeta}\right)^2\right]; \quad \zeta \in [0, b_\zeta / 2]; \quad \tau_{\xi\eta} = \frac{3}{2}\frac{Q_\eta}{A}\left[1 - \left(\frac{2\eta}{b_\eta}\right)^2\right]; \quad \eta \in [0, b_\eta / 2]. \qquad (24.70)$$

З урахуванням (24.67) і (24.70), з (24.69) можемо отримати, що для балки з прямокутним перетином величини $k_\zeta = k_\eta = 5/6$. Для круглого перетину $k_\zeta = k_\eta \approx 0.9$, а для тонкостінного кільцевого $k_\zeta = k_\eta \approx 0.5$.

Отже, спочатку для конкретної форми симетричного перетину за формулою (24.69) потрібно обчислити коефіцієнти k_i; $i = \zeta, \eta$, потім із формул (24.66) отримати величини приведених кутових деформацій (одночасно це приведені кути), а саме

$$\tilde{\gamma}_{\xi i} = \frac{Q_i}{G k_i A}; \quad i = \zeta, \eta. \qquad (24.71)$$

24.6.4.2. Апроксимаційна функція пружного згину балки Ейлера-Бернуллі

На відміну від граничних умов і напружень/деформацій від розтягу (стиску) та скручування, граничні умови й напруження/деформації від згину в межах СЕ – складніші. Тому для апроксимації деформацій від згину в СЕ з двома вузлами рекомендують застосовувати базисні функції, що використовують поліноми Ерміта. В підрозділі 20.6 отримали базисні функції (20.55), але в локальній системі координат $\xi \in [-1,1]$. В нашому випадку прийнято, що $\xi \in [0, s]$, тому базисні функції потрібно перевизначити.

Оскільки координата ξ змінюється від $\xi_1 = 0$ (у вузлу з локальним номером 1) до $\xi_2 = s$ (у вузлу з локальним номером 2), то для апроксимації прогинів $w_\zeta(\xi)$ та $w_\eta(\xi)$ будемо використовувати кубічний поліном Ерміта

$$w(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 \quad \text{при} \quad \xi \in [0, s], \qquad (24.72)$$

якій дозволить мати на стиках СЕ безперервні треті похідні, тобто погоджені не тільки згинальні моменти, а й поперечні сили (див. (24.64) та (24.65)), а також враховувати граничні умови у вигляді прогинів та кутів поворотів.

24.6.4.3. Скінченно-елементна модель пружного згину балки Ейлера-Бернуллі тільки від згинальних моментів

Докладно розглянемо згин у площині $\xi\zeta$, а в площині $\xi\eta$ усе буде аналогічне. З огляду на (24.72) маємо, що у вузлах 1 та 2 СЕ:

© К.М. Рудаков, 2025

$$(w_\zeta)_1 = w_\zeta(0) = a_0; \quad (w_\zeta)_2 = w_\zeta(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3;$$
$$(\vartheta_\eta)_1 = w'_\zeta(0) = a_1; \quad (\vartheta_\eta)_2 = w'_\zeta(s) = a_1 + 2a_2 s + 3a_3 s^2. \qquad (24.73)$$

З цієї системи рівнянь знаходимо значення коефіцієнтів для (24.72):

$$a_0 = (w_\zeta)_1; \quad a_1 = (\vartheta_\eta)_1; \quad a_2 = 3\frac{(w_\zeta)_2 - (w_\zeta)_1}{s^2} - \frac{(\vartheta_\eta)_2 + 2(\vartheta_\eta)_1}{s};$$
$$a_3 = \frac{(\vartheta_\eta)_1 + (\vartheta_\eta)_2}{s^2} - 2\frac{(w_\zeta)_2 - (w_\zeta)_1}{s^3}. \qquad (24.74)$$

Вираз (24.72) для $w_\zeta(\xi)$ з використанням (24.74) можна переписати відносно вузлових значень у вигляді

$$w_\zeta(\xi) = \varphi_1^e \cdot (w_\zeta)_1 + \psi_1^e \cdot (\vartheta_\eta)_1 + \varphi_2^e \cdot (w_\zeta)_2 + \psi_2^e \cdot (\vartheta_\eta)_2, \qquad (24.75\text{-а})$$

або як

$$w_\zeta(\xi) = \{\varphi_1^e, \psi_1^e, \varphi_2^e, \psi_2^e\}\ \{(w_\zeta)_1, (\vartheta_\eta)_1, (w_\zeta)_2, (\vartheta_\eta)_2\}^T, \qquad (24.75\text{-б})$$

де базисні функції СЕ

$$\varphi_1^e = \varphi_1^e(\xi) = 1 - \frac{3\xi^2}{s^2} + \frac{2\xi^3}{s^3}; \quad \psi_1^e = \psi_1^e(\xi) = \xi - \frac{2\xi^2}{s} + \frac{\xi^3}{s^2};$$
$$\varphi_2^e = \varphi_2^e(\xi) = \frac{3\xi^2}{s^2} - \frac{2\xi^3}{s^3} = 1 - \varphi_1^e(\xi); \quad \psi_2^e = \psi_2^e(\xi) = -\frac{\xi^2}{s} + \frac{\xi^3}{s^2}. \qquad (24.76)$$

З механіки матеріалів та конструкцій відомо, що для моделі балки Ейлера-Бернуллі повздовжня деформація від згину $\varepsilon_{\xi\xi} = \frac{\zeta}{\rho} = \frac{M_\eta \zeta}{EI_\eta} = \frac{d^2 w_\xi(\xi)}{d\xi^2}\zeta$, а повздовжнє напруження від згину $\sigma_{\xi\xi} = E\varepsilon_{\xi\xi}$. З урахуванням (24.75) та (24.76):

$$\frac{d^2 w_\zeta(\xi)}{d\xi^2} = \frac{d^2\varphi_1^e}{d\xi^2}\cdot(w_\zeta)_1 + \frac{d^2\psi_1^e}{d\xi^2}\cdot(\vartheta_\eta)_1 + \frac{d^2\varphi_2^e}{d\xi^2}\cdot(w_\zeta)_2 + \frac{d^2\psi_2^e}{d\xi^2}\cdot(\vartheta_\eta)_2 =$$
$$= \frac{6}{s^2}\left(-1 + 2\frac{\xi}{s}\right)(w_\zeta)_1 + \frac{2}{s}\left(-2 + 3\frac{\xi}{s}\right)(\vartheta_\eta)_1 + \frac{6}{s^2}\left(1 - 2\frac{\xi}{s}\right)(w_\zeta)_2 + \frac{2}{s}\left(-1 + 3\frac{\xi}{s}\right)(\vartheta_\eta)_2 =$$
$$= \alpha_{11}\cdot(w_\zeta)_1 + \alpha_{12}\cdot(\vartheta_\eta)_1 + \alpha_{21}\cdot(w_\zeta)_2 + \alpha_{22}\cdot(\vartheta_\eta)_2 =$$
$$= \{\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}\}\{(w_\zeta)_1, (\vartheta_\eta)_1, (w_\zeta)_2, (\vartheta_\eta)_2\}^T = \{\alpha\}\{\underset{\sim}{q}_\zeta\}_e, \qquad (24.77)$$

де позначено компоненти вектора-рядка $\{\alpha\}$

$$\alpha_{11} = \frac{6}{s^2}\left(-1 + 2\frac{\xi}{s}\right); \quad \alpha_{12} = \frac{2}{s}\left(-2 + 3\frac{\xi}{s}\right); \quad \alpha_{21} = -\alpha_{11}; \quad \alpha_{22} = \frac{2}{s}\left(-1 + 3\frac{\xi}{s}\right). \qquad (24.78)$$

Оскільки при згині $\varepsilon_{\xi\xi} = \frac{d^2 w_\zeta(\xi)}{d\xi^2}\zeta$ та $\sigma_{\xi\xi} = E\varepsilon_{\xi\xi}$, то вклад у варіаційний функціонал від згину моментом M_η відповідає виразу

$$\int_\Omega \sigma_{\xi\xi}\delta\varepsilon_{\xi\xi}d\Omega = \int_0^s \{\delta\underset{\sim}{q}_\zeta\}_e^T\{\alpha\}^T E\{\alpha\}\{\underset{\sim}{q}_\zeta\}_e d\xi \int_A \zeta^2 dA = \{\delta\underset{\sim}{q}_\zeta\}_e^T\left(EI_\eta\int_0^s\{\alpha\}^T\{\alpha\}d\xi\right)\{\underset{\sim}{q}_\zeta\}_e =$$
$$= \{\delta\underset{\sim}{q}_\zeta\}_e^T\left(EI_\eta[K_\alpha]_e\right)\{\underset{\sim}{q}_\zeta\}_e = \{\delta\underset{\sim}{q}_\zeta\}_e^T[\underset{\sim}{K}_\xi]_e\{\underset{\sim}{q}_\zeta\}_e. \qquad (24.79)$$

© К.М. Рудаков, 2025

Введена матриця

$$[K_\alpha]_e = \int_0^s \{\alpha\}^T \{\alpha\} d\xi \tag{24.80}$$

має сталі компоненти, оскільки інтеграл має визначені межі.

Зокрема, її компонента $(K_{11})_\alpha = \int_0^s \alpha_{11}\alpha_{11} d\xi = \int_0^s \frac{6}{s^2}\left(-1+2\frac{\xi}{s}\right)\frac{6}{s^2}\left(-1+2\frac{\xi}{s}\right)d\xi =$

$$= \frac{36}{s^4}\int_0^s \left(-1+2\frac{\xi}{s}\right)^2 d\xi = \frac{36}{s^4}\int_0^s \left(1-4\frac{\xi}{s}+4\frac{\xi^2}{s^2}\right)d\xi = \frac{36}{s^4}\left(s-4\frac{s^2}{2s}+4\frac{s^3}{3s^2}\right) = \frac{36}{s^3}\left(\frac{3-6+4}{3}\right) = \frac{12}{s^3}.$$

Якщо провести аналогічні обчислення, отримаємо матрицю

$$[\underset{\sim}{K}_\xi]_e = \frac{EI_\eta}{s^3}\begin{bmatrix} 12 & 6s & -12 & 6s \\ 6s & 4s^2 & -6s & 2s^2 \\ -12 & -6s & 12 & -6s \\ 6s & 2s^2 & -6s & 4s^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_\xi & f_\xi & -g_\xi & f_\xi \\ f_\xi & c_\xi & -f_\xi & d_\xi \\ -g_\xi & -f_\xi & g_\xi & -f_\xi \\ f_\xi & d_\xi & -f_\xi & c_\xi \end{bmatrix}. \tag{24.81}$$

Перевірка. При застосуванні матриці (24.81) маємо алгебраїчну систему рівнянь рівноваги

$$\frac{EI_\eta}{s^3}\begin{bmatrix} 12 & 6s & -12 & 6s \\ 6s & 4s^2 & -6s & 2s^2 \\ -12 & -6s & 12 & -6s \\ 6s & 2s^2 & -6s & 4s^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} (w_\zeta)_1 \\ (\vartheta_\eta)_1 \\ (w_\zeta)_2 \\ (\vartheta_\eta)_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (Q_\zeta)_1 \\ (M_\eta)_1 \\ (Q_\zeta)_2 \\ (M_\eta)_2 \end{Bmatrix}. \tag{24.82}$$

Якщо помножити перший рядок з (24.82) на вектор "переміщень", то отримуємо значення $(Q_\zeta)_1$:

$$(Q_\zeta)_1 = \frac{EI_\eta}{s^3}\left(12\cdot(w_\zeta)_1 + 6s\cdot(\vartheta_\eta)_1 - 12\cdot(w_\zeta)_2 + 6s\cdot(\vartheta_\eta)_2\right). \tag{24.83}$$

Згідно з (24.65) $Q_\zeta(\xi) = \frac{\partial M_\eta(\xi)}{\partial\xi} = EI_\eta\frac{\partial^3 w_\zeta(\xi)}{\partial\xi^3}$. Візьмемо першу похідну з (24.77), отримаємо, що

$$Q_\zeta(\xi) = \frac{\partial M_\eta(\xi)}{\partial\xi} = EI_\eta\frac{\partial^3 w_\zeta(\xi)}{\partial\xi^3} = EI_\eta\{\alpha'\}\{\underset{\sim}{q}_\zeta\}_e. \tag{24.84}$$

З (24.78) компоненти вектора-рядка $\{\alpha'\}$

$$\alpha'_{11} = \frac{\partial\alpha_{11}(\xi)}{\partial\xi} = \frac{\partial^3\varphi_1^e(\xi)}{\partial\xi^3} = \frac{12}{s^3};\quad \alpha'_{12} = \frac{6}{s^2};\quad \alpha'_{21} = -\alpha'_{11} = -\frac{12}{s^3};\quad \alpha'_{22} = \alpha'_{12} = \frac{6}{s^2}. \tag{24.85}$$

Очевидно, що вираз (24.84) з урахуванням (24.85) дає той же результат, що містить вираз (24.83).

Примітка 24.3. Згідно з (24.78), згинальний момент моделюється лінійним законом. Оскільки всі компоненти $\{\alpha'_{11},\alpha'_{12},\alpha'_{21},\alpha'_{22}\}$ є постійними, то й поперечні сили, що виникли внаслідок дії згинальних моментів, в СЕ з апроксимацією поліномом Ерміта (24.72) моделюються незмінними вздовж осі ξ. Як відомо,

розподілений вздовж осі балки згинальний момент пов'язаний з четвертою похідною від прогину, тому цією моделлю балки не враховується.

Аналогічно (24.77) в площині $\xi\eta$

$$\frac{d^2 w_\eta(\xi)}{d\xi^2} == \{\alpha_{11},\alpha_{12},\alpha_{21},\alpha_{22}\}\{(w_\eta)_1,(\vartheta_\zeta)_1,(w_\eta)_2,(\vartheta_\zeta)_2\}^T = \{\alpha\}\{\underset{\sim}{q}_\eta\}_e, \qquad (24.86)$$

тому й для цієї площини отримаємо матрицю, аналогічну (24.81).

Отже, вклад у матрицю (24.57) від деформації згину під дією моментів M_i, $i=\zeta,\eta$ надається компонентами (див. (24.81))

$$g_\zeta = 12EI_\eta / s^3;\quad f_\zeta = 6EI_\eta / s^2;\quad c_\zeta = 4EI_\eta / s;\quad d_\zeta = 2EI_\eta / s;$$
$$g_\eta = 12EI_\zeta / s^3;\quad f_\eta = 6EI_\zeta / s^2;\quad c_\eta = 4EI_\zeta / s;\quad d_\eta = 2EI_\zeta / s. \qquad (24.87)$$

24.6.4.4. Скінченно-елементна модель пружного згину балки Ейлера-Бернуллі від згинальних моментів і поперечних сил

Крім повздовжніх напружень від згинальних моментів, модель балки Ейлера-Бернуллі ще може врахувати дотичні напруження від поперечних сил Q_ζ та Q_η. Вплив поперечних сил рекомендують проводити не завжди, а лише у випадку виконання умов "короткої балки"

$$\frac{Gk_\zeta As^2}{EI_\eta} < 30;\quad \frac{Gk_\eta As^2}{EI_\zeta} < 30. \qquad (24.88)$$

Знов докладно розглянемо згин у площині $\xi\zeta$, а в площині $\xi\eta$ викладки та результати будуть аналогічними.

Застосуємо отримані в (24.71) приведені кутові деформації, а саме $\tilde{\gamma}_i = Q_i/(Gk_iA)$; $i=\zeta,\eta$. З їх використанням замість (24.79) запишемо, що вклад у варіаційний функціонал від згину моментом M_η та під дією поперечної сили Q_ζ, відповідає виразу

$$\delta F_\zeta = \int_\Omega \left(\delta\varepsilon_{\xi\xi}\sigma_{\xi\xi} + \delta\tilde{\gamma}_{\xi\zeta}\tilde{\tau}_{\xi\zeta}\right)d\Omega = \{\delta\underset{\sim}{q}_\zeta\}_e^T\left(EI_\eta\int_0^s\{\alpha\}^T\{\alpha\}d\xi\right)\{\underset{\sim}{q}_\zeta\}_e + s\int_{\tilde{A}_\zeta}\delta\tilde{\gamma}_{\xi\zeta}G\tilde{\gamma}_{\xi\zeta}d\tilde{A}_\zeta =$$
$$= \{\delta\underset{\sim}{q}_\zeta\}_e^T\left(EI_\eta[K_{\xi\alpha}]_e\right)\{\underset{\sim}{q}_\zeta\}_e + s\tilde{A}_i\delta\tilde{\gamma}_{\xi\zeta}G\tilde{\gamma}_{\xi\zeta}. \qquad (24.89)$$

Врахували, що кутова деформація $\tilde{\gamma}_{\xi\zeta}$ незмінна в межах СЕ. Потрібно виразити $\tilde{\gamma}_{\xi\zeta}$ та $\delta\tilde{\gamma}_{\xi\zeta}$ через вектор вузлових переміщень $\{\underset{\sim}{q}_\xi\}_e$.

Для спрощення подальших записів введемо позначення

$$\beta_\zeta = \frac{EI_\eta}{Gk_\zeta As^2};\quad \beta_\eta = \frac{EI_\zeta}{Gk_\zeta As^2}. \qquad (24.90)$$

Візьмемо вираз (24.71) при $i=\zeta$, а саме $\tilde{\gamma}_{\xi\zeta} = Q_\zeta/(Gk_\zeta A)$ і підставивши в нього вираз (24.84), тобто $Q_\zeta(\xi) = EI_\eta\dfrac{d^3 w_\zeta(\xi)}{d\xi^3} = EI_\eta\{\alpha'\}\{\underset{\sim}{q}_\zeta\}_e$, виключимо з нього Q_ζ, враховуючи позначення (24.90):

© К.М. Рудаков, 2025

$$\tilde{\gamma}_{\xi\zeta} = \frac{EI_\eta}{Gk_\zeta A}\frac{\partial^3 w_\zeta(\xi)}{\partial\xi^3} = \beta_\zeta s^2 \frac{\partial^3 w_\zeta(\xi)}{\partial\xi^3} = \beta_\zeta s^2 \{\alpha'\}\{\underset{\sim}{q}_\zeta\}_e. \qquad (24.91)$$

Оскільки вважається, що $\tilde{\gamma}_{\xi\zeta} = const \neq 0$, то потрібно щоб і третя похідна $\partial^3 w_\zeta(\xi)/\partial\xi^3 = const \neq 0$, що виконується при застосуванні обраного кубічного полінома Ерміта (24.72).

Оскільки в (24.91) $s = const$ та, згідно з (24.85) та (24.90), β_ζ й компоненти $\{\alpha'\}$ теж є незмінними, то отримаємо з (24.91) варіацію

$$\delta\tilde{\gamma}_{\xi\zeta} = \beta_\zeta s^2 \{\alpha'\}\{\delta\underset{\sim}{q}_\zeta\}_e = \beta_\zeta s^2 \{\delta\underset{\sim}{q}_\zeta\}_e^T \{\alpha'\}^T. \qquad (24.92)$$

Підставимо (24.91) та (24.92) у (24.89):

$$\delta F_\zeta = \{\delta\underset{\sim}{q}_\zeta\}_e^T \left(EI_\eta[K_{\xi\alpha}]_e + s\tilde{A}_i G\beta_\zeta s^2 \{\alpha'\}^T \beta_\zeta s^2 \{\alpha'\}\right)\{\underset{\sim}{q}_\zeta\}_e =$$

$$= \{\delta\underset{\sim}{q}_\zeta\}_e^T EI_\eta \left([K_{\xi\alpha}]_e + s^3\beta_\zeta \{\alpha'\}^T\{\alpha'\}\right)\{\underset{\sim}{q}_\zeta\}_e = \{\delta\underset{\sim}{q}_\zeta\}_e^T EI_\eta \left([K_{\xi\alpha}]_e + s^3\beta_\zeta [K_{\xi\alpha'}]_e\right)\{\underset{\sim}{q}_\zeta\}_e, \qquad (24.93)$$

де введена матриця зі сталими компонентами

$$[K_{\xi\alpha'}]_e = \{\alpha'\}^T\{\alpha'\}. \qquad (24.94)$$

Отже, матриця жорсткості СЕ $[\underset{\sim}{K}_\xi]_e$, яка одночасно враховує згин в площині $\xi\zeta$ (тобто в локальних координатах) від згинального моменту та поперечної сили, обчислюється як сума двох матриць:

$$[\underset{\sim}{K}_\xi]_e = EI_\eta \left([K_{\xi\alpha}]_e + s^3\beta_\zeta [K_{\xi\alpha'}]_e\right). \qquad (24.95)$$

Залишилося визначитися з наповненням вектора $\{\underset{\sim}{q}_\zeta\}_e$ та матриці $[\underset{\sim}{K}_\xi]_e$.

З огляду на (24.71) і з застосуванням (24.90) введемо функцію

$$v_\zeta(\xi) = -\frac{M_\eta}{Q_\zeta} = -\frac{EI_\eta}{Gk_\zeta A}\frac{\partial^2 w_\zeta(\xi)}{\partial\xi^2} = -\beta_\zeta s^2 \frac{\partial^2 w_\zeta(\xi)}{\partial\xi^2}. \qquad (24.96)$$

Відзначимо, що ця функція має розмірність переміщення.

Візьмемо першу похідну від (24.96) та порівняємо результат з (24.91):

$$\frac{\partial v_\zeta(\xi)}{\partial\xi} = v'_\zeta = -\tilde{\gamma}_{\xi\zeta}. \qquad (24.97)$$

Цей вираз показує, що $v_\zeta(\xi)$ є прогином, викликаним наявністю деформації зсуву (кута повороту) $\tilde{\gamma}_{\xi\zeta}$. Цей додатковий прогин необхідно враховувати у векторі вузлових "переміщень" $\{\underset{\sim}{q}_\zeta\}_e$. Позначимо сумарні прогини у вузлах СЕ

$$(\tilde{w}_\zeta)_1 = (w_\zeta)_1 + (v_\zeta)_1; \quad (\tilde{w}_\zeta)_2 = (w_\zeta)_2 + (v_\zeta)_2. \qquad (24.98)$$

Згідно з (24.96) функція $v_\zeta(\xi)$ однозначно виражається через $w_\zeta(\xi)$, та й формула (24.84) пов'язує $Q_\zeta(\xi)$ саме з функцією $w_\zeta(\xi)$. У моделі балки Ейлера-Бернуллі вважається (див. (24.63)), що $\vartheta_\eta(\xi) = dw_\zeta(\xi)/d\xi = w'_\zeta(\xi)$. Тому для апроксимації прогинів та кутів знов будемо використовувати поліном Ерміта (24.72). Щоб задовольнити умову неперервності функції прогинів та кутів повороту на стиках СЕ, у векторі вузлових "переміщень" $\{\underset{\sim}{q}_\zeta\}_e$ достатньо модифікувати прогини, тобто прийняти цей вектор у вигляді

© К.М. Рудаков, 2025

$$\{\underset{\sim}{q}_\zeta\}_e = \left\{(\tilde{w}_\zeta)_1, (\vartheta_\eta)_1, (\tilde{w}_\zeta)_2, (\vartheta_\eta)_2\right\}^T = \left\{\tilde{\underset{\sim}{q}}_2, \underset{\sim}{q}_5, \tilde{\underset{\sim}{q}}_8, \underset{\sim}{q}_{11}\right\}^T, \tag{24.99}$$

причому $(\vartheta_\eta)_1$ та $(\vartheta_\eta)_2$, згідно з моделлю балки Ейлера-Бернуллі, відповідають формулі (24.63), тобто $(\vartheta_\eta)_1 = w'_\zeta(0)$ й $(\vartheta_\eta)_2 = w'_\zeta(s)$. Отже, знов застосуємо апроксимацію (24.72), а саме приймемо, що $w_\zeta(\xi) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1\xi + \tilde{a}_2\xi^2 + \tilde{a}_3\xi^3$ при $\xi \in [0, s]$. Для функції $v_\zeta(\xi)$ у (24.96) визначимося, що

$$\frac{\partial^2 w_\zeta(\xi)}{\partial \xi^2} = 2\tilde{a}_2 + 6\tilde{a}_3\xi\,. \tag{24.100}$$

Підставимо (24.100) у (24.96):

$$v_\zeta(\xi) = -\beta_\zeta s^2 \frac{\partial^2 w_\zeta(\xi)}{\partial \xi^2} = -\beta_\zeta s^2 (2\tilde{a}_2 + 6\tilde{a}_3\xi)\,. \tag{24.101}$$

Тепер визначимо, що у вузлах СЕ з локальними номерами 1 (при $\xi = 0$) та 2 (при $\xi = s$):

$$\begin{gathered}
\tilde{\underset{\sim}{q}}_2 = (\tilde{w}_\zeta)_1 = w_\zeta(0) + v_\zeta(0) = \tilde{a}_0 - 2\beta_\zeta s^2 \tilde{a}_2\,; \\
\tilde{\underset{\sim}{q}}_8 = (\tilde{w}_\zeta)_2 = w_\zeta(s) + v_\zeta(s) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 s + \tilde{a}_2 s^2 + \tilde{a}_3 s^3 - \beta_\zeta s^2 (2\tilde{a}_2 + 6\tilde{a}_3 s) = \\
= \tilde{a}_0 + s\tilde{a}_1 + s^2(1 - 2\beta_\zeta)\tilde{a}_2 + s^3(1 - 6\beta_\zeta)\tilde{a}_3\,; \\
\underset{\sim}{q}_5 = (\vartheta_\eta)_1 = w'_\zeta(0) = \tilde{a}_1\,; \quad \underset{\sim}{q}_{11} = (\vartheta_\eta)_2 = w'_\zeta(s) = \tilde{a}_1 + 2s\tilde{a}_2 + 3s^2\tilde{a}_3\,.
\end{gathered} \tag{24.102}$$

Перепишемо систему рівнянь (24.102) у матричному вигляді

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2\beta_\zeta s^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & s & s^2(1-2\beta_\zeta) & s^3(1-6\beta_\zeta) \\ 0 & 1 & 2s & 3s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{a}_0 \\ \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \tilde{a}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\tilde{w}_\zeta)_1 \\ (\vartheta_\eta)_1 \\ (\tilde{w}_\zeta)_2 \\ (\vartheta_\eta)_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\underset{\sim}{q}}_2 \\ \underset{\sim}{q}_5 \\ \tilde{\underset{\sim}{q}}_8 \\ \underset{\sim}{q}_{11} \end{Bmatrix}. \tag{24.103}$$

Зазвичай для скорочення записів вводять величини (мають назву *коефіцієнтів корекції зсуву*)

$$h_\zeta = 12\beta_\zeta\,; \quad h_\eta = 12\beta_\eta\,. \tag{24.104}$$

Зі системи рівнянь (24.103) знаходимо значення коефіцієнтів:

$$\begin{gathered}
\tilde{a}_0 = \tilde{\underset{\sim}{q}}_2 + \frac{h_\zeta}{12(1+h_\zeta)}\left(6(\tilde{\underset{\sim}{q}}_8 - \tilde{\underset{\sim}{q}}_2) - s(2-h_\zeta)\underset{\sim}{q}_{11} - s(4+h_\zeta)\underset{\sim}{q}_5\right); \quad \tilde{a}_1 = \underset{\sim}{q}_5\,; \\
\tilde{a}_2 = \frac{1}{2(1+h_\zeta)s^2}\left(6(\tilde{\underset{\sim}{q}}_8 - \tilde{\underset{\sim}{q}}_2) - s(2-h_\zeta)\underset{\sim}{q}_{11} - s(4+h_\zeta)\underset{\sim}{q}_5\right); \\
\tilde{a}_3 = \frac{1}{(1+h_\zeta)s^3}\left(s(\underset{\sim}{q}_{11} + \underset{\sim}{q}_5) - 2(\tilde{\underset{\sim}{q}}_8 - \tilde{\underset{\sim}{q}}_2)\right).
\end{gathered} \tag{24.105}$$

Вираз (24.72) для $w_\zeta(\xi)$ з використанням (24.105) можна записати відносно вузлових значень у вигляді

$$w_\zeta(\xi) = \tilde{\varphi}_1^e \cdot (\tilde{w}_\zeta)_1 + \tilde{\psi}_1^e \cdot (\vartheta_\eta)_1 + \tilde{\varphi}_2^e \cdot (\tilde{w}_\zeta)_2 + \tilde{\psi}_2^e \cdot (\vartheta_\eta)_2\,, \tag{24.106-а}$$

або як

$$w_\zeta(\xi) = \{\tilde{\varphi}_1^e, \tilde{\psi}_1^e, \tilde{\varphi}_2^e, \tilde{\psi}_2^e\}\ \{\tilde{\underset{\sim}{q}}_2, \underset{\sim}{q}_5, \tilde{\underset{\sim}{q}}_8, \underset{\sim}{q}_{11}\}^T, \tag{24.106-б}$$

© К.М. Рудаков, 2025

де базисні функції СЕ

$$\tilde{\varphi}_1^e = \tilde{\varphi}_1^e(\xi) = 1 + \frac{1}{1+h_\xi}\left(-\frac{h_\xi}{2} - \frac{3\xi^2}{s^2} + \frac{2\xi^3}{s^3}\right);$$

$$\tilde{\psi}_1^e = \tilde{\psi}_1^e(\xi) = \frac{1}{1+h_\xi}\left(-\frac{h_\xi(4+h_\xi)s}{12} - \frac{4+h_\xi}{2}\frac{\xi^2}{s} + \frac{\xi^3}{s^2}\right);$$

$$\tilde{\varphi}_2^e = \tilde{\varphi}_2^e(\xi) = \frac{1}{1+h_\xi}\left(\frac{h_\xi}{2} + \frac{3\xi^2}{s^2} - \frac{2\xi^3}{s^3}\right) = 1 - \tilde{\varphi}_1^e(\xi);$$

$$\tilde{\psi}_2^e = \tilde{\psi}_2^e(\xi) = \frac{1}{1+h_\xi}\left(-\frac{h_\xi(2-h_\xi)s}{12} - \frac{2-h_\xi}{2}\frac{\xi^2}{s} + \frac{\xi^3}{s^2}\right). \qquad (24.107)$$

Тепер можна визначити компоненти

$$\alpha_{11} = \frac{d^2\tilde{\varphi}_1^e}{d\xi^2} = \frac{1}{1+h_\xi}\frac{6}{s^2}\left(-1+2\frac{\xi}{s}\right); \quad \alpha_{12} = \frac{d^2\tilde{\psi}_1^e}{d\xi^2} = \frac{1}{1+h_\xi}\frac{1}{s}\left(-(4+h_\xi)+6\frac{\xi}{s}\right);$$

$$\alpha_{21} = \frac{d^2\tilde{\varphi}_2^e}{d\xi^2} = \frac{1}{1+h_\xi}\frac{6}{s^2}\left(1-2\frac{\xi}{s}\right) = -\alpha_{11}; \quad \alpha_{22} = \frac{d^2\tilde{\psi}_2^e}{d\xi^2} = \frac{1}{1+h_\xi}\frac{1}{s}\left(-(2-h_\xi)+6\frac{\xi}{s}\right). \qquad (24.108)$$

$$\alpha'_{11} = \frac{\partial\alpha_{11}(\xi)}{\partial\xi} = \frac{1}{1+h_\xi}\frac{12}{s^3}; \quad \alpha'_{12} = \frac{\partial\alpha_{12}(\xi)}{\partial\xi} = \frac{1}{1+h_\xi}\frac{6}{s^2};$$

$$\alpha'_{21} = \frac{\partial\alpha_{21}(\xi)}{\partial\xi} = -\frac{1}{1+h_\xi}\frac{12}{s^3} = -\alpha'_{11}; \quad \alpha'_{22} = \frac{\partial\alpha_{22}(\xi)}{\partial\xi} = \frac{1}{1+h_\xi}\frac{6}{s^2} = \alpha'_{12}. \qquad (24.109)$$

У відповідності до (24.80), а саме $[K_\alpha]_e = \int_0^s \{\alpha\}^T\{\alpha\}d\xi$, з використанням (24.108) визначимося, що матриця

$$[\underset{\sim}{K}_{\xi\alpha}]_e = \frac{1}{1+h_\xi}\frac{1}{s^3}\begin{bmatrix} 12 & 6s & -12 & 6s \\ 6s & (4+h_\xi)s^2 & -6s & (2-h_\xi)s^2 \\ -12 & -6s & 12 & -6s \\ 6s & (2-h_\xi)s^2 & -6s & (4+h_\xi)s^2 \end{bmatrix}. \qquad (24.110)$$

Порівняння компонент (24.109) з аналогічними компонентами (24.85) показує, що в (24.109) з'явився загальний множник $1/(1+h_\xi)$. Тому для (24.95)

$$s^3\beta_\zeta[K_{\xi\alpha'}]_e = s^3\beta_\zeta\{\alpha'\}^T\{\alpha'\} = \frac{h_\zeta}{1+h_\xi}\frac{1}{s^3}\begin{bmatrix} 12 & 6s & -12 & 6s \\ 6s & 3s^2 & -6s & 3s^2 \\ -12 & -6s & 12 & -6s \\ 6s & 3s^2 & -6s & 3s^2 \end{bmatrix}. \qquad (24.111)$$

Остаточно матриця $[\underset{\sim}{K}_\xi]_e$ у (24.95), а саме $[\underset{\sim}{K}_\xi]_e = EI_\eta\left([K_{\xi\alpha}]_e + s^3\beta_\zeta[K_{\xi\alpha'}]_e\right)$:

$$[\underset{\sim}{K}_\xi]_e = \frac{1}{1+h_\xi}\frac{EI_\eta}{s^3}\left(\begin{bmatrix} 12 & 6s & -12 & 6s \\ 6s & (4+h_\xi)s^2 & -6s & (2-h_\xi)s^2 \\ -12 & -6s & 12 & -6s \\ 6s & (2-h_\xi)s^2 & -6s & (4+h_\xi)s^2 \end{bmatrix} + h_\zeta\begin{bmatrix} 12 & 6s & -12 & 6s \\ 6s & 3s^2 & -6s & 3s^2 \\ -12 & -6s & 12 & -6s \\ 6s & 3s^2 & -6s & 3s^2 \end{bmatrix}\right) =$$

© К.М. Рудаков, 2025

$$= \frac{1}{1+h_\xi}\frac{EI_\eta}{s^3}\begin{bmatrix} 12 & 6s & -12 & 6s \\ 6s & (4+h_\xi)s^2 & -6s & (2-h_\xi)s^2 \\ -12 & -6s & 12 & -6s \\ 6s & (2-h_\xi)s^2 & -6s & (4+h_\xi)s^2 \end{bmatrix}. \qquad (24.112)$$

24.6.5. Підсумкова матриця жорсткості СЕ в локальній системі координат

Зберемо підсумкову матрицю жорсткості СЕ балки Ейлера-Бернуллі.

З огляду на формули (24.59), (24.61), (24.62), (24.81), (24.87) і (24.112), підсумкова (симетрична) матриця жорсткості СЕ $[\underset{\sim}{K}]_e = \int\limits_{\Omega^e} [B]^T [D][B] d\Omega$ буде мати таке наповнення:

$$[\underset{\sim}{K}]_e = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_\xi & 0 & 0 & f_\xi & 0 & 0 & -g_\xi & 0 & 0 & f_\xi & 0 \\ 0 & 0 & g_\eta & 0 & 0 & f_\eta & 0 & 0 & -g_\eta & 0 & 0 & f_\eta \\ 0 & 0 & 0 & r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r & 0 & 0 \\ 0 & f_\xi & 0 & 0 & c_\xi & 0 & 0 & -f_\xi & 0 & 0 & d_\xi & 0 \\ 0 & 0 & f_\eta & 0 & 0 & c_\eta & 0 & 0 & -f_\eta & 0 & 0 & d_\eta \\ -p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g_\xi & 0 & 0 & -f_\xi & 0 & 0 & g_\xi & 0 & 0 & -f_\xi & 0 \\ 0 & 0 & -g_\eta & 0 & 0 & -f_\eta & 0 & 0 & g_\eta & 0 & 0 & -f_\eta \\ 0 & 0 & 0 & -r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & f_\xi & 0 & 0 & d_\xi & 0 & 0 & -f_\xi & 0 & 0 & c_\xi & 0 \\ 0 & 0 & f_\eta & 0 & 0 & d_\eta & 0 & 0 & -f_\eta & 0 & 0 & c_\eta \end{bmatrix}. \qquad (24.113)$$

де без урахування поперечних сил компоненти

$$p = EA/s; \quad r = GI_k/s;$$
$$g_\zeta = 12EI_\eta/s^3; \quad g_\eta = 12EI_\zeta/s^3; \quad f_\zeta = 6EI_\eta/s^2; \quad f_\eta = 6EI_\zeta/s^2;$$
$$c_\zeta = 4EI_\eta/s; \quad c_\eta = 4EI_\zeta/s; \quad d_\zeta = 2EI_\eta/s; \quad d_\eta = 2EI_\zeta/s. \qquad (24.114)$$

а з урахуванням поперечних сил компоненти

$$p = EA/s; \quad r = GI_k/s; \quad g_\zeta = 12EI_\eta/[(1+h_\xi)s^3]; \quad g_\eta = 12EI_\zeta/[(1+h_\eta)s^3];$$
$$f_\zeta = 6EI_\eta/[(1+h_\xi)s^2]; \quad f_\eta = 6EI_\zeta/[(1+h_\eta)s^2];$$
$$c_\zeta = EI_\eta(4+h_\xi)/[(1+h_\xi)s]; \quad c_\eta = EI_\zeta(4+h_\eta)/[(1+h_\eta)s];$$
$$d_\zeta = EI_\eta(2-h_\xi)/[(1+h_\xi)s]; \quad d_\eta = EI_\zeta(2-h_\eta)/[(1+h_\eta)s]. \qquad (24.115)$$

Порівняння (24.114) зі (24.115) показує, що для отримання (24.114) достатньо у (24.115) покласти $h_\xi = h_\eta = 0$.

Нагадуємо, що рівняння цього підрозділу отримані для випадку симетричного перерізу балки, ізотропного матеріалу та малих деформацій.

© К.М. Рудаков, 2025

24.6.6. Про врахування кутів орієнтації СЕ у просторі

При переході від локальних до глобальних координат необхідно врахувати кути орієнтації СЕ відносно глобальної системи координат: матрицю (24.113), обчислену для (24.57), помножити з лівої та правої сторони на матрицю перетворення координат $[T^e]$:

$$[K]^e = [T^e]^T [\underset{\sim}{K}^e][T^e]. \tag{24.116}$$

Ця матриця визначається формулою перетворення вектора "переміщень" СЕ $\{\underset{\sim}{q}\}_e$, введеного виразом (24.55), з глобальної системи координат у місцеву:

$$\{\underset{\sim}{q}\}_e = [T^e]\{q\}_e, \tag{24.117}$$

де $\{q\}_e$ – той же вектор, але в глобальній системі координат.

Якщо в глобальній системі координат порядок нумерації, а також напрямки "переміщень" та силових факторів – той же, що й в локальній системі координат, то матриця $[T^e]$ буде містити на діагоналі чотири однакових блока $[L]$:

$$[L] = \begin{bmatrix} l_{\xi x} & l_{\xi y} & l_{\xi z} \\ l_{\zeta x} & l_{\zeta y} & l_{\zeta z} \\ l_{\eta x} & l_{\eta y} & l_{\eta z} \end{bmatrix}. \tag{24.118}$$

З використанням відомих координат двох вузлів СЕ три компоненти матриці (24.118)

$$l_{\xi x} = (x_2 - x_1)/s; \quad l_{\xi y} = (y_2 - y_1)/s; \quad l_{\xi z} = (z_2 - z_1)/s, \tag{24.119}$$

а інші її компоненти визначаються з умов нормування та ортогональності:

$$l_{\zeta x}^2 + l_{\zeta y}^2 + l_{\zeta z}^2 = 1; \quad l_{\eta x}^2 + l_{\eta y}^2 + l_{\eta z}^2 = 1;$$
$$l_{\xi x} l_{\zeta x} + l_{\xi y} l_{\zeta y} + l_{\xi z} l_{\zeta z} = 0; \quad l_{\xi x} l_{\eta x} + l_{\xi y} l_{\eta y} + l_{\xi z} l_{\eta z} = 0, \tag{24.120}$$

а також формулами

$$l_{\zeta y} = \cos\alpha; \quad l_{\eta y} = \cos(\alpha + \pi/2), \tag{24.121}$$

де α – кут від осі ζ до осі y.

Вирази для компонент матриці $[K]^e$ зі (24.116) (з урахуванням симетричності матриці, а це 42 оригінальних значення) можна знайти в книзі [54] на сторінці 67.

24.7. Введення граничних умов у САР, яка породжена МСЕ

24.7.1. Введення силових граничних умов

Спочатку розглянемо питання про введення *силових* граничних умов. До них належать об'ємні й поверхневі сили.

Об'ємні сили є розподіленими у об'ємі тіла, вимірюються у H/m^3.

Окремий випадок об'ємної сили – інерція обертання маси відносно осі z в ЦСК, має радіальний напрямок. Отже, маємо вектор

© К.М. Рудаков, 2025

$$\{\hat{O}\} = \begin{Bmatrix} \bar{\rho}\omega^2 \rho^{(i,j,k)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \tag{24.122}$$

де $\bar{\rho}$ – питома густина матеріалу; ω – кутова швидкість обертання; $\rho^{(i,j,k)}$ – радіус точки інтегрування.

Вектор *об'ємних* сил тяжіння (власної ваги) спрямований до центра тяжіння, тобто на Землі – до її центра. А задається в глобальних координатах, тому через проєкції на глобальні осі. Отже, маємо вектор

$$\{\hat{O}\} = \bar{\rho} g \begin{Bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{Bmatrix}, \tag{24.123}$$

де g – прискорення вільного падіння; ν_j – напрямні косинуси вектора напрямку дії власної ваги по відношенню до глобальної системи координат.

На відміну від об'ємного, поверхневе навантаження може задаватися подвійно: як зосереджені сили або як розподілена по поверхні нормальна p_ν (тиск) або дотична p_τ сила.

Зосереджені сили задаються в *глобальних* координатах, як і об'ємні, але прикладаються *у вузлах* скінченно-елементної сітки. Тому при створенні цієї сітки необхідно заздалегідь потурбуватися про те, щоб в місцях прикладання зосереджених сил було передбачено вузли сітки. Значення проекцій зосереджених сил на напрямки глобальних осей безпосередньо додаються до глобального вектора навантажень САР відповідно до ступенів свободи вузлів.

Поверхневе навантаження може завжди бути представлене як нормальне до поверхні та дотичне до поверхні розподілені навантаження. Тому воно задається в *локальній* системі координат, одна з осей якої нормальна до поверхні СЕ в актуальній її точці, а дві інші лежать в площині, дотичній до поверхні СЕ в даній точці. В зв'язку з цим постає питання про орієнтацію цієї локальної системи координат.

Зовнішня нормаль до поверхні СЕ в точці інтегрування легко обчислюється, спираючись на функції форми СЕ, а саме зі застосуванням компонент матриці Якобі. Напрямні косинуси вектора зовнішньої нормалі в точці інтегрування $\vec{\nu}^{(i,j,k)}$ обчислюються за формулами:

$$\nu_n^{(i,j,k)} = \eta_n / \eta\,; \quad \eta = \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2}\,, \tag{24.124}$$

де при $r_1 = \mp 1$ в ДСК:

$$\eta_1 = J_{22}J_{33} - J_{23}J_{32}\,; \quad \eta_2 = J_{23}J_{31} - J_{21}J_{33}\,; \quad \eta_3 = J_{21}J_{32} - J_{22}J_{31}\,, \tag{24.125}$$

а в ЦСК – теж за формулами (24.125), але після цього η_2 ділиться на $\rho^{(i,j,k)}$. При $r_2 = \mp 1$ і $r_3 = \mp 1$ проводяться очевидні перестановки індексів.

Нормальна до поверхні розподілена сила p_ν спочатку задається у вигляді *вузлових* значень $(p_\nu)_m$. Після цього вектор $\{\hat{p}\}^{(i,j,k)}$, породжений наявністю p_ν, обчислюється з використанням вузлових значень $(p_\nu)_m$:

© К.М. Рудаков, 2025

$$\{\widehat{p}\}^{(i,j,k)} = \begin{Bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{Bmatrix}^{(i,j,k)} \cdot p_\nu^{(i,j,k)}, \quad \text{де} \quad p_\nu^{(i,j,k)} = \sum_{m=1}^{M_e} \varphi_m^e(r_i, r_j, r_k) \cdot (p_\nu)_m . \tag{24.126}$$

Окремий випадок: всі $(p_\nu)_m = const$, наприклад, тиск рідини.

Оскільки до кожної точки поверхні можна провести безліч дотичних, то однозначно (як для $\vec{\nu}$) їх обчислити не вдається. Тому дотична до поверхні СЕ розподілена сила p_τ задається *у вузлах поверхні СЕ разом з напрямними косинусами напрямків, в яких діють вузлові* p_τ. Після цього вони перераховуються до точки інтегрування на поверхні СЕ:

$$p_\tau^{(i,j,k)} = \sum_{m=1}^{M_e} \varphi_m^e(r_i, r_j, r_k) \cdot (p_\tau)_m ; \quad \tau_n^{(i,j,k)} = \sum_{m=1}^{M_e} \varphi_m^e(r_i, r_j, r_k) \cdot (\tau_n)_m , \tag{24.127}$$

де $(\tau_n)_m$, $n = 1, 2, 3$ – вузлові значення напрямних косинусів. Остаточно, внесок в інтеграл в даній точці інтегрування підраховується як і в (24.126):

$$\{\widehat{p}\}^{(i,j,k)} = \begin{Bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{Bmatrix}^{(i,j,k)} \cdot p_\tau^{(i,j,k)} . \tag{24.128}$$

24.7.2. Введення кінематичних граничних умов

Тепер розглянемо питання про запровадження *кінематичних* граничних умов. Ці умови завжди задають *у вузлах* СЕ.

На відміну від силових граничних умов, які роблять свій внесок у праву частину в САР, при запровадженні кінематичних ГУ відбувається втручання і в матрицю, і в праву частину САР.

Можливими є два варіанти задавання кінематичних ГУ: вздовж глобальних координатних осей або під кутом до них.

У другому випадку потрібно провести декілька дій. Математично йдеться про застосування глобальної матриці повороту координат $[S]$ – такої, для якої справедливим є співвідношення:

$$\{q\} = [S]\{\bar{q}\}, \tag{24.129}$$

де $\{\bar{q}\}$ – вектор переміщень у новій системі координат. Підставивши (24.129) в СЛАР вигляду $[K]\{q\} = \{\psi\}$ і помноживши результат зліва на $[S]^T$, отримаємо $[S]^T[K][S]\{\bar{q}\} = [S]^T\{\psi\}$.

Після позначення $[\breve{K}] = [S]^T[K][S]$ і $\{\breve{\psi}\} = [S]^T\{\psi\}$ отримаємо нову СЛАР

$$[\breve{K}]\{\bar{q}\} = \{\breve{\psi}\}. \tag{24.130}$$

Матриця $[S]$ має діагональний вигляд: одиниці на діагоналі скрізь, крім ступенів свободи розглядуваного вузла m, для якого в матриці $[S]$ стоїть підматриця $[S]_m$ повороту системи координат:

$$[S]_m = \begin{bmatrix} c_{11}; & c_{12}; & c_{13} \\ c_{21}; & c_{22}; & c_{23} \\ c_{31}; & c_{32}; & c_{33} \end{bmatrix}. \tag{24.131}$$

© К.М. Рудаков, 2025

Після отримання СЛАР (24.130), в неї вводять необхідне значення ГУ 1-го роду; система розв'язується, після чого за допомогою формули (24.129) повертають вихідну систему координат у вектор-розв'язок СЛАР.

Відомі три варіанти введення ГУ 1-го роду за напрямком, який співпадає з напрямком однієї з осей у вузлі:

а) шляхом повного вилучення відповідного рядка і стовпця зі СЛАР, з наступним внесенням відомого значення у вектор $\{\breve{q}\}$. СЛАР зменшує свій розмір на одиницю. Але такий варіант зручно реалізовувати заздалегідь, до збирання матриці СЛАР. Тому він частіше застосовується тоді, коли задається $\{\breve{q}^i\}_m = 0$, $i = 1, 2$ або 3 (коли ступінь свободи вузла відразу заборонено);

б) відповідні рядок і стовпчик робляться нульовими, на діагоналі матриці ставиться одиниця. З вектора правої частини віднімається вилучений стовпчик, помножений на відоме значення $\{\breve{q}^i\}_m$, після цього відповідна компонента вектора правої частини прирівнюється до $\{\breve{q}^i\}_m$;

в) використовується метод Пейна-Айронса. Призначається досить велике число Q. Відповідний діагональний член в глобальній матриці K_{jj} множиться на Q, а відповідна компонента вектора правої частини прирівнюється до $K_{jj}Q\{\breve{q}^i\}_m$. В результаті значної переваги діагонального члена матриці над елементами рядка й стовпця, вплив недіагональних членів на розв'язок практично не відчувається: відбувається ніби обнуління недіагональних елементів рядка і стовпця. Кількість дій – мінімальна. Для сучасних ЕОМ з "довгим" словом можна завжди вибрати потрібне велике значення числа Q.

Для запровадження ГУ 1-го роду в СЛАР (24.130), як правило, використовується варіант б). Це пов'язано з тим, що при поєднанні операції повороту координатних осей з варіантом б) потрібно менше обчислень, ніж при застосуванні методу Пейна-Айронса після виконання операції повороту. Варіант а) застосовувати вже пізно.

Залишилося з'ясувати значення компонент підматриці $[S]_m$ у (24.131).

Для *тривимірного* СЕ існують три випадки:

а) три ступеня свободи вузла.

Направимо вісь $\breve{x}^1$ (повернутої у вузлі системи координат) вздовж зовнішньої нормалі $\vec{\nu}$ до поверхні СЕ і приймемо без зменшення загальності ортогональність осей $\breve{x}^3$ і x^3. Отримаємо систему з шести рівнянь (чотири умови ортогональності: $\breve{x}^1 \perp \breve{x}^2$; $\breve{x}^2 \perp \breve{x}^3$; $\breve{x}^3 \perp \breve{x}^1$; $\breve{x}^3 \perp x^3$ і дві умови нормування) відносно шести невідомих c_{ij}. При цьому враховано, що із співвісності $\breve{x}^1$ і $\vec{\nu}$ випливає

$$c_{j1} = \nu_j; \quad j = 1, 2, 3. \tag{24.132}$$

При $c = (c_{11}^2 + c_{21}^2)^{1/2} > 0$ система має розв'язки

$$c_{12} = c_{11}c_{31}/c; \quad c_{13} = \mp c_{21}/c; \quad c_{22} = c_{21}c_{31}/c;$$
$$c_{23} = \pm c_{11}/c; \quad c_{32} = -c; \quad c_{33} = 0. \tag{24.133}$$

© К.М. Рудаков, 2025

Для уточнення знаків у (24.133) спочатку слід прийняти верхні. Після цього – підрахувати $d = \det[S]_m = c_{13}(c_{21}c_{32} - c_{31}c_{22}) - c_{23}(c_{11}c_{32} - c_{12}c_{31})$. Якщо $d < 0$, то потрібно замінити знаки при c_{13} й c_{23} на протилежні. Якщо виявиться, що $c \approx 0$, то треба призначити

$$c_{12} = 1; \quad c_{23} = c_{31}; \quad c_{22} = c_{32} = c_{13} = c_{33} = 0. \tag{24.134}$$

б) два ступеня свободи вузла.

Випадок виникає, коли тіло має площину симетрії і розглядається частина тіла, або коли один ступінь свободи вузла відразу заборонено. Оскільки нормаль $\vec{\nu}$ у вузлі до поверхні СЕ може не лежати в площині симетрії, необхідно спочатку зробити проекцію відповідних компонент підматриці $[S]_m$ на цю площину. Вісь $\breve{x}^1$ направимо за напрямком проекції нормалі $\vec{\nu}$ на площину симетрії. Тоді компоненти підматриці набудуть значення

$$[S]_m^{(1)} = \begin{bmatrix} 0; & 1; & 0 \\ c_{21}^{(1)}; & 0; & c_{31}^{(1)} \\ c_{31}^{(1)}; & 0; & -c_{21}^{(1)} \end{bmatrix}; \; [S]_m^{(2)} = \begin{bmatrix} c_{11}^{(2)}; & 0; & -c_{31}^{(2)} \\ 0; & 1; & 0 \\ c_{31}^{(2)}; & 0; & c_{11}^{(2)} \end{bmatrix}; \; [S]_m^{(3)} = \begin{bmatrix} c_{11}^{(3)}; & -c_{21}^{(3)}; & 0 \\ c_{21}^{(3)}; & c_{11}^{(3)}; & 0 \\ 0; & 0; & 1 \end{bmatrix}, \tag{24.135}$$

де позначено:

$$\begin{aligned} c_{11}^{(2)} &= c_{11}/(c_{11}^2 + c_{31}^2)^{1/2}; \quad c_{11}^{(3)} = c_{11}/(c_{11}^2 + c_{21}^2)^{1/2}; \\ c_{21}^{(1)} &= c_{21}/(c_{21}^2 + c_{31}^2)^{1/2}; \quad c_{21}^{(3)} = c_{21}/(c_{11}^2 + c_{21}^2)^{1/2}; \\ c_{31}^{(1)} &= c_{31}/(c_{21}^2 + c_{31}^2)^{1/2}; \quad c_{31}^{(2)} = c_{31}/(c_{11}^2 + c_{31}^2)^{1/2}, \end{aligned} \tag{24.136}$$

а верхні індекси, що стоять в дужках, вказують, на якій глобальній осі не буде ступеня свободи вузла.

в) один ступінь свободи вузла.

Проводити поворот координатної системи для вузла немає потреби. Достатньо замість $\{\breve{q}^i\}_m$ задати

$$\{\breve{q}^i\}_m = (\hat{u}_i)_m \cdot sign(c_{i1}), \tag{24.137}$$

де i відповідає координаті, вздовж якої буде задаватися кінематична ГУ. Випадок $c_{i1} = 0$ неможливий.

Для плоского і осесиметричного СЕ (24.131) спрощується до

$$[S]_m = \begin{bmatrix} c_{11}; & c_{12} \\ c_{21}; & c_{22} \end{bmatrix}, \tag{24.138}$$

причому $c_{21} = -c_{12} = \sin\beta$; $c_{11} = c_{22} = \cos\beta$, де β – кут між напрямком зовнішньої нормалі $\vec{\nu}$ (з якою суміщається вісь $\breve{x}^1$ повернутої системи координат) і глобальною віссю $x^1 = \rho$.

В одновимірному випадку поворот системи координат не потрібний.

24.8. Обчислення величин, похідних від компонент тензора напружень

Нагадаємо, що напруження введені виразом (22.7), а саме як вектор

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}\}^T. \tag{24.139}$$

© К.М. Рудаков, 2025

Для аналізу напружено-деформованого стану тіла з точки зору оцінки його міцності використовують декілька величин, похідних від компонент тензора напружень.

Інтенсивність напружень:

$$\sigma_u = \sqrt{0.5\left[(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2\right]+3\left(\tau_{12}^2+\tau_{23}^2+\tau_{31}^2\right)}. \qquad (24.140)$$

Об'ємне (середнє, октаєдричне) напруження:

$$\sigma_V = (\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})/3. \qquad (24.141)$$

Перші три компоненти вектора девіатора напружень

$$S_1 = \sigma_{11}-\sigma_V; \quad S_2 = \sigma_{22}-\sigma_V; \quad S_3 = \sigma_{33}-\sigma_V. \qquad (24.142)$$

Третій інваріант девіатора напружень:

$$I_3(D_\sigma) = S_1S_2S_3 - S_1\tau_{23}^2 - S_2\tau_{31}^2 - S_3\tau_{12}^2 + 2\tau_{12}\tau_{23}\tau_{31}. \qquad (24.143)$$

Головні напруження $\sigma_3 \le \sigma_2 \le \sigma_1$:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_V + (2/3)\sigma_u\cos(\psi_\sigma);\\ \sigma_2 &= \sigma_V + (2/3)\sigma_u\cos(\psi_\sigma + 4\pi/3);\\ \sigma_3 &= \sigma_V + (2/3)\sigma_u\cos(\psi_\sigma + 2\pi/3),\end{aligned} \qquad (24.144)$$

де кут виду напруженого стану

$$\psi_\sigma = arc\cos(q)/3. \qquad (24.145)$$

а для обчислення величини q застосовується така процедура: якщо $\sigma_u < \delta$, де δ є малим числом, наприклад, $\delta = 10^{-10}$, то $q = 1$. Інакше застосовується стандартний вираз:

$$q = 27I_3(D_\sigma)/(2\sigma_u^3). \qquad (24.146)$$

Якщо в результаті обчислень одержали $q > 1$, то призначається $q = 1$, а якщо $q < -1$, то приймається $q = -1$. Тим самим забезпечується умова $|q| \le 1$, необхідна для вірного обчислення $arc\cos(q)$.

Максимальні дотичні напруження:

$$\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2. \qquad (24.147)$$

Параметр Надаї-Лоде для тензора напружень:

$$\chi_\sigma = 2(\sigma_2 - \sigma_3)/q - 1, \qquad (24.148)$$

але при $q \approx 0$ призначається якесь велике значення для χ_σ, наприклад $\chi_\sigma = 10^{20}$.

Параметр жорсткості напруженого стану:

$$k_\sigma = 3\sigma_V/\sigma_u, \qquad (24.149)$$

але при $\sigma_u \approx 0$ призначається якесь велике значення для k_σ, наприклад $k_\sigma = 10^{20}$.

Ще є сенс дуже малі значення компонент вектора напружень прирівнювати нулю, за критерій їх малості застосовуючи, наприклад, величину $\delta = (\sigma_u)_{\max}/1000$, тобто точність у 0.1%.

24.9. Про алгоритми обчислення вузлових значень у СЕ

Для візуалізації результатів обчислень на екрані монітора у вигляді кольорової заливки на поверхні тіла необхідно мати *вузлові* значення тих вели-

© К.М. Рудаков, 2025

чин, що будуть зображуватися. Температури та переміщення у МСЕ відразу обчислюються у вузлах. А от всі інші величини: тепловий потік, деформації, напруження, параметр Одквіста, тощо, зазвичай обчислюються у тих точках СЕ, які використовуються при наближеному обчисленні інтегралів, зокрема, у Гауссових точках СЕ з параметричним наближенням (див. п.24.4.2). Як обчислити ці величини у вузлах?

У СЕ першого порядку наближення результатів розрахунків ці величини мають однакові значення у межах СЕ. Тому в таких СЕ вузлові значення вказаних величин обчислюються як усереднене значення з тих СЕ, в які СЕ входить актуальний вузол.

У СЕ другого та вищих порядків наближення ці величини у межах СЕ мають різні значення. Є такі варіанти їхнього визначення у вузлах:

- пряме визначення значень у вузлах СЕ, з наступним осередненням вузлових значень;
- екстраполяція з Гауссових точок СЕ у вузли, з наступним осередненням;
- застосування методу спряжених апроксимацій.

Самий простий варіант – перший. Коли вже розв'язок задачі отримано, реалізується відповідний алгоритм для отримання теплового потоку, деформацій, напружень, параметра Одквіста, тощо (компоненти вектора теплового потоку $q_i = \lambda \partial\theta / \partial x^i$; а у випадку задачі про НДС тіла – за алгоритмами Розділу 22), але не для Гауссових точок, а для вузлів кожного із СЕ, після чого вузлові значення вказаних величин остаточно обчислюються як усереднене значення з тих СЕ, в які СЕ входить актуальний вузол. Осереднення відбувається у такий спосіб: спочатку для кожного вузла збирається, наприклад, алгебраїчна сума та запам'ятовується кількість таких дій у вузлі, потім отримане значення ділиться на цю кількість.

24.10. "Лінеаризація" компонент тензора напружень

В деяких галузях промисловості, при оцінці міцності елементів устаткування застосовують значення "лінеаризованих" компонент тензора напружень (див. рис.24.2): "мембранних" (медіанних, середніх) σ^m, "згінних" (лінійних) σ^b та "пікових" (нелінійних) σ^p. Ці значення обчислюють не в точці, а для деякого шляху від точки до точки в перетині. Зазвичай це робиться для тонкостінних елементів устаткування при наявності внутрішнього тиску як основного фактора навантажень. Значення "лінеаризованих" компонент напружень обчислюються за формулами (для кожної компоненти):

$$\sigma^m = \frac{1}{t}\int_{-t/2}^{t/2} \sigma ds\,; \quad \sigma^b = \sigma_1^b \cdot (2s/t),\ \text{де}\ \ \sigma_1^b = \frac{6}{t^2}\int_{-t/2}^{t/2} \sigma s ds\,; \quad \sigma^p = \sigma - (\sigma^m + \sigma^b)\,. \quad (24.150)$$

Тут σ – актуальна компонента тензора напруження; t – товщина перетину (довжина шляху лінеаризації). Перші дві формули є слідством з формул механіки матеріалів та конструкцій: $\sigma^m = P/A$ та $\sigma_1^b = \sigma_{\max} = M/W$, причому для

© К.М. Рудаков, 2025

прямокутного перетину одиничної товщини ($b=1$) площа перетину $A=bt=t$; а момент опору перетину $W=bt^2/6=t^2/6$.

Силові фактори $P=\int\limits_{-t/2}^{t/2}\sigma ds$ та $M=\int\limits_{-t/2}^{t/2}\sigma s ds$.

Оскільки інтегрування можна провести тільки чисельно, то обчислення σ^m робиться з використанням загальної формули трапецій (10.27), яка має 3-й порядок точності, що задовольняє. Формула буде мати наступний вигляд:

$$\sigma^m \approx \frac{1}{n-1}\left(\frac{\sigma_1}{2}+\frac{\sigma_n}{2}+\sum_{k=2}^{n-1}\sigma_k\right), \qquad (24.151)$$

де: σ_1 та σ_n – значення напружень в точках початку та кінця шляху відповідно; n – кількість точок на шляху (зазвичай використовують непарну кількість з декількох десятків точок).

Оскільки в другому інтегралі (24.150) підінтегральна функція має не менш як квадратичну залежність від параметра інтегрування, то його чисельне інтегрування проводиться за загальною формулою Сімпсона (10.29), яка має 5-й порядок точності (обов'язкова непарна кількість точок на шляху). Отже, згінні (лінійні) σ^b напруження в точці початку шляху розраховуються як:

$$\sigma_1^b \approx \frac{2}{(n-1)t}\left[\sigma_1 s_1+4(\sigma_2 s_2+\sigma_4 s_4+\ldots)+2(\sigma_3 s_3+\sigma_5 s_5+\ldots)+\sigma_n s_n\right]. \qquad (24.152)$$

В цій формулі координати точок по шляху s_k відраховуються від його центра. У точці кінця шляху напруження згину має протилежний знак: $\sigma_n^b=-\sigma_1^b$.

Значення "пікових" напружень розраховуються як різність між загальними напруженнями та сумою мембранних та згінних напружень (див. останню формулу (24.150)).

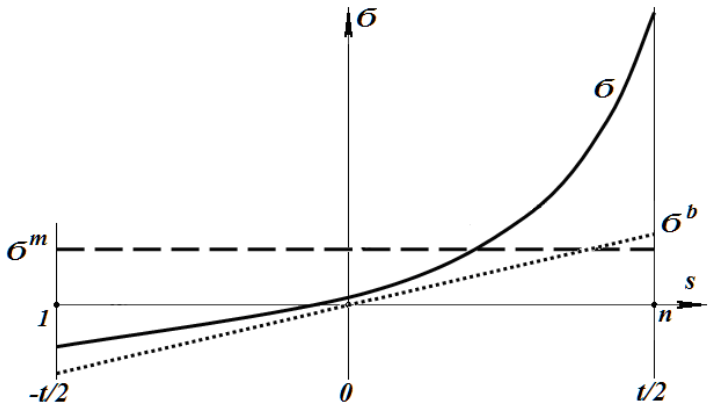


Рис.24.2 Схема "лінеаризації" компонент тензора напружень

Сума мембранні та згінні напруження застосовуються для оцінювання статичної міцності, а "пікові" напруження – утомної міцності.

24.11. Про врахування умов повної циклічної симетрії крайової задачі

Є клас крайових задач, що мають повну циклічну симетрію. Під повною циклічною симетрією розуміють сукупність геометричної, матеріальної та силової циклічної симетрій задачі. Циклічною симетрією (циклічністю) називається циклічна повторюваність вздовж однієї з координат.

© К.М. Рудаков, 2025

Наприклад, зубчасте колесо і диск турбіни мають *геометричну осьову* (поворотну) циклічність: їхня геометрія повторюється через кутову координату $\vartheta = 2\pi / Z$, де Z – кількість зубів колеса або лопаток на диску турбіни. Всюди однаковий матеріал. Але на всьому зубчастому колесі в конкретний момент навантажено один чи два зуба, тобто немає осьової циклічності навантаження, а значить і немає повної осьової циклічної симетрії задачі. Всі лопатки диска турбіни, навпаки, знаходяться під впливом *теоретично* однакого термосилового навантаження, тому є також і *термосилова* циклічність, а це означає, що є і *повна осьова циклічна симетрія* задачі (на практиці повної ідентичності немає. Зокрема, в авіаційних двигунах допускаються розбіжності у власних частотах коливань лопаток до 5%, у стаціонарних турбінах – навіть до 20%. Більш того, виявлено, що при повній ідентичності сусідніх лопаток значно зростає ймовірність флатера (резонансних автоколивань), обумовлених аеродинамічним збудженням).

Якщо задача характеризується наявністю повної циклічної симетрії, то природно її використати. Для цього одна циклічно симетрична частина моделі тіла "вирізається" з двох сторін поверхнями, рівняння яких співпадають з точністю до кроку циклу. Це може бути площина, криволінійна поверхня або сукупність площин і (або) криволінійних поверхонь. Для усіх пар точок цих поверхонь, що відрізняються тільки однією координатою на величину кроку циклічної симетрії (назвемо їх "парою циклічної симетрії"), характерна рівність будь-яких можливих фізичних величин: температур, переміщень, деформацій, напружень тощо. Цей факт необхідно врахувати в граничних умовах, що вводяться в СЛАР моделі тіла. При побудові геометричної скінченно-елементної моделі тіла з повною циклічною симетрією слід "вирізати" циклічно симетричну частину тіла поверхнями з зазначеною вище властивістю циклічності, після цього створити таку скінченно-елементну сітку тіла, щоб на цих поверхнях були тільки вузлові "пари циклічної симетрії" скінченно-елементної сітки, координати яких відрізнялися би лише на крок циклічної симетрії (в прикладі з диском турбіни – лише за кутовою координатою на кут ϑ).

При моделюванні крайової задачі теплопровідності методом скінченних елементів (МСЕ) природно прирівняти вузлові значення температур в кожній вузловій "парі циклічної симетрії". При моделюванні крайової задачі про визначення НДС тіла МСЕ в переміщеннях природно прирівняти переміщення (або їхні прирощення) в кожній вузловій "парі циклічної симетрії". В обох випадках розмір одержуваної СЛАР зменшиться за рахунок цього прирівнювання.

24.12. Метод конденсації (ідея методу суперелементів)

Суперелемент – це СЕ, в якому окрім "зовнішніх" вузлів є і "внутрішні" вузли, наявність яких не впливає на розмір глобальної САР, породженої МСЕ. Розглянемо систему рівнянь

© К.М. Рудаков, 2025

$$[K]_{nn}\{x\}_n = \{b\}_n, \tag{24.153}$$

де n – кількість рівнянь (або невідомих).

Якщо невідомі пронумерувати так, щоб спочатку розглядалися "внутрішні" вузли (нехай таких невідомих виявилося кількістю r), а після цього "зовнішні" (кількість невідомих $s = n - r$), то САР (24.153) можна представити в блочному вигляді:

$$\begin{bmatrix} [K]_{rr} & [K]_{rs} \\ [K]_{sr} & [K]_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x\}_r \\ \{x\}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{b\}_r \\ \{b\}_s \end{Bmatrix}. \tag{24.154}$$

Помножимо блочні рядки на стовпець невідомих, в явному вигляді:

$$[K]_{rr}\{x\}_r + [K]_{rs}\{x\}_s = \{b\}_r; \tag{24.155}$$

$$[K]_{sr}\{x\}_r + [K]_{ss}\{x\}_s = \{b\}_s. \tag{24.156}$$

Тепер з (24.155) виразимо $\{x\}_r$ (помноживши праву й ліву частину на $[K]_{rr}^{-1}$):

$$\{x\}_r = [K]_{rr}^{-1} \cdot (\{b\}_r - [K]_{rs}\{x\}_s), \tag{24.157}$$

і підставимо результат у (24.156):

$$[K]_{sr}[K]_{rr}^{-1}(\{b\}_r - [K]_{rs}\{x\}_s) + [K]_{ss}\{x\}_s = \{b\}_s. \tag{24.158}$$

Зведемо подібні, позначимо

$$[\tilde{K}]_{ss} = [K]_{ss} - [K]_{sr}[K]_{rr}^{-1}[K]_{rs}; \tag{24.159}$$

$$\{\tilde{b}\}_s = \{b\}_s - [K]_{sr}[K]_{rr}^{-1}\{b\}_r. \tag{24.160}$$

Остаточно отримуємо САР

$$[\tilde{K}]_{ss}\{x\}_s = \{\tilde{b}\}_s. \tag{24.161}$$

Система має дві важливі властивості:

- вектор "зовнішніх" невідомих $\{x\}_s$ не зазнав модифікації;
- матриця $[\tilde{K}]_{ss}$ і вектор правої частини $\{\tilde{b}\}_s$ нової системи не містять невідомих величин.

Таке перетворення вихідної матриці називають *конденсацією* системи. Після розв'язування (24.161) відносно $\{x\}_s$, *за необхідності,* вектор $\{x\}_r$ можна знайти за формулою (24.157).

Уявімо собі такий скінченний елемент, в якому є "внутрішні" вузли і "зовнішні". Згідно з методом *конденсації*, властивості "внутрішніх" вузлів можна тимчасово передати (сконденсувати) "зовнішнім" вузлам. З таких суперелементів складемо актуальну скінченно-елементну модель тіла, як і вимагається в МСЕ, суцільно і без взаємних перетинань. Сумарну САР отримаємо збиранням матриць і векторів (24.161) за відповідними ступенями свободи вузлів. Вона буде мати значно менший порядок, ніж мала би при збиранні без конденсації в кожному суперелементі. Відсоток її наповненості буде дещо або суттєво більшим. Але є виграш в часі її розв'язування. А значення невідомих у "внутрішніх" вузлах можуть і не знадобитися взагалі, або бути потрібними не в кожному розв'язку.

© К.М. Рудаков, 2025

Залишається додати, що однотипні суперелементи мають і однотипний опис. А якщо їх форма і розміри співпадають, а різниця полягає лише в орієнтації в просторі, то більшість дій можна і не повторювати, використовуючи вже наявні результати.

Є і недолік в методі суперелементів: додаткова ускладненість алгоритму часто не окупається, а в нелінійних задачах вимагає застосування таких ітераційних алгоритмів, в яких матриці, що застосовуються, – незмінні. В цьому випадку матрицю $[\widetilde{K}]_{ss}$ вдається зберегти незмінною, але обчислення векторів правої частини $\{\widetilde{b}\}_s$ суперелементів потрібно повторювати багато разів. І хоча такі алгоритми розроблено, за показниками ефективності вони програють і практично виключають застосування ітераційних методів розв'язування СЛАР. Застосування ж прямих методів розв'язування СЛАР часто є менш ефективним з ряду причин.

Описаним вище методом конденсації користуються в методі розв'язування СЛАР, який називається *фронтальним* методом. Згідно з цим методом, ще при збиранні глобальної матриці СЛАР, процедура конденсації проводиться негайно для ступенів свободи того вузла, для якого повністю сформовані компоненти глобальної матриці (компоненти вектора правої частини СЛАР повинні бути на цей момент відомими). Цей метод не потребує великих об'ємів операційної пам'яті ЕОМ, але для повторного розв'язування СЛАР з новою правою частиною, коли матриця є незмінною, він застосовуватися не може. Тому цей метод зазвичай застосовують у МСЕ при однократному розв'язуванні крайової задачі з дуже великими розмірами матриці СЛАР.

Метод конденсації ще застосовують в задачах *динаміки* для видалення ступені свободи *без* маси зі САР, яка потім буде розглядатися, а також для приведення маси СЕ до деяких вузлів СЕ. В останньому випадку зазвичай маса СЕ приводиться до кутових вузлів, іноді – до фіктивного центрального (у СЕ) вузла, тобто весь СЕ буде представлено декількома зосередженими масами або лише однією.

Контрольні питання до підрозділу 24.2

1. Для чого вводяться матриці базисних функцій і для чого в них присутня чимала кількість нулів?
2. З якою метою матрицю модулів пружності вводять квадратною, а не прямокутною? Яку властивість варіаційного принципу можливих переміщень при цьому використовують?
3. Що відображає матриця Якобі у СЕ?

Контрольні питання до підрозділу 24.3

1. Чому при реальному обчисленні матриць жорсткості СЕ не використовують перемноження матриць в явному вигляді?
2. Чому та які є проблеми з отриманням підінтегральних функцій для двовимірних та одновимірних СЕ?

Контрольні питання до підрозділу 24.4

1. Чому матрицю $[\underline{D}] = \partial\{\sigma\} / \partial\{\varepsilon\}$ для методу Ньютона-Рафсона можна представити у вигляді суми двох (яких?) матриць?

© К.М. Рудаков, 2025

2. В якому випадку матриця $[\underline{D}] = \partial\{\sigma\} / \partial\{\varepsilon\}$ буде співпадати з матрицею $[D]$ з формули (22.9)?

3. Чому приходиться задовольнятися наближеним виразом (24.47)?

Контрольні питання до підрозділу 24.5

1. В яких випадках вдається точне інтегрування виразів для СЕ?

2. Чому саме квадратури Гаусса-Лежандра рекомендують для чисельного інтегрування виразів для СЕ?

Контрольні питання до підрозділу 24.6

1. Чому застосовують спрощені моделі СЕ балки?

2. Який поліном доцільно використовувати для моделі СЕ балки? Чому?

3. Які труднощі виникають при моделюванні згину в балці?

Контрольні питання до підрозділу 24.7

1. Чому не можна підрахувати напрямки дотичних до поверхні СЕ сил, виходячи тільки з геометрії СЕ? Який є вихід з цієї ситуації?

2. Як модифікується САР при введенні локальної системи координат для введення граничних умов першого роду під кутом до глобальних координат?

Контрольні питання до підрозділу 24.8 – 24.12

1. З якою метою проводиться "лінеаризація" напружень?

2. Що таке циклічна симетрія задачі, як її враховують та що це дає?

3. У чому ідея та для чого застосовують метод конденсації?

© К.М. Рудаков, 2025

Частина VIII
АЛГОРИТМИ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ

Розділ 25

АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ДИНАМІЧНОЇ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ЗА МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

25.1. Скінченно-елементне наближення крайової задачі динамічної термопружності

У підрозділі 13.5 поставлено крайову динамічну задачу термопружності. Маємо узагальнене рівняння (13.55), а саме:

$$M\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}+C\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+L\vec{u}=\vec{f}\ \text{ в }\ \Omega \tag{25.1}$$

з початковими умовами (13.50) … (13.52) при $t_0=0$:

$$\vec{u}(\vec{x},0)=\hat{\vec{u}}(\vec{x}); \tag{25.2-а}$$

$$\dot{\vec{u}}=\partial\vec{u}(\vec{x},0)/\partial t=\hat{\vec{g}}(\vec{x}); \qquad \ddot{\vec{u}}=\partial^2\vec{u}(\vec{x},0)/\partial t^2=\hat{\vec{b}}(\vec{x}). \tag{25.3-а}$$

Там же відзначено, що при варіаційній постановці динамічної задачі можна використовувати принцип Д'Аламбера, якщо об'ємну силу розглядати як $\hat{\bar{O}}_m=\hat{O}_m-\bar{\rho}\frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2}-\alpha\frac{\partial u_m}{\partial t}=\hat{O}_m-\bar{\rho}\ddot{u}_m-\alpha\dot{u}_m$, згідно з виразом (13.53). Як і для крайової задачі термопружності, знов одержуємо варіаційний функціонал (13.31), а саме:

$$\Psi(\delta)=\int_\Omega\sigma_{mn}\delta\varepsilon_{mn}d\Omega-\int_\Omega\hat{\bar{O}}_m\delta u_m d\Omega-\int_{S_P}\hat{P}_m\delta u_m dS=0. \tag{25.4}$$

Шляхом, викладеним у Розділі 23, отримаємо вираз для варіаційного функціонала (25.4) у матричній формі. При цьому врахуємо, що $\{u\}=[\phi]\{q\}_e$ та $\{\dot{u}\}=[\phi]\{\dot{q}\}_e$ й $\{\ddot{u}\}=[\phi]\{\ddot{q}\}_e$:

$$\Psi(\delta)=\sum_e\int_{\Omega^e}\{\delta q\}_e^T[B]^T[D]\big([B]\{q\}_e-\{\bar{\alpha}_\theta\}\Delta\theta\big)d\Omega-$$

$$-\sum_e\int_{\Omega^e}\{\delta q\}_e^T[\phi]^T\{\hat{O}\}d\Omega+\sum_e\int_{\Omega^e}\{\delta q\}_e^T[\phi]^T\bar{\rho}[\phi]\{\ddot{q}\}_e d\Omega+$$

© К.М. Рудаков, 2025

$$+\sum_e \int_{\Omega^e} \{\delta q\}_e^T [\phi]^T \alpha [\phi] \{\dot{q}\}_e d\Omega - \sum_e \int_{S_P^e} \{\delta q\}_e^T [\phi]^T \{\hat{p}\} dS = 0, \qquad (25.5)$$

де, як і раніше, $\{q\}_e = \{q(t)\}_e$. У (25.5) матриця базисних функцій $[\phi]$ не залежить від часу, а вектори $\{\delta q\}_e^T$, $\{q\}_e$, $\{\dot{q}\}_e$ і $\{\ddot{q}\}_e$ не залежать від параметрів інтегрування, й їх можна винести за межі інтегралів. Тоді (25.5) запишемо у вигляді:

$$\Psi(\delta) = \sum_e \{\delta q\}_e^T \left(\int_{\Omega^e} \overline{\rho} [\phi]^T [\phi] d\Omega \cdot \{\ddot{q}\}_e + \int_{\Omega^e} \alpha [\phi]^T [\phi] d\Omega \cdot \{\dot{q}\}_e + \int_{\Omega^e} [B]^T [D][B] d\Omega \cdot \{q\}_e \right) +$$

$$+\sum_e \{\delta q\}_e^T \cdot \left(-\int_{\Omega^e} [\phi]^T \{\hat{O}\} d\Omega - \int_{S_P^e} [\phi]^T \{\hat{p}\} dS - \int_{\Omega^e} [B]^T [D] \{\overline{\alpha}_\theta\} \Delta\theta d\Omega \right). \qquad (25.6)$$

Введемо матриці мас та демпфування СЕ:

$$[M]_e = \int_{\Omega^e} \overline{\rho} [\phi]^T [\phi] d\Omega; \quad [C]_e = \int_{\Omega^e} \alpha [\phi]^T [\phi] d\Omega. \qquad (25.7)$$

Використовуючи позначення (25.7), (23.6) ... (23.8), з (25.6) запишемо, що функціонал

$$\Psi(\delta) = \sum_e \{\delta q\}_e^T \left([M]_e \{\ddot{q}\}_e + [C]_e \{\dot{q}\}_e + [K]_e \{q\}_e - \{P\}_e - \{R\}_e \right) = 0. \qquad (25.8)$$

Варіації переміщень $\{\delta q\}_e^T$ є довільними, тому з (25.8) отримаємо систему рівнянь

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{P\} + \{R\} = \{f\} \qquad (25.9)$$

відносно глобального вектора дійсних переміщень $\{q\}$ у вузлах скінченно-елементної сітки. У (25.9) ще необхідно враховувати кінематичні ГУ з (13.27), тобто $u_i \big|_{S_U} = \hat{u}_i$, та початкові умови (25.2-а) й (25.3-а), які записуються у вигляді:

$$\{q\}\big|_{S_U} = \{\hat{q}\}; \qquad (25.10)$$

$$\{q\}^0 = \{\hat{q}\}^0; \qquad (25.2\text{-б})$$

$$\{\dot{q}\}^0 = \{\hat{g}\}^0; \quad \{\ddot{q}\}^0 = \{\hat{b}\}^0. \qquad (25.3\text{-б})$$

Систему (25.9) ще необхідно алгебразувати у часі (позбутися похідних).

25.2. Схеми та методи розв'язування динамічного рівняння

Є декілька популярних схем розв'язування динамічного рівняння (25.9): прямим інтегруванням, або із застосуванням апроксимацій методу скінченних різниць, або, навіть, часового скінченного елемента.

25.2.1. Схема старту обчислень для всіх тришарових схем

Наявність другої похідної у системі рівнянь (25.9) вказує на те, що для позбавлення від часових похідних будуть створюватися мінімум тришарові схеми з часовими шарами, що мають номери $n-1$, n та $n+1$. Для старту процесу розв'язування тришарових схем потрібно застосувати наступний алгоритм визначення $\{q\}^0$ та $\{q\}^1$ без втрати точності наближення у часі.

При $n=0$ значення $\{q\}^0$ відповідає початковій умові (25.2-б): $\{q\}^0 = \{\hat{q}\}^0$. Щоб зберегти другий порядок наближення за часом на першому часовому

© К.М. Рудаков, 2025

кроці, обчислимо $\{q\}^1$ як результат розкладу в ряд Тейлора в околі $t=0$ на кроці Δt з потрібною точністю:

$$\{q\}^1 = \{q\}^0 + \Delta t\{\dot{q}\}^0 + \Delta t^2\{\ddot{q}\}^0/2 + O(\Delta t^3) \approx \{q\}^0 + \Delta t\{\dot{q}\}^0 + \Delta t^2\{\ddot{q}\}^0/2. \qquad (25.11)$$

Іноді немає відомостей про $\{\dot{q}\}^0 = \{\hat{g}\}^0$, а є про $\{\ddot{q}\}^0 = \{\hat{b}\}^0$. Тоді компоненти вектора $\{\dot{q}\}^0$ потрібно розрахувати згідно з основним рівнянням (25.9):

$$\{\dot{q}\}^0 = [C]^{-1}(-[M]\{\hat{b}\}^0 - [K]\{\hat{q}\}^0 + \{f\}), \qquad (25.12)$$

де враховані початкові умови $\{q\}^0 = \{\hat{q}\}^0$ і $\{\ddot{q}\}^0 = \{\hat{b}\}^0$ (див. формули (25.2-б) і (25.3-б)). Тоді з (25.11), нехтуючи величинами $O(\Delta t^3)$, маємо

$$\{q\}^1 \approx \{\hat{q}\}^0 + \Delta t[C]^{-1}\left(-[M]\{\hat{b}\}^0 - [K]\{\hat{q}\}^0 + \{f\}^0\right) + 0.5\Delta t^2\{\hat{b}\}^0. \qquad (25.13)$$

Іноді, навпаки, немає відомостей про $\{\ddot{q}\}^0 = \{\hat{b}\}^0$. Тоді компоненти цього вектора потрібно розрахувати згідно з основним рівнянням (25.9) як

$$\{\ddot{q}\}^0 = [M]^{-1}(-[C]\{\hat{g}\}^0 - [K]\{\hat{q}\}^0 + \{f\}), \qquad (25.14)$$

де враховані початкові умови $\{q\}^0 = \{\hat{q}\}^0$ і $\{\dot{q}\}^0 = \{\hat{g}\}^0$ (див. формули (25.2-б) й (25.3-б)). Тоді з (25.11), нехтуючи величинами $O(\Delta t^3)$, маємо

$$\{q\}^1 \approx \{\hat{q}\}^0 + \Delta t\{\hat{g}\}^0 + 0.5\Delta t^2[M]^{-1}\left(-[C]\{\hat{g}\}^0 - [K]\{\hat{q}\}^0 + \{f\}^0\right). \qquad (25.15)$$

Отже, перш ніж використати будь-яку схему, необхідно насамперед застосувати один із виразів (25.11), (25.13) або (25.17), які забезпечують другий порядок наближення за часом на першому часовому кроці.

25.2.2. Різницева схема

Різницева схема вже розглядалася в підрозділах 16.5 та 18.3. Для наближення часових похідних використовуються різницеві оператори другого порядку наближення:

$$\{\ddot{q}\}^n \approx \frac{\{q\}^{n+1} - 2\{q\}^n + \{q\}^{n-1}}{\Delta t^2}; \quad \{\dot{q}\}^n \approx \frac{\{q\}^{n+1} - \{q\}^{n-1}}{2\Delta t}. \qquad (25.16)$$

Якщо $[K]\{q\}$ наблизити виразом $[K]\left(\{q\}^{n+1} + \{q\}^{n-1}\right)/2$, то різницева схема

$$\left(a_0[M] + a_1[C] + 0.5[K]\right)\{q\}^{n+1} =$$

$$= [M]\left(a_2\{q\}^n - a_0\{q\}^{n-1}\right) + [C]a_1\{q\}^{n-1} - [K]0.5\{q\}^{n-1} + \{f\}^n; \quad n = 1,2,\ldots. \qquad (25.17)$$

одержує абсолютну стійкість. Введені коефіцієнти:

$$a_0 = 1/\Delta t^2; \quad a_1 = 1/(2\Delta t); \quad a_2 = 2a_0. \qquad (25.18)$$

25.2.3. Схема центральних різниць

Якщо сумарна матриця $a_0[M] + a_1[C]$ з (25.17) є діагональною або такою, що легко обертається або приводиться до діагонального вигляду, часто застосовують схему, в якій у (25.9) складову $[K]\{q\}$ наближують виразом $[K]\{q\}^n$. Тоді (25.17) можна записати у вигляді явної (рекурентної) схеми:

© К.М. Рудаков, 2025

$$\{q\}^{n+1} = \left(a_0[M] + a_1[C]\right)^{-1} \cdot$$

$$\cdot\left([M]\left(a_2\{q\}^n - a_0\{q\}^{n-1}\right) + [C]a_1\{q\}^{n-1} - [K]\{q\}^n + \{f\}^n\right); \quad n = 1,2,\ldots, \tag{25.19}$$

яку називають *схемою центральних різниць* (див. підрозділ 16.5). В ній коефіцієнти відповідають виразам (25.18).

Ця схема має умовну стійкість, тобто часовий крок є обмеженим зверху (див. формулу (16.111)):

$$\Delta t \le T_{min} / \pi, \tag{25.20}$$

де T_{min} – найменший з періодів власних коливань тіла. Це дуже жорстке обмеження, але велика кількість кроків компенсується відсутністю дій у збиранні та розв'язуванні СЛАР з недіагональною матрицею.

25.2.4. Метод Ньюмарка

Продемонструємо на цій задачі застосування СЕ, що наближує *час*.

Природно, що такий СЕ – одновимірний, оскільки він наближує залежність від єдиного параметра – часу t. Відповідно до висновків підрозділу 20.7, для виконання вимог гладкості і повноти степенева базисна функція СЕ повинна мати порядок, не нижчий за найвищий порядок похідної в крайовій задачі, в даному випадку – не нижче другого.

Тому розглянемо одновимірний квадратичний СЕ з трьома часовими вузлами 1, 2 і 3, розташованими в часових точках t_{n-1}, t_n і t_{n+1}, де $n = 1, 2, \ldots$.

Часові базисні функції будуть мати вигляд:

$$\psi_1^e(\xi) = -\xi(1-\xi)/2; \quad \psi_2^e(\xi) = 1-\xi^2; \quad \psi_3^e(\xi) = \xi(1+\xi)/2, \tag{25.21}$$

де $-1 \le \xi(t) \le 1$ – локальна координата, що виражається через поточний час t як

$$\xi = (t - t_n)/\Delta t \text{ при } \Delta t = t_n - t_{n-1} = t_{n+1} - t_n, \tag{25.22}$$

тобто часовий крок Δt припускається незмінним.

У межах часового СЕ вектор-функції $\{q\}$ та $\{f\}$ для (25.9) наближуються виразами типу (20.51):

$$\{q\} \approx \{q\}_t = \sum_{k=1}^{3}(\{q(t^{(k)})\}\psi_k^e(\xi)) = \sum_{k=1}^{3}(\{q\}^{(k)}\psi_k^e(\xi)); \tag{25.23}$$

$$\{f\} \approx \{f\}_t = \sum_{k=1}^{3}(\{f(t^{(k)})\}\psi_k^e(\xi)) = \sum_{k=1}^{3}(\{f\}^{(k)}\psi_k^e(\xi)), \tag{25.24}$$

де $\{q\}^{(k)}$ і $\{f\}^{(k)}$ – вузлові значення вектор-функцій $\{q\}_t$ і $\{f\}_t$ в моменти часу, що відповідають значенню k.

Далі для спрощення записів опустимо нижні індекси t у векторів $\{q\}$ і $\{f\}$. Використовуючи метод зважених похибок наближення і враховуючи, що базисні функції за межами СЕ дорівнюють нулю, отримаємо

$$\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \left([M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} - \{f\}\right) w_m dt = 0; \quad m = 1; \quad n = 1,2, \ldots. \tag{25.25}$$

Оскільки часовий СЕ – один, то й такий вираз – один.

© К.М. Рудаков, 2025

Для (25.25), враховуючи (25.21) і (25.22), маємо похідні за часом:

$$\frac{d\psi_1^e}{dt}=\frac{2\xi-1}{2\Delta t};\quad \frac{d^2\psi_1^e}{dt^2}=\frac{1}{(\Delta t)^2};\quad \frac{d\psi_2^e}{dt}=-\frac{2\xi}{\Delta t};\quad \frac{d^2\psi_2^e}{dt^2}=-\frac{2}{(\Delta t)^2};$$

$$\frac{d\psi_3^e}{dt}=\frac{2\xi+1}{2\Delta t};\quad \frac{d^2\psi_3^e}{dt^2}=\frac{1}{(\Delta t)^2}. \qquad (25.26)$$

Підставимо (25.23), (25.24) і (25.26) у (25.25):

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}}\left([M]\frac{\{q\}^{(3)}-2\{q\}^{(2)}+\{q\}^{(1)}}{\Delta t^2}+[C]\frac{(2\xi+1)\{q\}^{(3)}-4\xi\{q\}^{(2)}+(2\xi-1)\{q\}^{(1)}}{2\Delta t}+\right.$$

$$+[K]\left(\frac{\xi(1+\xi)}{2}\{q\}^{(3)}+(1-\xi^2)\{q\}^{(2)}-\frac{\xi(1-\xi)}{2}\{q\}^{(1)}\right)-$$

$$\left.-\left(\frac{\xi(1+\xi)}{2}\{f\}^{(3)}+(1-\xi^2)\{f\}^{(2)}-\frac{\xi(1-\xi)}{2}\{f\}^{(1)}\right)\right)w_m dt=0;\quad m=1;\quad n=1,2,\ldots. \qquad (25.27)$$

Враховано, що вагова функція w_m за межами часового СЕ дорівнює нулю, як це прийнято у МСЕ.

Не залежать від часу $\{q\}^{(k)}$, $\{f\}^{(k)}$ й Δt. Припустимо, що матриці $[M]$, $[C]$ та $[K]$ від часу також не залежать. Тоді з (25.27) спочатку отримаємо

$$[M]\left(\{q\}^{(3)}-2\{q\}^{(2)}+\{q\}^{(1)}\right)\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}w_m dt+$$

$$+[C]\Delta t\left(\{q\}^{(3)}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}(\xi+0.5)w_m dt-2\{q\}^{(2)}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\xi w_m dt+\{q\}^{(1)}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}(\xi-0.5)w_m dt\right)+$$

$$+[K](\Delta t)^2\left(\{q\}^{(3)}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}0.5\xi(1+\xi)w_m dt+\{q\}^{(2)}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}(1-\xi^2)w_m dt-\{q\}^{(1)}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}0.5\xi(1-\xi)w_m dt\right)-$$

$$-(\Delta t)^2\left(\{f\}^{(3)}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}0.5\xi(1+\xi)w_m dt+\{f\}^{(2)}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}(1-\xi^2)w_m dt-\{f\}^{(1)}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}0.5\xi(1-\xi)w_m dt\right)=0;$$

$$m=1;\quad n=1,2,\ldots. \qquad (25.28)$$

З (25.22) маємо, що $dt=\Delta t d\xi$. Підставимо цей вираз в інтеграли, при цьому межі інтегрування змінюються на -1 та 1. Позначимо

$$\gamma=\int_{-1}^{1}(\xi+0.5)w_m d\xi\Big/\int_{-1}^{1}w_m d\xi;\quad \beta=\int_{-1}^{1}0.5\xi(1+\xi)w_m d\xi\Big/\int_{-1}^{1}w_m d\xi. \qquad (25.29)$$

Можна легко переконатися, що

$$-\int_{-1}^{1}(\xi-0.5)w_m d\xi\Big/\int_{-1}^{1}w_m d\xi=1-\gamma;\quad -\int_{-1}^{1}2\xi w_m d\xi\Big/\int_{-1}^{1}w_m d\xi=1-2\gamma;$$

$$\int_{-1}^{1}(1-\xi^2)w_m d\xi\Big/\int_{-1}^{1}w_m d\xi=0.5+\gamma-2\beta;$$

$$-\int_{-1}^{1}0.5\xi(1-\xi)w_m d\xi\Big/\int_{-1}^{1}w_m d\xi=0.5-\gamma+\beta. \qquad (25.30)$$

© К.М. Рудаков, 2025

Підставимо (25.29) та (25.30) у (25.28).

Розкривши дужки, згрупувавши відносно $\{q\}^{(k)}$, $k=1,2,3$ і замінивши $\{q\}^{(1)}$ на $\{q\}^{n-1}$, $\{q\}^{(2)}$ на $\{q\}^{n}$, $\{q\}^{(3)}$ на $\{q\}^{n+1}$, отримаємо СЛАР

$$\begin{aligned}\left([M]+\gamma\Delta t[C]+\beta(\Delta t)^2[K]\right)\{q\}^{n+1}=\\ =\left(2[M]-(1-2\gamma)\Delta t[C]-(0.5+\gamma-2\beta)(\Delta t)^2[K]\right)\{q\}^{n}-\\ -\left([M]-(1-\gamma)\Delta t[C]+(0.5-\gamma+\beta)(\Delta t)^2[K]\right)\{q\}^{n-1}+\\ +(\Delta t)^2[\beta\{f\}^{n+1}+(0.5+\gamma-2\beta)\{f\}^{n}+(0.5-\gamma+\beta)\{f\}^{n-1}];\quad n=1,2,\ \ldots\end{aligned}\tag{25.31-а}$$

Тришарова схема (25.31-а) відповідає методу Ньюмарка (1959 р.). Доведено, що ця схема безумовно стійка, якщо:

$$\beta\ge 0.25\cdot(0.5+\gamma)^2;\quad \gamma\ge 0.5;\quad 0.5+\gamma+\beta>0.\tag{25.32}$$

Також доведено, що при $\gamma>0.5$ і виконанні інших умов, схема дає штучне згасання коливань, тому рекомендують застосовувати $\gamma=0.5$ (прибрати зайве демпфування), тоді $\beta\ge 0.25$. Ще виявили, що коли вагова функція w_m має вигляд

$$w_m=|\xi|,\tag{25.33}$$

тобто $w_m\in[0,1]$, то $\gamma=0.5$ і $\beta=0.25$.

Введемо коефіцієнти $a_1=0.5\Delta t$ та $a_2=(0.5\Delta t)^2$. Тоді зі СЛАР (25.31-а) остаточно маємо СЛАР методу Ньюмарка для визначення $\{q\}^{n+1}$:

$$\begin{aligned}\left([M]+a_1[C]+a_2[K]\right)\{q\}^{n+1}=2\left([M]-a_2[K]\right)\{q\}^{n}-\left([M]-a_1[C]+a_2[K]\right)\{q\}^{n-1}+\\ +a_2\left(\{f\}^{n+1}+2\{f\}^{n}+\{f\}^{n-1}\right);\quad n=1,2,\ \ldots\end{aligned}\tag{25.31-б}$$

Отже, спочатку застосовуються стартові вирази (25.2-б) та (25.13), а потім (25.31-б), які забезпечують другий порядок наближення за часовим кроком. Схема методу Ньюмарка є основною у більшості сучасних програмних комплексів.

25.2.5. Метод Хаболта

У методі Хаболта часові похідні наближуються різницевими формулами екстраполяції вперед:

$$\begin{aligned}\{\ddot{q}\}&\approx\frac{2\{q\}^{n+1}-5\{q\}^{n}+4\{q\}^{n-1}-\{q\}^{n-2}}{\Delta t^2};\\ \{\dot{q}\}&\approx\frac{11\{q\}^{n+1}-18\{q\}^{n}+9\{q\}^{n-1}-2\{q\}^{n-2}}{6\Delta t},\end{aligned}\tag{25.34}$$

а рівновага розглядається для $(n+1)$-го шару. Тому САР (25.9) наближується виразом (чотиришарова схема):

$$\begin{aligned}\left(a_0[M]+a_1[C]+[K]\right)\{q\}^{n+1}=\left(a_2\{q\}^{n}+a_4\{q\}^{n-1}+a_6\{q\}^{n-2}\right)[M]+\\ +\left(a_3\{q\}^{n}+a_5\{q\}^{n-1}+a_7\{q\}^{n-2}\right)[C]+\{f\}^{n+1},\end{aligned}\tag{25.35}$$

де позначені коефіцієнти

© К.М. Рудаков, 2025

$$a_0=\frac{2}{\Delta t^2};\ a_1=\frac{11}{6\Delta t};\ a_2=\frac{5}{\Delta t^2};\ a_3=\frac{3}{\Delta t};\ a_4=-2a_0;\ a_5=-\frac{a_3}{2};\ a_6=\frac{a_0}{2};\ a_7=\frac{a_3}{9}. \quad (25.36)$$

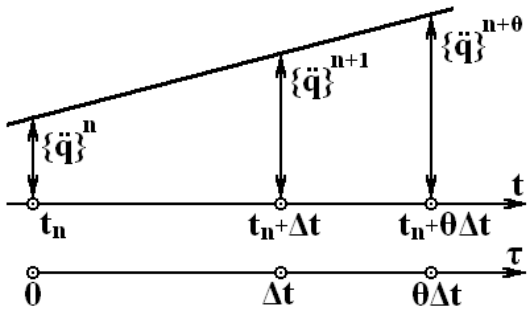


Рис.25.1 Лінеаризація прискорення у $\theta-$ методі Вілсона

Для початку роботи схеми методу Хаболта необхідно мати значення $\{q\}$ на трьох перших часових шарах, тому потрібно використати не тільки початкову умову (25.2-б) у вигляді $\{q\}^0=\{\hat{q}\}^0$ та вираз (25.11) для обчислення $\{q\}^1$, а й ще якусь схему для отримання $\{q\}^2$.

25.2.6. Метод Вілсона

Ідея методу Вілсона (або $\theta-$методу Вілсона) полягає у припущенні, що *прискорення* частин тіла є *лінійним* від t_n до моменту часу $t_n+\theta\Delta t=t_{n+\theta}$, де значення $\theta\ge 1.37$ виявилося умовою абсолютної стійкості схеми.

Для скорочення записів введемо величину "локального часу" τ як $\tau=t-t_n$ при $t_n\le t\le t_n+\theta\Delta t$, тобто $\tau\in[0,\theta\Delta t]$. За припущенням, що прискорення частин тіла є *лінійним* у діапазоні $[0,\theta\Delta t]$ (див. рис.25.1), запишемо, що

$$\{\ddot{q}\}^{t_n+\tau}\approx\{\ddot{q}\}^n+\frac{\tau}{\theta\Delta t}\left(\{\ddot{q}\}^{n+\theta}-\{\ddot{q}\}^n\right). \quad (25.37)$$

Оскільки в правій частині (25.37) всі величини, окрім τ, є незалежними від τ, то після помноження(25.37) на $d\tau$ та інтегрування отримаємо, що

$$\{\dot{q}\}^{t_n+\tau}\approx\{\dot{q}\}^n+\{\ddot{q}\}^n\tau+\frac{\tau^2}{2\theta\Delta t}\left(\{\ddot{q}\}^{n+\theta}-\{\ddot{q}\}^n\right); \quad (25.38)$$

$$\{q\}^{t_n+\tau}\approx\{q\}^n+\{\dot{q}\}^n\tau+\{\ddot{q}\}^n\frac{\tau^2}{2}+\frac{\tau^3}{6\theta\Delta t}\left(\{\ddot{q}\}^{n+\theta}-\{\ddot{q}\}^n\right). \quad (25.39)$$

З (25.38) і (25.39) при $\tau=\theta\Delta t$:

$$\{\dot{q}\}^{n+\theta}\approx\{\dot{q}\}^n+\{\ddot{q}\}^n\theta\Delta t+\frac{\theta\Delta t}{2}\left(\{\ddot{q}\}^{n+\theta}-\{\ddot{q}\}^n\right)=\{\dot{q}\}^n+\frac{\theta\Delta t}{2}\left(\{\ddot{q}\}^{n+\theta}+\{\ddot{q}\}^n\right); \quad (25.40)$$

$$\{q\}^{n+\theta}\approx\{q\}^n+\{\dot{q}\}^n\theta\Delta t+\{\ddot{q}\}^n\frac{(\theta\Delta t)^2}{2}+\frac{(\theta\Delta t)^2}{6}\left(\{\ddot{q}\}^{n+\theta}-\{\ddot{q}\}^n\right)=$$

$$=\{q\}^n+\{\dot{q}\}^n\theta\Delta t+\frac{(\theta\Delta t)^2}{6}\left(\{\ddot{q}\}^{n+\theta}+2\{\ddot{q}\}^n\right). \quad (25.41)$$

Система з двох співвідношень (25.40) і (25.41) дозволяють виразити вектори $\{\ddot{q}\}^{n+\theta}$ та $\{\dot{q}\}^{n+\theta}$ через вектор $\{q\}^{n+\theta}$:

$$\{\ddot{q}\}^{n+\theta}\approx\frac{6}{(\theta\Delta t)^2}\left(\{q\}^{n+\theta}-\{q\}^n\right)-\frac{6}{\theta\Delta t}\{\dot{q}\}^n-2\{\ddot{q}\}^n; \quad (25.42\text{-а})$$

$$\{\dot{q}\}^{n+\theta}\approx\frac{3}{\theta\Delta t}\left(\{q\}^{n+\theta}-\{q\}^n\right)-2\{\dot{q}\}^n-\frac{\theta\Delta t}{2}\{\ddot{q}\}^n. \quad (25.43\text{-а})$$

Позначимо коефіцієнти:

© К.М. Рудаков, 2025

$$a_0 = \frac{6}{(\theta\Delta t)^2};\quad a_1 = \frac{3}{\theta\Delta t};\quad a_2 = 2a_1;\quad a_3 = \frac{\theta\Delta t}{2}. \tag{25.44}$$

Рівняння (25.42-а) і (25.43-а) отримають вигляд:

$$\{\ddot{q}\}^{n+\theta} \approx a_0\left(\{q\}^{n+\theta} - \{q\}^n\right) - a_2\{\dot{q}\}^n - 2\{\ddot{q}\}^n; \tag{25.42-б}$$

$$\{\dot{q}\}^{n+\theta} \approx a_1\left(\{q\}^{n+\theta} - \{q\}^n\right) - 2\{\dot{q}\}^n - a_3\{\ddot{q}\}^n. \tag{25.43-б}$$

Як і для прискорення (див. рис.25.1) припускається лінійна зміна у часі вектора навантажень, тому:

$$\{f\}^{t_n+\tau} \approx \{f\}^n + \frac{\tau}{\Delta t}\left(\{f\}^{n+1} - \{f\}^n\right). \tag{25.45}$$

Врівноваження системи (25.9) проводиться на момент часу $t_n + \theta\Delta t$. Тому

$$[M]\{\ddot{q}\}^{n+\theta} + [C]\{\dot{q}\}^{n+\theta} + [K]\{q\}^{n+\theta} = \{f\}^{n+\theta} = \{f\}^n + \theta\left(\{f\}^{n+1} - \{f\}^n\right). \tag{25.46}$$

Підставимо в (25.46) вирази (25.42-б), (25.43-б) та (25.45) при $\tau = \theta\Delta t$. Рівняння (25.46) отримає вигляд:

$$[\tilde{K}]\{q\}^{n+\theta} = \{\tilde{f}\}^{n+\theta}, \tag{25.47}$$

де позначені:

$$[\tilde{K}] = a_0[M] + a_1[C] + [K]; \tag{25.48}$$

$$\{\tilde{f}\}^{n+\theta} = \left(a_0\{q\}^n + a_2\{\dot{q}\}^n + 2\{\ddot{q}\}^n\right)[M] +$$

$$+\left(a_1\{q\}^n + 2\{\dot{q}\}^n + a_3\{\ddot{q}\}^n\right)[C] + \{f\}^n + \theta\left(\{f\}^{n+1} - \{f\}^n\right). \tag{25.49}$$

Ще будуть потрібні $\{\dot{q}\}^{n+1}$ і $\{\ddot{q}\}^{n+1}$. Для цього є формула (25.42-б) для обчислення $\{\ddot{q}\}^{n+\theta}$, а також вирази (25.37) ... (25.39) при $\tau = \Delta t$. Позначимо:

$$a_4 = a_0/\theta;\quad a_5 = -a_2/\theta;\quad a_6 = 1 - 3/\theta;\quad a_7 = \Delta t/2;\quad a_8 = \Delta t^2/6. \tag{25.50}$$

Підставимо (25.42-б) у (25.37), з урахуванням (25.50) отримаємо:

$$\{\ddot{q}\}^{n+1} \approx a_4\left(\{\ddot{q}\}^{n+\theta} - \{\ddot{q}\}^n\right) + a_5\{\dot{q}\}^n + a_6\{\ddot{q}\}^n. \tag{25.51}$$

З (25.37) при $\tau = \Delta t$ отримаємо, що $\left(\{\ddot{q}\}^{n+\theta} - \{\ddot{q}\}^n\right) \approx \theta\left(\{\ddot{q}\}^{t_n+\tau} - \{\ddot{q}\}^n\right)$. Підставимо цей вираз у (25.38) та (25.39) при $\tau = \Delta t$, одержимо:

$$\{\dot{q}\}^{n+1} \approx \{\dot{q}\}^n + a_7\left(\{\ddot{q}\}^{n+1} + \{\ddot{q}\}^n\right); \tag{25.52}$$

$$\{q\}^{n+1} \approx \{q\}^n + \{\dot{q}\}^n\Delta t + a_8\left(\{\ddot{q}\}^{n+1} + 2\{\ddot{q}\}^n\right). \tag{25.53}$$

Отже, для призначених Δt та θ (зазвичай застосовують $\theta = 1.4$) при $n = 0$ збирається ефективна матриця $[\tilde{K}]$, розкладається на множники (див. Розділ 5). Потім, згідно з (25.11), обчислюється вектор $\{q\}^1$ і, згідно з (25.9), вектор $\{\ddot{q}\}^0$:

$$\{\ddot{q}\}^0 = [M]^{-1}\left(\{f\}^0 - [C]\{\dot{g}\}^0 - [K]\{q\}^0\right). \tag{25.54}$$

Цих даних достатньо для збирання ефективного вектора навантажень $\{\tilde{f}\}^{n+\theta}$ при $n = 0$:

$$\{\tilde{f}\}^{\theta} \approx \left(a_0\{q\}^0 + a_2\{\dot{g}\}^0 + 2\{\ddot{q}\}^0\right)[M] +$$

© К.М. Рудаков, 2025

$$+\left(a_1\{q\}^0+2\{\hat{g}\}^0+a_3\{\ddot{q}\}^0\right)[C]+\{f\}^0+\theta\left(\{f\}^1-\{f\}^0\right). \qquad (25.55)$$

Після розв'язання САР (25.47) застосовуються формули (25.51) і (25.52) при $n=0$, а застосування (25.53) при $n=0$ не потрібне. Всі дані для переходу на новий часовий шар обчислені.

Потім значення n збільшується на одиницю і для поточного часового шару послідовно застосовуються формули (25.49), (25.47), (25.51) ... (25.53).

25.2.7 "Економічні" схеми з факторизованим оператором

Всі розглянуті схеми мають другий порядок наближення відносно часового кроку. Але це – різні схеми, тому розв'язки, що отримують при їх застосуванні, завжди дещо розрізняються. Яку ж схему краще застосовувати? В літературі немає конкретних рекомендацій або зауважень, ніж ті, що вже викладені при формулюванні цих схем. Крім того, є сенс використовувати ті схеми, що потребують меншу кількість дій. У зв'язку з цим можна нагадати, що *при відсутності дисипації енергії* розроблені "економічні" схеми з факторизованим оператором (схеми розщеплення), які були розглянуті у підрозділах 16.5 та 18.3. В разі використання наближення за методом скінченних елементів, ці схеми теж можна використовувати.

Із застосуванням наближення (25.16) вираз (25.9) можна перетворити на

$$[B]\frac{\{q\}^{n+1}-2\{q\}^n+\{q\}^{n-1}}{\Delta t^2}=[R]\{q\}^n+\{Q\}^n, \qquad (25.56)$$

де

$$[R]=[M]^{-1}[K];\quad \{Q\}=[M]^{-1}\{f\}. \qquad (25.57)$$

Для швидкого знаходження оберненої матриці мас $[M]^{-1}$ зазвичай матрицю $[M]$ приводять до діагонального вигляду подібно до того, як це робилося з матрицею теплоємності у підрозділі 21.3. Отже, замість матриці мас $[M]$ застосовують матрицю $[\underset{\sim}{M}]$ з компонентами:

$$\underset{\sim}{M}_{lj}=\begin{cases}0;\ l\neq j;\\ \sum\limits_{e=1}^{E}\left(\Lambda_l^m\right)^e\left(\Lambda_j^n\right)^e M_{mn}^e;\ l=j,\end{cases} \qquad (25.58)$$

де діагональні члени (за індексами, що повторюються, не додавати)

$$\underset{\sim}{M}_{mm}^e=M_{mm}^e\frac{\sum\limits_{r=1}^{N_e}\sum\limits_{s=1}^{N_e}M_{rs}^e}{\sum\limits_{r=1}^{N_e}M_{rr}^e}, \qquad (25.59)$$

а N_e – кількість вузлів у скінченному елементі. Для СЕ першого порядку наближення формула (25.59) може бути значно спрощеною: $\underset{\sim}{M}_{mm}^e=\sum\limits_{r=1}^{N_e}M_{mr}^e$.

Нехай значення $\{q\}^{n-1}$ і $\{q\}^n$ відомі. Для $\{q\}^{n+1}$ із (25.56) одержуємо систему рівнянь

$$[B]\{q\}^{n+1}=\{F\}^n, \qquad (25.60)$$

© К.М. Рудаков, 2025

де відома права частина

$$\{F\}^n = (2[B] + \Delta t^2[R])\{q\}^n - [B]\{q\}^{n-1} + \Delta t^2\{Q\}^n . \qquad (25.61)$$

Припустимо, що матрицю $[B]$ можна записати у *факторизованому* вигляді

$$[B] = [B]_1 \cdot \ldots \cdot [B]_S , \qquad (25.62)$$

де $[B]_k$ – "економічні" матриці зі значно зменшеною кількістю арифметичних дій. Тоді й система (25.60) – "економічна", оскільки її можна розкласти на s систем з матрицями $[B]_k$:

$$[B]_1\{y\}_{(1)} = \{F\}^n ; \quad [B]_k\{y\}_{(k)} = \{y\}_{(k-1)} ; \quad k = 2,\ldots,s ; \quad \{q\}^{n+1} = \{y\}_{(S)} , \qquad (25.63)$$

де $\{y\}_{(k)}$ – проміжні розв'язки.

Відомий наближений варіант матриці $[B]_k$ має вигляд

$$[B]_k = [I] - 0.5\Delta t^2[R]_k , \qquad (25.64)$$

де $[I]$ – одинична матриця, причому необхідно, щоб виконувалися умови

$$[R] = \sum_{k=1}^{S}[R]_k ; \quad -[R]_k > 0 . \qquad (25.65)$$

Тоді при $s = 2$ маємо

$$[B] = [I] - 0.5\Delta t^2[R] \approx ([I] - 0.5\Delta t^2[R]_1)\,([I] - 0.5\Delta t^2[R]_2) =$$

$$= [I] - 0.5\Delta t^2([R]_1 + [R]_2) + \underline{0.25\Delta t^4[R]_1[R]_2} \approx ([I] - 0.5\Delta t^2[R]) + O(\Delta t^4) , \qquad (25.66)$$

тобто відкинутий підкреслений вираз $0.25\Delta t^4[R]_1[R]_2$ має порядок малості Δt^4.

Підставивши (25.64) у (25.62), а результат – у (25.60) та (25.61), після наближення $[R]\{q\}^n$ виразом $[R]\left(\{q\}^{n+1} + \{q\}^{n-1}\right)/2$ отримуємо САР

$$\frac{\{q\}^{n+1} - 2\{q\}^n + \{q\}^{n-1}}{\Delta t^2} = [R]\frac{\{q\}^{n+1} + \{q\}^{n-1}}{2} + \{Q\}^n . \qquad (25.67)$$

Отже, з точністю $O(\Delta t^4)$ приходимо до безумовно стійкої різницевої схеми (25.17) при $[C] \equiv [0]$, тобто при відсутності дисипації енергії.

Але похибка наближення $O(\Delta t^4)$ нерівномірно розподіляється по ступеням свободи системи рівнянь, порушуючи однорідність розв'язку там, де цього не повинне бути. Це явище можна згладити, зменшуючи Δt. До якого значення? Це питання було розглянуто у підрозділі 16.6, але через оператори. Повторимо тут у матричному запису.

Згідно із (25.57) матриця $[R] = -[M]^{-1}[K]$, тому у виразі $[I] - 0.5\Delta t^2[R]$ усі компоненти є додатними. За нерівністю Міньковського будь-яка норма виразу

$$\|[I] + 0.5\Delta t^2(-[R])\| \le \|[I]\| + 0.5\Delta t^2\|-[R]\| . \qquad (25.68)$$

Призначимо $\delta > 0$ – мале число, наприклад, $\delta = 0.001$, тобто 0.1% відносної похибки на кожному часовому кроці. Тоді умова порівняної малості підкресленої у (25.66) частини виразу, якою нехтуємо,

$$0.25\Delta t^4\|[R]_1[R]_2\| \le \delta\|-[B]\| = \delta\|([I] + 0.5\Delta t^2\|-[R]\|) . \qquad (25.69)$$

З урахуванням $\|[I]\| = 1$ й (25.68), із (25.69) маємо

© К.М. Рудаков, 2025

$$0.25\Delta t^4 \,\|([R]_1[R]_2)\| \le \delta + \delta 0.5\Delta t^2 \,\|[R]\|. \qquad (25.70)$$

При знаку рівності маємо відоме квадратичне алгебраїчне рівняння відносно квадрата приросту часового кроку Δt^2. Позначимо його коефіцієнти: $a = 0.25\,\|([R]_1[R]_2)\|$; $b = -\delta 0.5\,\|-[R]\|$; $c = -\delta$.

Тоді із умови відносної малості відкинутої в (25.66) частини для застосування формули (25.64) маємо обмеження на часовий крок:

$$\Delta t \le \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}. \qquad (25.71)$$

Згадаємо, що є й інше обмеження на Δt: за формулою (25.20), тобто $\Delta t \le T_{\min} / \pi$.

Виникає питання, яку норму застосувати. Для обчислення детермінанта матриці потрібна кількість "довгих" операцій (типу помножити / поділити) порядку N^3. Але детермінант – лише одна із можливих норм матриці. Для нерівності Міньковського можна застосовувати будь-яку норму, але тут тільки ту, що якимсь чином пов'язана з мінімальним періодом коливань $T_{\min}$, який пов'язаний з $\mu_{\max}$ – максимальним власним значенням матриці $[R]$. Відома оцінка $\mu_{\max}$ через її l-норму (октаедричну): $\mu_{\max} \le \max_j \sum_i |a_{ij}| = \|[R]\|_l$, яка зовсім не потребує для обчислення "довгих" операцій (див. підрозділ 4.2). Визначення цієї норми можна легко робити одночасно з операцією збирання глобальної матриці із компонент матриць скінченних елементів. Це повністю скасовує операції із вибирання необхідних компонент глобальної матриці із пам'яті комп'ютера.

Крім того, відома така властивість будь-яких норм: $\|YZ\| = \|Y\| \cdot \|Z\|$. Тому й $\|[R]_1[R]_2\| = \|[R]_1\| \cdot \|[R]_2\|$. Оскільки матриця $[R]$ в задачах, що розглядаються, є симетричною, то зазвичай приймають, що $[R]_2 = [R]_1^T$ (при цьому, як зазначено вище, обов'язково $\sum_{m=1}^{S} [R]_m = [R]$). Тоді $\|[R]_1[R]_2\| = \|[R]_1\|^2 = \|[R]_2\|^2$, що значно прискорює обчислення $\|[R]_1[R]_2\|$, оскільки не потрібно попередньо перемножувати дві матриці.

Ще зазначимо, що ідеальним був би випадок $[R]_1[R]_2 = [0]$ або $\|[R]_1[R]_2\| = 0$ при тому, що $[R]_1 + [R]_2 = [R]$, тоді додаткових похибок би не було. Але таких розкладів матриці $[R]$ не виявлено, окрім тривіального.

25.3. Задача про власні частоти та форми коливань

Всі розглянуті схеми отримання розв'язку крайової динамічної задачі (25.9) відносяться до так званого методу прямого моделювання, який у програмних комплексах зазвичай має загальну назву *Direct Transient* (прямий перехідний процес). Окрім цього методу, є ще метод із загальною назвою *Modal Transient* (модальний перехідний процес). При гармонійному збудженні є ще варіанти

Direct Frequency (прямий) й *Modal Frequency* (модальний). Щоб перейти до модальних методів, потрібно розглянути задачу про власні частоти та форми коливань.

Розглядається нетривіальний розв'язок рівняння (25.9) за відсутності зовнішніх впливів і змінних кінематичних граничних умов, тобто рівняння

$$[M]\{\ddot{q}\}+[C]\{\dot{q}\}+[K]\{q\}=\{0\}. \tag{25.72}$$

25.3.1. Розв'язок при відсутності демпфування

Рівняння (25.72) без врахування демпфування спрощується до

$$[M]\{\ddot{q}\}+[K]\{q\}=\{0\}, \tag{25.73}$$

в якій враховані граничні умови (ГУ) 1-го роду на поверхнях S_U (25.10), тобто відомі переміщення:

$$u_i \Big|_{S_U} = \underset{\sim}{u}_i. \tag{25.74}$$

Вважається, що власні форми коливань є гармонійними, а їхня кількість в дискретній системі (25.73) дорівнює кількості дозволених ступенів свободи у цій системі, позначимо цю кількість як N (тобто у системі (25.73) видалені всі ступені свободи вузлів (DOF), які фігурують в граничних умовах 1-го роду (25.74)).

Вектор вузлових переміщень $\{q\}$, за методом Фур'є, шукається у вигляді розкладу в ряд по базисним векторам $\{w\}_n$:

$$\{q\}=\sum_{n=1}^{N}\{w\}_n u_n(t), \tag{25.75}$$

де модальні функції зміни переміщень у часі $u_n(t)$ зазвичай обирають у вигляді експоненціальної функції

$$u_n(t)=e^{i\omega_n t};\quad n=1,...,N, \tag{25.76}$$

яка відповідає припущенню, що власні форми коливань у пружній системі є гармонійними. Позначені: ω_n – власні колові частоти коливань; $i=\sqrt{-1}$.

Вважається, що матриці мас $[M]$ та жорсткості $[K]$ у (25.73) є незмінними.

Оскільки ω_n – власні колові частоти коливань, то базисні вектори $\{w\}_n$ є векторами власних форм коливань та, одночасно, векторами амплітудних значень вузлових переміщень $n-$ої моди.

Після подвійного диференціювання у часі, з (25.76) та (25.75) маємо

$$\{\ddot{q}\}_n=-\omega_n^2\{w\}_n e^{i\omega_n t};\quad n=1,...,N;\quad \{\ddot{q}\}=-\sum_{n=1}^{N}\left(\omega_n^2\{w\}_n e^{i\omega_n t}\right). \tag{25.77}$$

З урахуванням другого виразу (25.77), із (25.73) маємо

$$\sum_{n=1}^{N}\left(([K]-\omega_n^2[M])\{w\}_n e^{i\omega_n t}\right)=\{0\}. \tag{25.78}$$

Оскільки вираз (25.78) дорівнює нульовому вектору в будь-який час t, то з нього можна прибрати загальні множники $e^{i\omega_n t}$:

$$([K]-\omega_n^2[M])\{w\}_n=\{0\};\quad n=1,...,N. \tag{25.79}$$

Якщо всі власні вектори $\{w\}_n$ зібрати у матрицю власних векторів

© К.М. Рудаков, 2025

$$[W]=[\{w\}_1,...,\{w\}_n,...,\{w\}_N], \tag{25.80}$$

то замість (25.79) можна записати в узагальненому вигляді

$$([K]-[\lambda][M])[W]=[0], \tag{25.81}$$

де матриця $[\lambda]$ є діагональною та містіть на діагоналі компоненти $\lambda_{nn}=\omega_n^2$.

Нетривіальні розв'язки виразу (25.81), а саме числа $\lambda_{nn}=\omega_n^2$, $n=1,...,N$, знаходяться із умови, що

$$\det([K]-[\lambda][M])=0. \tag{25.82}$$

Нагадаємо, що з матриць $[K]$ й $[M]$ виключені ступені свободи, що відповідають кінематичним обмеженням (25.74) на поверхні S_U.

Для виявлення змісту чисел λ_{nn} матриці $[\lambda]$ вираз (25.81) помножують зліва на $[M]^{-1}$ та отримують так званий нормалізований вираз:

$$\det([M]^{-1}[K]-[\lambda])=0. \tag{25.83}$$

Отже, числа λ_{nn} є власними числами матриці $[M]^{-1}[K]$, а значить, і системи (25.73). Інакше кажучи, з (25.82) або (25.83) знаходяться власні значення матриці $[M]^{-1}[K]$, які пов'язані з (тепер вже власними) коловими частотами ω_n виразом $\lambda_{nn}=\omega_n^2$, а з них $\omega_n=\sqrt{\lambda_{nn}}$, $n=1,...,N$.

З найденої власної колової частоти $\omega_n=\sqrt{\lambda_{nn}}$ власна частота та період коливань

$$\underset{\sim}{f}_n=\omega_n/2\pi;\quad T_n=2\pi/\omega_n. \tag{25.84}$$

Ще відзначимо, що з урахуванням взаємної ортогональності власних векторів $\{w\}_n$ доказано, що в пружних середовищах

$$\{w\}_m^T[M]\{w\}_n=\begin{cases}M_m,\ m=n\\ 0,\ m\neq n\end{cases};\qquad \{w\}_m^T[K]\{w\}_n=\begin{cases}K_m,\ m=n\\ 0,\ m\neq n\end{cases}. \tag{25.85}$$

Між M_m та K_m, згідно з (25.79) та (25.85), є такий зв'язок:

$$K_m=\omega_m^2M_m;\qquad K_m/M_m=\omega_m^2. \tag{25.86}$$

Компоненти власних векторів $\{w\}_n$ можна знайти лише з точністю до єдиного для $n-$й форми коливань множника. Тому зазвичай ці компоненти нормують відповідно до умови (є й інші варіанти)

$$\{\underline{w}\}_m^T[M]\{\underline{w}\}_n=\begin{cases}1,\ m=n\\ 0,\ m\neq n\end{cases}, \tag{25.87}$$

тобто приймають, що

$$\{\underline{w}\}_m=\{w\}_m/\sqrt{M_m}. \tag{25.88}$$

Проблема знаходження власних чисел та форм (25.82) або (25.83) виявилася окремою складною проблемою, для розв'язання якої створено досить багато методів. З ними можна познайомитися у Розділах 6 та 26.

Відзначимо, що на сей час в програмних комплексах, де реалізований метод скінченних елементів та методи знаходження власних частот та форм

© К.М. Рудаков, 2025

коливань пружних систем, основним методом є метод Ланцоша, який увібрав у себе всі найкращі ідеї щодо вирішення вказаної проблеми.

Ще відзначимо, що час, потрібний ЕОМ для знаходження всіх власних частот та форм коливань об'єкта, значно перевищує час знаходження розв'язку звичайної СЛАР з тією ж кількістю невідомих та таким же відсотком заповнення матриці системи.

Якщо тривимірний об'єкт, кожна точка якого має 6 ступенів свободи (3 – переміщень та 3 – обертань), ніяк не обмежений у просторі, то перші шість власних частот будуть знайдені нульовими, що відповідає жорсткому зміщенню та повороту об'єкта. Тому для таких об'єктів (наприклад, космічних) задача про знаходження власних частот та форм коливань є коректною, має відповідні розв'язки.

Ще можна відзначити, що досить часто необхідно знайти не всі корені рівняння (25.73), а лише декілька, позначимо як $Na << N$. В якому діапазоні власних частот ω_n потрібно їх шукати, залежить від того, для чого розв'язується задача про знаходження Na власних частот системи. Пояснення з цього приводу будуть надані у підрозділі 25.4.

25.3.2. Розв'язок при наявності демпфування

Окремий розв'язок системи (25.72) шукається у вигляді вектора

$$\{q\}_n = \{z\}_n \cdot e^{\eta_n t}; \quad n = 1,...,N; \quad \{q\} = \sum_{n=1}^{N} \{z\}_n e^{\eta_n t}. \tag{25.89}$$

Після диференціювання у часі:

$$\{\dot{q}\} = \sum_{n=1}^{N} \eta_n \{z\}_n e^{\eta_n t}; \quad \{\ddot{q}\} = \sum_{n=1}^{N} \eta_n^2 \{z\}_n e^{\eta_n t}. \tag{25.90}$$

Підставивши ці вирази до (25.72), маємо

$$\sum_{n=1}^{N} \left((\eta_n^2 [M] + \eta_n [C] + [K]) \{z\}_n e^{\eta_n t} \right) = \{0\}. \tag{25.91}$$

Оскільки вираз (25.91) дорівнює нульовому вектору в будь-який час t, то з нього можна прибрати загальні множники $e^{\eta_n t}$ і отримати:

$$\left(\eta_n^2 [M] + \eta_n [C] + [K] \right) \{z\}_n = \{0\}; \quad n = 1,...,N. \tag{25.92}$$

Якщо всі власні вектори $\{z\}_n$ зібрати у матрицю

$$[Z] = [\{z\}_1,...,\{z\}_n,...,\{z\}_N], \tag{25.93}$$

то замість (25.92) можна записати в узагальненому вигляді

$$\left([\eta]^2 [M] + [\eta][C] + [K] \right)[Z] = [0], \tag{25.94}$$

де матриця $[\eta]$ є діагональною та містіть на діагоналі компоненти η_n.

Нетривіальні розв'язки виразу (25.94), а саме числа η_n, $n = 1,...,N$, знаходяться із умови, що

$$\det\left([\eta]^2 [M] + [\eta][C] + [K] \right) = 0. \tag{25.95}$$

Нагадаємо, що з матриць $[K]$, $[C]$ й $[M]$ виключені ступені свободи, що відповідають кінематичним обмеженням (25.74) на поверхні S_U.

© К.М. Рудаков, 2025

Розв'язок рівняння (25.95) у загальному випадку дає N коренів η_n, серед яких є дійсні $\eta_n = -h_n \pm a_n$ та попарно-комплексні $\eta_n = -h_n \pm i\bar{\omega}_n$, де $i = \sqrt{-1}$. Дійсні корені – це наслідок демпфування, що перевищує критичне, коли коливань з такою модою немає. Частина коренів, що позначена як h_n, є n-м коефіцієнтом демпфування, а уявна частина попарно-комплексного кореня $\bar{\omega}_n$ – коловою частотою тіла з наявним демпфуванням. Серед власних форм також будуть дійсні та попарно-комплексні форми. Отримати такий розв'язок значно складніше, ніж для (25.82). Для цього розроблено декілька ітераційних методів, але вони тут не розглядаються.

25.4. Розв'язування динамічного рівняння за методом суперпозиції мод. Передаточні функції АЧХ

За методом суперпозиції мод вектор вузлових переміщень замість повного розкладу (25.75) $\{q\} = \sum_{n=1}^{N} \{w\}_n u_n(t)$ представляється наближеним розкладом

$$\{q\} \approx \sum_{n=1}^{Na} \{w\}_n u_n(t), \tag{25.96}$$

який дає точне значення лише при $Na = N$, але дуже часто для досягнення необхідної точності розрахунку $\{q\}$ достатньо $Na << N$, і це пришвидшує процес отримання розв'язку. Важливо, щоб застосовані моди визначали вузлові переміщення з вектора $\{q\}$ з достатньою точністю – як кажуть, були представительськими. У (25.96) $u_n(t)$ – поки ще невідома функція часу.

Наприклад, якщо розв'язується крайова динамічна задача з вектором навантаження $\{f\} = \{f(t)\}$ у вигляді одноразового імпульсу (ударне навантаження), то для аналізу відгуку тіла зазвичай достатньо використати декілька найменших значень власних частот та форм коливань, оскільки тільки при нижчих власних частотах амплітуди коливань будуть мати відносно великі значення. Якщо вектор навантаження $\{f\} = \{f(t)\}$ є циклічною функцією часу (задача про вимушені гармонійні коливання тіла), то найбільші амплітуди коливань будуть реалізовуватися для власних частот, близьких до частоти збудження (резонансні та близькі до резонансних частоти), тому діапазон із Na власних частот коливань для наближення (25.9) потрібно призначати таким, що містить частоту збудження.

Для об'єктів, підданих вібраційному та стохастичному навантаженню, дуже важливими характеристиками реакції цих об'єктів є амплітудно-частотні характеристики (АЧХ). Їхнє знання дозволяє уникати небажаних резонансів, пошкоджень та руйнувань.

Отже, є два важливих випадка. Перший: динамічне навантаження відбувається у вигляді імпульсу (одноразово або зрідка). Тоді система (25.9) розв'язується крок за кроком прямим інтегруванням або за методом мод, визначаються переміщення, деформації та напруження. Другий: вібраційне та/або

© К.М. Рудаков, 2025

стохастичне навантаження. Крайова задача зазвичай повністю не розв'язується, а визначаються резонанси та АЧХ.

Оскільки вектори власних форм коливань не залежать від часу, то з (25.96) вектори швидкостей та прискорення у вузлах

$$\{\dot{q}\} \approx \sum_{n=1}^{Na}\{\dot{q}\}_n = \sum_{n=1}^{Na}(\{w\}_n \dot{u}_n(t)); \quad \{\ddot{q}\} \approx \sum_{n=1}^{Na}\{\ddot{q}\}_n = \sum_{n=1}^{Na}(\{w\}_n \ddot{u}_n(t)). \tag{25.97}$$

Підставивши (25.96) і (25.97) у (25.9), тобто у систему $[M]\{\ddot{q}\}+[C]\{\dot{q}\}+[K]\{q\}=\{f\}$, отримуємо, що

$$[M]\sum_{n=1}^{Na}(\{w\}_n \ddot{u}_n(t))+[C]\sum_{n=1}^{Na}(\{w\}_n \dot{u}_n(t))+[K]\sum_{n=1}^{Na}(\{w\}_n u_n(t))=\{f\}. \tag{25.98}$$

Помножимо (25.98) зліва на будь-який транспонований вектор власних форм коливань $\{w\}_m$, причому його номер m – з діапазону від 1 до Na:

$$\{w\}_m^T[M]\sum_{n=1}^{Na}(\{w\}_n \ddot{u}_n(t))+\{w\}_m^T[C]\sum_{n=1}^{Na}(\{w\}_n \dot{u}_n(t))+$$
$$+\{w\}_m^T[K]\sum_{n=1}^{Na}(\{w\}_n u_n(t))=\{w\}_m^T\{f\}\ . \tag{25.99}$$

За умови відсутності в'язкого та структурного демпфування, як і у (25.85), внаслідок взаємної ортогональності власних векторів

$$\{w\}_m^T[C]\{w\}_n=\begin{cases} C_m, & m=n \\ 0, & m\neq n \end{cases}. \tag{25.100}$$

Примітка 25.1. У присутності значного *в'язкого або структурного демпфування*, яким не можна знехтувати, потрібно розв'язувати рівняння (25.9) прямим інтегруванням одним із відомих методів. Якщо матрицю $[C]$ можна наблизити виразом $[C]\approx\alpha[M]+\beta[K]$ (модель однорідного масового та структурного демпфування), то вираз (25.100) буде вірним.

Оскільки власні вектори взаємно ортогональні, то, з урахуванням (25.85), (25.100) й $\{w\}_m^T\{w\}_m=1$, з (25.99) суми зникнуть та залишиться тільки таке:

$$M_m\ddot{u}_m(t)+C_m\dot{u}_m(t)+K_m u_m(t)=\{w\}_m^T\{f\}; \quad m=1,\dots,Na. \tag{25.101}$$

З (25.86) маємо, що $K_m/M_m=\omega_m^2$. Поділимо вираз (25.101) на $M_m>0$. Тоді отримаємо, що:

$$\ddot{u}_m(t)+(C_m/M_m)\dot{u}_m(t)+\omega_m^2 u_m(t)=\{w\}_m^T\{f\}/M_m; \quad m=1,\dots,Na. \tag{25.102}$$

Далі позначимо, що

$$C_m/M_m=2\xi_m\omega_m; \qquad \{w\}_m^T\{f\}/M_m=F_m; \quad m=1,\dots,Na, \tag{25.103}$$

де величину ξ_m називають часткою критичного демпфування для m–ої моди (*fraction of critical damping for mode m*).

Вираз (25.102) змінюється на

$$\ddot{u}_m(t)+2\xi_m\omega_m\dot{u}_m(t)+\omega_m^2 u_m(t)=F_m; \quad m=1,\dots,Na. \tag{25.104}$$

Щодо призначення величини ξ_m пропонують таку процедуру:

$$\xi_m=\alpha/(2\omega_m)+\beta(\omega_m/2)+\xi+(\xi_{\text{mod}})_m; \quad m=1,\dots,Na, \tag{25.105}$$

© К.М. Рудаков, 2025

де (ці значення користувач повинен ввести у відповідному діалогу, наприклад, у середовищі ANSYS):

α – коефіцієнт однорідного масового демпфування (в'язкого зовнішнього тертя), див. Примітку 25.1;

β – коефіцієнт однорідного конструкційного демпфування (в'язко-пружного тертя), див. Примітку 25.1;

ξ – коефіцієнт стаціонарного (постійного) демпфування. Обчислюється як середній для матеріалів за формулою $\xi = \sum_{k=1}^{km} \xi_k e_k \,/\, \sum_{k=1}^{km} e_k$, в якій пружна енергія частини об'єкта з k-го матеріалу $e_k = 0.5\{w\}_m^T [K]_k \{w\}_m$, а ξ_k – коефіцієнт демпфування для k-го матеріалу; km – кількість матеріалів;

$(\xi_{\text{mod}})_m$ – коефіцієнт модального демпфування для m-ої частоти.

При *імпульсному* навантаженні вираз (25.104) алгебраїзують одним із відомих методів (див. підрозділ 25.2) з однією відмінністю: це робиться для кожної моди окремо, тобто СЛАР не виникає.

При *гармонійному* навантаженні модальна компонента сили збудження (три варіанти запису)

$$F_m = \overline{F}_m^c e^{ipt} = \overline{F}_m \cos(pt + \varphi_m) = \overline{F}_m^c (\cos pt + i \sin pt); \quad m = 1, \ldots, Na, \qquad (25.106)$$

де p – колова частота сили збудження; φ_m – фазовий зсув; $\overline{F}_m$ – амплітудна модальна компонента вектора сили збудження (при наявності демпфування – комплексна $\overline{F}_m^c$).

Тут і надалі зверхня риска вказує на амплітудне значення.

Під дією цієї сили, через деякий час (коли затухнуть власні коливання) переміщення, деформації та напруження будуть змінюватися зі своїми амплітудами, але з частотою вібрації. Зокрема, модальні компоненти вектора вузлових переміщень, їхні швидкості та прискорення:

$$u_m(t) = \overline{u}_m^c e^{ipt}; \quad \dot{u}_m(t) = \overline{u}_m^c ipe^{ipt}; \quad \ddot{u}_m(t) = -\overline{u}_m^c p^2 e^{ipt}; \quad m = 1, \ldots, Na, \qquad (25.107)$$

де зверхня риска знову вказує на амплітудне значення.

Підставивши (25.106) і (25.107) у (25.104) та позбувшись єдиного для всіх компонент множника e^{ipt}, маємо

$$\left(-p^2 + i \cdot (2\xi_m p\omega_m) + \omega_m^2\right)\overline{u}_m^c = \overline{F}_m^c; \quad m = 1, \ldots, Na. \qquad (25.108)$$

Саме з цього рівняння отримуємо *комплексне* значення амплітуди m-ої моди вузлового переміщення $\overline{u}_m^c$

$$\overline{u}_m^c = \frac{\overline{F}_m^c}{(\omega_m^2 - p^2) + i \cdot (2\xi_m p\omega_m)}; \quad m = 1, \ldots, Na, \qquad (25.109)$$

та з неї – *комплексну* форму виразу для *передаточної функції* АЧХ, тобто співвідношення між комплексними амплітудою m-ої моди збуджуючої сили та відгуком на неї у вигляді амплітуди m-ої моди вузлового переміщення:

© К.М. Рудаков, 2025

$$(\Phi(p))_m^c = \frac{\overline{u}_m^c}{\overline{F}_m^c} = \frac{1}{(\omega_m^2 - p^2) + i \cdot (2\xi_m p\omega_m)}; \quad m = 1, \ldots, Na. \tag{25.110}$$

Примітка 25.2. АЧХ для лінійних пружних систем – це залежність модуля комплексної передаточної функції від частоти вібрації. Поточне значення цієї функції на деякій m–ій власній частоті вказує, у скільки разів амплітуда вузлового зміщення цієї m–ої частоти відрізняється від амплітуди вузлового зміщення на частоті вібрації.

Комплексні функції $\overline{F}_m^c$ та $\overline{u}_m^c$ мають дійсну (Re) та уявну (Im) частини:

$$\overline{u}_m^c = \mathrm{Re}(\overline{u}_m^c) + i \cdot \mathrm{Im}(\overline{u}_m^c) = \underset{\smile}{\overline{u}}_m + i \cdot \underset{\frown}{\overline{u}}_m;$$
$$\overline{F}_m^c = \mathrm{Re}(\overline{F}_m^c) + i \cdot \mathrm{Im}(\overline{F}_m^c) = \underset{\smile}{\overline{F}}_m + i \cdot \underset{\frown}{\overline{F}}_m; \quad m = 1, \ldots, Na. \tag{25.111}$$

Щоб виділити дійсну та уявну частини з $\overline{u}_m^c$, потрібно позбутися комплексності у знаменнику, для чого помножити чисельник та знаменник першого виразу (25.109) на комплексно-спряжений вираз знаменника, тобто на $(\omega_m^2 - p^2) - i \cdot (2\xi_m p\omega_m)$. З урахуванням (25.111) спочатку отримаємо, що

$$\underset{\smile}{\overline{u}}_m + i \cdot \underset{\frown}{\overline{u}}_m = \frac{(\underset{\smile}{\overline{F}}_m + i \cdot \underset{\frown}{\overline{F}}_m)((\omega_m^2 - p^2) - i \cdot (2\xi_m p\omega_m))}{(\omega_m^2 - p^2)^2 + (2\xi_m p\omega_m)^2}, \tag{25.112}$$

звідкіля

$$\underset{\smile}{\overline{u}}_m = \mathrm{Re}(\overline{u}_m^c) = \frac{\underset{\smile}{\overline{F}}_m(\omega_m^2 - p^2) + \underset{\frown}{\overline{F}}_m(2\xi_m p\omega_m)}{(\omega_m^2 - p^2)^2 + (2\xi_m p\omega_m)^2}; \tag{25.113}$$

$$\underset{\frown}{\overline{u}}_m = \mathrm{Im}(\overline{u}_m^c) = \frac{\underset{\frown}{\overline{F}}_m(\omega_m^2 - p^2) - \underset{\smile}{\overline{F}}_m(2\xi_m p\omega_m)}{(\omega_m^2 - p^2)^2 + (2\xi_m p\omega_m)^2}. \tag{25.114}$$

Повне значення амплітуди m-ої моди вузлового переміщення та її фазовий зсув

$$\overline{u}_m = \sqrt{(\underset{\smile}{\overline{u}}_m)^2 + (\underset{\frown}{\overline{u}}_m)^2}; \quad \varphi_m = \arctan(\underset{\frown}{\overline{u}}_m / \underset{\smile}{\overline{u}}_m); \quad m = 1, \ldots, Na. \tag{25.115}$$

Остаточно, у більш звичній формі запису, вузлове переміщення m-ої моди буде мати вигляд

$$u_m(t) = \overline{u}_m \cos(pt + \varphi_m); \quad m = 1, \ldots, Na, \tag{25.116}$$

а вектор вузлових переміщень, згідно з (25.96)

$$\{q\} \approx \sum_{n=1}^{Na} \{q\}_n = \sum_{n=1}^{Na} \{w\}_n u_n(t) = \sum_{n=1}^{Na} \{w\}_n \overline{u}_n \cos(pt + \varphi_n). \tag{25.117}$$

Примітка 25.3. При відсутності дисипації енергії в системі з (25.115) маємо, що $\overline{u}_m = \underset{\smile}{\overline{u}}_m$ та фазовий зсув $\varphi_m = 0$; у формулах (25.109) і (25.110) теж зникають уявні складові й формули приймають вигляд

$$\overline{u}_m = \frac{\overline{F}_m}{\omega_m^2 - p^2}; \quad (\Phi(p))_m = \frac{\overline{u}_m}{\overline{F}_m} = \frac{1}{\omega_m^2 - p^2}; \quad m = 1, \ldots, Na, \tag{25.118}$$

які прогнозують нескінченні амплітуди переміщень при $p = \omega_m$, тобто при резонансі по m-ій моді. З розв'язку для одномасової системи відомо, що резонансна амплітуда реалізується не миттєво, а нарощується пропорційно часу.

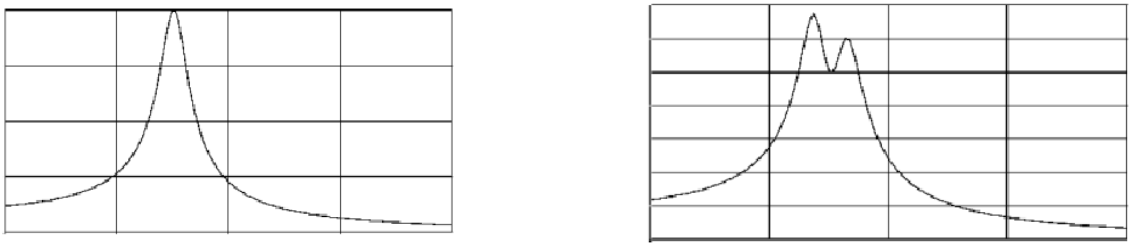
© К.М. Рудаков, 2025

Тому перехід через резонанс без катастрофічних наслідків можливий, але його потрібно реалізовувати найшвидше.

Після отримання $\{q\}$, при необхідності розрахувати напруження, в кожному скінченному елементі з номером e застосовується послідовність формул $\{\varepsilon\}=[B]\{q\}_e$; $\{\varepsilon^\theta\}=\{\alpha_\theta\}\Delta\theta$; $\{\sigma\}=[D](\{\varepsilon\}-\{\varepsilon^\theta\})$, де $\{q\}_e$ – вибірка значень вузлових переміщень у вузлах скінченного елемента із загального для моделі об'єкта вектора вузлових переміщень $\{q\}$.

Примітка 25.4. Для побудови передаточної функції АЧХ m-ої моди зазвичай використовують не весь діапазон частот, а деякий окіл навколо її. У ANSYS є наближений *автоматичний* спосіб призначення цього околу. Враховується факт звужування піків АЧХ зі зменшенням демпфування. Спочатку для кожної m-ої моди обчислюється значення $a_{mi}=1+(\xi_m)^{b_i}$, де ξ_m відповідає формулі (25.105), а показник степені $b_i=2(s-i)/(s-1)$, причому ціле число s призначається з діапазону 2…10 (за замовчанням $s=4$), а ціле число $i=1,2,...,2s$. Потім границі околу обчислюються як ω_m/a_{mi} (ліва) та $\omega_m a_{mi}$ (права).

На рис.25.2 зображено характерний вигляд графіків передаточних функцій АЧХ для єдиної моди (модель з однією масою) та двох близьких мод (модель з двома різними, але майже рівними масами).



а **б**

Рис.25.2 Характерний вигляд графіків передаточної функції АЧХ для окремої моди (а) та двох близьких мод (б)

Окрім передаточних функцій АЧХ для вузлових переміщень будують передаточні функції для вузлових швидкостей, прискорень та напружень. Для цього вираз (25.109) помножимо на e^{ipt} та візьмемо похідні за часом: першу та другу (згідно з (25.107) при $u_m(t)=\overline{u}_m^c e^{ipt}$ маємо $\dot{u}_m(t)=\overline{u}_m^c ipe^{ipt}$; $\ddot{u}_m(t)=-\overline{u}_m^c p^2 e^{ipt}$). Потім видалимо з результату e^{ipt}, отримаємо передаточні функції для швидкості та прискорення або сили:

$$(\Phi^*(p))_m^c=\frac{\dot{\overline{u}}_m^c}{\overline{F}_m^c}=\frac{ip}{(\omega_m^2-p^2)+i\cdot(2\xi_m p\omega_m)};\quad m=1,\dots,Na. \tag{25.119}$$

$$(\Phi^{**}(p))_m^c=\frac{\ddot{\overline{u}}_m^c}{\overline{F}_m^c}=\frac{-p^2}{(\omega_m^2-p^2)+i\cdot(2\xi_m p\omega_m)};\quad m=1,\dots,Na. \tag{25.120}$$

При необхідності, з цих комплексних передаточних функцій АЧХ, аналогічно викладеному вище, виділяють їх дійсні та уявні частини.

© К.М. Рудаков, 2025

25.5. Задача про стохастичне збудження пружного тіла

У природі досить часто збудження тіла є випадковим (імовірним, стохастичним). Наприклад, збудження споруд при землетрусу, автомобілів – при пересуванні бруківкою, споруд – вітровим навантаженням, кораблів – морськими хвилями.

Відгук будь-якого пружного об'єкта на навантаження завжди детермінований. Але при цьому точні розв'язки вимагають нескінченну кількість оцінок, оскільки не відомо, які варіанти навантаження будуть реалізовуватися і в якій послідовності. Тобто провести розрахунки практично неможливо. Тому оцінки можна робити тільки статистично (щільність розподілу випадкової функції, стандартне відхилення, імовірність перевищення деякого значення, інше). А це є наближені оцінки.

Досить часто застосовують один з *кореляційних* методів, який дає цілком задовільне наближення – метод *моментів* з кореляційною функцією *другого* порядку.

Вводять *математичне очікування* вузлових переміщень та *кореляційну функцію*

$$y_q(t) = Y(\{q(t)\}); \quad H_q(t_1,t_2) = Y(\{\tilde{q}\}(t_1),\{\tilde{q}\}(t_2)), \tag{25.121}$$

де $Y()$ – оператор усереднення; $\{\tilde{q}\}(t) = \{q\}(t) - u_q(t)$ – відцентрований вектор випадкових вузлових переміщень.

Якщо $u_q(t)$ є незмінною величиною, а всі інші статистичні характеристики – незмінні щодо деякої величини зсуву в часі $\tau = t_1 - t_2$, то деяка кореляційна функція $H_q(t_1,t_2)$ залежить лише від цього зсуву у часі: $H_q(t_1,t_2) = H_q(\tau)$. Такі випадкові коливання називають *стаціонарними*. Вони можуть визначатися лише однією невипадковою функцією – *функцією потужності спектральної щільності* $S_q(\omega)$ (Power Spectral Density – PSD), яка є дисперсією. Вона визначається на одиницю довжини частотного інтервалу, тобто:

$$S_q(\omega) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} H_q(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau; \quad H_q(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_q(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega. \tag{25.122}$$

Майже всі стаціонарні випадкові навантаження відповідають умовам *ергодичності*. Це означає, що достатньо довга реалізація цих навантажень несе в собі всю інформацію про їхні статистичні властивості. Тому для ергодичних процесів осереднення по ансамблю реалізацій може бути замінено осередненням у часі.

Саме ці висновки закладені в різні методи моделювання *стаціонарних* випадкових коливань об'єктів.

Наприклад, у ANSYS та Nastran для цього застосований метод випадкових вібрацій (Random Vibration Method – RVM). Він використовує на вході таблицю *потужності спектральної щільності* (PSD), яка повинна бути створеною для об'єкта раніше з функцій PSD для декількох актуальних частотних діапазонів, тобто як би узагальнити їх. При цьому ці PSD- властивості об'єкта можуть мати

© К.М. Рудаков, 2025

і повну кореляцію, і часткову, і зовсім її не мати. Процедура основана на обчисленні статистики кожної модальної відповіді з наступним їх об'єднанням.

Розглянемо це докладніше.

Внаслідок наявності граничних умов 1-го роду (25.2), а саме

$$u_i\big|_{S_U} = \underset{\sim}{u}_i, \tag{25.123}$$

граничних умов з відомими швидкостями та/або прискореннями:

$$\dot{u}_m(t)\big|_{S_U} = \dot{\underset{\sim}{u}}_m(t); \quad \ddot{u}_m(t)\big|_{S_U} = \ddot{\underset{\sim}{u}}_m(t), \tag{25.124}$$

а також початкових умов

$$(\ddot{u}_m)_{t=0} = (\ddot{u}_m)_0; \quad (\dot{u}_m)_{t=0} = (\dot{u}_m)_0 \tag{25.125}$$

з відомими $(\ddot{u}_m)_0$ та $(\dot{u}_m)_0$, деякі компоненти векторів вузлових переміщень $\{q\}$, швидкостей $\{\dot{q}\}$ та прискорень $\{\ddot{q}\}$ є відомими та задаються у вхідних даних.

Спочатку із системи (25.9), тобто

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{f\}, \tag{25.126}$$

потрібно повністю видалити ступені свободи вузлів (DOF), які відповідають *нульовим* значенням граничних умов (25.123). Для тих DOF, що *не фігурують* у граничних умовах (25.123), (25.124) як нульові, а також не присутні у початкових умовах (25.125), вводять поняття *вільних* від навантаження (free) DOF, їх самих та їхню кількість позначають індексом f (від free), а для тих DOF, що залишилися в системі, вводять поняття *навантажених* (restrained) DOF, їх самих та їхню кількість позначають індексом (від restrained).

Потім в системі рівнянь (25.126) відокремлюють ці DOF:

$$\begin{bmatrix} [M_{ff}] & [M_{fr}] \\ [M_{rf}] & [M_{rr}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{q}_f\} \\ \{\ddot{q}_r\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_{ff}] & [C_{fr}] \\ [C_{rf}] & [C_{rr}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{q}_f\} \\ \{\dot{q}_r\} \end{Bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} [K_{ff}] & [K_{fr}] \\ [K_{rf}] & [K_{rr}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_f\} \\ \{q_r\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_f\} \\ \{f_r\} \end{Bmatrix}. \tag{25.127}$$

В навантажених DOF вузлів, тобто r, будуть реалізовуватися переміщення, швидкість та прискорення, що задаються в граничних та початкових умовах. У вільних DOF вузлів будуть реалізовуватися переміщення, швидкості та прискорення, що є результатом накладення пружних деформацій та хвиль, що збуджуються в об'єкті. Тому подальша увага – саме до вільних DOF. В них переміщення розділяють на псевдо-статичні (усереднені) та динамічні (індекси s та d):

$$\{q_f\} = \{q_s\} + \{q_d\}. \tag{25.128}$$

Розпишемо перший рядок системи (25.127):

$$[M_{ff}](\{\ddot{q}_s\} + \{\ddot{q}_d\}) + [M_{fr}]\{\ddot{q}_r\} + [C_{ff}](\{\dot{q}_s\} + \{\dot{q}_d\}) + \\ + [C_{fr}]\{\dot{q}_r\} + \underline{[K_{ff}](\{q_s\} + \{q_d\})} + \underline{[K_{fr}]\{q_r\}} = \{f_f\}. \tag{25.129}$$

Якщо з (25.129) видалити всі динамічні складові та навантаження, то залишиться підкреслені у (25.129) члени, а з них маємо СЛАР

$$[K_{ff}]\{q_s\} + [K_{fr}]\{q_r\} = \{0\}. \tag{25.130}$$

© К.М. Рудаков, 2025

Далі припускається, що псевдо-статичні переміщення у вільних DOF пов'язані з переміщеннями у навантажених DOF саме через вираз (25.130), з якого

$$\{q_s\} = -[K_{ff}]^{-1}[K_{fr}]\{q_r\} = [A_{fr}]\{q_r\}. \qquad (25.131)$$

Компоненти матриці $[A_{fr}] = -[K_{ff}]^{-1}[K_{fr}]$ один раз обчислюються та запам'ятовуються для майбутнього використання.

З урахуванням (25.130) вираз (25.129) приймає вигляд

$$[M_{ff}](\{\ddot{q}_s\} + \{\ddot{q}_d\}) + [M_{fr}]\{\ddot{q}_r\} + [C_{ff}](\{\dot{q}_s\} + \{\dot{q}_d\}) + \\ + [C_{fr}]\{\dot{q}_r\} + [K_{ff}]\{q_d\} = \{f_f\}. \qquad (25.132)$$

Зберемо всі компоненти виразу (25.132) з індексом d в ліву частину, а всі інші перенесемо в праву частину:

$$[M_{ff}]\{\ddot{q}_d\} + [C_{ff}]\{\dot{q}_d\} + [K_{ff}]\{q_d\} = \\ = \{f_f\} - [M_{ff}]\{\ddot{q}_s\} - [M_{fr}]\{\ddot{q}_r\} - [C_{ff}](\{\dot{q}_s\} - [C_{fr}]\{\dot{q}_r\}. \qquad (25.133)$$

З (25.131) маємо, що

$$\{\dot{q}_s\} = [A_{fr}]\{\dot{q}_r\}; \quad \{\ddot{q}_s\} = [A_{fr}]\{\ddot{q}_r\}. \qquad (25.134)$$

Підставимо ці вирази у (25.133) та відразу згрупуємо подібні:

$$[M_{ff}]\{\ddot{q}_d\} + [C_{ff}]\{\dot{q}_d\} + [K_{ff}]\{q_d\} = \\ = \{f_f\} - ([M_{ff}][A_{fr}] + [M_{fr}])\{\ddot{q}_r\} - ([C_{ff}][A_{fr}] + [C_{fr}])\{\dot{q}_r\}. \qquad (25.135)$$

Далі вважають, що вклад частини $([C_{ff}][A_{fr}] + [C_{fr}])\{\dot{q}_r\}$ у розв'язок для $\{q_d\}$ є незначним (це так для відносно незначного демпфування) та нехтують нею (при необхідності цю частину можна залишити, це лише збільшить час отримання розв'язку). Тоді остаточно з (25.135)

$$[M_{ff}]\{\ddot{q}_d\} + [C_{ff}]\{\dot{q}_d\} + [K_{ff}]\{q_d\} \approx \{f_f\} - ([M_{ff}][A_{fr}] + [M_{fr}])\{\ddot{q}_r\} = \{f_f^*\}. \qquad (25.136\text{-а})$$

$$[M_{ff}]\{\ddot{q}_d\} + [C_{ff}]\{\dot{q}_d\} + [K_{ff}]\{q_d\} \approx \{f_f^*\}. \qquad (25.136\text{-б})$$

В цій системі права частина є відомою, а сама вона подібна системі (25.126). Після її розв'язання знаходяться компоненти динамічних складових вільних DOF $\{q_d\}$, тобто становляться відомі, згідно з (25.128) та (25.131), компоненти вільних DOF $\{q_f\} = \{q_s\} + \{q_d\}$, а значить, і всього вектора вузлових переміщень $\{q\}$.

Для розв'язування системи (25.136) знову застосовують метод суперпозиції мод. Спочатку, аналогічно (25.79), тобто $([K] - \omega_n^2[M])\{w\}_n = \{0\}$, розв'язується система

$$([K_{ff}] - \omega_n^2[M_{ff}])\{w_f\}_n = \{0\}; \quad n = 1,...,f, \qquad (25.137)$$

з якої знаходяться власні частоти коливань вільних DOF ω_n та відповідні власні вектори $\{w\}_n$. Потім приймається, що динамічне вузлове переміщення кожної $n-$ї моди

$$\{q_d\}_n = \{w_f\}_n (u_d)_n(t); \quad n = 1,...,f. \qquad (25.138)$$

© К.М. Рудаков, 2025

За методом суперпозиції мод шуканий вектор вузлових переміщень $\{q_d\}$ апроксимується із застосуванням форм власних коливань (див. вираз (25.138), позначимо їхню кількість як fa:

$$\{q_d\} \approx \sum_{n=1}^{fa} \{q_d\}_n = \sum_{n=1}^{fa} \{w_f\}_n (u_d)_n(t). \qquad (25.139)$$

Повторюючи процедуру (25.97) – (25.110), аналогічно (25.109) і (25.110) маємо

$$(\overline{u}_d)^c_m = \frac{(\overline{F}^*_f)^c_m}{(\omega_m^2 - p^2) + i \cdot (2(\xi_f)_m p\omega_m)}; \quad m = 1,..., fa, \qquad (25.140)$$

$$(\Phi(p)_d)^c_m = \frac{(\overline{u}_d)^c_m}{(\overline{F}^*_f)^c_m} = \frac{1}{(\omega_m^2 - p^2) + i \cdot (2(\xi_f)_m p\omega_m)}; \quad m = 1,..., fa, \qquad (25.141)$$

де, згідно з (25.103), (25.100), (25.85) та (25.86)

$$(C_f)_m / (M_f)_m = 2(\xi_f)_m \omega_m; \qquad (25.142)$$

$$(C_f)_m = \{w_f\}^T_m [C_{ff}] \{w_f\}_m; \quad (M_f)_m = \{w_f\}^T_m [M_{ff}] \{w_f\}_m; \qquad (25.143)$$

$$(K_f)_m = \{w_f\}^T_m [K_{ff}] \{w_f\}_m; \quad (K_f)_m / (M_f)_m = \omega_m^2; \quad m = 1,..., fa. \qquad (25.144)$$

Згідно з другою формулою (25.103) та (25.136-б) маємо вираз для $(\overline{F}^*_f)^c_m$:

$$(\overline{F}^*_f)^c_m = \{w_f\}^T_m \{f^*_f\} / (M_f)_m =$$

$$= \{w_f\}^T_m \left(\{f_f\} - ([M_{ff}][A_{fr}] + [M_{fr}]) \{\ddot{q}_r\} \right) / (M_f)_m; \quad m = 1,..., fa. \qquad (25.145)$$

Для скорочення наступних записів позначимо:

$$(\overline{F}^*_f)^c_m = G_m = \gamma_m + \{\Gamma_r\}^T_m \{\ddot{q}_r\}; \quad m = 1,..., fa, \qquad (25.146)$$

де:

$$\gamma_m = \{w_f\}^T_m \{f_f\} / (M_f)_m; \qquad (25.147)$$

$$\{\Gamma_r\}_m = -([M_{ff}][A_{fr}] + [M_{fr}])^T \{w_f\}_m / (M_f)_m. \qquad (25.148)$$

Формула (25.140) визначає відгук m-ої моди вільних динамічних вузлових переміщень, викликаних навантаженням об'єкта з частотою коливань p. Оскільки таких впливів може бути багато, то й відгуків – теж багато, а результуюче значення є комбінацією таких відгуків, і в кожний момент часу воно – інше, до того ж – випадкове. Тому наступне завдання – отримати відповідні статистичні характеристики.

З огляду на (25.121) і (25.122), достатньо знати передаточні функції АЧХ всіх точок об'єкта, щоб знайти їхні миттєві відгуки. При випадкових коливаннях об'єкта $m-$й відгук результуючої спектральної щільності реакції (дійсне число) розраховується як

$$S_m(p) = \sum_{\alpha=1}^{r1} \sum_{\beta=1}^{r2} ((\Phi(p)_d)^c_m)_\alpha \cdot ((\overline{\Phi}(p)_d)^c_m)_\beta \cdot S_{\alpha\beta}(p), \qquad (25.149)$$

де $\alpha = 1,...,r1$ і $\beta = 1,...,r2$ означають два стани навантаження; $r1, r2$ – кількість станів навантаження; риса вказує на комплексно-сполучене значення; $S_{\alpha\beta}(p)$ – функція спектральної щільності (PSD) навантаження з частотою p.

© К.М. Рудаков, 2025

Згідно з (25.149), для:

- динамічної частини m-ї моди

$$(S_d)_m(p)=\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}(\{w_f\}_m^T)_j(\{w_f\}_m)_k\cdot$$
$$\cdot\left(\sum_{\alpha=1}^{r1}\sum_{\beta=1}^{r2}(\gamma_\alpha)_j(\gamma_\beta)_k\Phi_\alpha(p)\overline{\Phi}_\beta(p)S_{\alpha\beta}(p)+\right.$$
$$\left.+\sum_{\alpha=1}^{r1}\sum_{\beta=1}^{r2}(\{\Gamma_r\}_\alpha)_j(\{\Gamma_r\}_\beta)_k\Phi_\alpha(p)\cdot\overline{\Phi}_\beta(p)\widehat{S}_{\alpha\beta}(p)\right), \qquad (25.150)$$

де s – кількість мод.

- псевдо-статичної частини m-ої моди

$$(S_s)_m(p)=\sum_{\alpha=1}^{r1}\sum_{\beta=1}^{r2}A_{m\alpha}A_{m\beta}\left(\frac{1}{p^4}\widehat{S}_{\alpha\beta}(p)\right); \qquad (25.151)$$

- змішаної (коваріантної) частини m-ої моди

$$(S_{sd})_m(p)=\sum_{j=1}^{s}\sum_{\alpha=1}^{r1}\sum_{\beta=1}^{r2}(\{w_f\}_m^T)_j A_{m\alpha}\left(-\frac{1}{p^2}(\{\Gamma_r\}_\beta)_j\Phi_j(p)\widehat{S}_{\alpha\beta}(p)\right). \qquad (25.152)$$

У виразах (25.150) – (25.152) застосовуються різні передаточні функції АЧХ в залежності від типу таблиці PSD, а саме:

- для переміщень

$$\Phi_\alpha(p)=\frac{1}{(\omega_\alpha^2-p^2)+i\cdot(2(\xi_f)_\alpha p\omega_\alpha)}; \qquad (25.153)$$

- для швидкості

$$\Phi_\alpha^*(p)=\frac{ip}{(\omega_\alpha^2-p^2)+i\cdot(2(\xi_f)_\alpha p\omega_\alpha)}; \qquad (25.154)$$

- для прискорення або сили

$$\Phi_\alpha^{**}(p)=\frac{-p^2}{(\omega_\alpha^2-p^2)+i\cdot(2(\xi_f)_\alpha p\omega_\alpha)}. \qquad (25.155)$$

Тепер можна розрахувати абсолютне значення середнє-квадратичного відгуку (дисперсії) m-ої моди вільного вузлового переміщення (у ANSYS – за командою PSDRES=ABS):

$$(\Delta_f)_m=((\sigma_f)_m)^2=\int_0^\infty(S_d)_m(p)dp+\int_0^\infty(S_s)_m(p)dp+2\,\mathrm{Re}\left(\int_0^\infty(S_{sd})_m(p)dp\right)=$$
$$=((\sigma_d)_m)^2+((\sigma_s)_m)^2+2C_V\left((u_s)_m,(u_d)_m\right), \qquad (25.156)$$

де $((\sigma_d)_m)^2=(\Delta_d)_m$ – дисперсія m-ої динамічної моди вільного вузлового переміщення; $((\sigma_s)_m)^2=(\Delta_s)_m$ – дисперсія m-ої псевдо-статичної моди вільного вузлового переміщення; $C_V\left((u_s)_m,(u_d)_m\right)=0.5(\Delta_{sd})_m$ – коваріація між m-ю динамічною та псевдо-статичною модою вільного вузлового переміщення.

Якщо присутні тільки вузлові навантаження, то у (25.150) обчислюється тільки перша складова у великих дужках, а у (25.156) – тільки перша складова.

© К.М. Рудаков, 2025

Існує декілька апробованих аналітичних виразів як функцій спектральної щільності збудження $S_q(p)$, так і кореляційних функцій $H_q(\tau)$ стаціонарних випадкових процесів, деякі з них застосовуються у таких програмних середовищах, як ANSYS, Nastran, Abaqus та інших, про що свідчать їхні описи та Help.

25.6. Визначення пружної втрати стійкості елементів конструкцій за методом Ейлера із застосуванням методу скінченних елементів

Система алгебраїчних рівнянь для визначення пружної втрати стійкості об'єктом за методом Ейлера у МСЕ знаходиться з рівняння методу Ньютона-Рафсона при врахуванні геометричної нелінійності, тобто великих деформацій.

Отримання розв'язку при великих деформаціях – дуже велика тема, тому тут без пояснень наведемо лише деякі необхідні рівняння.

Означена процедура зводиться до послідовного розв'язування двох крайових задач:

- статичного навантаження (про визначення початкового стану) об'єкта;
- визначення власних частот та форм коливань (про визначення суміжних станів) об'єкта з урахуванням напружень, що виникли в об'єкті при статичному навантаженні.

Для розв'язування першої крайової задачі використовується система алгебраїчних рівнянь

$$[K]\{q\} = \{f\} \tag{25.157}$$

з урахуванням граничних умов першого роду (25.10), тобто $\{q\}\big|_{S_U} = \{\hat{q}\}$.

Для урахування напружень, що виникли в об'єкті при статичному навантаженні та визначені після розв'язування системи (25.157), збирається глобальна симетрична матриця

$$[K_\sigma] = \sum_e [K_\sigma]_e, \tag{25.158}$$

де для кожного СЕ з номером e матриця

$$[K_\sigma]_e = \int_{\Omega^e} [Y]^T [\underset{\sim}{S}][Y] d\Omega. \tag{25.159}$$

Характерна підматриця для вузлів m та n має таке наповнення:

$$[Y]_m^T [\underset{\sim}{S}][Y]_n = \begin{bmatrix} \alpha_{mn} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{mn} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{mn} \end{bmatrix}, \tag{25.160}$$

де компонента

$$\alpha_{mn} = p_{1m}\beta_{1n} + p_{2m}\beta_{2n} + p_{3m}\beta_{3n}; \tag{25.161}$$

$$\beta_{in} = \sigma_{i1}p_{1n} + \sigma_{i2}p_{2n} + \sigma_{i3}p_{3n}; \quad i = 1,2,3, \tag{25.162}$$

компоненти p_{kn} обчислюються як похідні від базисних функцій скінченного елемента за k–м напрямком, тобто $p_{kn} = \partial\varphi_n^e / \partial x^k$.

© К.М. Рудаков, 2025

Отже, збирається додаткова матриця $[K_\sigma]$, яка враховує прикладене до об'єкта навантаження через напруження, отримані після розв'язування системи (25.157). Для визначення критичного навантаження прикладене навантаження масштабується, тому виникає система алгебраїчних рівнянь

$$\left([K]+s_i[K_\sigma]\right)\{\Delta q\}=(s_i-1)\{f\};\quad i=1,\,2,\ldots. \tag{25.163}$$

В ній коефіцієнт s_i є множником, який визначає, яка частина прикладеного навантаження діє на об'єкт в момент пружної втрати стійкості об'єктом, а $i=1,\,2,\ldots$ – це номер такої ситуації. Оскільки з моменту втрати об'єктом стійкості його поточна конфігурація може бути неоднозначною, то матриця системи (25.163) в цей момент повинна бути виродженою, а її детермінант – дорівнювати нулю:

$$\det\left([K]+s_i[K_\sigma]\right)=0;\quad i=1,2,\ldots. \tag{25.164}$$

Вираз (25.164) визначає класичну задачу про власні частоти та форми коливань при $0<s_i$.

Отримане значення s_i вказує ступінь перевантаження $(0<|s_i|<1)$ або недовантаження $(|s_i|>1)$ об'єкта відносно i-го стану пружної втрати стійкості. Інакше кажучи, щоб отримати величину критичного навантаження, потрібно величину прикладеного навантаження помножити на s_i.

Якщо отримане $s_i<0$, то це лише змінює напрямок усього прикладеного навантаження.

Відомо, що для реалізації всіх вищих форм пружної втрати об'єктом стійкості потрібно пришвидшувати процес прикладання навантаження.

Це й є метод Ейлера для визначення пружної втрати стійкості об'єктом: $i-$та форма втрати стійкості відповідає $i-$ій власній формі коливань цього об'єкта, визначеної з урахуванням навантаження. Він визначає *глобальну пружну* втрату стійкості об'єкта.

Для визначення *локальної* втрати стійкості об'єкта потрібно застосовувати повні формулювання крайових задач, організовувати покрокове навантаження об'єкта з автоматичним обиранням кроку навантаження.

Контрольні питання до підрозділу 25.1

1. Чим відрізняється скінченно-елементне наближення крайової задачі динамічної термопружності від наближення статичної задачі?
2. Запишіть вирази для обчислення матриць мас та демпфування.

Контрольні питання до підрозділу 25.2

1. Який порядок наближення у часі має схема Ньюмарка розв'язування динамічного рівняння прямим інтегруванням?
2. При яких умовах схема Ньюмарка є стійкою?
3. Які, окрім схеми Ньюмарка, є інші схеми розв'язування динамічного рівняння прямим інтегруванням?
4. У чому полягає ідея методу Хаболта?
5. У чому полягає ідея $\theta-$методу Вілсона?

© К.М. Рудаков, 2025

6. Які дії обов’язкові для отримання "економічних" схеми з факторизованим оператором?

Контрольні питання до підрозділів 25.3 і 25.4

1. Для чого формулюють та розв’язують задачу про власні форми та частоти коливань?
2. Якими є власні частоти при відсутності та при наявності демпфування?
3. В яких випадках доцільно застосовувати метод розв’язування динамічного рівняння із розкладом на власні форми коливань тіла?

Контрольні питання до підрозділу 25.5

1. Чому в задачах про стохастичне збудження тіла використовують лише наближені оцінки?
2. Які випадкові коливання називають стаціонарними?
3. Що описує функція спектральної щільності збудження (PSD)?

Контрольні питання до підрозділу 25.6

1. Який зв’язок має задача про втрату стійкості об’єкта з задачею про власні форми коливань?

© К.М. Рудаков, 2025

Розділ 26

АЛГОРИТМИ ЗНАХОДЖЕННЯ ВЛАСНИХ ЧАСТОТ І ФОРМ КОЛИВАНЬ ТІЛА

26.1. Узагальнена проблема власних значень

У підрозділі 25.3 було зазначено, що є задача про власні частоти та форми коливань тіла, характеристики якої знаходяться із рівняння (25.73), а саме

$$([K]-[\lambda][M])[W]=[0], \tag{26.1}$$

в якому $[W]=[\{w\}_1,...,\{w\}_i,...,\{w\}_N]$ є матрицею власних векторів, а діагональна матриця $[\lambda]$ містить на діагоналі власні числа матриці $[M]^{-1}[K]$ (див. (25.75)) $\lambda_{ii}=\omega_i^2$, $i=1,...,N$. Числа ω_i є власними коловими частотами пружного тіла у відсутності демпфування, а N є кількістю рівнянь у (26.1).

Ця задача має й інше еквівалентне формулювання (25.74), а саме: знайти N коренів рівняння

$$\det([K]-[\lambda][M])=0, \quad \text{причому} \quad \lambda_1\le\lambda_2\le...\le\lambda_N. \tag{26.2}$$

Формулу (26.2) можна отримати з твердження про існування співвідношення Релея

$$\{w\}^T[K]\{w\}=\rho\cdot\{w\}^T[M]\{w\}, \tag{26.3}$$

яке справедливе, якщо деяка лінійна комбінація матриць $\alpha[K]+\beta[M]$ є позитивно визначеною при будь-яких дійсних числах $\alpha\ge 0$ та $\beta\ge 0$, не рівних нулю одночасно. В механіці квадратична форма $\{w\}^T[K]\{w\}$ визначає потенційну енергію системи (тіла), а $\{\dot{w}\}^T[M]\{\dot{w}\}$ – кінетичну. Доведено, що функціонал $\rho=\rho(\{w\},[K],[M])$ набуває стаціонарні значення в точках, положення яких визначається векторами $\{w\}_i$, тоді й тільки тоді, коли виконується умова (26.2) для деякого дійсного числа λ_i.

Задача визначення всіх λ_i зі СЛАР (26.1) або рівняння (26.2) ще має назву узагальненої проблеми власних значень (чисел). Зазвичай окрім власних чисел ще потрібно знайти власні вектори $\{w\}_i$ (тобто форми коливань), що відповідають кожному λ_i. Тому говорять про задачу знаходження власних пар $(\lambda_i,\{w\}_i)$.

Після обчислення λ_i колові та "секундні" власні частоти коливань пружного тіла обчислюються як

$$\omega_i=\sqrt{\lambda_i}; \quad f_i=\omega_i/2\pi=\sqrt{\lambda_i}/2\pi. \tag{26.4}$$

© К.М. Рудаков, 2025

Створено значну кількість алгоритмів знаходження власних пар $(\lambda_i, \{w\}_i)$. Всі вони принципово ітераційні, можуть бути згруповані так:

- степеневі методи (прямих та зворотних ітерацій);
- ітераційні методи розв'язування характеристичного рівняння (26.2);
- методи приведення матриць до діагональної форми;
- метод Релея-Рітца та його модифікації;
- алгоритми методу Ланцоша;
- інші.

Всі ці ітераційні методи пройшли довгий шлях розвитку та модифікацій, часто є комбінацією окремих алгоритмів. Деякі проблеми, на вирішення яких були витрачені значні зусилля, з появою нових процесорів ЕОМ значно ослабли або просто зникли. Наприклад: з появою мультиконвеєрної технології дещо зблизився час виконання процесором ЕОМ операцій множення, ділення, додавання та віднімання дійсних чисел, обчислення кореня квадратного, оскільки тепер ці операції виконуються за меншу кількість тактів синхронізації процесора. Поки ще машинна арифметика дійсних чисел значно повільніше машинної арифметики цілих чисел, але й цей розрив постійно зменшується. Змінюються й інші показники ЕОМ, які впливають на загальну швидкість виконання програм. У зв'язку з цим при розробках алгоритмів почали приділяти увагу й іншім показникам, а не тільки кількості операцій множень, ділень та обчислення кореня, як це було до середини 1990-х років.

Проблему знаходження власних значень називають *великою*, якщо:

- кількість дій для визначення декількох перших (нижніх) власних значень значно менша, ніж при визначенні всіх власних значень;
- наявна операційна пам'ять ЕОМ замала для застосування "класичних" алгоритмів розв'язування проблеми.

У цьому Розділі стисло розглянуті лише основні (початкові) відомості про проблему, шляхи її вирішення та деякі з поширених методів і алгоритмів, характерних для задач, які розв'язуються за допомогою методу скінченних елементів. Ще потрібно мати на увазі, що алгоритми використовують дуже багато дій, тому потребують вельми ретельного, витонченого формулювання та програмування. Крім того, попередньо бажано ознайомитися зі змістом Розділу 6.

26.2. "Зсув спектра"

Якщо тіло не має повного закріплення у просторі, то воно має можливості пересуватися як жорстке ціле. При цьому існують нульові власні частоти коливань тіла, які деякими алгоритмами не можуть бути знайдені. Для уникнення такої ситуації застосовують "зсув спектра", який задається дійсним числом σ. "Зсув спектра" застосовують і в інших ситуаціях: для прискорення ітераційних алгоритмів, для визначення початку діапазону декількох власних значень, які потрібно знайти, тощо (див. подальші підрозділи).

Введемо нову матрицю зі "зсувом спектра"

© К.М. Рудаков, 2025

$$[\tilde{K}]=[K]-\sigma\cdot[M]. \qquad (26.5)$$

Дійсне число σ бажано (але не обов'язково) обирати таким, щоб гарантувати позитивне визначення введеної матриці для подальшого отримання $\lambda_i \geq 0$.

Виразимо з (26.5) матрицю $[K]$ і підставимо в (26.1). Воно замінюється на

$$[\tilde{K}][W]=[\tilde{\lambda}][M][W], \qquad (26.6)$$

де компоненти $\tilde{\lambda}_i=\lambda_i-\sigma$. При $\lambda_i=0$ знаходиться власне значення $\tilde{\lambda}_i=-\sigma\neq 0$, тому проблем не виникає. Після знаходження всіх необхідних $\tilde{\lambda}_i$ власні числа системи (26.1) обчислюються як $\lambda_i=\tilde{\lambda}_i+\sigma$.

Примітка 26.1. Аналогічно можна ввести матрицю $[\tilde{M}]=[M]-\sigma\cdot[K]$ та отримати СЛАР $[K][W]=[\tilde{\tilde{\lambda}}][\tilde{M}][W]$, де $\tilde{\tilde{\lambda}}_i=\lambda_i/(1-\sigma\lambda_i)$. Але цей варіант менш прийнятний, оскільки матриця $[M]$ часто заповнена менше, ніж матриця $[K]$, а також є обмеження на випадок $\lambda_i=0$. Тому цей варіант "зсуву спектра" застосовується рідко. Зазначимо, що для "зсуву спектра" ще застосовуються методи вичерпування (див. п.6.4.3).

26.3. Алгоритм зворотних ітерацій з відношенням Релея

У п.6.4.2. було розглянуто метод зворотних ітерацій (Inverse Power Method – Inverse PM). Він був розроблений як спосіб покращення наближеного власного вектора, хоча може застосовуватися і як самостійний метод знаходження *окремих* пар власних значень та векторів. Цей алгоритм легко узагальнюється на випадок СЛАР (26.1).

Припускається, що матриця $[K]$ є позитивно визначеною, а відносно матриці $[M]$ ніяких вимог не висувається. Після застосування "зсуву спектра" на потрібну величину σ, СЛАР (26.1) перетворюється на вираз (26.6), тобто $[\tilde{K}][W]=[\tilde{\lambda}][M][W]$.

Призначається початковий вектор $\{z\}^{(0)}$. Він може бути довільним, хоча рекомендують його приймати у вигляді одиничного вектора, а саме нульового з однією компонентою, яка дорівнює одиниці, або наближеного значення власного вектору i–ої моди $\{w\}_i$ (коли він якимсь чином отриманий).

Використовується саме вказана СЛАР. Спочатку формується вектор $\{z\}^{(1)}=[M]\{z\}^{(0)}$. Потім в ітераціях $k=1,2,...$ почергово обчислюються:

$$[\tilde{K}]\{y\}^{(k+1)}=\{z\}^{(k)};\quad \{x\}^{(k+1)}=[M]\{y\}^{(k+1)};$$
$$\chi^{(k+1)}=\left((\{x\}^{(k+1)})^T\{y\}^{(k+1)}\right)^{1/2};\quad \{z\}^{(k+1)}=\{x\}^{(k+1)}/\chi^{(k+1)}. \qquad (26.7)$$

Після стабілізації M-норми $\chi^{(k+1)}$, можна обчислити наближене значення *першої* власної пари СЛАР $[\tilde{K}][W]=[\tilde{\lambda}][M][W]$, а саме $\tilde{\lambda}_1=(\{z\}^{(k+1)})^T\{y\}^{(k+1)}/$ $/(\{x\}^{(k+1)})^T\{y\}^{(k+1)}$ та

© К.М. Рудаков, 2025

$\{w\}_1 = \{z\}^{(k+1)} = \{x\}^{(k+1)} / \chi^{(k+1)}$. Тобто величину σ "зсуву спектра" потрібно обирати так, щоб перше власне число СЛАР $[\tilde{K}][W] = [\tilde{\lambda}][M][W]$ було само тим, яке необхідно знайти.

Зазвичай симетричну матрицю (26.5), тобто $[\tilde{K}] = [K] - \sigma \cdot [M]$, піддають розкладу Холецького $[\tilde{K}] = [L][L]^T$ або $[\tilde{K}] = [L][D][L]^T$ (див. підрозділ 5.3), хоча для розв'язування СЛАР $[\tilde{K}]\{y\}^{(k+1)} = \{z\}^{(k)}$ з (26.7) можна застосовувати будь-який метод, навіть ітераційний, наприклад, метод спряжених градієнтів.

Метод зворотних ітерацій з відношенням Релея має такі недоліки:

- власні вектори, обчислені для двох дуже близьких власних значень, не зовсім ортогональні через похибки округлення та усічення ітераційного процесу. Зазвичай їх додатково ортогоналізують відносно раніше знайдених власних векторів;
- процес зациклюється, коли розв'язок наближається до *парного* власного числа (характерно для моделей із будь-яким варіантом симетрії). Він не може визначитися, який з двох власних векторів є вірним;
- швидкість збіжності є незначною (лінійною) та дещо залежить від відношення двох сусідніх власних чисел, тобто від $\tilde{\lambda}_1 / \tilde{\lambda}_2$: при зменшенні $\tilde{\lambda}_1 / \tilde{\lambda}_2$ швидкість теж зменшується.

Якщо в ітераціях додатково змінювати величину "зсуву спектра" у вірному напрямку, то можна отримати велику швидкість збіжності.

Як виявилося, співвідношення Релея (26.3), тобто $\{w\}^T[K]\{w\} = \rho \cdot \{w\}^T[M]\{w\}$ може бути дуже корисною інформацією для обирання величини наступного "зсуву спектра". Такий алгоритм називають *ітераціями з відношенням Релея* (Rayleigh Quotient Iteration – RQI). Один з варіантів RQI має назву INVIT.

Отже, у першому виразі (26.7) за матрицю $[\tilde{K}]$ використовують матрицю, яка змінюється в ітераціях:

$$[\tilde{K}] = [K] - \rho^{(k)} \cdot [M]. \tag{26.8}$$

Замість (26.7) в ітераціях $k = 1, 2, \ldots$ почергово обчислюються:

$$[\tilde{K}]\{y\}^{(k+1)} = \{z\}^{(k)}; \quad \{x\}^{(k+1)} = [M]\{y\}^{(k+1)}; \quad \chi^{(k+1)} = (\{x\}^{(k+1)})^T \{y\}^{(k+1)};$$
$$\rho^{(k+1)} = \rho^{(k)} + (\{z\}^{(k)})^T \{y\}^{(k+1)} / \chi^{(k+1)}; \quad \{z\}^{(k+1)} = \{x\}^{(k+1)} / \left(\chi^{(k+1)}\right)^{1/2}. \tag{26.9}$$

Після стабілізації результатів обчислення можна призначити $\tilde{\lambda}_j = \rho^{(k+1)}$ та обчислити $\{z\}_j = \{z\}^{(k+1)} = \{x\}^{(k+1)} / \left(\chi^{(k+1)}\right)^{1/2}$ для СЛАР $[\tilde{K}]\{z\} = \tilde{\lambda} \cdot [M]\{z\}$.

До якої за номером j власної пари $(\tilde{\lambda}_j, \{z\}_j)$ буде збігатися процес, залежить від обраних початкових $\rho^{(1)}$ та $\{z\}^{(0)}$.

Невдале обирання $\{z\}^{(0)}$ може призвести до знайдення не тієї власної пари $(\tilde{\lambda}_j, \{z\}_j)$, зокрема й вже раніше знайденої. Для уникнення подібних ситуацій рекомендують проводити процедуру виключення з розгляду вже відомих або непотрібних власних пар $(\tilde{\lambda}_j, \{z\}_j)$:

© К.М. Рудаков, 2025

- одним з методів вичерпування (див. п.6.4.3);
- застосуванням процедури ортогоналізації Грама-Шмідта.

Згідно з останньою процедурою, щоб новий вектор $\{z\}^{(0)}$ став ортогональним до раніш отриманих m власних векторів $\{z\}_i$, $i=1,...,m$, потрібно з нього виключити ці вектори, тобто замість $\{z\}^{(0)}$ використовувати

$$\{\tilde{z}\}^{(0)} = \{z\}^{(0)} - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \{z\}_i \,. \tag{26.10}$$

Коефіцієнти α_i повинні задовольняти умові $\{z\}_i^T[M]\{\tilde{z}\}^{(0)} = 0$ для всіх $i=1,...,m$. Після множення (26.10) зліва на $\{z\}_i^T[M]$ та урахування властивості M-ортогональності $\{\tilde{z}\}_i^T[M]\{\tilde{z}\}_n = \delta_{in}$ для всіх $i,n=1,...,m$ коефіцієнти α_i можна обчислити з виразу

$$\alpha_i = \{z\}_i^T[M]\{z\}^{(0)}; \quad i=1,...,m\,. \tag{26.11}$$

Додамо, що індекси i,n при власних векторах $\{z\}_i$ не обов'язково повинні відповідати номерам власних векторів.

Оскільки матриця $[\tilde{K}]$ в ітераціях змінюється, то розклад Холецького $[\tilde{K}]=[L][L]^T$ або $[\tilde{K}]=[L][D][L]^T$ є сенс застосовувати лише тоді, коли ця матриця є слабо заповненою. Доцільно використовувати будь-який ітераційний метод, в якому використання попереднього розв'язку у ролі початкового вектора значно зменшить кількість ітерацій розв'язування СЛАР $[\tilde{K}]\{y\}^{(k+1)} = \{z\}^{(k)}$.

Доведено, що:

- послідовність векторів $\{z\}^{(k+1)}$, яка породжена вектором $\{z\}^{(0)}$ (називається послідовністю Релея), має кубічну збіжність, починаючи з деякого значення k, тобто за ітерацію $\rho^{(k+1)}$ набуває не менше трьох нових вірних знаків;
- процес RQI ніколи не зациклюється, коли розв'язок наближається до парного власного числа. Але не можна заздалегідь визначитися, до якого власного вектора зійдеться процес;
- норма вектора похибок наближення $\{r\}^{(k+1)} = ([K]-\rho^{(k+1)}[M])\{z\}^{(k+1)}$ є найкращою мірою точності отриманих результатів, оскільки зменшується *монотонно*, тобто $\|\{r\}^{(k+1)}\| \le \|\{r\}^{(k)}\|$ при всіх k. Рівність вказує на знаходження точного значення власного числа;
- алгоритм RQI має такий набір інваріантних властивостей: масштабування, переносу, ортогональної подібності.

При використанні алгоритму RQI потрібно пам'ятати, що він потребує дуже високу точність обчислення кожного з власних векторів, інакше ані процедура ортогоналізації Грама-Шмідта, ані інші процедури не гарантують отримання саме тієї власної пари, яка є вірною.

Примітка 26.2. Алгоритм *прямих* ітерацій є подібним до алгоритму зворотних ітерацій, тільки в ньому проводиться розклад матриці $[\tilde{M}]$, а не $[\tilde{K}]$, а цей варіант має обмеження. Ітераційний процес прямих ітерацій без

© К.М. Рудаков, 2025

"зсуву спектра" збігається до пари $(\lambda_N, \{z\}_N)$. Крім того, в ньому ітераціями з відношенням Релея не вдається отримати таку ж швидкість збіжності, як у алгоритмі зворотних ітерацій. Тому алгоритм прямих ітерацій застосовується значно рідше.

26.4. Алгоритми формалізації проблеми власних значень

26.4.1. Поняття формалізації проблеми власних значень

Для багатьох алгоритмів знаходження власних частот та форм коливань потрібно попередньо проводити формалізацію проблеми, тобто приводити СЛАР (26.1) або (26.6) до канонічного вигляду

$$[A]\{Z\} = [\lambda]\{Z\}, \tag{26.12}$$

де матриця $[\lambda]$ є діагональною матрицею, а λ набуває смисл власного значення матриці $[A]$.

Є декілька варіантів перетворення СЛАР (26.1) у СЛАР (26.12), обумовлених властивостями матриць $[K]$ й $[M]$. Але навіть коли перетворення не потрібно, метод знаходження власних частот і форм коливань теж залежить від цих властивостей.

У МСЕ матриця $[K]$ зазвичай є симетричною, розрідженою та позитивно визначеною. Матриця $[M]$ зазвичай також є симетричною, але на відміну від матриці $[K]$ може мати декілька варіантів інших властивостей:

- мати однакову або не однакову з матрицею $[K]$ структуру заповнення, зокрема бути діагональною;
- бути добре або погано обумовленою (див. підрозділ 5.2). Останнє викликається тим, що в тілі є СЕ або вузли скінченно-елементної сітки з масами, які на багато порядків відрізняються між собою;
- мати нулі на діагоналі та у відповідних рядках і стовпцях матриці. Це пов'язане з тим, що в деяких СЕ або вузлах сітки тіла маса не задається.

Остання обставина вказує на те, що матриця мас $[M]$ може бути або позитивно визначеною (нульові маси відсутні) або позитивною (є нульові маси).

Спочатку розглянемо алгоритми формалізації (26.1), тобто отримання СЛАР канонічного вигляду (26.12), а також супутні проблеми. Лише потім розглянемо деякі основні алгоритми знаходження власних значень і векторів. Матриці $[K]$ і $[M]$ будемо вважати симетричними.

26.4.2. Модифікування вихідної СЛАР при наявності в ній ступенів свободи без маси

Якщо в матриці $[M]$ деякі діагональні члени m_{kk} мають нульові значення, то це означає, що відповідні власні числа $\lambda_k = \infty$ і їхні значення не можна обчислювати в ЕОМ. Тому при виявленні деякого $m_{kk} = 0$ обчислення можна не проводити, призначати для λ_k максимально можливе в ЕОМ велике число, а власний вектор $\{z\}_k$ обирати у вигляді одиничного вектора

© К.М. Рудаков, 2025

(всюди нулі, лише на k-й позиції ставиться одиниця). Легко впевнитися, що такий вектор дійсно є власним вектором цієї матриці.

Є й інший варіант рішення цієї проблеми. Можна провести додаткове перетворення СЛАР (26.1), щоб видалити ці ступені свободи без маси із системи, яка потім буде розглядатися далі. Для цього СЛАР (26.1) представляється у блочному вигляді:

$$\begin{bmatrix} [K]_{(rr)} & [K]_{(rs)} \\ [K]_{(sr)} & [K]_{(ss)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{z\}_{(r)} \\ \{z\}_{(s)} \end{Bmatrix} = [\lambda] \begin{bmatrix} [M]_{(rr)} & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{z\}_{(r)} \\ \{z\}_{(s)} \end{Bmatrix}, \tag{26.13}$$

де матриця $[M]_{(rr)}$ не має нулів на діагоналі. З (26.13):

$$[K]_{(rr)}\{z\}_{(r)} + [K]_{(rs)}\{z\}_{(s)} = [\lambda][M]_{(rr)}\{z\}_{(r)}; \tag{26.14}$$

$$[K]_{(sr)}\{z\}_{(r)} + [K]_{(ss)}\{z\}_{(s)} = \{0\}. \tag{26.15}$$

Якщо з (26.15) виразити вектор

$$\{z\}_{(s)} = -[K]^{-1}_{(ss)}[K]_{(sr)}\{z\}_{(r)} \tag{26.16}$$

і підставити його у (26.14), то отримаємо СЛАР, подібну до (26.1):

$$[\tilde{K}]_{(rr)}\{z\}_{(r)} = [\lambda][M]_{(rr)}\{z\}_{(r)}, \tag{26.17}$$

де позначена матриця

$$[\tilde{K}]_{(rr)} = [K]_{(rr)} - [K]_{(rs)}[K]^{-1}_{(ss)}[K]_{(sr)}. \tag{26.18-а}$$

Може виявитися, що обчислення матриці $[K]^{-1}_{(ss)}$ є недоречним. Тоді матриця $[K]_{(ss)}$ представляється у вигляді розкладу на дві трикутні матриці: $[K]_{(ss)} = [L]^T[L]$ (див. Розділ 5), потім з виразу $[L]\{Y\} = [K]_{(sr)}$ знаходиться вектор $\{Y\}$, після чого замість (26.18-а) обчислюється

$$[\tilde{K}]_{(rr)} = [K]_{(rr)} - \{Y\}^T\{Y\}. \tag{26.18-б}$$

Вираз (26.16) може застосовуватися після знаходження $\{z\}_{(r)}$ для отримання $\{z\}_{(s)}$. Така "статична конденсація" є ефективною лише при $s << r$. Ще важливо, що відсоток заповнення матриці $[\tilde{K}]_{(rr)}$ буде більшим, ніж $[K]_{(rr)}$, а це є негативним фактом. У літературі ця процедура називається редукцією за Гайяном (Guyan, 1965 р.).

26.4.3. Формалізація проблеми власних значень СЛАР шляхом її перетворення з використанням властивостей матриці мас

26.4.3.1. Матриця мас є діагональною

Якщо матриця $[M]$ є діагональною та добре обумовленою, то достатньо представити її як $[M] = [\Delta][\Delta]$, де $[\Delta] = [M]^{1/2}$. Отримаємо, що для (26.12)

$$[A] = [\Delta]^{-1}[K][\Delta]^{-1}. \tag{26.19}$$

Для приведення матриці $[M]$ до діагонального вигляду ще на етапі обчислення першого інтеграла з (25.7), тобто $[M]_e = \int_{\Omega^e} \overline{\rho}[\phi]^T[\phi]d\Omega$, часто

застосовують формули (25.55) та (25.56), тобто замість $[M]_e$ використовують діагональну матрицю $[\overline{M}]_e$. Зібрана з таких матриць, матриця $[M]$ теж буде діагональною.

26.4.3.2. Матриця мас не є діагональною

Якщо матриця $[M]$ не є діагональною, але достатньо добре обумовленою, то її можна розкласти на дві трикутні (див. підрозділ 5.3):

$$[M]=[L][L]^T. \tag{26.20}$$

Після множення (26.1) зліва на $[M]^{-1}=([L]^T)^{-1}[L]^{-1}$, отримують СЛАР

$$([L]^T)^{-1}[L]^{-1}[K]\{z\}=\lambda\cdot[I]\{z\}. \tag{26.21}$$

Вектор $\{z\}$ представляють у вигляді

$$\{z\}=([L]^{-1})^T\{Z\}, \tag{26.22}$$

тоді СЛАР (26.21) після підстановки до неї (26.22) та скорочення обох частин на матрицю $([L]^T)^{-1}=([L]^{-1})^T$ (див. підрозділ 4.3) отримує вигляд

$$[L]^{-1}[K]([L]^{-1})^T\{Z\}=[\lambda]\{Z\}. \tag{26.23}$$

Після позначення

$$[A]=[L]^{-1}[K]([L]^{-1})^T \tag{26.24}$$

СЛАР (26.23) отримає вигляд (26.12) тобто $[A]\{Z\}=[\lambda]\{Z\}$. В (26.24) матриця $[A]$ є симетричною, оскільки вона конгруентна симетричній матриці $[K]$ (див. підрозділ 4.1). Власні значення λ_j матриці $[A]$ знаходяться шляхом розв'язування канонічного алгебраїчного рівняння (26.12). Вони одночасно є власними значеннями СЛАР (26.1).

Потім власні вектори задачі (26.1) згідно з (26.22) обчислюються як

$$\{z\}_j=([L]^{-1})^T\{Z\}_j. \tag{26.25}$$

Ще один варіант – проведення розкладу матриці $[M]$ із застосуванням спектрального аналізу. Він має меншу ефективність, але при погано обумовлених матрицях $[M]$ може дати більш точні власні значення. Якщо позначити матрицю ортогональних власних векторів матриці $[M]$ як $[Y]$, а діагональну матрицю власних значень як $[D^2]$, то

$$[M]=[Y]^T[D^2][Y]. \tag{26.26}$$

Тоді матриця $[L]$ для (26.20) утворюється як

$$[L]=[Y][D], \tag{26.27}$$

де діагональна матриця $[D]=[D^2]^{1/2}$, тобто $[D^2]=[D][D]$.

Суттєвим недоліком отримання канонічної системи (26.12) шляхом розкладання *недіагональної* матриці $[M]$ є те, що матриця $[A]$, що відповідає (26.24), має значно підвищений відсоток заповнення порівняно з вихідними матрицями $[K]$ й $[M]$.

© К.М. Рудаков, 2025

26.4.4. Формалізація проблеми власних значень шляхом розкладання матриці жорсткості

Дії є аналогічними діям п.п.26.4.3.2. Оскільки матриця $[K]$ не є діагональною, але майже завжди є достатньо добре обумовленою, то проводиться розкладання матриці $[K]$ на дві трикутні (див. підрозділ 5.3):

$$[K]=[L][L]^T. \tag{26.28}$$

Після множення (26.1) зліва на $[\mu][K]^{-1}=[\mu]([L]^T)^{-1}[L]^{-1}$, де діагональні компоненти $\mu_i=1/\lambda_i$, отримують СЛАР

$$[\mu]\{z\}=([L]^T)^{-1}[L]^{-1}[M]\{z\}. \tag{26.29}$$

Вектор $\{z\}$ представляють у вигляді

$$\{z\}=([L]^{-1})^T\{Z\}, \tag{26.30}$$

тоді СЛАР (26.29) після підстановки до неї (26.30) та скорочення обох частин на матрицю $([L]^T)^{-1}=([L]^{-1})^T$ (див. підрозділ 4.3) отримує вигляд

$$[\mu]\{Z\}=[L]^{-1}[M]([L]^{-1})^T\{Z\}. \tag{26.31}$$

Після позначення

$$[A]=[L]^{-1}[M]([L]^{-1})^T \tag{26.32}$$

СЛАР (26.31) отримає вигляд, аналогічний (26.12):

$$[\mu]\{Z\}=[A]\{Z\}. \tag{26.33}$$

В (26.32) матриця $[A]$ є симетричною, оскільки вона конгруентна симетричній матриці $[M]$ (див. підрозділ 4.1). Власні значення μ_i матриці $[A]$ знаходяться шляхом розв'язування канонічного алгебраїчного рівняння (26.33). Значення $\lambda_i=1/\mu_i$ є власними значеннями СЛАР (26.1), а колові власні частоти коливань пружного тіла обчислюються як $\omega_i=\sqrt{1/\mu_i}$.

Потім власні вектори задачі (26.1) згідно з (26.30) обчислюються як

$$\{z\}_i=([L]^{-1})^T\{Z\}_i. \tag{26.34}$$

Цей варіант зазвичай застосовують лише тоді, коли матриця $[M]$ не є позитивно визначеною, оскільки матриця $[A]$ майже завжди виявляється заповненою повністю. У випадках, коли матриця $[K]$ не є достатньо добре обумовленою, замість розкладу (26.28) краще використовувати розклад $[K]=[Y]^T[D^2][Y]$ із застосуванням спектрального аналізу для побудови матриці $[L]=[Y][D]$ (додаткові пояснення див. у п.26.4.3.2).

26.4.5. Формалізація проблеми власних значень шляхом одночасного розкладання матриць жорсткості та мас

Доведено теорему, що у випадку позитивної визначеності матриці $[M]$ існують такі матриці $[F]$, що одночасно матриці $[\underline{M}]=[F]^T[M][F]$ та $[\underline{K}]=[F]^T[K][F]$ мають діагональний вигляд. Дійсно, згідно зі спектральною теоремою, будь-яку позитивно визначену матрицю можна шляхом ортогональних перетворень привести до діагональної матриці. Якщо врахувати, що будь-які ортогональні перетворення не змінюють одиничну матрицю, то продовжен-

© К.М. Рудаков, 2025

ня перетворень канонічного алгебраїчного рівняння (26.12) або (26.33) шляхом ортогональних перетворень приведе матрицю $[A]$ до діагонального вигляду. Тобто матрицю перетворень $[F]$ можна будувати з перетворень, що описані в п.п.26.4.3.1 або 26.4.3.2 та додаткових ортогональних перетворень. Є й інші варіанти. Прикладом такого алгоритму є узагальнений алгоритм поворотів Якобі (див. п.26.7.3).

Примітка 26.3. Алгоритми, які приводять матриці $[K]$ та $[M]$ до діагонального вигляду одночасно, знаходять всі власні пари $(\lambda_j, \{z\}_j)$, що зазвичай не потрібно для задач, які розв'язуються за допомогою МСЕ.

Крім того, перетворення Якобі є оптимальними за кількістю математичних дій лише тоді, коли матриці $[K]$ та $[M]$ мають відносно малі значення недіагональних компонент, що не є характерним для МСЕ. Тому зараз алгоритм поворотів Якобі при скінченно-елементній апроксимації використовується лише як допоміжний, зокрема у методі ітерацій у підпросторі (див. підрозділ 26.13).

26.5. Тридіагональна форма симетричної матриці

Матриця $[T]$ називається тридіагональною, якщо всі її компоненти $t_{ij} = 0$ при $|i - j| > 1$. Для спрощення викладок часто позначають діагональні компоненти як $\alpha_i = t_{ii}$, а недіагональні – як $\beta_i = t_{i,i+1}$. Якщо виявиться, що деяка компонента $\beta_m = 0$, то матриця $[T]$ розпадається на дві тридіагональні $[T]_1$ і $[T]_2$, причому матриця $[T]_1$ має розмір $N_1 = m$, а інша – $N_2 = N - m$.

Доведено теорему, що будь-яку симетричну матрицю $[A]$ можна привести до тридіагональної $[T]$, причому така матриця $[T]$ є єдиною. Відомо декілька методів приведення. Доведено, зокрема, що для цього потрібна кінцева кількість ортогональних подібних перетворень

$$[T] = [P]_m^T \cdot \ldots \cdot [P]_2^T \cdot [P]_1^T [A] [P]_1 \cdot [P]_2 \cdot \ldots \cdot [P]_m, \qquad (26.35)$$

тоді як для отримання діагональної матриці – нескінченна. Ще доведено, що тридіагональна матриця, яка не розпадається, має різні власні числа, хоча деякі з них можуть бути дуже близькими. І не потребує доведень твердження, що знайти власні числа та вектори тридіагональної матриці $[T]$ значно легше, ніж більш заповненої матриці. Тому алгоритм з двох етапів: 1) – приведення $[A]$ до $[T]$; 2) – знаходження власних чисел і векторів $[T]$, є більш економічним, ніж інші алгоритми.

Зазвичай процедуру приведення матриці $[A]$ до тридіагональної матриці $[T]$ формалізують як $(N-2)$ послідовних операцій перетворень типу $[P]^T[A][P]$, де матриця $[P]$ є елементарною матрицею перетворення.

У ролі матриць $[P]$ зазвичай використовують матрицю:

- ортогонального відбиття;
- плоского повороту.

© К.М. Рудаков, 2025

Оскільки матриці $[P]$ заповнені дуже слабо, то замість буквального матричного перемноження програмуються лише результати виконання операції. Деякі основні варіанти матриць $[P]$ розглянемо у підрозділах 26.6 та 26.7.

26.6. Метод Хаусхолдера для отримання тридіагональної форми симетричної матриці

Матрицею відбиття є ортогональна матриця

$$[P]=[I]-\alpha\cdot\{w\}\{w\}^T, \tag{26.36}$$

де множник $\alpha=2/\{w\}^T\{w\}$, причому вектор $\{w\}$ може бути довільним.

Покажемо, що вектор $[P]\{z\}$ є відбиттям вектора $\{z\}$ від площини, яка перпендикулярна вектору $\{w\}$. Позначимо проєкцію вектора $\{z\}$ на вектор $\{w\}$ як $\gamma\cdot\{w\}$, де γ є скаляром. Тоді:

$$[P]\gamma\{w\}=[I]\gamma\{w\}-\alpha\cdot\{w\}\{w\}^T\gamma\{w\}=\gamma\cdot\left(\{w\}-\frac{2}{\{w\}^T\{w\}}\{w\}\{w\}^T\{w\}\right)=\gamma\cdot(\{w\}-2\{w\})=-\gamma\{w\}.$$

Отже, проєкція вектора $\{z\}$ на вектор $\{w\}$ після перетворення лише змінила знак, тобто відбилася від площини, яка перпендикулярна вектору $\{w\}$. Проєкцію вектора $\{z\}$ на вектор, перпендикулярний вектору $\{w\}$, позначимо як $\{v\}$. Тоді, враховуючи, що з умови ортогональності векторів $\{w\}$ і $\{v\}$ маємо $\{w\}^T\{v\}=0$:

$$[P]\{v\}=[I]\{v\}-\alpha\cdot\{w\}\{w\}^T\{v\}=\{v\}-\alpha\cdot\{w\}\cdot 0=\{v\},$$

тобто ця проєкція вектора $\{z\}$ не змінила свого положення. Отже, вектор $\{z\}$ зазнав відбиття від площини, яка перпендикулярна вектору $\{w\}$. Очевидно, що довжина вектора $\{z\}$ не змінилася.

Для приведення матриці $[A]$ до тридіагонального вигляду шляхом застосування матриць відбиття (26.36) та операцій перетворень типу $[P]^T[A][P]$ необхідно визначитися, в який спосіб обирати вектор $\{w\}$. Послідовність дій будемо позначати змінною $k=1,...,N-2$, цей індекс будемо приписувати до матриць і векторів знизу. Позначимо $[A]_1=[A]$. Докладно розглянемо випадок $k=1$, оскільки інші перетворення робляться подібно.

Представимо матриці $[A]_1$, $[P]_1$ та вектор $\{w\}_1$ у блочному вигляді:

$$[A]_1=\begin{bmatrix} a_{11} & \{\tilde{A}\}_1^T \\ \{\tilde{A}\}_1 & [\tilde{A}]_{11}\end{bmatrix};\quad [P]_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & [\tilde{P}]_1\end{bmatrix};\quad \{w\}_1=\begin{Bmatrix}0\\ \{\tilde{w}\}_1\end{Bmatrix}. \tag{26.37}$$

Тоді матриця $[A]_{k+1}=[P]_k^T[A]_k[P]_k$ при $k=1$ обчислюється як

$$[A]_2=\begin{bmatrix} a_{11} & \{\tilde{A}\}_1^T[\tilde{P}]_1 \\ [\tilde{P}]_1^T\{\tilde{A}\}_1 & [\tilde{P}]_1^T[\tilde{A}]_1[\tilde{P}]_1\end{bmatrix}. \tag{26.38}$$

Позначимо:

$$[\tilde{A}]_2=[\tilde{P}]_1^T[\tilde{A}]_1[\tilde{P}]_1;\quad \{\tilde{s}\}_1=[\tilde{P}]_1^T\{\tilde{A}\}_1=\left(\{\tilde{A}\}_1^T[\tilde{P}]_1\right)^T=\left([I]-\alpha\cdot\{w\}_1\{w\}_1^T\right)\{\tilde{A}\}_1. \tag{26.39}$$

Тоді (26.38) отримає вигляд

© К.М. Рудаков, 2025

$$[A]_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & \{\tilde{s}\}_1^T \\ \{\tilde{s}\}_1 & [\tilde{A}]_2 \end{bmatrix}. \quad (26.40)$$

Оскільки перші рядок та стовбець матриці $[A]_2$ потрібно привести до відповідності тридіагональній матриці, то вектор $\{\tilde{s}\}_1$ повинен виглядати як

$$\{\tilde{s}\}_1 = \{\tilde{a}_{12}, 0, ..., 0\}^T. \quad (26.41)$$

Позначимо евклідову норму (див. підрозділ 4.2) вектора $\{\tilde{A}\}_1$ як

$$q = \| \{\tilde{A}\}_1 \|_2. \quad (26.42)$$

Хаусхолдер запропонував визначати вектор $\{\tilde{w}\}_1$ як

$$\{\tilde{w}\}_1 = \{\tilde{A}\}_1 + sign(a_{12}) \cdot q \cdot \{1, 0, ..., 0\}^T, \quad (26.43)$$

де a_{12} є елементом матриці $[A]_1$. Тоді з другого виразу (26.39), а саме з $\{\tilde{s}\}_1 = \left([I] - \alpha \cdot \{w\}_1 \{w\}_1^T\right)\{\tilde{A}\}_1$, з урахуванням (26.41)

$$\tilde{a}_{12} = -sign(a_{12}) \cdot q. \quad (26.44)$$

При обрахуванні $\{\tilde{w}\}_1$ згідно з (26.43) виникає сума $(a_{12} + q)$, що вказує на важливість урахування знаку a_{12} при призначенні знаку q у формулі (26.43) для виключення ситуації обчислення різниці двох близьких чисел (має знижену точність) або навіть "катастрофічного взаємного винищення" (див. п.1.2.1).

Кількість дій зменшується з $O((N-k)^3)$ до $O((N-k)^2)$, якщо при обчисленні $[\tilde{A}]_2 = [\tilde{P}]_1^T [\tilde{A}]_1 [\tilde{P}]_1$ виконуються тільки "не порожні" операції:

$$\alpha_1 = 2/\{w\}_1^T \{w\}_1; \quad \{v\}_1 = \alpha_1 [\tilde{A}]_{11} \{\tilde{w}\}_1; \quad \beta_1 = \{v\}_1^T \{\tilde{w}\}_1; \quad \{r\}_1 = \{v\}_1 - \alpha_1 \beta_1 \{\tilde{w}\}_1. \quad (26.45)$$

$$[\tilde{A}]_2 = [\tilde{A}]_1 - \{\tilde{w}\}_1 \{v\}_1^T - \{r\}_1 \{w\}_1^T. \quad (26.46)$$

При $k = 2, ..., N-2$ виконуються аналогічні операції. Розміри векторів та матриць постійно зменшуються, обчислення прискорюються.

Матриці $[A]_k$ залишаються симетричними, але (це суттєвий недолік алгоритму) структура заповнювання матриці змінюється, а відсоток заповнення – збільшується. Крім того, необхідно зберігати (на місці стовпців вихідної матриці з анульованими даними) вектори $\{w\}_j$ для швидкої "реконструкції" матриць $[\tilde{P}]_k$ з метою проведення подальших обчислень власних пар $(\lambda_j, \{x\}_j)$.

Примітка 26.4. Матриця $[\tilde{P}]_k$ має вигляд майже одиничної матриці, в якій змінюються компоненти $\tilde{p}_{11} = -\tilde{p}_{22}$ та $\tilde{p}_{12} = \tilde{p}_{21}$, причому завжди $\tilde{p}_{11}^2 + \tilde{p}_{12}^2 = 1$.

26.7. Перетворення матриць застосуванням плоских поворотів

Крім перетворень Хаусхолдера за допомогою матриці відбиття є й інші варіанти перетворень (26.35). Зокрема, поширеним є застосування матриць плоского повороту.

Створимо елементарну матрицю повороту $[P(i, j, \theta)]$ шляхом модифікації одиничної матриці, в яку введемо компоненти елементарної матриці повороту $p_{ii} = p_{jj} = \cos\theta$ та $p_{ij} = -p_{ji} = -\sin\theta$ при $i < j$. Очевидно, що $[P(i, j, \theta)]^{-1} = [P(i, j, -\theta)]$, тобто для її обернення достатньо змінити знак

© К.М. Рудаков, 2025

перед θ. В залежності від того, з якою метою обирається значення для θ, розрізняють:

- повороти Якобі (1846 р.): значення θ таке, щоб стали нульовими елементи з індексами i, j та j, i в матриці $[\tilde{A}(i,j)] = [P(i,j,\theta)][A][P(i,j,-\theta)]$;
- повороти Гівенса (1954 р.): значення θ таке, щоб стали нульовими елементи з індексами m, n та n, m в матриці $[\tilde{A}(i,j)] = [P(i,j,\theta)][A][P(i,j,-\theta)]$, для чого один з індексів пари i, j повинен дорівнювати одному з індексів пари m, n.

Будемо вважати, що вихідна матриця $[A]$ є симетричною (це може бути матриця мас $[M]$ або матриця жорсткості $[K]$, або матриці, похідні від них).

26.7.1. Повороти Якобі

Позначимо: $s = \sin(\theta)$, $c = \cos(\theta)$, $t = tg(\theta) = s/c$. Після одного повороту Якобі потрібно зробити, щоб нова компонента $\tilde{a}_{ij} = (a_{ii} - a_{jj})cs + a_{ij}(c^2 - s^2) = 0$. Цей вираз можна помножити на 2 та переписати так: $2a_{ij}/(a_{jj} - a_{ii}) = 2cs/(c^2 - s^2) = tg2\theta$. З формул тригонометрії можна одержати, що $\xi = ctg2\theta = (1-t^2)/2t = (a_{jj} - a_{ii})/2a_{ij}$, звідкіля для t створюється квадратичне рівняння $t^2 + 2\xi t - 1 = 0$. Потрібно використовувати найменший за абсолютною величиною корінь цього рівняння. Тоді остаточно послідовність рівнянь для обчислень має наступний вигляд:

$$\xi = (a_{jj} - a_{ii})/2a_{ij}; \quad t = \frac{sign(\xi)}{|\xi| + \sqrt{1+\xi^2}}; \quad c = 1/\sqrt{1+t^2}; \quad s = ct. \tag{26.47}$$

Тобто немає необхідності обчислювати θ в явному вигляді, хоча з того, що прийняли $c \geq 0$ (це потрібно для збіжності методу) випливає, що $|\theta| \leq \pi/4$. Очевидно, що при дуже малому значенні $|a_{ij}|$ поворот Якобі застосовуватися не буде, а при $a_{jj} - a_{ii} = 0$ з формули $2a_{ij}/(a_{jj} - a_{ii}) = tg2\theta$ випливає, що $\theta = \pi/4$. Вирази (26.47) не є єдино можливими, але вони вважаються найкращими для обчислень з обмеженою кількістю розрядів для представлення дійсних чисел.

Після перетворень в матриці $[A]$ замість a_{ii} та a_{jj} будуть

$$\tilde{a}_{ii} = a_{ii} - ta_{ij}; \quad \tilde{a}_{jj} = a_{jj} + ta_{ij}. \tag{26.48}$$

Рутісхаузер запропонував для підвищення точності обчислення нових діагональних членів матриці формувати добавки $\pm ta_{ij}$ (див. формули (26.48)), які зазвичай є малими величинами, зберігати їх окремо весь цикл обходу по недіагональним елементам і лише після закінчення обходу формувати нові значення $\tilde{a}_{ii}$ та $\tilde{a}_{jj}$ відповідно до (26.48).

Інші недіагональні елементи (i,j)-х рядків і стовпців матриці теж змінюються:

$$\tilde{a}_{in} = ca_{in} - sa_{jn}; \quad \tilde{a}_{jn} = sa_{in} + ca_{jn} \quad \text{при} \quad n \neq i, j. \tag{26.49-а}$$

© К.М. Рудаков, 2025

Якщо кут повороту дуже малий ($t \approx 0$; $s \approx 0$), то замість (26.49-а) рекомендують застосовувати такі формули (Рутісхаузера):

$$\tilde{a}_{in} = a_{in} - s(a_{jn} + \mu a_{in}); \quad \tilde{a}_{jn} = a_{jn} + s(a_{in} - \mu a_{jn}) \quad \text{при} \quad n \neq i, j, \qquad (26.49\text{-б})$$

де $\mu = s/(1+c)$.

За одне перетворення Якобі піддаються обнуління по одному елементу симетричної матриці нижче та вище діагоналі. На перший погляд, для отримання діагональної матриці буде достатньо провести стільки описаних вище перетворень, скільки таких ненульових елементів є нижче або вище діагоналі симетричної матриці. Але це не так, оскільки при обнулінні нових компонент декілька нульових компонент матриці, розташованих на рядках і стовпцях матриці з номерами i, j можуть стати не нульовими. Однак доведено теорему, що при багатократному повторенні поворотів Якобі для всіх можливих i, j недіагональні елементи матриці безперервно зменшують свої абсолютні значення, матриця прямує до діагональної, хоча швидкість збіжності не є високою.

Класичний метод Якобі полягає в тому, що при кожному перетворенні робиться нульовою максимальна за модулем недіагональна компонента матриці. Але пошук таких компонент потребує забагато додаткових дій.

В *циклічному* методі Якобі елементи матриці анулюються почергово, незалежно від їхнього значення, тобто в циклі реалізується такий порядок для (i, j):

(1,2), (1,3), …, (1,*N*); (2,3), (2,4), …, (2,*N*); .... (3,4), …, (*N* -1,*N*).

В *бар'єрному* методі Якобі в кожному циклі встановлюється деяке бар'єрне значення τ й акт перетворення виконується лише тоді, коли черговий елемент матриці перевищує за модулем це значення.

У ролі бар'єра можуть розглядатися й інші величини, наприклад, норми:

- Рутісхаузера $\tau = (1/5N^2) \cdot \sum_{m<} \sum_{n} |a_{mn}|$;
- Кахана-Корнейля. Спочатку один раз обчислюється $\omega = \sum_{m<} \sum_{n} a_{mn}^2$, потім $\tau = \sqrt{\omega / N}$. Після кожного реально виконаного акта повороту Якобі величина ω зменшується на квадрат анульованої компоненти, тобто на a_{ij}^2 і призначається новий бар'єр $\tau = \sqrt{\omega / N}$. Цей варіант має найвищу швидкість збіжності серед розглянутих варіантів методу Якобі. Можна позбутися обчислення квадратного кореня, якщо замість запису обмеження $|a_{ij}| < \tau = \sqrt{\omega / N}$ застосувати інший варіант його запису: $Na_{ij}^2 < N\tau^2 = \omega$.

Доведено, що після перших 3-х або 4-х циклів збіжність до діагональної форми стає квадратичною, тобто $O(\mu^2)$, де $\mu \geq \max_{i \neq j} |a_{ij}|$.

Примітка 26.5. Із застосуванням методів повороту Якобі можна розв'язувати СЛАР $[A]\{x\} = \{b\}$. Введемо вектори $\{\tilde{x}\} = [P(i, j, \theta)]\{x\}$ та $\{\tilde{b}\} = [P(i, j, \theta)]\{b\}$ і отримаємо СЛАР $[\tilde{A}]\{\tilde{x}\} = \{\tilde{b}\}$. Після закінчення циклів матриця $[\tilde{A}]$ буде діагональною (дуже малими недіагональними елементами нехтують), залишиться обчислити $\{\tilde{x}\} = [\tilde{A}]^{-1}\{\tilde{b}\}$ та повернутися до вектора

© К.М. Рудаков, 2025

$\{x\}=[P]^{-1}\{\tilde{x}\}$, де матриця $[P]^{-1}$ є результатом перемножень всіх матриць $[P(i,j,-\theta)]$, що були застосовані при перетвореннях. Такий метод не є оптимальним за кількістю дій, тому фактично не використовується.

26.7.2. Повороти Гівенса

Після одного повороту Гівенса потрібно зробити, щоб нова компонента $\tilde{a}_{in}=ca_{in}-sa_{jn}=0$ або $\tilde{a}_{jn}=sa_{in}+ca_{jn}=0$ при $n\neq i,j$.

Тому $t=s/c=a_{in}/a_{jn}$ або $t=-a_{jn}/a_{in}$. Оскільки $\cos\theta=1/\sqrt{1+tg^2\theta}$ (формула тригонометрії), то:

$$\mathrm{c}=a_{jn}/\sqrt{a_{in}^2+a_{jn}^2}\;;\quad s=a_{in}/\sqrt{a_{in}^2+a_{jn}^2} \tag{26.50-а}$$

або відповідно

$$\mathrm{c}=a_{in}/\sqrt{a_{in}^2+a_{jn}^2}\;;\quad s=a_{jn}/\sqrt{a_{in}^2+a_{jn}^2}\,, \tag{26.50-б}$$

причому при $a_{in}^2+a_{jn}^2=0$ значення $\mathrm{c}=1$ та $\mathrm{s}=0$, тобто немає необхідності проводити операцію повороту.

Якщо індекс n співпадає з одним із індексів пари i,j, то маємо варіант повороту Якобі, тому й формули тоді будуть з п.26.7.1.

26.7.3. Узагальнений алгоритм поворотів Якобі

Як виявилося, можна одночасно проводити анулювання компонент матриць $[K]$ та $[M]$, тобто не приводити СЛАР (26.1) до канонічного вигляду (26.12) для знаходження власних пар. Якщо матриця $[M]$ при цьому є діагональною, то алгоритм вироджується в звичайний алгоритм Якобі п.26.7.1.

Ортогональна матриця повороту $[P(i,j,\gamma,\alpha)]$ має одиниці на діагоналі та лише дві ненульові недіагональні компоненти: γ на позиції j,i та α на позиції i,j при $i>j$. З умов анулювання компонент $\tilde{k}_{ij}$ та $\tilde{m}_{ij}$ у матрицях $[\tilde{K}]=[P][K][P]^{-1}$ та $[\tilde{M}]=[P][M][P]^{-1}$ можна отримати два рівняння

$$\alpha k_{ii}+(1+\alpha\gamma)k_{jj}+\gamma k_{jj}=0\,;\quad \alpha m_{ii}+(1+\alpha\gamma)m_{jj}+\gamma m_{jj}=0\,. \tag{26.51}$$

У випадку, коли $m_{ii}/k_{ii}=m_{jj}/k_{jj}=m_{ij}/k_{ij}$, приймається $\alpha=0$ та $\gamma=-k_{ij}/k_{jj}$. У загальному випадку з системи (26.51):

$$\gamma=-\bar{k}_{ii}/\Delta\,;\quad \alpha=\bar{k}_{jj}/\Delta\,, \tag{26.52}$$

де $\bar{k}_{ii}=k_{ii}m_{ij}-m_{ii}k_{ij}$; $\bar{k}_{jj}=k_{jj}m_{ij}-m_{jj}k_{ij}$, а

$$\Delta=\bar{k}/2+sign(\bar{k})\sqrt{\bar{k}^2/4+\bar{k}_{ii}\bar{k}_{jj}}\;;\quad \bar{k}=k_{ii}m_{jj}-m_{ii}k_{jj}\,. \tag{26.53}$$

Вираз під знаком кореня більше за нуль, якщо матриця $[M]$ визначена позитивно та не є діагональною.

Перетворення багатократно (теоретично – нескінченно) повторюються аналогічно розглянутому в п.26.7.1. Критерій зупинення ітерацій (збіжності):

$$|\lambda_j^{(k+1)}-\lambda_j^{(k)}|\le\varepsilon\cdot\lambda_j^{(k+1)};\quad j=1,...,N\,, \tag{26.54}$$

де $k=1,2,...\to\infty$ є номером перетворення; ε – призначеною точністю; а

© К.М. Рудаков, 2025

$$\lambda_j = k_{jj} / m_{jj}; \quad j = 1,..., N. \tag{26.55}$$

Крім того, повинні виконуватися умови "малості" недіагональних членів

$$k_{ij}^2 \le \varepsilon^2 \cdot (k_{ii} k_{jj}); \quad m_{ij}^2 \le \varepsilon^2 \cdot (m_{ii} m_{jj}); \quad \forall\ i, j;\ i < j. \tag{26.56}$$

Алгоритм є ефективним лише при малих розмірах задачі та при значної перевазі діагональних елементів матриць $[K]$ та $[M]$ над недіагональними. Може отримувати більш точні результати, ніж інші алгоритми, якщо матриці $[K]$ та $[M]$ є погано обумовленими. У випадку наближень частотної задачі за допомогою МСЕ застосовується лише як допоміжний алгоритм у методі ітерацій у підпросторі (див. підрозділ 26.13).

26.8. QL- та QR-алгоритми перетворення матриць

26.8.1. Ідея QL- та QR-алгоритмів, зв'язок з іншими алгоритмами, збіжність та їхнє прискорення

Розглянемо матрицю $[B] = [A] - \sigma[I]$. Ортогональні матриці $[P]$ можуть застосовуватися для отримання варіанта розкладу матриці, який традиційно називають QL- або QR-розкладом:

$$[A] - \sigma[I] = [Q_L][L] \quad \text{або} \quad [A] - \sigma[I] = [Q_R][R], \tag{26.57}$$

де матриці $[Q_L]$ та $[Q_R]$ є одним з варіантів ортогональної матриці $[P]$, а матриці $[L]$ або $[R]$ є лівою або правою *трикутними* матрицями. Оскільки у випадку погано обумовлених матриць QL-розклад дає більш точні результати, ніж QR-розклад, то далі будемо розглядати тільки його, хоча в умовах необмеженої довжини чисел ці розклади теоретично ідентичні.

Помножимо (26.57) зліва на $[Q_L]^T$, а справа на $[Q_L]$. З урахуванням (26.57) та властивості ортогональної матриці $[Q_L]^T[Q_L] = [I]$ отримаємо, що

$$[\tilde{A}] = [Q_L]^T[A][Q_L] = [L][Q_L] + \sigma[I], \tag{26.58}$$

тобто ортогональні перетворення $[Q_L]^T[A][Q_L]$ можна замінити на QL-розклад.

QL-алгоритмом називають ланцюг дій при $k = 1, 2, ... \to \infty$ для послідовності "зсувів" $\sigma_1, \sigma_2, ...$:

- проведення QL-розкладу $[Q_L]_k[L]_k$ для матриці $[A]_k - \sigma_k[I]$;
- обчислення матриці $[A]_k = [Q_L]_k^T[A][Q_L]_k = [L][Q_L] + \sigma_k[I]$.

Зв'язок між матрицями $[A]_{k+1}$ та $[A]_1$ задається послідовністю

$$[A]_{k+1} = [Q_L]_k^T[A]_k[Q_L]_k = [Q_L]_k^T([Q_L]_{k-1}^T[A]_{k-1}[Q_L]_{k-1})[Q_L]_k = ... = [P_L]_k^T[A]_1[P_L]_k, \tag{26.59}$$

де матриця

$$[P_L]_k = [Q_L]_1 \cdot [Q_L]_2 \cdot ... \cdot [Q_L]_k \tag{26.60}$$

теж ортогональна. Тобто QL-алгоритм є алгоритмом перетворення матриці $[A]_1 = [A]$ в матрицю $[A]_k$ за k кроків з використанням QL-розкладів. Мета – перетворення матриці $[A]$ в таку, яку з малою похибкою можна вважати діагональною. Як виявилося, таке перетворення не змінює структуру

© К.М. Рудаков, 2025

заповнення матриць $[A]_k$, що дуже важливо при великих розмірах матриці або для тридіагональної матриці. Зокрема, для тридіагональної матриці кількість дій на одному кроці буде $O(N)$, що дуже приваблює.

Доведено, що QL-алгоритм тісно пов'язаний зі степеневими методами, зокрема з методом зворотних ітерацій.

Якщо обирають всі $\sigma_k \equiv 0$, то QL-алгоритм називають основним. Але він має дуже малу швидкість збіжності (у розумінні $[A]_k\{e\}_j \to \lambda_j\{e\}_j$, де $j-$й вектор-орт $\{e\}_j$ має нулі на всіх позиціях, окрім одиниці на j-й позиції. Цей варіант оцінки збіжності значно практичніше, ніж, наприклад, $[A]_k \to [\Lambda]$, де $[\Lambda]$ є діагональною матрицею).

Застосування "зсувів" значно прискорює процес. Як виявилося, за величини "зсуву спектра" σ_k можна вже з $k=1$ використовувати $a_{11}^{(k)}$, оскільки $a_{11}^{(k)} = \{e\}_1^T[A]_k\{e\}_1 \to \lambda_1$ при $k \to \infty$. На практиці, як тільки $\|[A]_k\{e\}_1 - \{e\}_1 a_{11}^{(k)}\|$ стає достатньо малою величиною, призначають $\lambda_1 = a_{11}^{(k)}$ і далі працюють з підматрицею $[\tilde{A}]_{11}$, яка відповідає першій формулі (26.37). Тобто в QL-алгоритм вбудовано класичний метод вичерпування (див. п.6.4.3). В наступній підматрице знов знаходиться перше власне число, тому легко доводиться, що в ролі "зсуву спектра" σ_k фактично виступає значення функціонала $\rho^{(k)}$ з відношення Релея (26.3). У зв'язку з цим всі властивості збіжності алгоритму RQI (див. підрозділ 26.3) переносяться на QL-алгоритм. Зокрема, асимптотичної кубічної збіжності. А також той факт, що $\|\{b_{k+1}\}\| \le \|\{b_k\}\|$ при всіх $k = 1,2,\ldots$, де вектор $\{b_k\}$ відповідає представленню матриці $[A]_k = \begin{bmatrix} \{a_k\} & \{b_k\}^T \\ \{b_k\} & [\tilde{A}]_k \end{bmatrix}$ (*монотонне* зменшення норми вектора $\{b_k\}$).

Крім функціонала $\rho^{(k)}$ з відношення Релея для прискорення збіжності QL-алгоритму можна застосовувати й інші значення та процедури. Для тридіагональних матриць є ще кращий варіант – процедура прискорення за Уілкінсоном.

Зазвичай компоненти тридіагональної матриці позначають так:

$$[T] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & . & 0 \\ 0 & . & . & \beta_{N-1} \\ 0 & 0 & \beta_{N-1} & \alpha_N \end{bmatrix}, \qquad (26.61)$$

тоді $[T] - \sigma[I] = [Q_L][L]$ та $[\tilde{T}] = [Q_L]^T[T][Q_L]$.

Згідно з теорією прискорення за Уілкінсоном (тут її опускаємо) поточну величину "зсуву спектра" обчислюють як власне значення ω матриці $\begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_1 & \tilde{\beta}_1 \\ \tilde{\beta}_1 & \tilde{\alpha}_2 \end{bmatrix}$ з поточних значень матриці $[\tilde{T}]$, причому з двох власних значень обирають те,

© К.М. Рудаков, 2025

що ближче до $\tilde{\alpha}_1$. Якщо $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2$, то $\omega = \tilde{\alpha}_1 - |\tilde{\beta}_1|$. Інакше обчислюється $\omega = \tilde{\alpha}_1 - sign(\delta) \cdot \tilde{\beta}_1^2 / \left(|\delta| + \sqrt{\delta^2 + \tilde{\beta}_1^2} \right)$, де $\delta = (\tilde{\alpha}_2 - \tilde{\alpha}_1)/2$. Кубічна збіжність забезпечує такий ряд значень для $\tilde{\beta}_1$: порядку $10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-9}, 10^{-27}, \ldots$.

Доведено теорему, що тридіагональний QL-алгоритм з прискоренням за Уілкінсоном сходиться завжди. Але монотонність $\| \{b_{k+1}\} \| \leq \| \{b_k\} \|$ вже не буде виконуватися (можна вважати це платою за гарантовану збіжність).

Ще відомі алгоритми прискорення з використанням процедури Ньютона, зокрема, алгоритм Ньютона-Саада (1974 р.); алгоритми без обчислення квадратних коренів (PWK, інші), які вже не мають того значення, яке мали раніше.

Залишилося ще одне основне питання: про побудову матриці $[Q_L]$, яка відповідає (26.57) (перший етап) і використовується для перетворення $[\tilde{A}] = [Q_L]^T [A][Q_L]$ (другий етап).

Ортогональну матрицю $[Q_L]^T$ можна створити в результаті перемножень ортогональних матриць. Але ця матриця зазвичай є більш заповненою, ніж матриця $[A]$. Як виявилося, можна частково об'єднувати перший та другий етап, при цьому не виникає необхідності зберігати матрицю $[Q_L]^T$ в явному вигляді.

Розглянемо такі QL-перетворення для двох можливих варіантів матриці.

26.8.2. QL-перетворення тридіагональної матриці

26.8.2.1. Явний алгоритм QL-перетворення тридіагональної матриці

Розглядаються розклади $[T] - \sigma[I] = [Q_L][L]$ та $[\tilde{T}] = [Q_L]^T [T][Q_L]$. Помножимо перший вираз на $[Q_L]^T$ зліва, врахуємо, що $[Q_L]^T [Q_L] = [I]$, і отримаємо шляхом $(N-1)$ перетворень матрицю $[L]$:

$$[Q]^T \cdot ([T] - \sigma[I]) = [P]_1 \cdot \ldots \cdot [P]_{N-1} \cdot \left([T] - \sigma[I] \right) = [L], \qquad (26.62)$$

де в ролі елементарних ортогональних матриць використовуються матриці повороту Якобі $[P]_i = [P(i, i+1, \theta_i)]^T$, в яких θ_i обрано так, щоб анулювати компоненту $(i, i+1)$ поточної матриці. На другому етапі будується матриця $[\tilde{T}]$ згідно з виразом

$$[T] - \sigma[I] = [L][Q] = [L] \cdot [P]_{N-1}^T \cdot \ldots \cdot [P]_1^T . \qquad (26.63)$$

Легко побачити, що після обчислення проміжної матриці $[\tilde{T}]_{N-2} = [P]_{N-2} \cdot [P]_{N-1} \cdot \left([T] - \sigma[I] \right)$ її останні два стовпця мають закінчений вигляд стовпців матриці $[L]$. Тому у цей момент можна обчислити проміжну матрицю $[L]_{N-1} = [L][P]_{N-1}^T$, після чого значення θ_{N-1} вже не потрібне. На наступному кроці обчислюються $[\tilde{T}]_{N-3} = [P]_{N-3} \cdot [\tilde{T}]_{N-2}$ та $[L]_{N-2} = [L]_{N-2} [P]_{N-2}^T$ і значення θ_{N-2} вже не потрібне. Оскільки вихідна матриця є тридіагональною, то компоненти матриці $[L]$ в позиціях $(i, i-2)$ повинні в кінцевому результаті стати нулями. Вони не

© К.М. Рудаков, 2025

впливають ні на що, тому їх можна ігнорувати. Обчислені компоненти перетвореної матриці можна зберігати на місцях вже не потрібних компонент попередньої матриці. Є й більш витончені алгоритми, але головна ідея саме така. Алгоритм має недоліки: потрібно запам'ятовувати всі σ_k в ітераціях; невдале обирання "зсуву спектра" σ_k може призвести до втрати інформації, яка зберігалася в елементах α_i.

26.8.2.2. Неявний алгоритм QL-перетворення тридіагональної матриці

Після виявлення останнього недоліку явного QL-алгоритму був розроблений дещо інший алгоритм: неявний QL-алгоритм (або з "витисненням виступу").

Перша матриця $[P]_{N-1}$ обирається як і раніше, тобто $tg\theta_{N-1} = \beta_{N-1}/(\alpha_N - \sigma)$, обчислюється матриця $[\tilde{T}]_{N-1} = [P]_{N-1} \cdot [T] \cdot [P]_{N-1}^T$. Правий низ матриці $[\tilde{T}]_{N-1}$ отримує вигляд:

$$\begin{vmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & \alpha_{N-2} & c_{N-1}\beta_{N-2} & \langle s_{N-1}\beta_{N-2} \rangle \\ 0 & c_{N-1}\beta_{N-2} & \gamma_{N-1} & s_{N-1}\pi_{N-1} \\ 0 & \langle s_{N-1}\beta_{N-2} \rangle & s_{N-1}\pi_{N-1} & \tilde{\alpha}_N \end{vmatrix}, \tag{26.64}$$

де $\gamma_{N-1} = c_{N-1}\pi_{N-1}$; $c_{N-1} = \cos(\theta_{N-1})$; $s_{N-1} = \sin(\theta_{N-1})$; $\pi_{N-1} = c_{N-1}\tilde{\alpha}_{N-1} - s_{N-1}\beta_{N-1}$; $\tilde{\alpha}_N$ є результатом першого перетворення $[\tilde{T}]_{N-1} = [P]_{N-1} \cdot [T]$.

Тридіагональна форма матриці порушена в позиціях $(N, N-2)$ і $(N-2, N)$, які взяті в дужки $\langle\ \rangle$. Це й є "виступ". Щоб його позбутися, застосовуються повороти Гівенса (див. п.26.7.2) з ортогональними матрицями $[P_G]$: спочатку $[P_G]_{N-2} \cdot [P]_{N-1} \cdot [T] \cdot [P]_{N-1}^T$, потім $[P_G]_{N-2} \cdot [P]_{N-1} \cdot [T] \cdot [P]_{N-1}^T \cdot [P_G]_{N-2}^T$. Потрібні значення c_{N-2} та s_{N-2} обчислюються через $tg\theta_{N-2}$, а той – з умови анулювання $s_{N-1}\beta_{N-2}$ – як $tg\theta_{N-2} = s_{N-1}\beta_{N-2}/s_{N-1}\pi_{N-1} = \beta_{N-2}/\pi_{N-1}$. "Виступ" зсувається вліво-вверх на одну позицію. Матриці повороту Гівенса застосовуються до тих пір, поки "виступ" не буде витіснено за межі матриці.

Згідно з теоремою приведення, отримана після витіснення "виступу" матриця повністю визначається першим або останнім стовпцем матриці $[Q_G] = [P]_{N-1}^T \cdot [P_G]_{N-2}^T \cdot \ldots \cdot [P_G]_1^T$. Дійсно, можна перевірити, що

$$[Q_G]\{e\}_N = [P]_{N-1}^T \cdot [P_G]_{N-2}^T \cdot \ldots \cdot [P_G]_1^T \{e\}_N = \ldots = [P]_{N-1}^T \{e\}_N. \tag{26.65}$$

Аналогічно можна отримати, що

$$[Q]\{e\}_N = [P]_{N-1}^T \cdot [P]_{N-2}^T \cdot \ldots \cdot [P]_1^T \{e\}_N = \ldots = [P]_{N-1}^T \{e\}_N. \tag{26.66}$$

Отже, застосування різних ортогональних матриць $[P_G]_n^T$ та $[P]_n^T$ не змінює результату. Тобто обидві матриці $[\tilde{T}]$, отримані двома варіантами QL-алгоритмів, повинні співпадати з точністю до знаків недіагональних компонент. Мета досягнута: перший кут повороту θ_{N-1} визначався QL-перетворенням

© К.М. Рудаков, 2025

матриці $[T]-\sigma[I]$. Але одного такого проходу недостатньо, оскільки після першого проходу нова матриця $[\tilde{T}]$, позначимо її як $[\tilde{T}]_{(k)}$ при $k=1$ буде не діагональною, а симетричною з дещо підвищеною перевагою діагональних елементів над недіагональними. Потрібно провести ще деяку кількість ітерацій (циклів, проходів) $k=2,3,...$ явних або неявних QL-перетворень, щоб можна було знехтувати недіагональними компонентами $\tilde{\beta}_i$ перетвореної матриці.

26.8.2.3. Критерії малості недіагональної компоненти

Якщо матриця $[T]$ не розпадається (див. підрозділ 26.5), а σ – не власне значення, то і матриця $[\tilde{T}]=[Q_L]^T[T][Q_L]$ теж не розпадається, якщо матриця $[Q_L]$ отримана шляхом QL-розкладання матриці $[T]-\sigma[I]$ (лема). Отже, важливим є питання про критерій малості недіагональної компоненти $\tilde{\beta}_i$ тридіагональної матриці в процесі її QL-перетворення. Встановлено, що якщо така компонента алгоритмом не виявлена своєчасно, то алгоритм обере невдалу величину "зсуву спектра" σ і кількість ітерацій значно збільшиться. Інакше (при своєчасному виявленні) поточна матриця розпадається на частки, кожна з яких далі перетворюється окремо, що навіть дає деякий виграш у ефективності.

Є багато критеріїв виявлення розпаду тридіагональної матриці "з робочою точністю", але немає доброго для всіх можливих випадків, є тільки задовільні.

Аналізується, наскільки змінилося значення власного числа, тобто величина $\delta\lambda_j$, якщо розпад матриці не був виявленим. Як з'ясувалося, проста оцінка $|\tilde{\beta}_i|$ є занадто грубою. Точний вираз отриманий, але для його застосування потрібно неприпустимо багато дій. Рекомендують дворівневу перевірку. Якщо $|\tilde{\beta}_i|\geq\sqrt{\varepsilon}\,\|[T]\|$, то QL-перетворення продовжуються. Інакше застосовують ще один (другий) тест. Якщо і другий тест не витримано, то покладається $\tilde{\beta}_i=0$, тобто матриця розривається на частки. Другим тестом для технічних задач механіки деформованого твердого тіла, породжених МСЕ, можна обрати $|\tilde{\beta}_i|\geq\varepsilon\cdot(|\alpha_i|+|\alpha_{i+1}|)/2$. В цих тестах ε – задана точність, наприклад, $\varepsilon=10^{-30}$.

26.8.2.4. Про ефективність QL-перетворень тридіагональної матриці

Для отримання всіх власних значень системи, при застосуванні обох розглянутих алгоритмів QL-перетворень матриці $[T]-\sigma[I]$, потрібно $O(N^2)$ операцій, що прийнятно. Різноманітні модифікації QL-алгоритмів змінюють кількість таких операцій лише десь до полутора разів, тобто незначно на фоні $O(N^3)$ операцій для отримання тридіагональної матриці $[T]$. Для розріджених матриць, породжених МСЕ, відносний виграш збільшується, але незначно. Алгоритми зі зменшеною кількістю "довгих" операцій (корень квадратний, множення, ділення), навить після винаходу процесорів ЕОМ з декількома

© К.М. Рудаков, 2025

багаторівневими (суперскалярними) конвейерами (i486, 1989 р.; Pentium, 1993 р.), з ядром Out-of-Order (Pentium Pro, 1995 р.) та технологією Hyper-Threading (2002 р.), все ще мають значення.

26.8.3. QL-перетворення стрічкових не тридіагональних матриць

МСЕ породжує матриці, які заповнені частково. Можна провести перенумерацію вузлів в такий спосіб, що після приведення СЛАР (26.1) до канонічного вигляду (26.12) заповнена частка матриці $[A]$ буде групуватися навколо діагоналі. Тоді вводять таку характеристику матриці, як половина ширини стрічки: число $\bar{m} < N$ таке, що будь-яка компонента $a_{ij} = 0$, якщо $|i-j| > \bar{m}$ (для тридіагональної матриці $\bar{m} = 1$). Відомо, наприклад, що кількість дій для розкладання СЛАР зі стрічковою матрицею за схемою Холецького має порядок $O(\bar{m}^2 N)$.

Якщо потрібна лише незначна кількість власних пар СЛАР (26.12), то може виявитися, що доцільніше відмовитися від приведення канонічної СЛАР (26.12) до тридіагонального вигляду, а застосовувати QL-алгоритм з п.26.8.2. Важливо, що при цьому стрічковий характер заповнення проміжних матриць $[\tilde{A}]$ не буде порушуватися.

Розглядається розклад $[A]-\sigma[I]=[Q_L][L]$ та перетворення $[\tilde{A}]=[Q_L]^T[A][Q_L]$ відповідно до формул (26.58) ... (26.60). У ролі елементарних ортогональних матриць використовують матриці відбиття Хаусхолдера (26.36), тобто $[Q_L]_i=[P]_i=[I]-\alpha\cdot\{w\}_i\{w\}_i^T$, які обираються так, щоб привести i-ий стовпчик матриці до вигляду, подібному (26.41). Проблема у тому, що повна матриця $[Q_L]$ є дуже заповненою, а зберігання тільки $\{w\}_i$ теж потребує пам'яті не менше. Вихід з ситуації знов полягає у тому, що для початку перетворень у матрицю $[\tilde{A}]$ не потрібно мати повну матрицю $[L]$.

Але є відмінності. Згідно зі *стрічковим* QL-алгоритмом спочатку проводиться $\bar{m}$ множень ортогональних матриць на матрицю $[A]$ зліва:

$$[\tilde{A}]_{\bar{m}}=[P]_{\bar{m}}^T\cdot\ldots\cdot[P]_{N-1}^T\cdot[P]_N^T\cdot[A], \tag{26.67}$$

лише потім можна починати умножати результат на матрицю $[P]_{\bar{m}}$ справа. Після такого початку залишилося реалізувати $N-\bar{m}$ актів множення зліва – справа та $\bar{m}$ множень тільки справа, причому повністю "відпрацьовані" матриці відбиття (або вектори $\{w\}$) можна не зберігати.

Всі ці дії можна зобразити однією формулою, як перетворення (тут $[\tilde{A}]$ – поточна матриця):

$$[P]_i^T\cdot[\tilde{A}]\cdot[P]_{i+\bar{m}};\quad i=N,N-1,\ldots,1-\bar{m}, \tag{26.68}$$

якщо прийняти, що $[P]_i=[I]$ при $i\le 1$ та $i>N$.

Насправді програмуються тільки результати таких перетворень. Кожний вектор $([A]-\sigma[I])\{e\}_i$ прямо перетворюється у відповідний стовпчик $[L]$ за формулою:

© К.М. Рудаков, 2025

$$[P]_i^T \cdot \ldots \cdot [P]_{i+2\bar{m}}^T \left(\{a\}_i - \sigma \{e\}_i \right), \tag{26.69}$$

вектор $\{w\}_i$ зберігається у пам'яті, решта стовпців матриці $[A]$ не розглядаються, обчислюється та зберігається $(i+\bar{m})$-й рядок кінцевої матриці $[\tilde{A}]$.

Оскільки алгоритм є сенс застосовувати, коли потрібні лише декілька власних значень, то бажано, щоб всі вони були близькі за номерами. Для прискорення можна застосовувати алгоритм Уілкінсона для тридіагональних матриць (див. п.26.8.1), хоча точність прогнозування σ не буде значною, оскільки матриця $[\tilde{A}]$ не є тридіагональною. Початкове значення $\sigma = 0$ або "безпечна" величина, яка вказує на початок діапазону власних значень, що потрібно розрахувати.

QL-алгоритм потребує приблизно 5 ітерацій для визначення кожного власного числа, а також $O(\bar{m}^2 N)$ операцій. Його ще називають алгоритмом BQR.

26.9. Методи Хаусхолдера та Гівенса

Метод Хаусхолдера знаходження власних частот та форм коливань тіла містить такі етапи:

- формалізація проблеми власних значень шляхом розкладання матриці жорсткості (див. п.26.4.4);
- приведення матриці $[A]$ до тридіагонального вигляду за допомогою перетворень Хаусхолдера (див. підрозділ 26.5);
- обчислення всіх власних значень за допомогою ітераційних QR-перетворень (див. п.26.8.3);
- обчислення власних векторів тридіагональної матриці за допомогою зворотних ітерацій з відношенням Релея (RQI);
- перехід від власних векторів тридіагональної матриці до власних векторів вихідної системи (26.1).

Якщо до описаних етапів додають етап проведення "зсуву спектра" (див. підрозділ 26.2), то алгоритм називають модифікованим методом Хаусхолдера.

Метод Гівенса знаходження власних частот та форм коливань тіла містить такі етапи:

- формалізація проблеми власних значень шляхом розкладання матриці жорсткості (див. п.26.4.4);
- приведення матриці $[A]$ до тридіагонального вигляду за допомогою плоских поворотів Гівенса (див. підрозділ 26.7);
- обчислення всіх власних значень за допомогою неявного QL-алгоритму (див. п.п.26.8.2.2);
- обчислення власних векторів тридіагональної матриці за допомогою зворотних ітерацій з відношенням Релея (RQI);
- перехід від власних векторів тридіагональної матриці до власних векторів вихідної системи (26.1).

© К.М. Рудаков, 2025

Ці методи дозволяють отримати всі власні значення або частку з них.

Ці методи зазвичай присутні у всіх сучасних програмних комплексах, в яких реалізовано метод скінченних елементів. Застосовуються для відносно малих задач.

На відміну від викладеного в підрозділі 26.3, алгоритм RQI має справу з дещо іншою СЛАР, а саме з $[T]\{z\}_j = \lambda_j[I]\{z\}_j$, тобто матриця $[A]$ приведена до тридіагональної $[T]$. Тому алгоритм RQI виглядає так: після призначення початкового одиничного вектора $\{z\}^{(1)}$ в ітераціях $k = 1,2,...$ виконуються етапи:

- обчислити поточне значення $\rho^{(k)} = \rho(\{z\}^{(k)}) = \{z\}^{(k)^T}[T]\{z\}^{(k)} / \{z\}^{(k)^T}\{z\}^{(k)}$;
- якщо $([T]-\rho^{(k)}[I])\{z\} = \{0\}$, то знайти з виразу $([T]-\rho^{(k)}[I])\{z\}^{(k+1)} = \{0\}$ вектор $\{z\}^{(k+1)}$ і зупинитися. Інакше, зі СЛАР

$$([T]-\rho^{(k)}[I])\{y\}^{(k+1)} = \{z\}^{(k)} \tag{26.70}$$

знайти вектор $\{y\}^{(k+1)}$;

- обчислити нормований вектор $\{z\}^{(k+1)} = \{y\}^{(k+1)} / \| \{y\}^{(k+1)} \|$;
- якщо величина $\| \{y\}^{(k+1)} \|$ порівняно з $\| \{y\}^{(k)} \|$ практично не змінилася, то зупинитися.

На кожній ітерації потрібно розв'язувати СЛАР (26.70) з новою тридіагональною матрицею $[T]-\rho^{(k)}[I]$, що не потребує багато дій.

26.10. Алгоритми розв'язування характеристичного рівняння

У підрозділі 6.2 розглянуто два таких методи: прямого розгортання характеристичного рівняння та Данилевського. Розглянемо ще два.

26.10.1. Метод ітерацій з поліномами в неявній формі

Будемо вважати, що СЛАР $[K]-\lambda\cdot[M]$ з деяким призначеним λ є позитивно визначеною та симетричною. Тоді її можна розкласти за схемою Холецького з діагональною матрицею: $[K]-\lambda\cdot[M] = [L][D][L]^T$ (див. п.5.3.7). Особливість такого розкладу:

$$\overline{d} = \det([K]-\lambda\cdot[M]) = \prod_{i=1}^{N} d_{ii}, \tag{26.71}$$

де d_{ii} є діагональними компонентами діагональної матриці $[D]$, а $\overline{d}$ може бути менше, більше або дорівнювати нулю. Якщо $\overline{d} = 0$, то λ є власним значенням СЛАР (26.1). Якщо ні, то потрібно обрати нове λ та знов обчислити $\overline{d}$. Отже, потрібно вводити номер циклу $k = 1,2,...$ та позначити ним змінні величини $\lambda^{(k)}$ та $\overline{d}^{(k)}$. Є багато методів обирання наступного значення $\lambda^{(k)}$, які фактично є методами знаходження коренів нелінійного рівняння (див. Розділ 3). Тут потрібно зазначити, що методи, які використовують точно обчислені похідні (методи Ньютона), у даному випадку не є конкурентоспроможними, оскільки потребують збирання додаткової матриці. Популярним є метод хорд (див. п.п.3.1.2.8)

© К.М. Рудаков, 2025

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} - \frac{\overline{d}^{(k)}}{\overline{d}^{(k)} - \overline{d}^{(k-1)}}(\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}), \qquad (26.72)$$

який є окремим варіантом методу Ньютона (див. п.п.3.1.2.5) із заміною похідної різницевим наближенням, а також "прискорена" модифікація методу хорд:

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} - \beta\frac{\overline{d}^{(k)}}{\overline{d}^{(k)} - \overline{d}^{(k-1)}}(\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}), \qquad (26.73)$$

де зазвичай обирають коефіцієнт $\beta \geq 2$ до тих пір, поки алгоритм не "перескакує" через власне значення.

Для визначення діапазонів, в яких міститься лише по одному власному числу, зазвичай застосовують метод половинного ділення (див. п.п.3.1.2.2).

До якого з власних чисел буде збігатися ітераційний процес, залежить від обраних початкових значень $\lambda^{(0)}$ та границь діапазону.

Для розрахованих власних чисел власні вектори ефективно визначати за методом зворотних ітерацій з відношенням Релея (див. підрозділ 26.3).

Примітка 26.6. Потрібно мати на увазі: якщо при отриманні розкладу $[K]-\lambda\cdot[M]=[L][D][L]^T$ проводилася перестановка рядків та відповідних їм стовпців матриці $[K]-\lambda\cdot[M]$, то кожна така перестановка змінює знак при $\overline{d}$ на протилежний.

26.10.2. Алгоритм з використанням послідовностей Штурма

В матриці $[D]$ розкладу $[K]-\lambda\cdot[M]=[L][D][L]^T$, як це вже відзначалося в Примітці 6.4, міститься ще одна важлива інформація: кількість власних чисел, менших ніж деяке λ. На це вказує кількість від'ємних значень на діагоналі $[D]$. Якщо в методі ітерацій з поліномами в неявній формі використовують цю інформацію для знаходження власних чисел, то отримують алгоритм, який іноді скорочено називають алгоритмом Штурма:

- проведення розкладу $[K]-\lambda_S\cdot[M]=[L][D][L]^T$ і визначення q_S – кількості власних значень, які менше за λ_S;
- проведення розкладу $[K]-\lambda_E\cdot[M]=[L][D][L]^T$ і визначення q_E – кількості власних значень, які менше за λ_E. Різниця $q_E - q_S$ визначає кількість власних значень в діапазоні $[q_S, q_E]$;
- визначення інтервалів, які містять окремі власні числа, методом половинного ділення (див. п.п.3.1.2.2) або іншим, на основі властивостей послідовності Штурма;
- попереднє обчислення власних чисел з відносно незначною точністю із застосуванням "прискореної" модифікації методу хорд (див. формулу (26.73)). Для старту методу хорд потрібно мати *два* наближення власних значень: $\lambda^{(0)}$ та $\lambda^{(1)}$. Є декілька варіантів, як це зробити краще. Зокрема, $\lambda^{(0)} = \lambda_S$, а $\lambda^{(1)} = \lambda_E$. Або $\lambda^{(0)} = \lambda_S$, а $\lambda^{(1)}$ – як відношення Релея, обчислене після однієї або декількох зворотних ітерацій;

© К.М. Рудаков, 2025

• уточнене обчислення власних чисел та визначення власних векторів методом зворотних ітерацій з відношенням Релея (див. підрозділ 26.3).

Для оцінки відносної похибки знаходження власних пар $(\lambda_j, \{z\}_j)$ рекомендують обчислювати величину

$$\Delta = \| ([K] - \lambda_j [M])\{z\}_j \|_2 / \| [K]\{z\}_j \|_2 . \tag{26.74}$$

Значним недоліком цього алгоритму є велика кількість дій, викликана необхідністю на кожній $k-$ій ітерації проводити розклад матриці $[K] - \lambda^{(k)} \cdot [M]$, тобто $[K] - \lambda^{(k)} \cdot [M] = [L][D][L]^T$.

Переваги: не потребує додаткових великих об'ємів пам'яті; немає впливу точності обчислення попередніх власних пар $(\lambda_j, \{z\}_j)$ на подальші (незалежність); процедура ортогоналізації Грама-Шмідта може застосовуватися лише при отриманні кратних власних значень з метою виключення вже відомих, причому на основі лише декількох векторів (десь до 6-ох).

26.11. Метод Релея-Рітца

Для методу Релея-Рітца потрібно мати всі $\lambda_j > 0$, що гарантується у випадку позитивно визначених матриць СЛАР (26.1). Якщо матриця $[M]$ не є позитивно визначеною, то потрібно застосовувати "зсув спектра" (див. підрозділ 26.2). Матрицю $[K]$ будемо вважати позитивно визначеною.

Відомо, що будь-який вектор, зокрема й власний $\{x\}$, можна наблизити декількома першими членами ряду

$$\{x\} \approx \{\tilde{x}\} = \sum_{i=1}^{p} q_i \{\varphi\}_i , \tag{26.75}$$

де q_i є невідомими коефіцієнтами, а $\{\varphi\}_i$ – базисними векторами, які повинні бути лінійно незалежними, тобто в $N-$вимірному просторі Ξ_N, в якому визначені матриці $[K]$ та $[M]$, створюють окремий підпростір $\Xi_p \subset \Xi_N$. Відзначимо, що розмірність всіх векторів цього підрозділу, крім вектору $\{q\}$, дорівнює $N \times 1$.

Релей встановив, що

$$\lambda_1 = \min \rho(\{\psi\}), \tag{26.76}$$

де $\rho(\{\psi\})$ є відношенням Релея з (26.3), тобто

$$\rho(\{\psi\}) = \frac{\{\psi\}^T [K]\{\psi\}}{\{\psi\}^T [M]\{\psi\}}, \tag{26.77}$$

а вектори $\{\psi\} \in \Xi_N$. Оскільки матриці $[K]$ та $[M]$ є позитивно визначеними, то

$$0 < \lambda_1 \le \rho(\{\psi\}) \le \lambda_N < \infty . \tag{26.78}$$

Введемо матриці $[\tilde{K}]$ та $[\tilde{M}]$ з компонентами відповідно

$$\tilde{k}_{ij} = \{\varphi\}_i^T [K]\{\varphi\}_j ; \quad \tilde{m}_{ij} = \{\varphi\}_i^T [M]\{\varphi\}_j ; \quad i, j = 1, ..., p . \tag{26.79}$$

© К.М. Рудаков, 2025

Тоді, якщо в ролі векторів $\{\psi\}$ використовувати $\{\tilde{x}\}$, то (26.77) з урахуванням (26.79) отримує вигляд:

$$\rho(\{\psi\}) \approx \rho(\{\tilde{x}\}) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} q_i q_j \tilde{k}_{ij} \Big/ \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} q_i q_j \tilde{m}_{ij} \equiv \tilde{k}/\tilde{m}. \qquad (26.80)$$

Умовою мінімуму є $\partial\rho(\{\tilde{x}\})/\partial q_i = 0$ для всіх $i = 1,...,p$, тому з (26.80):

$$\partial\rho(\{\tilde{x}\})/\partial q_i = \left(2\tilde{m}\sum_{j=1}^{p} q_j \tilde{k}_{ij} - 2\tilde{k}\sum_{j=1}^{p} q_j \tilde{m}_{ij} \right) \Big/ \tilde{m}^2 = 0; \quad i = 1,...,p. \qquad (26.81)$$

З (26.80) $\tilde{k} \approx \tilde{m}\cdot\rho$. Тому після позбавлення від знаменника та приведення подібних членів СЛАР (26.81) приводиться до

$$\sum_{j=1}^{p} q_j \left(\tilde{k}_{ij} - \rho\cdot\tilde{m}_{ij} \right) = 0; \quad i = 1,...,p. \qquad (26.82)$$

У матричному вигляді ця СЛАР записується як

$$[\tilde{K}]\{q\} = \rho\cdot[\tilde{M}]\{q\}, \qquad (26.83)$$

де позитивно визначені матриці $[\tilde{K}]$ та $[\tilde{M}]$ мають розмірність $p\times p$, а компоненти $\tilde{k}_{ij}$ та $\tilde{m}_{ij}$ цих матриць знаходяться згідно з формулами (26.79). Якщо $p << N$, то СЛАР (26.83) можна дуже швидко розв'язати будь-яким методом (але не Релея-Рітца) та отримати p власних пар $(\rho_i, \{q\}_i)$, причому $\rho_i \geq \lambda_i$ (доказана відповідна теорема). Крім того, потрібно мати на увазі, що кожне наступне власне значення обчислюється з меншою точністю, ніж попереднє. Компоненти векторів $\{q\}_i$ дозволяють за допомогою (26.75) отримати компоненти відповідних власних векторів $\{x\}_i \approx \{\tilde{x}\}_i$ вихідної СЛАР (26.1).

Залишилася лише одна проблема: обирання кількості базисних векторів p та самих векторів $\{\varphi\}_i$, $i = 1,...,p$. Є декілька варіантів.

Ще Релей запропонував за базисні вектори обирати вектори-розв'язки стаціонарної задачі $[K]\{\varphi\}_i = \{b\}_i$ з різними векторами $\{b\}_i$; $i = 1,...,p$, яка враховує всі умови закріплення тіла (ГУ 1-го роду. При їх відсутності запровадити такі, що обмежують тільки переміщення тіла в просторі як жорсткого цілого). Але критеріїв для вдалого обирання векторів $\{b\}$ не існує досі.

Другий варіант полягає у застосуванні "статичної конденсації" (див. п.26.4.2). Зокрема, СЛАР (26.83) і (26.17) тотожні з явними відповідностями: $\rho \leftrightarrow \lambda$, $p \leftrightarrow r$, $\{q\} \leftrightarrow \{z\}$, $[\tilde{K}] \leftrightarrow [K]_{(rr)}$, $[\tilde{M}] \leftrightarrow [M]_{(rr)}$. Після обчислень пар $(\lambda_i, \{z\}_i) \leftrightarrow (\rho_i, \{q\}_i)$ можна застосовувати апроксимації Релея-Рітца для наближеного знаходження інших власних пар. Але у випадку $p << N$ це потребує дуже багато дій, тому цей варіант теж не є панацеєю.

26.12. Оцінювання похибок наближених власних значень

Введемо для обчисленої пари $(\lambda_j, \{z\}_j)$ вектор похибок наближення

$$\{r\}_j = ([K] - \lambda_j[M])\{z\}_j. \qquad (26.84)$$

© К.М. Рудаков, 2025

Якщо матриця $[M]$ є позитивно визначеною, то її можна представити у вигляді розкладу $[M]=[L][L]^T$. Тоді, згідно з формулами п.п.26.4.3.2, вираз (26.84) можна представити у вигляді

$$\{r_M\}_j=([A]-\lambda_j[I])\{z\}_j, \tag{26.85}$$

де $\{r_M\}_j=[L]^{-1}\{r\}_j([L]^{-1})^T$, а $[A]=[L]^{-1}[K]([L]^{-1})^T$.

За допомогою ортогональних матриць, згідно зі спектральною теоремою, будь-яку позитивно визначену матрицю можна шляхом ортогональних перетворень матрицями $[P]$ привести до діагональної матриці. Тобто з матриці $[A]$ можна одержати матрицю $[\Lambda]=[P]^T[A][P]$. Оскільки $[P]^T[P]=[P][P]^T=[I]$ й $[P]^T[I][P]=[I]$, то вираз (26.85) можна записати у вигляді

$$\{r_M\}_j=[P]([\Lambda]-\lambda_j[I])[P]^T\{z\}_j. \tag{26.86}$$

Пара $(\lambda_j,\{z\}_j)$ не є точною, тому цю СЛАР з урахуванням $[P]^{-1}=[P]$ можна записати відносно власного вектора $\{z\}_j$ як

$$\{z\}_j=[P]([\Lambda]-\lambda_j[I])^{-1}[P]^T\{r_M\}_j. \tag{26.87}$$

Оскільки $\|[P]\|=1$ та зі значною точністю $\|\{z\}_j\|_2=1$, то, використовуючи властивості норми добутку, можна отримати, що

$$1\le\|\{r_M\}_j\|_2\left\|([\Lambda]-\lambda_j[I])^{-1}\right\|_2=\|\{r_M\}_j\|_2\cdot\max\frac{1}{|\bar{\lambda}_j-\lambda_j|}, \tag{26.88}$$

де $\bar{\lambda}_j$ є точним власним значенням. Отже, оцінка похибки обчислення λ_j:

$$\min|\bar{\lambda}_j-\lambda_j|\le\|\{r_M\}_j\|_2. \tag{26.89}$$

Проблема лише у тому, що *точне* власне значення $\bar{\lambda}_j$ зазвичай не відоме. Тому вираз (26.89) можна використовувати лише для визначення інтервалу, в якому повинне знаходитися $\bar{\lambda}_j$:

$$(\lambda_j-\|\{r_M\}_j\|_2)\le\bar{\lambda}_j\le(\lambda_j+\|\{r_M\}_j\|_2). \tag{26.90}$$

Після визначення цього інтервалу можна переконатися, що в ньому дійсно повинно бути тільки одне власне значення. Для цього можна скористатися фактом, про який йшла мова в Примітці 6.4: кількість від'ємних значень компонент діагональної матриці $[D]$ розкладу $[B]=[L]^T[D][L]$ симетричної матриці $[B]=[A]-\sigma[I]$ вказує на кількість власних значень матриці $[A]$, які менше власного значення $\lambda_j=\sigma$, де σ є величиною "зсуву спектра". Тобто потрібно провести розклад $[L]^T[D][L]$ двох матриць $[B]_1=[A]-(\lambda_j-\|\{r_M\}_j\|_2)[I]$ та $[B]_2=[A]-(\lambda_j+\|\{r_M\}_j\|_2)[I]$ і підрахувати кількість від'ємних чисел на діагоналі матриць $[D]_1$ та $[D]_2$. Якщо ці кількості відрізняються лише на одиницю, то у цьому діапазоні дійсне є лише одне власне значення.

У випадку, коли матриця $[M]$ не є позитивно визначеною, оцінкою через $\|\{r_M\}_j\|_2$ користуватися не можна. Тоді рекомендують обчислювати вели-

© К.М. Рудаков, 2025

чину Δ згідно з рівнянням (26.74), тобто $\Delta = \| ([K] - \lambda_j [M])\{z\}_j \|_2 / \| [K]\{z\}_j \|_2$. Зазначимо, що $[K]\{z\}_j = \{b\}_j$, тобто $\{b\}_j$ є вектором вузлових сил статичного навантаження, який відповідає власному вектору $\{z\}_j$. Оскільки $\| [K]\{z\}_j \|_2 = \lambda_j \| [M]\{z\}_j \|_2$ та $\| [A]\{z\}_j \|_2 = \lambda_j \| \{z\}_j \|_2 = \lambda_j$, то можна отримати, що

$$\lambda_j \Delta = \| \{r_M\}_j \|_2 , \tag{26.91}$$

звідкіля з урахуванням (26.85)

$$\Delta \geq \min_j (| \overline{\lambda}_j - \lambda_j | / \lambda_j) . \tag{26.92}$$

Оскільки величину Δ можна обчислити значно швидше, ніж $\| \{\tilde{r}\}_j \|_2$, причому завжди, то оцінка (26.92) є більш привабливою, ніж (26.89).

26.13. Метод ітерацій у підпросторі

Введемо додаткові матриці: діагональну $[\Lambda]$ розмірністю $p \times p$ зі значеннями λ_j на діагоналі та прямокутну $[\Phi]$ розмірністю $N \times p$, стовпці якої є власними векторами. Тоді СЛАР (26.1) записується одночасно для всіх p власних пар:

$$[K][\Phi] = [M][\Phi][\Lambda] . \tag{26.93}$$

Умови ортогональності власних векторів змінюються на

$$[\Phi]^T [K][\Phi] = [\Lambda]; \quad [\Phi]^T [M][\Phi] = [I], \tag{26.94}$$

причому, як і раніше, лише задоволення СЛАР (26.93) є не тільки необхідною, але й достатньою умовою того, що ортогональні за (26.94) вектори є власними.

Позначимо простір з n *власних* векторів як Ξ_∞, а простір з n *поточних* векторів як $\Xi_{(k)}$, де $k = 1, 2, ...$ є номером ітерації. В ітераціях простір $\Xi_{(k+1)} \to \Xi_\infty$. Важливо, щоб вихідний простір $\Xi_{(1)}$ не був ортогональним Ξ_∞.

У зворотних ітераціях (див. підрозділ 26.3) знаходиться найменша власна пара. Тобто, якщо не застосовувати додаткових дій, всі вектори $\Xi_{(k+1)}$ в ітераціях будуть прямувати до одного й того ж власного вектора, тобто з ортогональних стають все більш "паралельними". Щоб цього не відбувалося, після кожного акту зворотної ітерації можна проводити ортогоналізацію векторів базису $\Xi_{(k+1)}$ за процедурою Грама-Шмідта. Це записується як:

$$[K][\tilde{Z}]_{(k+1)} = [M][Z]_{(k)} \text{ (зворотна ітерація);} \tag{26.95}$$

$$[Z]_{(k+1)} = [\tilde{Z}]_{(k+1)} [R]_{(k+1)} \text{ (ортогоналізація),} \tag{26.96}$$

де $[R]_{(k+1)}$ є верхньою трикутною матрицею, побудованою в такий спосіб, щоб виконувалася умова M – ортогоналізації:

$$[Z]_{(k+1)}^T [M][Z]_{(k+1)} = [I] . \tag{26.97}$$

Тоді гарантована збіжність, тобто:

$$\Xi_{(k+1)} \to \Xi_\infty ; \quad [Z]_{(k+1)} \to [\Phi]_{(k+1)} ; \quad [R]_{(k+1)} \to [\Lambda] \text{ при } k \to \infty . \tag{26.98}$$

Доведено, що швидкість збіжності такого процесу для кожної j – ої власної пари пропорційна величині $\max\{\lambda_{j-1}/\lambda_j, \lambda_j/\lambda_{j+1}\}$. Як виявилося, цю швидкість

© К.М. Рудаков, 2025

можна значно збільшити за рахунок проведення зворотних ітерацій *у підпросторі* $\Xi_{(k+1)}$ розмірністю p.

Після виконання (26.95), замість (26.96) спочатку визначаються матриці розмірністю $p \times p$ (проєкції матриць $[K]$ та $[M]$ на простір $\Xi_{(k+1)}$):

$$[\tilde{K}]_{(k+1)} = [\tilde{Z}]^T_{(k+1)}[K][\tilde{Z}]_{(k+1)}; \quad [\tilde{M}]_{(k+1)} = [\tilde{Z}]^T_{(k+1)}[M][\tilde{Z}]_{(k+1)}, \tag{26.99}$$

а потім розв'язується допоміжна задача на знаходження p власних пар СЛАР

$$[\tilde{K}]_{(k+1)}[Q]_{(k+1)} = [\tilde{M}]_{(k+1)}[Q]_{(k+1)}[\Lambda]_{(k+1)}. \tag{26.100}$$

Оскільки розмір СЛАР дуже малий, то можна застосувати будь-який метод. Після цього знаходиться покращена матриця із власних векторів

$$[Z]_{(k+1)} = [\tilde{Z}]_{(k+1)}[Q]_{(k+1)}. \tag{26.101}$$

Тоді гарантована збіжність, тобто виконання (26.98), але швидкість збіжності значно підвищиться.

Як виявилося, в ітераціях матриці $[\tilde{K}]_{(k+1)}$ та $[\tilde{M}]_{(k+1)}$ прагнуть до діагональної форми, тому для отримання p власних пар зі СЛАР (26.100) доцільно застосувати узагальнений метод Якобі (див. п.26.7.3). Оскільки розмір СЛАР дуже малий, то розв'язки СЛАР (26.100) утворюються дуже швидко.

Залишилась проблема обирання початкових векторів. Рекомендують матрицю $[M][Z]_{(1)}$ (див. формулу (26.95)) розмірністю $N \times n$ не обчислювати, а заповнити в такий спосіб: перший стовбець – компонентами діагоналі матриці $[M]$; інші – нульові, окрім одиниць у рядках, для яких співвідношення діагональних членів матриць $[M]$ та $[K]$, тобто m_{ii}/k_{ii}, є найбільшим. Зазвичай задають $n > p$, а саме $n = \min\{2p, p+q\}$, де q обирають як відсоток від N, наприклад, $q = 0.1N$. Після обчислення $[\tilde{Z}]_{(k+1)}$ (див. формулу (26.95)) для отримання проєкцій матриць $[K]$ та $[M]$ на простір $\Xi_{(k+1)}$ застосовують тільки p стовпців.

Умова збіжності:

$$|\lambda_j^{(k+1)} - \lambda_j^{(k)}| \le \varepsilon \cdot \lambda_j^{(k+1)}; \quad j = 1,..., p, \tag{26.102}$$

де ε – задана точність, яку рекомендують задавати як $\varepsilon = 10^{-2s}$, де $2s$ є кількістю значущих цифр. Найбільшу точність буде мати λ_1 – до $2s$ значущих цифр, а найменшу – λ_p. Компоненти власного вектора $\{z\}_1$ будуть знайдені з точністю до s значущих цифр.

Необхідно перевіряти, чи обчислені саме потрібні власні пари. Для цього можна застосувати властивості послідовностей Штурма для СЛАР (26.1) зі "зсувом спектра", наближеним "зверху" до значень λ_j; $j = 1,..., p$, що знаходяться; з точністю, наприклад, у 0.01 від кожного значення λ_j.

Отже, метод ітерацій у підпросторі має такі основні етапи:

- розкладання $[K] = [L][D][L]$;
- формування матриці векторів $[Y]_{(1)} = [M][Z]_{(1)}$ із $n > p$ початкових векторів, де $n < N$, а p є кількістю потрібних власних пар;

© К.М. Рудаков, 2025

- наближення методом Релея-Рітца з одночасними зворотними ітераціями у підпросторі $\Xi_{(k+1)}$ для обчислення p власних пар. Формули (26.95), (26.99) ... (26.101) запишемо у вигляді послідовності формул ітераційного процесу: $[K][\tilde{Z}]_{(k+1)} = [Y]_{(k)}$; $[\tilde{K}]_{(k+1)} = [\tilde{Z}]^T_{(k+1)}[Y]_{(k)}$; $[\tilde{Y}]_{(k+1)} = [M][\tilde{Z}]_{(k+1)}$; $[\tilde{M}]_{(k+1)} = [\tilde{Z}]^T_{(k+1)}[\tilde{Y}]_{(k+1)}$; $[\tilde{K}]_{(k+1)}[Q]_{(k+1)} = [\tilde{M}]_{(k+1)}[Q]_{(k+1)}[\Lambda]_{(k+1)}$; $[Z]_{(k+1)} = [\tilde{Z}]_{(k+1)}[Q]_{(k+1)}$.
- перевірка за допомогою властивостей послідовностей Штурма (див. п.26.10.2): чи дійсно процес збігається до потрібних власних пар j. Для цього збираються матриці $[\bar{K}] = [K] - (\lambda_j)_{(k+1)}[M]$;
- оцінювання похибок, застосуванням формул (26.102), (26.74) та (26.92).

Ефективність алгоритму залежить від того, наскільки вихідний простір $\Xi_{(1)}$ близький до Ξ_∞.

26.14. Алгоритми методу Ланцоша

Метод Ланцоша (Cornelius Lanczos, 1893-1974 рр.) знаходження власних частот та форм коливань тіла був запропонований у 1950 році, але лише у 1970-их роках був досить докладно вивченим та набув широкої популярності. Метод має декілька модифікацій. Його трактують та використовують як:

- алгоритм приведення матриці до тридіагональної форми;
- метод обирання базису для підпросторів Крилова;
- реалізацію методу Релея-Рітца на основі послідовності підпросторів Крилова.

26.14.1. Матриця та підпростори Крилова

На початку підрозділу 6.2 було вказано, що серед класичних методів знаходження власних значень є метод Крилова (Олексій Миколайович Крилов, 1863-1945 рр.), але потім він не розглядався. Справа у тому, що цей метод був розроблений (1931 р.) для представлення характеристичного рівняння (6.1) у вигляді алгебраїчного полінома. Але він значно програє за кількістю дій методу Данилевського. Крім того, не кожний початковий вектор дозволяє отримати розв'язок. Як виявилося, частка методу Крилова, а саме підпростори Крилова, знадобилася для розробки самого могутнього на цей час методу Ланцоша.

Матриця Крилова визначається деяким вектором $\{f\}$ як $[S]_m$ з m стовпцями (векторами), породженими цим вектором за допомогою матриці $[A]$:

$$[S]_m = [\{f\}; [A]\{f\}; ...; [A]^{m-1}\{f\}], \qquad (26.103)$$

де $[A]^{m-1} = \underbrace{[A]\cdot[A]\cdot....\cdot[A]}_{(m-1)\text{ разів}}$. Позначимо вектори-стовпці матриці $[S]_m$ як $\{s\}_j$. Очевидним є взаємозв'язок між векторами: $\{s\}_1 = \{f\}$, $\{s\}_i = [A]^{i-1}\{f\}$ при $i = 2,...,m$ та $\{s\}_{i+1} = [A]\{s\}_i$ при $i = 1,...,m-1$.

Підпростором Крилова є простір $\mathbb{S}^m_{\{f\}}$, що створюється *всіма* можливими лінійними комбінаціями векторів-стовпців матриці Крилова. Такі простори,

© К.М. Рудаков, 2025

побудовані на основі стовпців матриці, позначають словом *span*, у даному випадку $\mathbb{S}^m_{\{f\}} = span[S]_m$. Вони мають інваріантні властивості відносно: множення на скаляр, "зсуву", а також ортогональних перетворень базису.

З того, як створювався простір $\mathbb{S}^m_{\{f\}}$, витікає, що для створення простору $\mathbb{S}^{m+1}_{\{f\}}$ достатньо створити тільки один новий вектор $\{s\}_{m+1} = [A]\{s\}_m$, який (при точній арифметиці) автоматично є ортогональним до всіх векторів простору $\mathbb{S}^m_{\{f\}}$. Не потрібно знову проводити довгу процедуру ортогоналізації Грама-Шмідта.

26.14.2. Метод ітерацій та метод Релея-Рітца в підпросторах Крилова

У п.6.4.2. розглядався один із степеневих методів – метод ітерацій, в якому послідовно обчислюються вектори $\{x\}^{(k+1)} = \alpha_{(k)} \cdot [A]\{x\}^{(k)};\ k = 1,2,...$, починаючи з довільного вектора $\{x\}^{(1)}$. Якщо обчислені вектори $\{x\}^{(k)};\ k = 1,...,m$ зібрати у матрицю, то це буде теж матриця Крилова. При $1 < m < n$ ці вектори можна обрати як базисні вектори для методу Релея-Рітца (див. підрозділ 26.11). Швидкість збіжності такого варіанта алгоритму буде вище, ніж у методі ітерацій, але кількість дій все ще буде значною. Можлива ситуація, коли один або декілька векторів $\{s\}_i = [A]^{i-1}\{f\};\ i = 1,...,m$, виявляться нульовими. Тоді розв'язок одержати не вдасться (теоретичне обмеження для обох алгоритмів).

Якщо ввести характеристику взаємного розташування послідовних власних чисел

$$\gamma_{jki} = (\lambda_j - \lambda_k)/(\lambda_k - \lambda_i), \tag{26.104}$$

то $\gamma_{jki} \approx 0$ буде вказувати на дуже близькі значення λ_j та λ_k, а дуже велике значення γ_{jki} – на $\lambda_k \approx \lambda_i$. Як виявилося, у залежності від величини γ_{jki} обидва алгоритми мають або зовсім різні показники щодо збіжності (при $\gamma_{jki} \approx 0$), або майже однакові.

26.14.3. Базис Ланцоша, проєкція матриці $[A]$ у цьому базисі

Після одночасного (за процедурою Грама-Шмідта) нормування та ортогоналізації матриці Крилова $[S]_m$ можна створити матрицю $[Q]_m \equiv [\{q\}_1,...,\{q\}_m]$. Цей ортонормований базис $Q^m_{\{q\}}$ називають базисом Ланцоша. Він повинен мати розмір m, тобто матриця $[S]_m$ повинна бути матрицею повного рангу (не мати лінійно залежних стовпців). Тоді можна записати QR-розклад для матриці $[S]_m$:

$$[S]_m = [Q]_m [R]_m^{-1}, \tag{26.105}$$

де матриця $[R]_m$ є верхньою трикутною. Доведено теорему, що якщо $[S]_m$ має повний ранг та $[Q]_m \equiv [\{q\}_1,...,\{q\}_m]$ обумовлена QR-розкладом (26.105), то

© К.М. Рудаков, 2025

матриця $[Q]_m^T[A][Q]_m$ є тридіагональною матрицею, що не розпадається (див. підрозділ 26.5), позначимо її як $[T]_m$. Якщо позначити величини

$$\alpha_i = \{q\}_i^T[A]\{q\}_i; \quad \beta_i = \{q\}_{i+1}^T[A]\{q\}_i, \tag{26.106}$$

то ця тридіагональна матриця $[T]_m$ розмірністю $m \times m$:

$$[T]_m \equiv [Q]_m^T[A][Q]_m = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & . & 0 \\ 0 & . & . & \beta_{m-1} \\ 0 & 0 & \beta_{m-1} & \alpha_m \end{bmatrix}, \tag{26.107}$$

де теоретично $m \in [2, N]$. Наслідком зі вказаної теореми є тричленна рекурсивна формула, що зв'язує стовпці $[Q]_m \equiv [\{q\}_1, ..., \{q\}_m]$:

$$\beta_i\{q\}_{i+1} = [A]\{q\}_i - \beta_{i-1}\{q\}_{i-1} - \alpha_i\{q\}_i; \quad \forall i \in [2, m-1]. \tag{26.108}$$

Матриця Крилова $[S]_m$ вже не потрібна, оскільки матриця $[Q]_m$ безпосередньо пов'язана з матрицею $[A]$. Єдиною дією, пов'язаною з матрицею $[A]$, є множення цієї матриці на вектор. Тому можна зберігати $[A]$ максимально економне, блоками, або навіть обчислювати її компоненти знову кожний раз, коли вони стають потрібними.

Введемо вектор (розглядається як вектор похибок наближення)

$$\{r\}_i = \beta_i\{q\}_{i+1}. \tag{26.109}$$

Тоді (див. також формулу (26.106)):

$$\beta_i = \{q\}_{i+1}^T[A]\{q\}_i = \| \{r\}_i \|_2. \tag{26.110}$$

Якщо виявиться, що $\beta_i = \| \{r\}_i \|_2 > 0$, то $\{q\}_{i+1} = \{r\}_j / \beta_j$ та $i-$й крок завершено, потрібно починати новий $i = (i+1) -$ й.

Інакше, тобто при $\beta_i = \| \{r\}_i \|_2 = 0$, є рівність $[A][Q]_i = [Q]_i[T]_i$, тому процес зупиниться, а простір $span[Q]_i = \mathbb{S}_{\{f\}}^i = \mathbb{S}_{\{f\}}^{i+1}$ є найменшим інваріантним підпростором, який містить вектор $\{f\}$. Кожне власне число матриці $[T]_i$ буде відповідним власним числом матриці $[A]$.

26.14.4. Вплив неточної арифметики ЕОМ

Згідно з теорією Канієля-Саада (не розглядаємо) добрі наближення власних пар повинні гарантовано утворюватися при кількості кроків алгоритму $i \sim 2\sqrt{N}$, де N є кількість невідомих у СЛАР (26.12). Однак ще сам К. Ланцош виявив (1950 р.), що в умовах обмеженої точності представлення дійсних чисел та накопичення похибок при обчисленнях (див. Розділ 1) процес буде тривати нескінченно. К. Ланцош визначив, що потрібно застосовувати спеціальні заходи, зокрема, додаткову ортогоналізацію.

Подальший аналіз ситуації (1970-ті роки) показав, що:

- умова ортогональності матриць $[Q]_i$, а саме $[Q]_i^T[Q]_i = [I]$ через декілька кроків перестає виконуватися, тобто новий вектор Ланцоша $\{q\}_{i+1}$ перестає бути ортогональним всім попереднім з робочою точністю;

© К.М. Рудаков, 2025

- це починається лише тоді, коли один з поточних "векторів Рітца" $\{Z\}_{ji} = (\{Z\}_j)_i = [Q]_i(\{s\}_j)_i$ починає збігатися до власного вектора. Тобто саме "вектори Рітца" потрібно аналізувати, а не вектори $\{q\}_k$ з матриці $[Q]_i$;
- якщо не виправляти ситуацію, то деякі "вектори Рітца" навіть стають лінійно залежними: як кажуть, "з'являються копії векторів Рітца" та відповідних власних чисел. Матриця $[T]_i$ перестає бути пов'язаною з матрицею $[A]$;
- але і в цих умовах "пари Рітца" $(\lambda_j, \{Z\}_j)_i$ для деяких значень j збігаються до власних пар матриці $[A]$. Алгоритм як би "забуває", що вже знайшов цю власну пару і починає обчислювати її знову. Тому можна застосовувати такий варіант: проводити кроки без зупинення, поки достатньо пам'яті ЕОМ (кількість кроків i може у багато разів перевищити N). Після зупинення процесу відкинути всі дублікати, залишаться лише власні пари матриці $[A]$;
- найкращою мірою лінійної незалежності векторів $\{q\}_i$ є найменше власне число матриці $\left[[Q]_i^T[Q]_i\right]$, що позначають як $\sigma_1(Q_i)$. Теоретично воно дорівнює одиниці, а практично спочатку $\sigma_1(Q_i) \approx 1$, причому починаючи з деякого i величина $\sigma_1(Q_i) \to 0$ дуже швидко, оскільки з'явилися "копії векторів Рітца";
- ще є сенс проводити контроль всіх величин $\beta_{ij} = (\beta_i)_j$ за деяким критерієм, наприклад, $\beta_{ij} < \sqrt{\varepsilon_M} \cdot \| [T]_i \|$, де ε_M – машинний іпсилон (див. підрозділ 1.3), але це можна робити лише інколи, оскільки потребує багато дій;
- оскільки при зміні i відбувається повна зміна *всіх* векторів, то виникає не проста проблема ідентифікації "гарних" та "поганих" "векторів Рітца". Зазвичай "гарним вектором Рітца" вважають той, власне число якого в останніх кроках змінювалося якнайменше.

26.14.5. Простий алгоритм Ланцоша для формалізованої СЛАР

Простий алгоритм Ланцоша для отримання декількох власних пар $(\lambda_j, \{Z\}_j)$ формалізованої СЛАР (26.12), тобто $[A]\{Z\} = [\lambda]\{Z\}$, можна записати як послідовність дій:

0. Задати $\{r\}_0 \neq \{0\}$; $\beta_0 = \| \{r\}_0 \|_2 \neq 0$; $\{q\}_0 = \{0\}$. Для $j = 1,2,...$ покладати $i = 1$ та виконувати:

1. $\{q\}_i = \{r\}_{i-1} / \beta_{i-1}$;
2. $\{u\}_i = [A]\{q\}_i$;
3. $\{r\}_i = \{u\}_i - \beta_{i-1}\{q\}_{i-1}$;
4. $\alpha_i = \{q\}_i^T \{r\}_i$; (26.111)
5. $\{r\}_i = \{r\}_i - \alpha_i\{q\}_{i-1}$;

© К.М. Рудаков, 2025

6. Провести додаткову ортогоналізацію $\{r\}_i$;

7. $\beta_i = \| \{r\}_i \|_2$;

8. При необхідності – обчислити наближення власної пари $(\lambda_j, \{s\}_j)$, де вектор $\{s\}_j$ є j – им власним вектором поточної матриці $[T]_i$ (26.107);

9. Якщо задана точність не досягнута, то i – й крок завершено, потрібно починати новий: покласти $i = (i+1)$, зробити перехід на п.1. Інакше (точність є задовільною) обчислити власний вектор СЛАР (26.12) $\{Z\}_j = [Q]_m \{s\}_j$, почати нове значення j або зупинити процес.

Пояснення до алгоритму.

Пункт 0. Вектор $\{r\}_0 \neq \{0\}$ бажано призначати таким, що є максимально наближеним до шуканого власного вектора. Якщо такої інформації немає, то рекомендують обирати компоненти цього вектора як випадкові числа, або заповнити його одиницями.

Пункти 2 ... 5 є реалізацією формули (26.108).

Пункт 2. Обчислення у ЕОМ вектора $\{u\}_i = [A]\{q\}_i$ є самою довгою операцією, до того ж з великою кількістю операцій округлень (похибки !), тому бажано її програмувати дуже ретельно.

Пункт 3. Після виконання дій, значення вектора $\{q\}_{i-1}$ можуть бути потрібні у подальшому, а саме для формування власного вектора $\{Z\}_j = [Q]_i \{s\}_j$ у п.8. Тому вектор $\{q\}_{i-1}$ є сенс передавати до зовнішньої пам'яті ЕОМ.

Пункт 6. Є декілька варіантів додаткової ортогоналізації:

- явна переортогоналізація кожного нового вектора $\{q\}_{i+1}$ до *всіх* попередніх згідно з процедурою ортогоналізації Грама-Шмідта

$$\{r'\}_i = \{r\}_i - \{q\}_n (\{q\}_n^T \{q\}_i); \quad n = i, i-1, ..., 1. \qquad (26.112\text{-а})$$

Якщо $\sqrt{2} \| \{r'\}_i \|_2 < \| \{r\}_i \|_2$, то процедуру потрібно ще раз повторити (це буває лише іноді). Таку процедуру відразу застосовував К. Ланцош. До неї є лише одна претензія: є більш швидкісні варіанти;

- явна переортогоналізація кожного нового вектора $\{q\}_{i+1}$ до *двох* попередніх згідно з алгоритмом ортогоналізації Грама-Шмідта

$$\{r'\}_i = \{r\}_i - \{q\}_n (\{q\}_n^T \{q\}_i); \quad n = i, i-1, i-2. \qquad (26.112\text{-б})$$

- вибіркова ортогоналізація. Є багато варіантів. Наприклад, вводиться граничне значення $\overline{\chi}$ для норми похибок $\chi_i = \| [Q]_i^T [Q]_i - [I] \|$. Рекомендують призначати $\overline{\chi} \approx 0.01$. Тоді наближення матриці $[T]_i = [Q]_i^T [A] [Q]_i$ проводиться з точністю до матриці похибок $[F]_i$, причому $\| [F]_i \| = O(\varepsilon_M \cdot \| [A] \|)$, що можна вважати достатньо точним (Пеж, C.C. Paige; Саймон, H.D. Simon). Якщо граничне значення $\overline{\chi}$ перевищено, то робиться так звана "пауза" для проведення переортогоналізації. З наявних векторів Рітца $\{Z\}_j = [Q]_m \{s\}_j$ обирається "гарний", до нього проводиться ортогоналізація всіх векторів матриці $[Q]_i$.

© К.М. Рудаков, 2025

Інший варіант: модуль косинуса кута між векторами $(\{Z\}_j)_i$ та $\{r\}_i$ відносно величини $\overline{\chi}/\sqrt{i}$. Якщо є перевищення, то проводиться ортогоналізація вектора $\{r\}_i$ до вектора $(\{Z\}_j)_i$, який називають "граничним вектором Рітца". Множник $1/\sqrt{i}$ є досить грубою оцінкою. Можна вводити обмеження на поточне значення β_i, наприклад, $\beta_i \le \varepsilon = \sqrt{\varepsilon_M} \cdot \|[T]_i\|$ (див. п.26.14.4, але єдиної рекомендації щодо обирання ε немає). Є й інші варіанти.

26.14.6. Простий алгоритм Ланцоша для неформалізованої СЛАР

Перевагою застосування формалізованої проблеми власних значень (26.12) є те, що можна використовувати без змін будь-яку "стандартну" програму методу Ланцоша. Недоліком є необхідність попереднього проведення формалізації проблеми (26.1).

"Стандартну" програму методу Ланцоша можна без значних зусиль модифікувати для СЛАР (26.1), якщо матриці $[K]$ та $[M]$ є позитивно визначеними. Вводяться вектори $\{p\}_i = [M]\{q\}_i$. Основна тричленна рекурсивна формула (26.108) змінюється на

$$\beta_{i+1}\{p\}_{i+1} = [K]\{q\}_i - \beta_i\{p\}_{i-1} - \alpha_i\{p\}_i; \quad \forall i \in [2, m-1], \tag{26.113}$$

в якій індекси при β зсунуті на одиницю.

Вектори Ланцоша $\{q\}_i$ є взаємно $[M]-$ортонормальними, а $\{q\}_i$ та $\{p\}_j$ – біортонормальними, тобто $\{q\}_i^T[M]\{q\}_j = \{q\}_i^T\{p\}_j = \delta_{ij}$.

Простий алгоритм Ланцоша для отримання декількох власних пар $(\lambda_j, \{z\}_j)$ СЛАР (26.1), тобто $[K]\{z\}_j = \lambda_j[M]\{z\}_j$, можна записати як послідовність дій:

0. Задати $\{u\}_1 \ne \{0\}$, $\{p\}_0 = \{0\}$. Для $j = 1,2,...$ покладати $i = 1$ та виконувати:
1. $\{r\}_i = [M]\{u\}_i$;
2. $\beta_i = \sqrt{\{u\}_i^T\{r\}_i}$;
3. $\{q\}_i = \{u\}_i / \beta_i$;
4. $\{\overline{u}\}_i = [K]\{q\}_i$;
5. $\{\overline{u}\}_i = \{\overline{u}\}_i - \beta_i\{p\}_{i-1}$;
6. $\alpha_i = \{q\}_i^T\{\overline{u}\}_i$;
7. $\{p\}_i = \{r\}_i / \beta_i$; (26.114)
8. $\{r\}_{i+1} = \{\overline{u}\}_i - \alpha_i\{p\}_i$;
9. Провести додаткову ортогоналізацію $\{r\}_i$;
10. Знайти вектор $\{u\}_{i+1}$ зі СЛАР $[M]\{u\}_{i+1} = \{r\}_{i+1}$;
11. $\beta_{i+1} = \sqrt{\{u\}_{i+1}^T\{r\}_{i+1}}$;
12. При необхідності – обчислити наближення власної пари $(\lambda_j, \{s\}_j)$, де вектор $\{s\}_j$ є $j-$м власним вектором поточної матриці $[T]_i$ (26.107);

© К.М. Рудаков, 2025

13. Якщо задана точність не досягнута, то $i-$й крок завершено, потрібно починати новий: покласти $i=(i+1)$, зробити перехід на п.1. Інакше (точність є задовільною), обчислити власний вектор СЛАР (26.1) $\{z\}_j=[Q]_m\{s\}_j$, почати нове значення j або зупинити процес.

Пояснення до алгоритму.

Пункт 0. Вектор $\{u\}_1\neq\{0\}$ бажано призначати таким, що є максимально наближеним до шуканого власного вектора. Якщо такої інформації немає, то рекомендують обирати $\{u\}_1=(diag[M])^{-1}\{r\}_1$, де обирати компоненти вектора $\{r\}_1$ як випадкові числа, або заповнити його одиницями.

Пункт 6. Після його виконання вектор $\{q\}_i$ можна передавати до зовнішньої пам'яті ЕОМ.

Пункт 10. Для розв'язування СЛАР $[M]\{u\}_{i+1}=\{r\}_{i+1}$ можна застосовувати ітераційні методи, якщо цю операцію неможливо провести зі застосуванням схеми Холецького.

26.14.7. Блочні алгоритми Ланцоша

Простий алгоритм Ланцоша не може виявити кратні власні пари. Крім того, зазвичай потрібно визначити декілька власних пар. Тому був розроблений блочний алгоритм Ланцоша. Процес починається не з одного вектору $\{q\}_1$, а з p взаємно ортогональних векторів, які поміщаються у стовпці початкової матриці $[Q]_1$ розмірністю $N\times p$. Цій матриці відповідає "великий" простір Крилова $\Re_{pi}\equiv span([Q]_1,[A][Q]_1,...,[A]^{i-1}[Q]_1)$. Процедура Релея-Рітца приводить до оптимального ортонормованого базису $[\tilde{Q}]_i\equiv([Q]_1,[Q]_2,...,[Q]_i)$, в якому проєкція матриці $[A]$ є тридіагональна блочна матриця розмірністю $ip\times ip$:

$$[\tilde{T}]_i\equiv[\tilde{Q}]_i^T[A][\tilde{Q}]_i=\begin{bmatrix}[\tilde{A}]_1 & [\tilde{B}]_1^T & 0 & 0\\ [\tilde{B}]_1 & [\tilde{A}]_2 & . & 0\\ 0 & . & . & [\tilde{B}]_{i-1}^T\\ 0 & 0 & [\tilde{B}]_{i-1} & [\tilde{A}]_i\end{bmatrix},\qquad(26.115)$$

де матриці $[\tilde{B}]_k$; $k=1,...,i$ є верхніми трикутними матрицями. З того, що матриці $[A]^{i-1}$ мають повний ранг, випливає можливість обернення всіх матриць $[\tilde{B}]_k$.

Блочний алгоритм Ланцоша для отримання декількох власних пар $(\lambda_j,\{Z\}_j)$ формалізованої СЛАР (26.12), тобто $[A]\{Z\}=[\lambda]\{Z\}$, можна записати як послідовність дій:

0. Задати матрицю $[R]_0$ з p векторів-стовпців $\{r\}_0\neq\{0\}$. Покласти $i=1$ та виконувати:

1. $[R]_{i-1}=[\tilde{Q}]_i[\tilde{B}]_{i-1}$, тобто провести QR-розклад матриці $[R]_{i-1}$;

2. $[U]_i=[A][\tilde{Q}]_i$;

© К.М. Рудаков, 2025

3. $[R]_i = [U]_i - [\tilde{Q}]_{i-1}[\tilde{B}]_{i-1}^T$; (матриця $[Q]_0 = [0]$);

4. $[\tilde{A}]_i = [\tilde{Q}]_i^T [R]_i$; (26.116)

5. $[R]_i = [R]_i - [\tilde{Q}]_i[\tilde{A}]_i$;

6. Провести додаткову ортогоналізацію векторів-стовпців матриці $[R]_i$;

7. При необхідності – обчислити наближення власних пар $([\Lambda]_j, [S]_j)$, де матриця $[S]_j$ містить вектори-стовпці $\{s\}_j$ з $j-$им власним вектором поточної тридіагональної матриці $[\tilde{T}]_i$ (26.107), а діагональна матриця $[\Lambda]_j$ містить відповідні власні числа;

8. Якщо задана точність не досягнута, то $i-$ий крок завершено, потрібно починати новий: покласти $i = (i+1)$, зробити перехід на п.1. Інакше (точність є задовільною) обчислити власні вектори СЛАР (26.12) $\{Z\}_j = [Q]_i\{s\}_j$, процес зупинити.

Недоліком алгоритму є потрібність у програмі, яка проводить QR-розклад $[R]_{i-1} = [\tilde{Q}]_i[\tilde{B}]_{i-1}$. Всі інші проблеми не зникають, крім однієї: блочний метод знайде всі (у кількості до p включно) кратні власні пари, якщо вони є у заданому діапазоні.

Блочний алгоритм Ланцоша можна записати і для випадку СЛАР (26.1).

Само собою, всі алгоритми Ланцоша можуть розв'язувати проблему і після проведення "зсуву спектра" у СЛАР (див. підрозділ 26.2). Але потрібно мати на увазі, що алгоритми Ланцоша не можуть знайти власне число, яке дорівнює нулю, тобто у випадку завдання величини зсуву точно $\sigma = \lambda_j$ алгоритм не знайде це значення λ_j.

Блочний алгоритм Ланцоша зазвичай присутній у всіх сучасних програмних комплексах, в яких реалізовано метод скінченних елементів. Застосовується для частотного аналізу великих за розміром задач.

26.15. Завершення

У цьому Розділі стисло розглянуті лише основні відомості про проблему, шляхи її вирішення та деякі з популярних методів і алгоритмів, характерних для задач на власні значення, які розв'язуються за допомогою методу скінченних елементів. Ще потрібно мати на увазі, що алгоритми використовують дуже багато дій, тому потребують вельми ретельного, витонченого формулювання та програмування. Тому, при бажанні відтворити викладені алгоритми у вигляді програм, слід обов'язково удатися до більш докладних джерел, наприклад, до книг [49, 72, 73], та опублікованих збірок алгоритмів.

Контрольні питання до підрозділів 26.1 – 26.3

1. Що таке "узагальнена проблема власних значень"?
2. Для чого використовують"зсув спектра"?

© К.М. Рудаков, 2025

3. Надайте характеристику алгоритму зворотних ітерацій з відношенням Релея (ідея, швидкість збіжності, знаходження парних власних значень тощо).

4. Що потрібно зробити з алгоритмом зворотних ітерацій з відношенням Релея, щоб отримати алгоритми RQI та INVIT?

5. У чому полягає ідея процедури ортогоналізації Грама-Шмідта?

Контрольні питання до підрозділу 26.4

1. Які особливості може мати матриця мас?
2. У чому полягає ідея редукції матриці мас за Гайаном?
3. У чому полягає ідея формалізації власних значень шляхом розкладання матриці мас?
4. У чому полягає ідея формалізації власних значень шляхом розкладання матриці жорсткості?

Контрольні питання до підрозділів 26.5 – 26.7

1. Які властивості тридіагональної матриці дозволяють прискорити процес отримання власних значень?
2. У чому полягає ідея Хаусхолдера в отриманні тридіагональної матриці?
3. Чим відрізняються повороти Якобі від поворотів Гівенса?
4. В яких випадках є сенс у застосуванні узагальненого алгоритму поворотів Якобі?

Контрольні питання до підрозділу 26.8

1. Чим відрізняються QL- та QR- перетворення матриць?
2. Які розроблені алгоритми QL-перетворення тридіагональних матриць? Нетридіагональних матриць?

Контрольні питання до підрозділу 26.9

1. Назвіть етапи методів Хаусхолдера та Гівенса.
2. Як змінюється алгоритм RQI для тридіагональних матриць?

Контрольні питання до підрозділів 26.10 й 26.11

1. Які недоліки має метод ітерацій з поліномами в неявній формі?
2. В яких випадках доцільно застосовувати алгоритм з використанням послідовностей Штурма?
3. Яка основна ідея методу Релея-Рітца для отримання власних значень?

Контрольні питання до підрозділу 26.12

1. Для чого проводяться оцінювання похибок наближених власних значень?
2. Як можна провести оцінювання похибок наближених власних значень, якщо точні значення невідомі?

Контрольні питання до підрозділу 26.13

1. Які етапи має метод ітерацій у підпросторі?
2. Яку швидкість збіжності має метод ітерацій у підпросторі?

Контрольні питання до підрозділу 26.14

1. В який спосіб створюються підпростори Крилова?
2. Який базис називають базисом Ланцоша?
3. Які властивості має три діагональна матриця, отримана із застосуванням базису Ланцоша?
4. Як борються з впливом дискретної арифметики дійсних чисел в ЕОМ?
5. Які випадки алгоритмів методу Ланцоша виникають у залежності від якості матриць мас та жорсткості?
6. Які існують обмеження в застосуванні методу Ланцоша?

© К.М. Рудаков, 2025

Частина X

АЛГОРИТМИ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПРИ КОНТАКТНІЙ ВЗАЄМОДІЇ

Розділ 27

ПОСТАНОВКИ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РОЗРАХУНКІВ ТЕПЛОВОГО І НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ КОНТАКТУЮЧИХ ТІЛ ПРИ ТЕРМОСИЛОВОМУ СТАТИЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

27.1. Деякі загальні міркування щодо контактування тіл, що деформуються

Контактний характер взаємодії тіл – звичайний у техніці. Дійсно, якщо з'єднання твердих тіл – роз'ємне, то зусилля між ними передаються при контактуванні. При цьому температури та теплові потоки поверхонь ідеального контакту урівнюються, також урівнюються і зусилля, згідно з третім законом Ньютона. Від того, які розподіли цих фізичних полів та зусиль будуть реалізовані, може залежати міцність елемента конструкції або агрегату. Саме зони контакту зазвичай є місцями концентрації напружень, які з цієї причини руйнуються у першу чергу.

Проблема знайдення *аналітичних* розв'язків контактних задач дуже складна, їй присвячено величезний обсяг наукових робіт, розв'язки навіть для простих випадків можуть бути дуже складними. Але реальні конструкції часто мають не класичні обриси та властивості матеріалів, для яких аналітичні розв'язки ще не знайдені. Тому застосовуються *чисельні* методи. Однак і в цьому випадку ситуація є складною, оскільки контактні крайові задачі є нелінійними, зони та умови контакту можуть змінюватися у часі.

Метод скінченних елементів не дуже "пристосований" для розв'язування контактних задач. Він потребує величезні потужності ЕОМ, не забезпечуючи високої точності розв'язків. Однак часто альтернативи немає.

Постановки крайових контактних задач теплопровідності та про напружено-деформований стан контактуючих тіл спираються на постановки відповідних неконтактних задач, оскільки в контактних задачах до

© К.М. Рудаков, 2025

"звичайних" ГУ додаються ГУ поверхонь (зон) контакту S_K, а також умови відсутності взаємного проникнення тіл та від'ємності нормальних контактних зусиль.

Нагадаємо, що при постановці крайових задач розглядаємо тверде тіло об'ємом Ω, обмежене поверхнею S. Застосовуємо лагранжеві координати. Матеріал будемо вважати ізотропним, а деформації – малими. Для спрощення розглядаємо контакт тільки двох тіл, які довільно нумеруємо як тіло 1 та тіло 2.

27.2. Постановка незв'язної крайової контактної задачі теплопровідності

Постановка крайової *контактної* задачі теплопровідності відрізняється від постановці неконтактної задачі (див. підрозділ 13.1) тільки наявністю умов сполучення на контактній поверхні S_K. В загальному вигляді, при наявності термічного опору та (або) тепловиділення на контактній поверхні S_K з номерами 1 та 2 повинні виконуватися умови сполучення:

$$(\theta_{(1)} - \theta_{(2)})\big|_{S_K} = \Delta\widehat{\theta}_K\big|_{S_K}; \tag{27.1}$$

$$\left(\lambda_{(1)}\frac{\partial\theta_{(1)}}{\partial\nu} - \lambda_{(2)}\frac{\partial\theta_{(2)}}{\partial\nu}\right)\Bigg|_{S_K} = \Delta\widehat{q}_K\big|_{S_K}, \tag{27.2}$$

де θ – температура; λ – коефіцієнт теплопровідності матеріалу.

Величина $\Delta\widehat{\theta}_K = \Delta\widehat{\theta}_K(x^i,t)$ обумовлена термічним опором контактного прошарку; величина $\Delta\widehat{q}_K = \Delta\widehat{q}_K^- + \Delta\widehat{q}_K^+$, причому $\Delta\widehat{q}_K^- = \Delta\widehat{q}_K^-(x^i,t)$ – тепловий поверхневий стік (наприклад, за рахунок теплового поглинання мастила), $\Delta\widehat{q}_K^+ = \Delta\widehat{q}_K^+(x^i,t)$ – теплове поверхневе джерело (наприклад, за рахунок тепловиділення при прослизанні з тертям). В конструкційних задачах, зазвичай, приймаються $\Delta\widehat{\theta}_K = \Delta\widehat{q}_K = 0$.

Примітка 27.1. При більш точному формулюванні умов сполучення (27.2) величини $\lambda_{(j)}$ повинні враховувати не тільки теплопровідність матеріалу контактуючих тіл, а й теплопровідність зазорів у контакті, обумовлених мікрорельєфом контактних поверхонь. Однак надійних формул для обчислень таких $\lambda_{(j)}$ немає, хоча деякі напрацювання є (див., наприклад, книгу [82]).

27.3. Постановка крайової контактної задачі про статичний напружено-деформований стан тіл

Для крайової контактної задачі характерно наявність зони (зон) контакту відомої (стабільної) або невідомої (нестабільної, змінної) конфігурації. У цій зоні немає взаємопроникнення поверхонь тіл, а передані в результаті контакту нормальні до поверхні зусилля не можуть бути такими, що розтягують,

© К.М. Рудаков, 2025

(при урахуванні сил поверхневого зчеплення в зоні контакту припускається деякий незначний рівень "негативного тиску", позначимо як $\widehat{P}_\nu^+ \geq 0$). У відповідності з Наслідком 1 загального закону збереження (закон поверхневих взаємодій, див. п.12.4.1) зусилля контакту на двох контактних поверхнях повинні бути рівними за розміром і мати протилежні направлення. Розрізняють силовий контакт без тертя та з тертям.

Отже, постановка крайової *контактної* задачі про статичний напружено-деформований стан тіл відрізняється від постановки відповідної неконтактної задачі (див. підрозділи 13.2 й 13.3) наявністю додаткових граничних умов і обмежень на поверхнях контакту S_K. Опишемо їх.

На спільній поверхні S_K тіл з номерами 1 і 2 повинні бути виконані умови сполучення:

- силові

$$(\sigma_{mn(1)} - \sigma_{mn(2)})\nu_{m(j)} = 0, \quad j = 1, 2; \tag{27.3}$$

- кінематичні при зчепленні (переміщення в тому же базисі, що й координати, тут – у місцевому)

$$[(x_m + u_m)_{(1)} - (x_m + u_m)_{(2)}]\nu_m = 0; \tag{27.4}$$

$$[(x_m + u_m)_{(1)} - (x_m + u_m)_{(2)}]\tau_m = 0, \tag{27.5}$$

де ν_m, τ_m – компоненти векторів, відповідно, зовнішньої нормалі до точки поверхні контакту і дотичної до поверхні, у тій же точці. При прослизанні (із тертям або без тертя) умова (27.5) не використовується;

- обмежених значень нормальних складових контактних зусиль

$$(\sigma_{mn}\nu_m\nu_n)_{(j)} \leq \widehat{P}_\nu^+; \tag{27.6}$$

- взаємного не проникнення тіл

$$[(x_m + u_m)_{(1)} - (x_m + u_m)_{(2)}]\nu_m \leq 0. \tag{27.7}$$

Дві останні умови є основою для визначення конфігурації поточної поверхні контакту.

Разом із ГУ (13.27) і (13.28) додатково залучаються ГУ на поверхні контакту S_K при ($(\sigma_S)_{\min}$ – мінімальне з двох величин значення поточної межі плинності матеріалу $\sigma_S = H(\chi, \theta)$ або $\sigma_S = K(\varepsilon_u^a, \theta)$):

- зчепленні, тобто при $|\sigma_\tau| \leq \min\{\beta_{TP}|\sigma_\nu|; (\sigma_S)_{\min}/\sqrt{3}\}$:

$$\sigma_\nu = \sigma_{mn}\nu_m\nu_n\big|_{S_K} = \widehat{P}_\nu; \tag{27.8}$$

$$\sigma_\tau = \left[\sum_{n=1}^{3}(\sigma_{mn}\nu_m)^2 - (\sigma_{mn}\nu_m\nu_n)^2\right]^{1/2}\Bigg|_{S_K} = \widehat{P}_\tau; \tag{27.9}$$

або

$$u_m\big|_{S_K} = \widehat{u}_m; \tag{27.10}$$

- прослизанні, тобто при $|\sigma_\tau| > \min\{\beta_{TP}|\sigma_\nu|; (\sigma_S)_{\min}/\sqrt{3}\}$:

© К.М. Рудаков, 2025

$$\sigma_\nu = \sigma_{mn}\nu_m\nu_n\big|_{S_K} = \widehat{P}_\nu; \tag{27.11}$$

або

$$u_\nu = u_m\nu_m\big|_{S_K} = \widehat{u}_\nu; \tag{27.12}$$

а також при $\beta_{TP} \neq 0$

$$\sigma_\tau = -|\,\widehat{P}_\tau\,|\,sign(u_\tau), \tag{27.13}$$

де $u_\tau = (u_{m(1)} - u_{m(2)})\tau_m$ – дотична до поверхні проекція вектора взаємних переміщень.

Якщо тертя не враховується (при рівності нулю коефіцієнта тертя β_{TP}) ГУ на S_K спрощуються до

$$\sigma_\nu = \sigma_{mn}\nu_m\nu_n\big|_{S_K} = \widehat{P}_\nu; \quad \text{або} \quad u_\nu = u_m\nu_m\big|_{S_K} = \widehat{u}_\nu. \tag{27.14}$$

Примітка 27.2. Вище застосована схема сухого тертя Да Вінчі - Амонтона - Кулона – найпростіша робоча гіпотеза, що дозволяє в першому наближенні обчислити розмір сили тертя. Зазвичай така точність є достатньою.

Отже, контактна крайова задача містить в умовах сполучення нерівності і логічні умови. Це значно ускладнює її розв'язання; задача стає нелінійною.

Оскільки постановка крайової контактної задачі термопружності відрізняється від постановки крайової неконтактної задачі термопружності лише наявністю кінематичних і силових ГУ зони контакту, то, використовуючи теореми Джона й Куна-Таккера, аналогічно можна одержати такий функціонал Лагранжа щодо варіацій переміщень і пов'язаних із ними деформацій:

$$F = \int_\Omega \sigma_{mn}\delta\varepsilon_{mn}d\Omega - \int_\Omega \widehat{O}_m\delta u_m d\Omega - \int_{S_P} \widehat{P}_m\delta u_m dS -$$
$$- \int_{S_K} \widehat{P}_\nu\nu_m\delta u_m dS - \int_{S_K} \widehat{P}_\tau\tau_m\delta u_m dS = 0; \quad \widehat{P}_\nu\big|_{S_K} \le \widehat{P}_\nu^+, \tag{27.15}$$

який у поєднанні з кінематичними ГУ (13.27), (27.10) і (27.12), або (27.14) на поверхнях S_U і S_K визначає незліченну множину можливих (віртуальних) напружено-деформованих станів (НДС). Дійсний НДС є одним з віртуальних, але він додатково задовольняє фізичним рівнянням зв'язку між напруженнями та деформаціями та граничним умовам першого роду.

Примітка 27.3. Теореми Джона й Куна Таккера сформульовано для задач знаходження мінімуму/максимуму деякого функціонала при наявності так званих односторонніх обмежень (більше або менше).

27.4. Модели коэффициента тертя

Зазвичай застосовують модель тертя Да Вінчі - Амонтона - Кулона:

$$P_\tau \le \beta_{TP} \cdot P_n, \tag{27.16}$$

де P_τ – сила тертя; P_n – нормальна до поверхні контактна сила; β_{TP} – коефіцієнт тертя, який може бути і константою, і функцією. У сучасних програмних комплексах є декілька моделей коефіцієнта тертя (див. табл.38.1).

© К.М. Рудаков, 2025

Таблиця 38.1. Моделі коефіцієнта тертя в Nastran

FRICMOD	**Вираз для** β_{TP}
1..	A_1
2..	$\dfrac{1-\exp(-A_2 P_\tau)}{P_\tau / A_1}$
3..	$A_2 + (A_2 - A_1)\exp(-A_3 P_\nu)$
4..	$\begin{cases} A_1, & при\ \dot{u} \le A_3 \\ A_2, & при\ \dot{u} > A_3 \end{cases}$
5..	$\begin{cases} A_1 + \dot{u}(A_3 - A_1)/A_2, & при\ \dot{u} < A_2 \\ A_3, & при\ \dot{u} > A_2 \end{cases}$
6..	$\begin{cases} \sqrt{(A_1\chi_{(1)})^2 + (A_2\chi_{(2)})^2 + (A_3\chi_{(3)})^2}, & при\ \dot{u} > A_5 \\ A_4, & при\ \dot{u} \le A_5 \end{cases}$
7..	$A_1 + A_2 P_\nu;\ \ 0 \le \beta_{TP} \le 1$
8..	$\begin{cases} A_1 + t(A_3 - A_1)/A_2, & при\ t < A_2 \\ A_3, & при\ t > A_2 \end{cases}$
9..	$\begin{cases} A_1 + A_3 x_{(2)} + A_4 x_{(3)}, & 2D\ (\textit{двовимірний випадок}); \\ A_1 + A_3 x_{(1)} + A_4 x_{(2)} + A_5 x_{(3)}, & 3D\ (\textit{тривимірний випадок}); \end{cases}$ $0 \le \beta_{TP} \le A_2$
12..	$\dfrac{1-\exp(-A_2 P_\nu)}{P_\nu / A_1}$
13..	$A_2 + (A_2 - A_1)\exp(-A_3 P_\nu)$

A_1 ... A_5 – постійні, що вводяться в діалогу; $x_{(j)}$ – координати; $\chi_{(j)}$ – координати локальної системи ковзання (**sliding**); P_ν, P_τ контактні сили; $\dot{u}$ – швидкість взаємного ковзання; t – час;

FRICMOD – змінна, значення якої обирається користувачем програми.

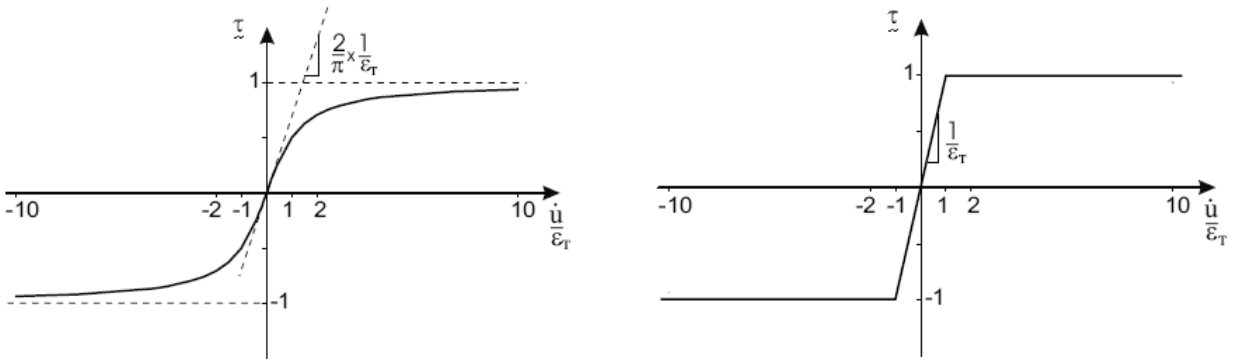
Якщо розглядати величину $\underset{\sim}{\tau} = P_\tau / \beta_{TP} \cdot P_n$, то $\underset{\sim}{\tau} \le 1$. При відсутності взаємного прослизання $\dot{u} = 0$ й $|\underset{\sim}{\tau}| < 1$, а при прослизанні $sign(\dot{u}) = sign(\underset{\sim}{\tau})$ й $|\underset{\sim}{\tau}| = 1$.

Для програмування закону тертя створюється так звана функція тертя. Є два варіанта. Перший: функція тертя задається неявно як неперервна функція $\underset{\sim}{\nu}(\dot{u}, \underset{\sim}{\tau}) = 0$ у вигляді

$$\underset{\sim}{\tau} + \underset{\sim}{\nu} - \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\dot{u} - \underset{\sim}{\nu}}{\varepsilon_T}\right) = 0, \qquad (27.17)$$

яка зображена на рис.38.1-а, де ε_T – малий параметр. Другий: функція тертя зображена на рис.38.1-б. Це полілінійна функція.

© К.М. Рудаков, 2025



а) **б)**

Рис.27.1 Графіки функції тертя

Контрольні питання до підрозділу 27.1

1. Чому контактні задачі є важливими для визначення міцності конструкції?
2. Чим відрізняються постановки крайових контактних задач теплопровідності та про напружено-деформований стан контактуючих тіл від постановок відповідних неконтактних задач?

Контрольні питання до підрозділу 27.2

1. Які додаткові умови на контактній поверхні?
2. Чим може бути обумовлений термічний опір контактного прошарку?

Контрольні питання до підрозділу 27.3

1. Які додаткові умови на контактній поверхні?
2. Які контактні умови застосовують при визначенні поточної поверхні контакту?
3. Чим відрізняється випадок прослизання тіл без тертя від випадку наявності тертя?
4. Чому може бути задіяний поточні границі плинності матеріалів?
5. Яку проблему вирішують теореми Джона й Куна Таккера?

Контрольні питання до підрозділу 27.4

1. Чому зазвичай застосовують модель тертя Да Вінчі - Амонтона - Кулона?
2. Який закон тертя бажано застосовувати при моделюванні процесу кочення?

© К.М. Рудаков, 2025

Розділ 28

КОНТАКТНІ АЛГОРИТМИ РОЗРАХУНКІВ ТЕПЛОВОГО ТА НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ КОНТАКТУЮЧИХ ТІЛ ПРИ СТАТИЧНОМУ ТЕРМОСИЛОВОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Запропоновані в рамках МСЕ, а також адаптовані до МСЕ чисельні контактні алгоритми розв'язування статичних крайових контактних лінійних і нелінійних задач можна умовно розділити на дві групи:

- спільного;
- роздільного розгляду контактуючих тіл.

Надамо характеристику алгоритмам кожної групи.

28.1. Алгоритми спільного розгляду контактуючих тіл

28.1.1. Задачі про температурний стан

Крайові задачі про визначення теплового стану (ТС) контактуючих тіл, при спільному розгляді тіл вироджуються в звичайну крайову задачу (неконтактну), тому що зони контакту відомі, а тепловий контакт припускає в зонах контакту нерозривність теплового поля і потоку. Збирається і розв'язується щодо вузлових значень температур загальна для контактуючих тіл СЛАР. Бажано формувати контакт типу "вузол у вузол", інакше потрібне проводити "зшивання".

28.1.2. Задачі про напружено-деформований стан

Для крайових задач про визначення НДС контактуючих тіл алгоритми також збирають загальну для них СЛАР. Проте в залежності від способу урахування контактної взаємодії контактні алгоритми мають багато різновидів.

На початковому етапі розробки контактних алгоритмів будували алгоритми, засновані на прямому введенні в загальну для контактуючих тіл СЛАР, породжену МСЕ, ***умов спільності переміщень*** у зонах контакту (з урахуванням розміру натягу). Обов'язкова вимога: контакт типу "вузол у вузол". При прослизанні чи заданому натягу для кожної пари таких вузлів вводиться локальна система координат, зв'язується один ступінь свободи опозитних вузлів (по напрямку нормалі до поверхні контакту), при зчепленні – просто зв'язуються всі. У найпростішому випадку зона контакту вважається заздалегідь відомою, тертя відсутнє, розв'язування задачі – без ітерацій. Інші варіанти: зона контакту невідома, контакт із тертям (зчеплення або прослизання з тертям), або зміни зони контакту. При цьому виникають ітерації. Іноді зусилля прослизання P_τ (дотичні до поверхні) вводяться у вектор правої частини СЛАР, причому

© К.М. Рудаков, 2025

підраховується P_τ на підставі попередньої ітерації як (закон тертя Да Вінчі - Амонтона - Кулона):

$$P_\tau^{(k+1)} = -\beta_{TP} P_\nu sign(P_\tau^{(k)}), \tag{28.1}$$

де k – номер ітерації; P_ν – контактний тиск; β_{TP} – коефіцієнт тертя. Матриця СЛАР залишається симетричною. Виявилося, що можна відмовитися від контакту типу "вузол у вузол", вводячи матриці переходу від вузлових значень у значення в опозитних точках (не вузлах) поверхні контакту іншого тіла. Тоді завжди потребуються контактні ітерації, матриця СЛАР несиметрична, хоча несиметричні її члени розташовані на периферії матриці, що полегшує розв'язування системи (можна модифікувати алгоритм під таку локальну несиметричність).

Ще були створені алгоритми, засновані на побудові ***матриці граничної жорсткості*** (або ***податливості***). Зазвичай контакт типу "вузол у вузол". Контактуючі тіла деформуються пружно (лінійно). Це дозволяє записати для контактуючих вузлів рівності

$$\{q\}_{(j)} = (-1)^j [C]_{(j)} \{P_\nu\}; \quad j = 1,2, \tag{28.2}$$

де $\{q\}_{(j)}$, $\{P_\nu\}$ – вектори переміщень і тисків у контактних вузлах j-го тіла, $[C]_{(j)}$ – матриці граничної податливості. Крім того з (28.2) $\{q\}_{(j)}$ за допомогою умови спільності переміщень

$$\{q\}_{(1)} = \{q\}_{(2)} + \{q_0\}, \tag{28.3}$$

де $\{q_0\}$ – вектор зсувів тіла номер 1, одержують систему

$$([C]_{(1)} + [C]_{(2)})\{P_\nu\} = \{q_0\} \tag{28.4}$$

щодо зусиль у зоні контакту. Іноді матриця граничної податливості утворюється обертанням матриці жорсткості, отриманої в результаті Гауссова виключення. При цьому виключення для вузлів зони контакту не проводиться (фронтальний метод розв'язування СЛАР). Інший варіант – матриця податливості визначається кількаразовим розв'язуванням неконтактних задач для контактуючих тіл з одиничними зусиллями в зонах контакту, тобто як результат відгуку тіл на одиничні зусилля. Потім за методом сил, з огляду на натяг, в ітераціях обчислюються зусилля, що забезпечують дотримання умов спільності деформацій в опозитних вузлах і закон тертя. Є можливість у введенні контакту типу "вузол – поверхня". Алгоритми граничної жорсткості швидкі в розв'язуванні власне контактної задачі, але великі часові витрати на отримання матриць граничної жорсткості. Слід мати на увазі, що при появі нелінійності (необоротні деформації, інше) залежності (28.2), а тому і (28.4), утрачають фізичний смисл.

Ще є алгоритми, засновані на зведенні задачі з обмеженнями до задачі про ***варіаційні нерівності***, для розв'язування яких застосовуються релаксаційні схеми. Для цих алгоритмів характерні слабке збігання і проблеми у виборі раціонального параметра релаксації.

У більшості сучасних програмних комплексів застосовують такі методи:

© К.М. Рудаков, 2025

- ***метод функції кінематичних обмежень*** (Constraint-function method);
- ***метод множників Лагранжа*** (Lagrange multiplier (segment) method). Потребує, щоб усі тіла моделі мали окремі (свої) умови закріплення;
- ***метод обмежень жорсткості*** (Rigid target method).

У ***методі функції кінематичних обмежень*** застосовується функція

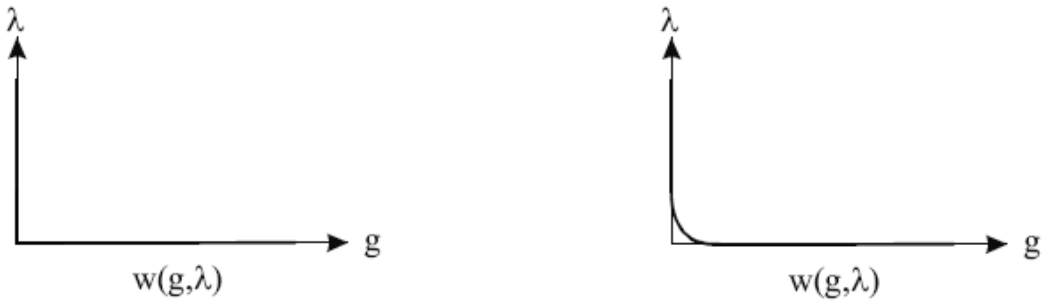
$$w(g,\lambda) = g\lambda = 0; \quad g \geq 0; \;\; \lambda \geq 0, \tag{28.5-а}$$

або $w(g,\lambda) = g\lambda = \varepsilon_N; \;\; g \geq 0; \lambda \geq 0$, яка має іншу (еквівалентну) запис:

$$w(g,\lambda) = \frac{g+\lambda}{2} - \sqrt{\left(\frac{g-\lambda}{2}\right)^2 + \varepsilon_N} = 0, \tag{28.5-б}$$

де g й λ – числа, відповідні до величин зазору й нормальної контактної сили P_v, а ε_N – малий параметр. Графіки цих функцій зображено на рис.28.1 (збільшення ε_N збільшує радіус переходу від горизонталі до вертикалі графіка).

Варіант (28.5-б) призводить до підвищеної швидкості збіжності алгоритму, оскільки ця функція не має зламів і диференціюється.



а) **б)**

Рис.28.1 Графіки функцій обмежень

У цьому методі перший крок – неконтактний розв'язок. Виявляються зони проникнення одного тіла в інше, у цих місцях (у вузлах) прикладаються додаткові стискаючі (контактні) сили, які потім в ітераціях уточнюються так, щоб не було взаємопроникнення тіл. Для обчислення цих додаткових стискаючих сил використовується оригінальний алгоритм, що забезпечує досить швидку збіжність контактних ітерацій.

Метод множників Лагранжа призводить до додавання до глобальної СЛАУ додаткових рівнянь і невідомих – множників Лагранжа, що здобувають зміст контактних зусиль. Записуються вирази для обмежень на поверхні контакту у вигляді нерівностей:

$$([s]\{q\} - \{\delta\})\big|_{S_K} \geq 0, \tag{28.6}$$

де $[s]$ – матриця кінематичних обмежень; $\{\delta\}$ – вектор натягів; які (нерівності) множаться на множники Лагранжа λ_m і результат додається до повної енергії системи Π_0:

$$\Pi = \Pi_0 + \{\lambda\}^T([s]\{q\} - \{\delta\}), \tag{28.7}$$

причому вважається, що (зрівняєте з (28.5-а))

© К.М. Рудаков, 2025

$$\lambda_m \geq 0; \quad \{\lambda\}^T([s]\{q\} - \{\delta\})\big|_{S_K} = 0. \tag{28.8}$$

Відповідно до теорем Джона й Куна-Таккера нелінійного програмування шукається мінімум функціонала (28.7), у результаті чого формується СЛАУ вигляду

$$\begin{bmatrix} [K] & [s] \\ [s] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q\} \\ \{\lambda\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{\mu\} \end{Bmatrix} \tag{28.9}$$

й з'ясовується фізичний зміст множників Лагранжа для цього класу завдань: вузлові контактні тиски. Шляхом вибору виду матриці кінематичних обмежень $[s]$ можна організувати схему контакту типу "вузол у поверхню". Зусилля прослизання можуть визначатися в ітераціях відповідно до закону тертя.

У результаті перетворень губиться симетричність матриці нової СЛАР і на її діагоналі з'являються нулі. у матриці можуть з'явитися сингулярні члени, що приводить до втрати точності розв'язку. Це істотно ускладнює розв'язування СЛАР, вимагає розробки спеціальних алгоритмів.

Іноді застосування методу здійснюється без нагадування про приналежність його до методу множників Лагранжа. Наприклад, із метою невтручання усередину вже зібраної матриці СЛАР, введення умов спільності переміщень контактуючих вузлів проводиться додаванням їх до СЛАР, а для усунення перевизначеності в СЛАР вводяться додаткові невідомі контактні зусилля.

Метод обмежень жорсткості (***метод штрафу***) застосовується в різноманітних формах. Крім прямого формулювання до нього зводяться методи введення контактного прошарку без товщини або контактних елементів зі спеціальними властивостями. У результаті до функціоналу, що описує загальну енергію системи контактуючих тіл, добавляється функціонал, що відбиває роботу контактних зусиль, квадратичний по вузловим переміщенням контактних вузлів, і параметри штрафу, що присутні у чистому вигляді як характеристики контактного прошарку або як характеристики контактних скінченних елементів. Мінімізація отриманого функціонала призводить до СЛАР вигляду

$$\left([K] + \int_{S_K} [s][\breve{D}][s]dS\right)\{q\} = \{F\} + \int_{S_K} [s]\{\mu\}dS, \tag{28.10}$$

де $[\breve{D}]$ – діагональна матриця, компоненти якої є фактично параметрами штрафу, хоча можуть називатися авторами характеристиками контактного прошарку або елемента. Матриця СЛАР (28.10) симетрична, позитивно визначена. Недолік методу: точність розв'язку пов'язана з вибором параметра штрафу. Зазвичай задають різні значення параметрів жорсткості (штрафу) у нормальному й дотичному до поверхні контакту напрямках.

При призначенні параметрів штрафу бажано мати на увазі, що в одновимірному випадку множники штрафу мають розмірність 1/довжина, а фізичну інтерпретацію – осьова жорсткість стрижня довжиною L, з площею перетину A й модулем Юнга матеріалу E, а саме $K = E \cdot A \cdot L$.

© К.М. Рудаков, 2025

Суттєво занижені значення множників штрафу (у нормальному напрямку) призводять до надмірного взаємного проникнення поверхонь контакту, а суттєво завищені значення – до зниження швидкості збіжності алгоритму. Зазвичай вдається автоматизувати вибір оптимальних значень цих параметрів. Підвищення швидкості збіжності алгоритму часто відбувається при збільшенні кількості точок на поверхні КЭ, з яких шукаються опозитні контактні точки.

Для одержання розв'язку ***динамічних*** задач вважається, що при коливаннях реалізується конфігурація контактних поверхонь, знайдена при отриманні розв'язку статичної контактної задачі. Іноді це припущення є вірним (наприклад, при попередньо напруженому контакті), іноді – ні.

28.2. Алгоритми роздільного розгляду контактуючих тіл

Ці алгоритми завжди ітераційні. На кожній контактній ітерації змінна поверхня контакту (ЗПК) фіксується, а для опозитних точок (вузлів) ЗПК аналізується спільність ТС або НДС, формуються нові ГУ для ЗПК, створюються і проводяться розв’язування СЛАР, зібраних окремо для кожного з контактуючих тіл.

Теоретичною основою алгоритмів поділу є альтернируючий (тобто симетричний) метод Шварца. Класичний метод Шварца потребує розгляду областей, що мають непусту область перетинання. У твердих контактуючих тілах це неможливо. Як виявилося, це обмеження методу Шварца можна обминути, причому різноманітними способами.

Розроблені декілька алгоритмів роздільного розгляду контактуючих тіл.

Метод почергових сполучень. Було показано, що зазначене вище протиріччя можна обминути з тієї причини, що на межі контакту можна сформулювати два типи граничних умов: по температурі або тепловому потоку у задачах про ТС тіл; по переміщеннях або контактних навантаженнях у задачах про НДС тіл. Чергування в контактних ітераціях цих двох типів граничних умов, як доказано, забезпечує збіжність ітераційного процесу.

При доказах у ***задачах про НДС*** контактуючих тіл розглядався контакт без тертя та такий ітераційний процес. Після завдання на непарних ітераціях в поточній зоні контакту переміщень розв’язуються окремі крайові задачі для контактуючих тіл, потім перевіряються умови сполучення по контактних навантаженнях і уточнюється зона контакту. Наявні неузгодженості сполучення по навантаженнях $\delta P_{\nu}^{(2k-1)} = P_{\nu(2)}^{(2k-1)} - P_{\nu(1)}^{(2k-1)}$, $k = 1, 2, \ldots$ обчислюються та розносяться на контактуючі тіла в кожній парі опозитних точок контактних поверхонь відповідно до залежності

$$P_{\nu(j)}^{(2k)} = P_{\nu(j)}^{(2k-1)} + \alpha^{(2k)} \delta P_{\nu}^{(2k-1)}; \quad j = 1, 2; \quad k = 1, 2, \ldots; \tag{28.11}$$

де k визначає номер контактної ітерації; $\alpha^{(2k)}$ – скалярний параметр процесу; P_{ν} – контактні зусилля, нормальні до поверхні контакту. Після прикладення контактних зусиль і нового розв’язку крайових задач перевіряються умови

© К.М. Рудаков, 2025

сполучення вже по переміщеннях і знову уточнюється зона контакту. Наявні неузгодженості сполучення по переміщеннях $\delta u_{\nu}^{(2k)} = u_{\nu(2)}^{(2k)} - u_{\nu(1)}^{(2k)}$ обчислюються та розносяться на контактуючі тіла відповідно до формули

$$u_{\nu(j)}^{(2k+1)} = u_{\nu(j)}^{(2k)} + \alpha_{(j)}^{(2k+1)} \delta u_{\nu}^{(2k)}; \quad j = 1, 2; \quad k = 0, 1, \ldots; \tag{28.12}$$

де u_{ν} – переміщення в напрямку нормалі до контактної поверхні. Процес продовжується до зниження неузгоджень до припустимих значень.

Показано, що для забезпечення збіжності необхідно, щоб скалярні параметри процесу мали значення у межах

$$0 < \alpha_{(j)}^{(2k)},\ \alpha_{(j)}^{(2k+1)} < 1; \quad j = 1, 2; \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{28.13}$$

причому раціонально приймати

$$\alpha_{(1)}^{(2k)} + \alpha_{(1)}^{(2k+1)} = 1; \quad \alpha_{(2)}^{(2k)} = 1 - \alpha_{(1)}^{(2k)}. \tag{28.14}$$

Є декілька варіантів призначення скалярних параметрів процесу на подальших контактних ітераціях, які істотно впливають на швидкість збіжності алгоритму.

Один з них такий. На старті ($k = 0$), після отримання початкового неконтактного розв'язку зазвичай призначаються

$$\alpha_{(1)}^{(1)} = \frac{E_{(1)}}{E_{(1)} + E_{(2)}}; \quad \alpha_{(2)}^{(1)} = 1 - \alpha_{(1)}^{(1)}, \tag{28.15}$$

де $E_{(1)}$, $E_{(2)}$ – модулі Юнга матеріалів. Причина: ще немає ніякої інформації про контактні взаємини. Адже логічно, що контактні переміщення тіла з відносно малою жорсткістю повинні бути більшими.

У наступних ітераціях

$$\alpha_{(1)}^{(2k+1)} = \frac{|(\tilde{\Delta} u_{\nu})_{(1)}^{(2k)}|}{|(\tilde{\Delta} u_{\nu})_{(1)}^{(2k)}| + |(\tilde{\Delta} u_{\nu})_{(2)}^{(2k)}|}; \quad \alpha_{(2)}^{(2k+1)} = 1 - \alpha_{(1)}^{(2k+1)}; \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{28.16}$$

де $(\tilde{\Delta} u_{\nu})_{(j)}^{(2k)}$ обчислюються з урахуванням попередніх розв'язків:

$$(\tilde{\Delta} u_{\nu})_{(j)}^{(2k)} = (u_{\nu}^{(2k)})_{(j)} - (u_{\nu}^{(2n)})_{(j)}; \quad j = 1, 2; \quad n < k = 1, 2, \ldots. \tag{28.17}$$

Обирається таке значення $n < k = 1, 2, \ldots$, щоб було $(\tilde{\Delta} u_{\nu})_{(1)}^{(2k)} \cdot (\tilde{\Delta} u_{\nu})_{(2)}^{(2k)} < 0$.

Для задачі контактної ***теплопровідності*** формули подібні. На старті ($k = 0$), після отримання початкового неконтактного розв'язку зазвичай призначаються

$$\gamma_{(1)}^{(1)} = \frac{\lambda_{(1)}}{\lambda_{(1)} + \lambda_{(2)}}; \quad \gamma_{(2)}^{(1)} = \frac{\lambda_{(2)}}{\lambda_{(1)} + \lambda_{(2)}} = 1 - \gamma_{(1)}^{(1)}; \quad \gamma_{(j)}^{(2)} = 1 - \gamma_{(j)}^{(1)}; \quad j = 1, 2, \tag{28.18}$$

де $\lambda_{(1)}$, $\lambda_{(2)}$ – коефіцієнти теплопровідності матеріалів.

Нові значення температур та теплових потоків у опозитних точках тіл (нові граничні умови) обчислюються за виразами

$$(\widehat{\theta}^{(2k+1)}) = \theta_{(1)}^{(2k)} + \gamma_{(1)}^{(2k+1)} (\theta_{(2)}^{(2k)} - \theta_{(1)}^{(2k)}); \quad k = 0, 1, \ldots; \tag{28.19}$$

$$(\widehat{q}^{(2k)}) = q_{(1)}^{(2k-1)} + \gamma_{(1)}^{(2k)} (q_{(2)}^{(2k-1)} - q_{1)}^{(2k-1)}); \quad k = 1, 2, \ldots; \tag{28.20}$$

$$\gamma_{(j)}^{(2k)} + \gamma_{(j)}^{(2k+1)} = 1; \tag{28.21}$$

© К.М. Рудаков, 2025

$$\gamma_{(1)}^{(2k+1)} = \frac{\left|\tilde{\Delta}\theta_{(1)}^{(2k)}\right|}{\left|\tilde{\Delta}\theta_{(1)}^{(2k)}\right| + \left|\tilde{\Delta}\theta_{(2)}^{(2k)}\right|}; \quad \gamma_{(2)}^{(2k+1)} = 1 - \gamma_{(1)}^{(2k+1)}; \quad k = 1,2,\ldots , \tag{28.22}$$

де

$$\tilde{\Delta}\theta_{(j)}^{(2k)} = \theta_{(j)}^{(2k)} - \theta_{(j)}^{(2n)}; \quad j = 1,\, 2\,; \quad n < k = 1,2,\ldots. \tag{28.23}$$

Вибір параметрів $\alpha_{(1)}^{(2k+1)}$ або $\gamma_{(1)}^{(2k+1)}$ за виразами (28.16) або (28.22) починаючі з третьої контактної ітерації значно прискорює процес отримання розв'язків задач із заданою точністю.

У цьому методі (почергових сполучень) передбачається, що для кожного з контактуючих тіл існує непуста множина ГУ 1-го роду, тобто температур для задачі про ТС, і переміщень (кінематичних) для задачі про НДС. У противному випадку породжувана методом розв'язку ефективна матриця СЛАР виявиться виродженою і для даного тіла СЛАР не може бути розв'язаною.

Як бути, якщо в одному з тіл, що контактують, відсутні такі ГУ? Приклад: лопатка в контактній системі "диск-лопатка" турбіни. Вона обмежена в переміщеннях лише зоною контакту і не має відомих температур.

На непарних контактній ітерації проблеми немає, тому що в зоні контакту ГУ задаються в температурах чи переміщеннях. На парних ітераціях, коли на S_K ГУ задаються в потоках чи зусиллях, можуть бути цілком відсутні ГУ 1-го роду. Умовно привласнимо такому тілу номер 2. Інше контактне тіло ГУ 1-го роду має завжди.

Є простий і ефективний метод рішення цієї проблеми: у тілі з номером 2 для задачі про визначення характеристик НДС призначати список із шести ступенів свободи в декількох вузлах сітки, в яких для нульовий і парних контактні ітерації переміщення будуть призначатися штучно, а саме попереднє відомі значення. Для задачі про ТС достатньо одного ступеня свободи (вузла).

Ці вузли необхідно вибрати якнайдалі від зони контакту, де за принципом Сен-Венана уточнення розподілу контактних умов практично не позначається на розв'язку. В задачі про НДС призначені ступені свободи повинні цілком виключати жорсткий зсув і поворот усього тіла (для двовимірного розгляду кількість таких ступенів зменшується до трьох), але не вносити обмежень на деформації самого тіла, тобто впливати вони повинні лише на положення тіла в просторі. Це завжди можливо. Щоби не втратити зону контакту, розроблено спеціальний універсальний алгоритм (див. підрозділ 30.3), який має більш широке призначення. Проведені чисельні експерименти показали, що цій прийом не призводить до збільшення кількості контактних ітерацій, з одного боку, і що найважливіше, дозволяє проводити чисельні розрахунки і для цього класу крайових контактних задач цім методом, роблячи його практично універсальним.

Методи поділу областей. Так само як і в алгоритмі сполучення розв'язків ГУ в зоні контакту задаються: для задачі про НДС тіл – у переміщеннях або зу-

силлях, а для задачі про ТС тіл – по температурах або по потоку. У одному з варіантів методу в задачі про НДС тіл для одного з контактуючих тіл (наприклад, для тіла номер 1) завжди ГУ на S_K задаються в зусиллях:

$$(P_\nu^{(k+1/2)})_{(1)} = -(P_\nu^{(k)})_{(2)}, \tag{28.24}$$

для іншого – в переміщеннях:

$$(u_\nu^{(k+1/2)})_{(2)} = (u_\nu^{(k+1)})_{(1)}, \tag{28.25}$$

причому по об'єму контактуючих тіл розв'язки (у переміщеннях) прогнозуються як

$$(u^{(k+1)})_{(j)} = (u^{(k)})_{(j)} + \alpha_{(j)}[(u^{(k+1/2)})_{(j)} - (u^{(k)})_{(j)}]. \tag{28.26}$$

Тут $(u^{(k+1/2)})_{(j)}$ – проміжний результат розв'язування крайової задачі; k – номер контактної ітерації; $\alpha_{(j)}$ – скалярні параметри процесу, що визначають швидкість збіжності алгоритму, для котрих також обов'язкові обмеження типу (28.13). Для задачі про ТС тіл замість переміщень розглядаються температури, замість зусиль – теплові потоки. Істотне обмеження методу – зона контакту повинна бути заздалегідь відомою.

Алгоритми подвійності (алгоритми Удзави). В одній групі алгоритмів подвійності в ітераціях відбувається корекція контактних зусиль, за формулами

$$P_\nu^{(2k)} = P_\nu^{(2k-1)} + \chi^{(2k)}\delta u_\nu^{(2k-1)}; \quad k = 1,2,...; \tag{28.18}$$

$$P_\tau^{(2k)} = P_\tau^{(2k-1)} + \tilde{\chi}^{(2k)}\Delta u_\tau^{(2k-1)}; \quad k = 1,2,..., \tag{28.19}$$

де Δu_τ – взаємний зсув у дотичному напрямку; χ – скалярні параметри процесу, "вибором яких добиваються найвищої швидкості збіжності".

В іншої групі алгоритмів подвійності в ітераціях відбувається корекція нормальних переміщень поверхні контакту, за формулами

$$u_\nu^{(2k+1)} = u_\nu^{(2k)} + \chi^{(2k+1)}\delta P_\nu^{(2k)}; \quad k = 0,1,..., \tag{28.20}$$

причому ці алгоритми тертя на контактних поверхнях не враховують.

Алгоритми характеризуються невеликою швидкістю збіжності, оскільки не знайдено підходу для визначення ефективних значень параметра χ.

28.3. Переваги та недоліки розглянутих чисельних алгоритмів розв'язування крайових контактних задач

28.3.1. Задачі про визначення НДС контактуючих тіл

Загальною властивістю всіх розглянутих алгоритмів є наявність ітераційного процесу по задоволенню контактних граничних умов, що викликано невизначеністю зони контакту, а також процесом прослизання з тертям. Лише в окремому випадку, коли одночасно заздалегідь відома зона контакту і відсутнє прослизання або тертя, алгоритми першої групи роблять тільки одну ітерацію.

У обох групах алгоритмів є процедури пошуку й уточнення зони контакту, для чого потребуються обчислення напружень і переміщень у сукупності точок

© К.М. Рудаков, 2025

поверхонь, що можливо потрапляють у зону контакту, а також процедури оцінювання умови контакту типу "зчеплення або прослизання", визначення нормальних і дотичних напрямків у контактній точці, завдання нових переміщень, нормальних та (або) дотичних зусиль прослизання з тертям, оцінки точності отриманого розв'язку, введення локальної системи координат. Тому трохи більший для другої групи алгоритмів обсяг обчислень по зоні контакту (по призначенню скалярних параметрів процесу) практично не виявляється в загальній сукупності машинного часу розрахунків задачі.

Істотною відмінністю алгоритмів є робота зі загальної для контактуючих тіл СЛАР в першій групі алгоритмів, і з роздільними системами – в другій, тому при рівної кількості контактних ітерацій алгоритми першої групи явно "дорожче", тому що час розв'язування СЛАР залежить від кількості рівнянь у СЛАР нелінійно (пропорційно квадрату кількості рівнянь стрічкової матриці, помноженому на розмір ширини стрічки СЛАР). Крім того, загальна для контактуючих тіл матриця часто має спеціальний вигляд: має нулі на діагоналі, несиметрична, може бути близька до виродженої. Це призводить до необхідності застосування спеціальних методів розв'язування СЛАР.

Алгоритми другої групи завжди ітераційні незалежно від умов контакту, тобто для класу простих контактних задач ці методи можуть виявитися не вигідними.

У багатьох контактних крайових задачах відзначаються зони відносного зсуву (прослизання) контактуючих тіл по контактних поверхнях, по величині сумірні або перевищуючі відстані між вузлами дискретної розбивки зони контакту. У той же час багато алгоритмів припускають або потребують контакт типу "вузол у вузол". При зберіганні цього типу контакту і взаємного прослизання з'являється необхідність у перебудові вузлової сітки тіл із супутніми проблемами переносу значень на нову сітку. Проблема, що примикає: при такому типі контакту при розширенні зони контакту створення нових опозитних пар повинно проводитися обов'язково з вузлів, що точно протистоять. Введення проміжного "контактного" прошарку іноді не вирішує проблеми. Перехід до контакту типу "вузол у поверхню" природно і простіше здійснюється в алгоритмах другої групи.

Загальні переваги алгоритмів роздільного розгляду контактуючих тіл: робота з меншими по обсягу задачами, тобто і СЛАР; можливість одночасного (паралельного) розв'язування цих СЛАР; алгоритми можуть застосовуватися для розв'язування широкого класу як лінійних, так і нелінійних задач, дозволяють природно розглядати контакт типу "вузол у поверхню", при чому взаємне прослизання контактних поверхонь не обмежується; при забезпеченні малої кількості контактних ітерацій (завдяки раціональному вибору скалярних параметрів процесу α, γ, χ) алгоритми можуть дати виграш у часі отримання результатів. Ці алгоритми можна реалізовувати для будь-якої кількості тіл, але вже для трьох тіл значно ускладнюється логіка їхньої побудови.

© К.М. Рудаков, 2025

Загальний недолік алгоритмів роздільного розгляду контактуючих тіл: кількість контактних ітерацій дуже залежить від вибору скалярних параметрів процесу, з призначення яких існують лише загальні або навіть суперечливі рекомендації. Але для алгоритму почергових сполучень цей недолік в значній мірі вже переборений.

Метод почергових сполучень потребує для обох тіл наявність зон із граничними умовами 1-го роду. Багато алгоритмів першої групи, а також метод подвійності другої групи алгоритмів теоретично не обґрунтовані з погляду збіжності розв'язків.

28.3.2. Задачі про визначення ТС контактуючих тіл

Достоїнством алгоритму спільного розгляду контактуючих тіл для крайової задачі про визначення ТС є відсутність ітерацій. Але для нього бажано створювати контакт типу "вузол у вузол". Якщо ж ця задача є допоміжною для задачі про визначення НДС контактуючих тіл, причому спостерігається відносний зсув (прослизання) цих тіл по зоні контакту, то зазначене достоїнство перетворюється в серйозний недолік. Тому в загальному випадку алгоритми роздільного розгляду контактуючих тіл кращі і для крайових задач теплопровідності.

Контрольні питання до підрозділу 28.1

1. У якому випадку контактна задача про визначення НДС може бути розв'язана без ітерацій?
2. Пояснить, чому вираз (28.5-б) є еквівалентним виразу (28.5-а).
3. Які незручності створює метод множників Лагранжа?

Контрольні питання до підрозділу 28.2

1. Чому вирази (28.16) та (28.22) не можна застосовувати з перших ітерацій?
2. Чому у методах поділу областей поверхня контакту повинна бути заздалегідь відомою?

Контрольні питання до підрозділу 28.3

1. Чому у сучасних програмних комплексах саме метод штрафу є найбільш популярним, використовується "за замовчанням"?

© К.М. Рудаков, 2025

Розділ 29

ДЕЯКІ АЛГОРИТМИ ЗОНИ КОНТАКТУ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ЗА МСЕ

29.1. Алгоритм формування контактних пар у змінній зоні контакту

Однієї з проблем алгоритмізації крайової контактної задачі виявилося визначення змінних поверхонь контакту (ЗПК) двох контактуючих тіл 1 і 2. Оскільки в МСЕ зусилля і переміщення між СЕ передаються у вузлах, є сенс і контактні пари на ЗПК складати з вузлів. Але для цього вони повинні строго протилежати один одному, у крайньому випадку – не узгоджуватися з визначеним допуском. Коли деформації тіл на ЗПК малі, або є незначні відносні зсуві поверхонь контакту, а також якщо знов виникаючі при деформуванні контактні пари вдається попередньо погодити за їх координатами, список вузлів можливих контактних пар вузлів можна задати попередньо у вхідному потоці, залишається уточнити характер їхньої взаємодії: контакт або його відсутність. У протилежних випадках є два варіанти: або відмовитися від обов'язкового протистояння вузлів сітки СЕ тіл (здійснювати контакт типу "вузол-поверхня"), або в ітераціях проводити перебудову сітки СЕ і переносити на нову сітку поля напружень, деформацій, температур і інших необхідних величин. Останній шлях для великих задач нераціональний, тому що вимагає проміж ітераціями виконувати великий обсяг додаткових робіт з частковою втратою точності.

У результаті відмовлення від обов'язкового протистояння вузлів СЕ сіток тіл на можливій ЗПК потрібно мати надійний та ефективний алгоритм формування контактних пар на ЗПК типу контакту "вузол-поверхня", причому поверхню задавати як сукупність поверхонь СЕ, що виходять на можливу ЗПК.

Шукана інформація – номера СЕ, на поверхні яких знайдені контактні точки, а також локальні координати цих точок, визначені в межах конкретних СЕ. Тому природно, що шукається розв'язок задачі відразу в локальних координатах заданого списку поверхневих СЕ, які можуть потрапити на ЗПК.

Застосуємо такий підхід: точку на поверхні тіла з умовним номером 2, що входить у контактну пару з вузлом, позначимо його як "*d*" тіла 1, будемо шукати по напрямку однієї з локальних координат СЕ тіла 2, продовженої при необхідності і за межі СЕ до вузла "*d*". Список поверхневих вузлів тіла 1 (точок "*d*") і приповерхневих СЕ тіла 2 буде задаватися у вхідному потоці.

Примітка 29.1. Нижче для визначеності, але без обмеження загальності, будемо припускати, що СЕ – тривимірний параметричний серендипового сімейства (див. п.20.4.3), а вздовж нормалі до поверхні СЕ, що входить у склад можливої ЗПК, розташовується локальна координата r_3 СЕ.

© К.М. Рудаков, 2025

Алгоритм виглядає так (див. також рис.29.1).

А. У циклі по вузлах "*d*" поверхні тіла 1 виявляється найближчий до нього (з урахуванням переміщень) вузол "*k*" поверхні тіла 2. Якщо з точністю до величини δ, обумовленою шорсткістю поверхонь і змащенням, їхні координати збігаються, то виявляється один зі СЕ, що містить на своїй поверхні вузол "*k*"; по його положенню в топологічній таблиці СЕ визначаються його локальні координати, робота алгоритму по даному вузлу "*d*" закінчується. Інакше:

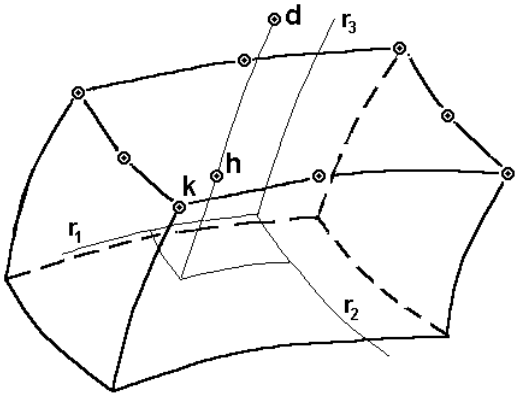


Рис.29.1. До визначення локальних координат точки *h*, що входить у контактну пару з вузлом "*d*"

Б. У циклі по приповерхнім СЕ тіла номер 2 визначаються номери СЕ, що містять вузол "*k*" (їх може бути декілька).

В. У циклі по обраним СЕ для чергового СЕ спочатку проводиться визначення локальних координат "чужого" для СЕ вузла "*d*" (див. рис.29.1). Зручно використовувати метод Ньютона-Канторовича, який призводить до системи рівнянь:

$$\{r\}^{(n+1)} = \{r\}^{(n)} - [L]^{-1}\{f\}^{(n)} \tag{29.1}$$

де n – номер ітерації; $[L]^{-1}$ – матриця, зворотна матриці $[L]$ з компонентами $L_{ij} = \partial f_i / \partial r_j$; $\{r\} = \{r_1, r_2, r_3\}^T$; $\{f\} = \{f_1, f_2, f_3\}^T$ – відповідно вектори локальних координат і значень функцій, що відбивають різницю координат

$$f_j = \sum_{m=1}^{M_e} \varphi_m^e \cdot (x^j)_m - \bar{x}^j , \tag{29.2}$$

де $j = 1,2,3$; $\varphi_m^e = \varphi_m^e(r_1, r_2, r_3)$ – функції форми m–го вузла СЕ; $(x^j)_m$, $\bar{x}^j$ – поточні координати вузлів СЕ і вузла "*d*" відповідно; M_e – кількість вузлів у СЕ. Згідно з (29.2)

$$L_{ij} = \sum_{m=1}^{M_e} \left(\frac{\partial \varphi_m^e}{\partial r_j} \cdot (x^i)_m \right) = \frac{\partial x^i}{\partial r_j} , \tag{29.3}$$

тому матриця $[L]$ точно відповідає транспонованій матриці Якобі СЕ (див. формулу (24.20)), що обчислюється стандартною процедурою при чисельному інтегруванні у СЕ. Початкові значення $r_3 = 1$, $r_1 = r_2 = 0$.

Примітка 29.2. Для двовимірного випадку розмірність у формулах (29.1) ... (29.3), а також у тексті, знижується на одиницю.

Створюється лічильник: число N прирівнюється кількості разів виконання нерівності $|r_j| > 1 + \varepsilon$, де $j = 1,2,3$; ε – оговорена погрішність. Якщо $N = 0$, то вузол "*d*" знаходиться в межах даного СЕ, робиться перехід на пункт Г. алгоритму. Якщо $N = 1$ і $r_3 > 1 + \varepsilon$, то СЕ, протилежний "чужому" вузлу "*d*", знайде-

© К.М. Рудаков, 2025

ний, але контакту немає, перехід на пункт А. алгоритму. У противному випадку та при $N>1$ виконується пункт В. для наступного СЕ.

Безрезультатне вичерпання списку СЕ означає, що "чужий" вузол "*d*" лежить осторонь від контактуючих поверхонь, виконується пункт А. алгоритму для наступного у списку вузла "*d*".

Г. Визначаються локальні координати точки "*h*" тіла номер 2, яка включається в контактну пару з вузлом "*d*" і лежить на поверхні СЕ: величини r_1 і r_2 з $|r_j|>1+\varepsilon$ – незмінні, але покладається $r_3=1$ (див. рис.29.1). Погрішність, що закладається при цьому (у результаті "перекриття" тіл), вибирається в подальших контактних ітераціях по уточненню ЗПК і узгодженню контактних ГУ.

Д. Пункти А. ... Г. повторюються, але номера тіл 1 і 2, тобто і поверхонь, міняються місцями.

Можуть бути реалізовані наступні можливості скорочення часу розрахунків. По-перше, оскільки початкові значення r_j відомі, то на першій ітерації можна застосувати спрощену підпрограму обчислення елементів матриці $[L]$. По-друге, у випадку білінійної апроксимації (об'ємний СЕ) і лінійної (двовимірний СЕ) поверхні СЕ, яка виходить на можливу ЗПК, досить одноразового застосування формули (29.1). По-третє, якщо "чужий" вузол відстоїть далеко від СЕ і поверхні СЕ істотно нелінійні, можлива повільна збіжність ітераційного процесу (29.1) або його розбіжність. Тому вичерпання, наприклад, десятьох ітерацій можна прийняти за пряме свідчення відсутності контакту вузла „*d*" з поверхнею даного СЕ (при $\varepsilon=0.01$ зазвичай використовується 2 … 4 ітерації).

У випадку інших типів СЕ завжди можна створити подібний алгоритм.

29.2. Алгоритм визначення напрямку переміщення і дотичного навантаження на контактній поверхні

При узгодженні контактуючих тіл у контактній парі на поверхні тіла при наявності контактного тертя необхідно обчислювати дотичні косинуси τ_j, що вказують напрямок дотичної складової зусилля або переміщення в точці поверхні контакту (див. постановку задачі у підрозділі 28.3). Позначимо як h_j, $j=1,2,3$ – відомі компоненти вектора $\vec{h}$ навантаження, або переміщення відносного зсуву в точці контакту. Тоді

$$h_\tau=(h_1^2+h_2^2+h_3^2-h_\nu^2)^{1/2}, \tag{29.4}$$

де h_τ – дотична і h_ν – нормальна складові розглянутого вектора, причому

$$h_\nu=h_1\nu_1+h_2\nu_2+h_3\nu_3. \tag{29.5}$$

Для визначення трьох компонент τ_j вектора τ складемо нелінійну систему з трьох рівнянь:

© К.М. Рудаков, 2025

$$\begin{cases} f_1 = \tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 - 1 = 0; \\ f_2 = h_1\tau_1 + h_2\tau_2 + h_3\tau_3 - h_\tau = 0; \\ f_3 = \nu_1\tau_1 + \nu_2\tau_2 + \nu_3\tau_3 = 0; \end{cases} \tag{29.6}$$

рівняння якої відповідно відбивають: умову нормування, проекцію вектора $\vec{h}$ на напрямок $\vec{\tau}$ і умову ортогональності векторів $\vec{\nu}$ і $\vec{\tau}$.

Розв'язування системи (29.6) доцільно провести ітераційним методом Ньютона-Канторовича. У матричному позначенні для $(n+1)$-й ітерації:

$$\{\tau\}^{(n+1)} = \{\tau\}^{(n)} - ([M]^{-1})^{(n)}\{f\}^{(n)} \tag{29.7}$$

де $\{\tau\} = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}^T$; $\{f\} = \{f_1, f_2, f_3\}^T$; компоненти $M_{ij} = \partial f_i / \partial \tau_j$. Матрицю $[M]^{-1}$ можна виразити в явному вигляді:

$$[M]^{-1} = \frac{1}{d}\begin{bmatrix} (h_2\nu_3 - h_3\nu_2)/2; & (\tau_3\nu_2 - \tau_2\nu_3); & (\tau_2 h_3 - \tau_3 h_2) \\ (h_3\nu_1 - h_1\nu_3)/2; & (\tau_1\nu_3 - \tau_3\nu_1); & (\tau_3 h_1 - \tau_1 h_3) \\ (h_1\nu_2 - h_2\nu_1)/2; & (\tau_2\nu_1 - \tau_1\nu_2); & (\tau_1 h_2 - \tau_2 h_1) \end{bmatrix}, \tag{29.8}$$

де $d = \tau_1(h_2\nu_3 - h_3\nu_2) - \tau_2(h_1\nu_3 - h_3\nu_1) + \tau_3(h_1\nu_2 - h_2\nu_1)$.

Початкові значення $\{\tau\}^{(0)}$ можливі будь-які, зв'язані умовою нормування, можна покласти $\tau_j^{(0)} = 1/\sqrt{3}$.

При практичній відсутності дотичної складової зазначених векторів формула (29.4) дає $h_\tau \approx 0$ і система (29.6) не може мати розв'язку. Цей випадок необхідно врахувати програмно. Зручно при $h_\tau \approx 0$ покласти $\tau_j = 0$, $j = 1,2,3$.

При плоскій і осесиметричній постановці контактної задачі з виразів (29.4) … (29.6) виключаються компоненти з індексом "3". Перший вираз (29.6) має самостійний розв'язок через синус і косинус деякого кута. Розв'язуючи лінійну систему з двох рівнянь, що залишилися від (29.6), одержимо, що

$$\tau_1 = \frac{h_\tau \sin\beta}{h_1 \sin\beta - h_2 \cos\beta}; \quad \tau_2 = -\frac{h_\tau \cos\beta}{h_1 \sin\beta - h_2 \cos\beta}, \tag{29.9}$$

де під кутом β розуміється кут між напрямком вектора-нормалі в розглянутій точці поверхні СЕ і напрямком глобальної осі x^1. Ситуація, коли в (29.9) знаменник вироджений, можлива при відсутності дотичної складової розглянутого вектора, при цьому для наступного використання зручно покласти $\tau_1 = \tau_2 = 0$.

29.3 Алгоритм розрахунку можливих жорсткого зсуву і повороту контактної поверхні тіла, не обумовлених контактними умовами

Як уже відзначалося в підрозділі 29.2, існує клас контактних задач, у яких одне з контактуючих тіл обмежено в переміщеннях тільки зоною контакту. Приклад: лопатка в системі "диск – лопатка" турбіни. Призначимо цьому тілу номер 2.

© К.М. Рудаков, 2025

На парній контактній ітерації алгоритму сполучення розв'язків у тілі 2 відсутня поверхня S_u з ГУ 1-го роду (кінематичними), тому що на контактній поверхні S_K ГУ задаються у навантаженнях. На перший погляд, тим самим виключається сама можливість розв'язувати подібні задачі за методом сполучення розв'язків.

Для усунення невизначеності в русі цього тіла запропоновано поверхню S_u вводити штучно: задавати мінімально достатню кількість ступенів свободи вузлів, у яких призначати попереднє визначені переміщення. Відповідно до принципу Сен-Венана вузли варто вибирати якнайдалі від зони контакту. З'являється принципова можливість розв'язування крайових задач такого класу, алгоритм здобуває універсальність.

У результаті штучного введення S_u як подалі від S_K сама зона контакту може одержати надмірний жорсткий зсув і (чи) поворот. Щоб не втратити зону контакту, необхідно передбачити корекцію положення тіла 2, для чого варто спочатку визначити параметри жорсткого зсуву і повороту S_K, потім провести зворотний жорсткий зсув і поворот вже всього тіла 2. Привласнимо цьому випадку номер один.

Аналогічну корекцію бажано проводити перед першою контактною ітерацією алгоритму. Це обумовлено тим, що після попереднього навантаження тіла силами, зокрема в можливих зонах контакту тіл, де такі сили ще точно не визначені і будуть знайдені лише як результат розв'язування крайової задачі, тіла можуть зайняти погано погоджені положення (але поверхні контакту і (чи) перекриття в можливій ЗПК повинні існувати!). Це буде випадком за номером два.

У математичному плані йдеться про перетворення координат у кожної *i*-й точці тіла за формулою

$$\{\breve{x}\}_i = [A]\{x^C\}_i + \{\widetilde{U}\}, \qquad (29.10)$$

де $\{\breve{x}\}_i = \{\breve{x},\breve{y},\breve{z}\}_i^T$, $\{x^C\}_i = \{x^C, y^C, z^C\}_i^T$ – вектори координат у "перетвореній" і "старій" конфігурації відповідно; $[A]$ – загальна для тіла матриця жорсткого повороту; $\{\widetilde{U}\} = \{\widetilde{U},\widetilde{V},\widetilde{W}\}^T$ – загальний вектор жорсткого зсуву.

Необхідно визначити компоненти матриці $[A]$ і вектору $\{\widetilde{U}\}$ виходячи зі значень координат у "старій" конфігурації $\{x^C\}_i$ і "новій" $\{x^H\}_i$.

Для випадку номер один остання визначається як $\{x^H\}_i = \{x^C\}_i + \{\Delta U\}_i$, де $\{\Delta U\}_i = \{\Delta U, \Delta V, \Delta W\}_i^T$ – вектор прирощень переміщень за розглянутий відрізок часу для *i-й* точки тіла. Для випадку номер два "старою" конфігурацією є поточна конфігурація зон контакту і (чи) перекриття тіла 2, жорстким зсувом і поворотом якого і буде досягатися узгодження контактуючих тіл; "новою" – поточна конфігурація тих же зон, але тіла 1.

За "перетворені" координати приймемо такі $\{\breve{x}\}_i$, котрі дають мінімальне значення квадратичному функціоналу, зібраному відповідно до методу найменших квадратів, тобто

© К.М. Рудаков, 2025

$$F = \sum_{i=1}^{N} [(\breve{x}_i - x_i^H)^2 + (\breve{y}_i - y_i^H)^2 + (\breve{z}_i - z_i^H)^2] \Rightarrow \min \qquad (29.11)$$

де N – кількість розглянутих точок тіла (із зони поверхні контакту та її найближчого околу, якщо це необхідно).

Інакше кажучи, тіло після жорсткого зсуву і повороту повинне в N точках тіла щонайкраще відповідати своєму здеформованому ("новому") положенню.

Як відомо, математично жорсткий поворот тіла може бути здійснений декількома способами. Використаємо найбільш загальний, що не має виключень, варіант (Л. Ейлера). Вводяться поняття загальної осі обертання тіла і кута обертання навколо цієї осі ω, а також направляючих косинусів C_l, $l = 1,2,3$ позитивного напрямку загальної осі обертання, причому

$$\cos\omega = (a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1)/2; \qquad (29.12)$$

$$C_1 = \frac{a_{32} - a_{23}}{2\sin\omega}; \quad C_2 = \frac{a_{13} - a_{31}}{2\sin\omega} \quad C_3 = \frac{a_{21} - a_{12}}{2\sin\omega}. \qquad (29.13)$$

Тут a_{mn} – компоненти загальної матриці повороту $[A]$; $m,n = 1,2,3$. Відомо, що лише три з дев'яти компонент цієї матриці незалежні. Розглянемо чотири симетричних параметри Ейлера

$$\lambda = C_1 \sin\frac{\omega}{2}; \quad \mu = C_2 \sin\frac{\omega}{2}; \quad \nu = C_3 \sin\frac{\omega}{2}; \quad \rho = \cos\frac{\omega}{2}, \qquad (29.14)$$

зв'язаних умовою

$$\rho^2 = 1 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2. \qquad (29.15)$$

Тоді компоненти матриці $[A]$ запишуться у вигляді

$$\begin{aligned} &a_{11} = 1 - 2\mu^2 - 2\nu^2; \quad a_{12} = 2(\lambda\mu - \nu\rho); \quad a_{13} = 2(\nu\lambda + \mu\rho); \\ &a_{21} = 2(\lambda\mu + \nu\rho); \quad a_{22} = 1 - 2\nu^2 - 2\lambda^2; \quad a_{23} = 2(\mu\nu - \lambda\rho); \\ &a_{31} = 2(\nu\lambda - \mu\rho); \quad a_{32} = 2(\mu\nu + \lambda\rho); \quad a_{33} = 1 - 2\lambda^2 - 2\mu^2. \end{aligned} \qquad (29.16)$$

Підставимо $\breve{x}_i$, $\breve{y}_i$ і $\breve{z}_i$ з урахуванням (29.10) у (29.11), потім мінімізуємо функціонал узяттям часткових похідних і прирівнюванням їх до нуля:

$$\begin{aligned} &\partial F / \partial \tilde{U} = 0; \quad \partial F / \partial \tilde{V} = 0; \quad \partial F / \partial \tilde{W} = 0; \\ &\partial F / \partial \lambda = 0; \quad \partial F / \partial \mu = 0; \quad \partial F / \partial \nu = 0 \end{aligned} \qquad (29.17)$$

з урахуванням зв'язку (29.15). Приводячи подібні, одержимо, що всі коефіцієнти при $\sum (x_i^C)^2$; $\sum (y_i^C)^2$; $\sum (z_i^C)^2$; $\sum (x_i^C y_i^C)$; $\sum (y_i^C z_i^C)$; $\sum (z_i^C x_i^C)$ дорівнюють нулю. Тут і нижче $\sum$ – це $\sum_{i=1}^{N}$. Остаточно результати запишемо у вигляді шести функцій:

$$f_1 = \tilde{U} + [(1 - 2\mu^2 - 2\nu^2)\sum x_i^C + 2(\lambda\mu - \nu\rho)\sum y_i^C + 2(\nu\lambda + \mu\rho)\sum z_i^C - \sum x_i^H]/N = 0; \qquad (29.18)$$

$$f_2 = \tilde{V} + [2(\lambda\mu + \nu\rho)\sum x_i^C + (1 - 2\nu^2 - 2\lambda^2)\sum y_i^C + 2(\mu\nu - \lambda\rho)\sum z_i^C - \sum y_i^H]/N = 0; \qquad (29.19)$$

$$f_3 = \tilde{W} + [2(\nu\lambda - \mu\rho)\sum x_i^C + 2(\mu\nu + \lambda\rho)\sum y_i^C + (1 - 2\lambda^2 - 2\mu^2)\sum z_i^C - \sum z_i^H]/N = 0; \qquad (29.20)$$

$$f_4 = 2\lambda\rho(\tilde{V}\sum y_i^C - \sum y_i^C y_i^H + \tilde{W}\sum z_i^C - \sum z_i^C z_i^H) -$$

© К.М. Рудаков, 2025

$$-[(\mu\rho+\nu\lambda)(\widetilde{U}\sum y_i^C-\sum y_i^C x_i^H)+(\nu\rho-\mu\lambda)(\widetilde{U}\sum z_i^C-\sum z_i^C x_i^H)+$$
$$+(\mu\rho-\nu\lambda)(\widetilde{V}\sum x_i^C-\sum x_i^C y_i^H)+(\nu\rho+\mu\lambda)(\widetilde{W}\sum x_i^C-\sum x_i^C z_i^H)+$$
$$+(\lambda^2-\rho^2)(\widetilde{V}\sum z_i^C-\sum z_i^C y_i^H-\widetilde{W}\sum y_i^C+\sum y_i^C z_i^H)]=0; \qquad (29.21)$$

$$f_5=2\mu\rho(\widetilde{W}\sum z_i^C-\sum z_i^C z_i^H+\widetilde{U}\sum x_i^C-\sum x_i^C x_i^H)-$$
$$-[(\nu\rho+\lambda\mu)(\widetilde{V}\sum z_i^C-\sum z_i^C y_i^H)+(\lambda\rho-\nu\mu)(\widetilde{V}\sum x_i^C-\sum x_i^C y_i^H)+$$
$$+(\nu\rho-\lambda\mu)(\widetilde{W}\sum y_i^C-\sum y_i^C z_i^H)+(\lambda\rho+\nu\mu)(\widetilde{U}\sum y_i^C-\sum y_i^C x_i^H)+$$
$$+(\mu^2-\rho^2)(\widetilde{W}\sum x_i^C-\sum x_i^C z_i^H-\widetilde{U}\sum z_i^C+\sum z_i^C x_i^H)]=0; \qquad (29.22)$$

$$f_6=2\nu\rho(\widetilde{U}\sum x_i^C-\sum x_i^C x_i^H+\widetilde{V}\sum y_i^C-\sum y_i^C y_i^H)-$$
$$-[(\lambda\rho+\mu\nu)(\widetilde{W}\sum x_i^C-\sum x_i^C z_i^H)+(\mu\rho-\lambda\nu)(\widetilde{W}\sum y_i^C-\sum y_i^C z_i^H)+$$
$$+(\lambda\rho-\mu\nu)(\widetilde{U}\sum z_i^C-\sum z_i^C x_i^H)+(\mu\rho+\lambda\nu)(\widetilde{V}\sum z_i^C-\sum z_i^C y_i^H)+$$
$$+(\nu^2-\rho^2)(\widetilde{U}\sum y_i^C-\sum y_i^C x_i^H-\widetilde{V}\sum x_i^C+\sum x_i^C y_i^H)]=0. \qquad (29.23)$$

До них додамо сьому функцію, отриману з (29.15):

$$f_7=1-\lambda^2-\mu^2-\nu^2-\rho^2=0. \qquad (29.24)$$

Вирази (29.18) ... (29.24) складають нелінійну систему із семи рівнянь щодо семи невідомих: $\widetilde{U},\widetilde{V},\widetilde{W},\lambda,\mu,\nu,\rho$. Її розв'язування проведемо модифікованим методом Ньютона-Конторовича, який призводить до ітераційного розв'язування системи рівнянь:

$$\{r\}^{(n+1)}=\{r\}^{(n)}-[L^0]^{-1}\{f\}^{(n)}, \qquad (29.25)$$

де n – номер ітерації; $[L^0]^{-1}$ – матриця, зворотна від матриці $[L^0]$ з компонентами $L_{ij}^0=(\partial f_i/\partial r_j)^0$; $i,j=1,2,...,7$, обчисленими з використанням початкових значень; $\{r\}=\{\widetilde{U},\widetilde{V},\widetilde{W},\lambda,\mu,\nu,\rho\}^T$, $\{f\}=\{f_1,f_2,...,f_7\}^T$.

Зручно прийняти такі початкові значення:

$$\widetilde{U}^{(0)}=(\sum x_i^H-\sum x_i^C)/N;\quad \widetilde{V}^{(0)}=(\sum y_i^H-\sum y_i^C)/N;$$
$$\widetilde{W}^{(0)}=(\sum z_i^H-\sum z_i^C)/N;\qquad \lambda^{(0)}=\mu^{(0)}=\nu^{(0)}=0. \qquad (29.26)$$

Тоді $\rho^{(0)}=1$. Згідно з (29.14) значення $\rho=1$ відповідає нульовому куту повороту ω. При цьому $\{r\}^{(0)}=\{\widetilde{U}^{(0)},\widetilde{V}^{(0)},\widetilde{W}^{(0)},0,0,0,1\}^T$; $\{f\}^{(0)}=\{0,0,0,D^0,E^0,G^0,0\}^T$, де позначені:

$$D^0=\widetilde{V}^{(0)}\sum z_i^C-\sum z_i^C y_i^H-\widetilde{W}^{(0)}\sum y_i^C-\sum y_i^C z_i^H;$$
$$E^0=\widetilde{W}^{(0)}\sum x_i^C-\sum x_i^C z_i^H-\widetilde{U}^{(0)}\sum z_i^C-\sum z_i^C x_i^H; \qquad (29.27)$$
$$G^0=\widetilde{U}^{(0)}\sum y_i^C-\sum y_i^C x_i^H-\widetilde{V}^{(0)}\sum x_i^C-\sum x_i^C y_i^H.$$

Ненульові компоненти матриці $[L^0]$ мають наступні вирази:

$$L_{11}^0=L_{22}^0=L_{33}^0=1;\ L_{15}^0=(2/N)\sum z_i^C;\ L_{16}^0=-(2/N)\sum y_i^C;\ L_{24}^0=-(2/N)\sum z_i^C;$$
$$L_{26}^0=(2/N)\sum x_i^C;\ L_{34}^0=(2/N)\sum y_i^C;\ L_{35}^0=-(2/N)\sum x_i^C;\ L_{42}^0=\sum z_i^C;\ L_{43}^0=-\sum y_i^C;$$
$$L_{44}^0=2(\widetilde{V}^{(0)}\sum y_i^C-\sum y_i^C y_i^H+\widetilde{W}^{(0)}\sum z_i^C-\sum z_i^C z_i^H);$$

© К.М. Рудаков, 2025

$$L^0_{45} = -(\widetilde{U}^{(0)}\sum y_i^C - \sum y_i^C x_i^H + \widetilde{V}^{(0)}\sum x_i^C - \sum x_i^C y_i^H);$$
$$L^0_{46} = -(\widetilde{U}^{(0)}\sum z_i^C - \sum z_i^C x_i^H + \widetilde{W}^{(0)}\sum x_i^C - \sum x_i^C z_i^H);$$
$$L^0_{47} = 2(\widetilde{V}^{(0)}\sum z_i^C - \sum z_i^C y_i^H - \widetilde{W}^{(0)}\sum y_i^C + \sum y_i^C z_i^H);\ L^0_{51} = -\sum z_i^C;\ L^0_{53} = \sum x_i^C;$$
$$L^0_{54} = -(\widetilde{V}^{(0)}\sum x_i^C - \sum x_i^C y_i^H + \widetilde{U}^{(0)}\sum y_i^C - \sum y_i^C x_i^H);$$
$$L^0_{55} = 2(\widetilde{W}^{(0)}\sum z_i^C - \sum z_i^C z_i^H + \widetilde{U}^{(0)}\sum x_i^C - \sum x_i^C x_i^H); \qquad (29.28)$$
$$L^0_{56} = -(\widetilde{V}^{(0)}\sum z_i^C - \sum z_i^C y_i^H + \widetilde{W}^{(0)}\sum y_i^C - \sum y_i^C z_i^H);$$
$$L^0_{57} = 2(\widetilde{W}^{(0)}\sum x_i^C - \sum x_i^C z_i^H - \widetilde{U}^{(0)}\sum z_i^C + \sum z_i^C x_i^H);\ L^0_{61} = \sum y_i^C;\ L^0_{63} = -\sum x_i^C;$$
$$L^0_{64} = -(\widetilde{W}^{(0)}\sum x_i^C - \sum x_i^C z_i^H + \widetilde{U}^{(0)}\sum z_i^C - \sum z_i^C x_i^H);$$
$$L^0_{65} = -(\widetilde{W}^{(0)}\sum y_i^C - \sum y_i^C z_i^H + \widetilde{V}^{(0)}\sum z_i^C - \sum z_i^C y_i^H);$$
$$L^0_{66} = 2(\widetilde{U}^{(0)}\sum x_i^C - \sum x_i^C x_i^H + \widetilde{V}^{(0)}\sum y_i^C - \sum y_i^C y_i^H);$$
$$L^0_{67} = 2(\widetilde{U}^{(0)}\sum y_i^C - \sum y_i^C x_i^H - \widetilde{V}^{(0)}\sum x_i^C + \sum x_i^C y_i^H);\ L^0_{77} = -2$$

За критерій закінчення ітерацій можна використовувати співвідношення:

$$\left|q^{(n+1)} - q^{(n)}\right| \le \varepsilon\left|q^{(n+1)}\right|, \qquad (29.29)$$

де q – значення норми вектора розв'язку на даній ітерації; n – номер ітерації; ε – точність, що задається. Невиконання умови (29.29) повинне спричиняти нову ітерацію. Чисельні експерименти показують, що при $\varepsilon = 10^{-5}$ та при доволі великих кутах повороту ω (до 29 градусів) кількість ітерацій біля п'яти, що прийнятно.

Після знаходження $[A]$ та $\{\widetilde{U}\}$ у першому випадку потрібно провести зворотні жорсткі зсув і поворот. Але одержимо вже не $\{x^C\}$, тому що тіло одержало, крім жорсткого зсуву і повороту, додаткові деформації, розглядався не весь об'єм тіла, а зона контакту та її найближчий окіл; та й метод визначення $[A]$ і $\{\widetilde{U}\}$ застосовувався наближений. З (29.10), змінюючи позначення $\{x^C\}$ на $\{x^B\}$ – "повернутий" стан, одержимо для кожного m -го вузла тіла:

$$\{x^B\}_m = [A]^{-1}(\{x^H\}_m - \{\widetilde{U}\}). \qquad (29.30)$$

Оскільки йдеться тільки про повертання (без відбиття), то $\det[A] = 1$. У цьому випадку $[A]^{-1} = [A]^T$, тому що матриця $[A]$ – ортогональна і не вимагає при своєму обертанні обчислень. Тобто достатньо операції транспонування.

Необхідно відзначити, що іноді необхідно провести описану процедуру кілька разів, щоб одержати добрий результат. Це буває тоді, коли жорсткий зсув відбувається у напрямку, що значно відмінний від напрямку нормалі до поверхні контакту. Наприклад, лопатка у замку "хвіст ластівки" при швидкому обертанні диску ГТД зміщається майже у радіальному напрямку, а поверхні контакту повернуті приблизно на 30 градусів від цього напрямку.

У другому випадку достатньо провести операцію (29.10).

Ще раз відзначимо, що для визначення $[A]$ і $\{\widetilde{U}\}$ варто використовувати тільки точки зони контакту, а також (при недостатньої кількості таких точок)

© К.М. Рудаков, 2025

тієї частини об'єму і поверхні тіла, що безпосередньо прилягає до зони контакту. Тому одержимо параметри, що визначають жорсткий зсув і поворот саме цієї частини тіла, які потім будуть віднесені до всього тіла.

У першому випадку можливо й інше рішення даної проблеми.

Після парної контактної ітерації внаслідок неточного завдання силових граничних умов, а саме завдання надмірного контактного навантаження, можна "втратити" зону контакту: підрахований по формулі натяг виявиться у всіх точках розглянутої зони контакту негативним, тобто зазором.

Щоб не втратити зону контакту після парної контактної ітерації, запропоновано після такої ітерації зону контакту не уточнювати за геометричними ознаками (виходячи з умов спільності деформацій зон контакту), а проводити уточнення S_K лише за знаком контактних напружень (вузли з позитивними значеннями $P_{\nu_{(j)}}$ виключаються зі списку контактних). Уточнення зони контакту за геометричними ознаками проводити лише після непарних контактних ітерацій, що, як не дивно, практично не приводить до збільшення кількості контактних ітерацій. Тоді відпадає необхідність (можливо, не у всіх випадках) у проведенні оцінки жорсткого зсуву і повороту зони контакту, корекції положення всього тіла після контактної ітерації.

34.4. Про визначення деяких фізичних величин на контактній поверхні тіла

При розв'язуванні контактної задачі теплопровідності виникає необхідність у визначенні на контактній поверхні СЕ величин температури і теплового потоку виходячи з вузлових значень температур і заданих локальних координат точки поверхні СЕ.

Значення температури підраховується із застосуванням формули типу (20.7), у даному випадку:

$$\theta = \sum_{m=1}^{M_e} \left(\varphi_m^e(r_j) \cdot \theta_m \right), \tag{29.31}$$

де θ_m – вузлові значення температури; M_e – кількість вузлів у СЕ; φ_m^e – базисні функції m–го вузла СЕ з номером e.

Для визначення величини теплового потоку спочатку в зазначеній точці за формулою (24.124) обчислюються компоненти ν_n, $n = 1,2,3$ одиничного вектори-нормалі до поверхні СЕ $\vec{\nu}$. Потім підраховується значення теплового потоку:

$$q = \lambda(\theta)\{\nu\}^T [B]\{\theta\}_e \tag{29.32}$$

де $\lambda(\theta)$ – коефіцієнт теплопровідності; $\{\nu\}$ – вектор нормалі до поверхні СЕ; $\{\theta\}_e$ – вектор вузлових значень температур у СЕ; $[B]$ – матриця диференціювання в задачі теплопровідності типу (24.12), що містить блоки

$$[B]_{m\ ДСК} = \left[p_{1m};\quad p_{2m};\quad p_{3m} \right]^T;\quad [B]_{m\ ЦСК} = \left[p_{1m};\quad \tilde{p}_{2m};\quad p_{3m} \right]^T, \tag{29.33}$$

© К.М. Рудаков, 2025

а компоненти p_{jm} відповідають формулі (24.17).

При розв'язуванні задачі про контакт тіл, що деформуються, виникає необхідність у визначенні на контактній поверхні СЕ величин переміщень, напружень і миттєвої границі плинності матеріалу в заданих локальних координатах точки поверхні СЕ. Значення переміщення підраховується зі застосуванням формули (22.3), тобто $\{u\}=[\phi]\{q\}_e$ відразу. Для обчислення величин напружень і миттєвої границі плинності матеріалу необхідно попередньо підрахувати їхні вузлові значення, оскільки вони зазвичай відомі (обчислюються) лише в Гауссових точках інтегрування по об'єму СЕ, тобто усередині СЕ. Цій проблемі присвячений підрозділ 24.9.

Контрольні питання до підрозділу 29.1

1. Покажіть, яким чином отримується система рівнянь (29.1).

Контрольні питання до підрозділу 29.2

1. Отримайте компоненти матриці (29.8) з системи рівнянь (29.6).
2. Отримайте вирази (29.9) з системи рівнянь (29.6).

Контрольні питання до підрозділу 29.3

1. Пояснить появу функціонала *F*.
2. Чому систему нелінійних рівнянь (29.18) ... (29.24) ефективно розв'язувати модифікованим методом Ньютона-Канторовича, який має невеличку швидкість збіжності?
3. Пояснить, чому "у другому випадку достатньо провести операцію (29.10)"?

© К.М. Рудаков, 2025

Частина X

ДОПОМІЖНІ АЛГОРИТМИ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Розділ 30

АЛГОРИТМИ ТРИВИМІРНОЇ ГРАФІКИ ВІДОБРАЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ СКІНЧЕННО-ЕЛЕМЕНТНИХ РОЗРАХУНКІВ

30.1. Графічні режими ПЕОМ

У графічному відображенні результатів скінченно-елементних розрахунків досить тривалий час орієнтувалися на використання тільки приладів, що друкують на папері. Це зумовлювалося спочатку відсутністю, потім – слабкими можливостями комп'ютерних моніторів. Але багато проблем відображення виявилися загальними, тобто їх було вирішено ще до появи моніторів сучасного рівня. Принципово важливою стала поява багатокольорових моніторів. Спочатку це були 4-х кольорові CGA, потім 16-ти кольорові CGA та EGA, 256-ти кольорові з відтінками VGA, до 16.8 мільйонів кольорів і їхніх відтінків SVGA, XGA, UXGA, QXGA, тощо. Нині монітори зазвичай працюють у режимах SVGA, UXGA, QXGA, що цілком достатньо для реалістичного зображення.

Є декілька методів передавання сигналу в монітор:

- композитний (аналоговий сигнал по одній лінії, як в телевізор);
- цифровий: 4 або 6 цифрових ліній, серед яких одна – інтенсивності світла. Реалізовано в CGA та EGA, кольоровий режим до 16-ти кольорів;
- аналоговий (4 аналогові лінії: 3 – кольору (червоний – R, зелений – G, синій – B), 1 – інтенсивності світла. Вони регулюються рівнем напруги. Реалізовано в VGA (по 4 рівня, 256 кольорів), SVGA (стандарт RGB – по 256 рівнів, приблизно 16.8 мільйонів кольорів та відтінків) та інших графічних режимах;
- аналогово-цифровий – стандарт DVI (Digital Visual Interface: Digital (DVI-D), Analog (DVI-A) або Integrated (DVI-I), 1999 р.): 3 канали RGB, 1 канал тактової частоти; канал звука; сигнал UXGA (до 1600x1200 пікселів при співвідношенні 4:3 або 1920x1080 при 16:9, частота оновлення 60 Гц), а також стандарт Dual Link DVI (дубльовані канали RGB) – сигнал QXGA (до 2048x1536 при 4:3, 60 Гц). Не потребує подвійного перетворенні сигналу Digital-Analog-Digital у моніторах, що не використовують електронно-променеву трубку.

© К.М. Рудаков, 2025

Монітори ПЕОМ – растрові. Зображення формується сукупністю точок екрана (можна вважати, що це є пікселі), які світяться з різною яскравістю, різними кольорами та їхніми відтінками. Крім того, монітори виконуються на основі:

- електронно-променевої трубки (Cathode Ray Tube, **CRT**). Застарілі;
- світлових діодів (LED display, **LED**);
- технології рідких кристалів (Liquid Crystal Display, **LCD**) з активною матрицею (Thin-Film Transistor, **TFT**). Найбільш поширені;
- плазмових колб (Plasma Display Panel, **PDP**) – великі, енергоємні.

Графічні спроможності графічної системи ЕОМ є сумою, а в деяких характеристиках – "перетином" можливостей монітора та відеокарти ЕОМ.

Основні характеристики монітора:

- розмір екрана по діагоналі в дюймах: від 9 (на ноутбуках) до 24 дюйма (стандарт) і вище, а також формат екрана: 4:3 (стандартний), 16:9, інші;
- тип матриці. Для LCD TFT-моніторів: TN (швидкі, якість кольорової передачі залежить від кута огляду), IPS, S-IPS, P-IPS, PVA, S-PVA, P-MVA (повільніші, ніж TN, відмінна якість кольорової передачі при будь-якому куті огляду, дорожчі, ніж TN), AMO-LED (супершвидкі, кольорова суперякість, але з часом тускніють), Sony CLEDIS (Crystal LED Integrated Structure – на основі звичайних світлових діодів, супершвидкі, кольорова суперякість);
- кут огляду (без оговорених стандартом спотворень): від 110/110 (TN) до 178/178 (всі IPS, PVA, MVA, LED) і навіть 180 (CLEDIS) градусів;
- максимально допустима частота регенерації (поновлення) кадру: від 56 Гц до 100 Гц (і навіть до 600 в PDP). Чим вище частота, тим природніше динамічне зображення, тим менше втомлюються очі користувача;
- розрізняльна спроможність (максимально можлива кількість пікселів, вздовж горизонталі та вертикалі). Для VGA це 640x480, SVGA, UXGA, QXGA – 800x600, 1024x768, 1280x1024, 2048x1536, тощо. Відношення кількості пікселів по горизонталі до кількості пікселів по вертикалі таке ж, як і відношення розмірів екрана за цими напрямками. Це дозволяє одержувати неспотворене зображення: коло видно як коло, а не еліпс;
- стандартний для даного LCD TFT-монітора режим, наприклад, 1920x1080/60 для Full HD 16:9;
- максимальна контрастність, наприклад 15000:1;
- час відклику (переходу світіння точки від чорного к білому), у мілісекундах: від частки (LED), одиниць (TN) до (реально) 5…20 (S-IPS, S-PVA);
- розмір пікселя: від 0.35 мм (VGA) до 0.25 (SVGA) і навіть 0.055 (CLEDIS) мм;
- типу інформаційного сигналу та органів керування монітором (аналогові, цифрові, аналогово-цифрові);
- відсутність "інтерліву" при розгортці зображення (черезрядкової розгортки) – NI, наявність захисту від випромінювання – LR; відповідність стандарту хвильового випромінювання (CRT-монітори) – MPR II, TCO.

© К.М. Рудаков, 2025

Основні характеристики відеокарти:

- об’єм відеопам’яті: для VGA і вище – від 512 Кбт до кількох десятків, сотень та тисяч Мбт;
- тип відеопам’яті (DDR-2, DDR-3, GDDR-5), характерний технологічний розмір її елементів (80, 60, 40, … нм) та швидкодія, наприклад, 775/4000 MHz;
- список частот регенерації кадру (як і у монітора): від 25 до сотень Гц;
- інтерфейс (PCI, AGP, PCI-E) та розмір фронту сигналу (64, …, 512 біт);
- кількість кольорів та їх відтінків, інакше – глибина кольору. При виділенні на піксель 4-х розрядів (бітів) відеопам’яті – 16 кольорів, при 8 – 256, при 16 розрядах – High Color (64 Кбт кольорів і відтінків), при 32 розрядах – True Color (≈ 16.8 мільйонів кольорів і відтінків). Аналогічна характеристика є в моніторах;
- наявність та степінь підтримки графічного режиму OpenGL на апаратному рівні.

При "завантаженні" ЕОМ завжди призначається *відеорежим*, в якому працює монітор і відеокарта. Це може бути *алфавітно-цифровий* відеорежим або *графічний*. В алфавітно-цифрових відеорежимах мінімальний об’єкт відображення – знак. Під будь-який знак (літера, число, знаки пунктуації та інші символи) виділяється прямокутне поле *однакового* розміру. Кількість таких полів може бути різною, найчастіше використовують 80 колонок і 25 рядків. В графічних режимах мінімальний об’єкт відображення – піксель. Завжди є можливість призначити відеорежим від максимального, що допускається монітором і відеокартою одночасно, до мінімального існуючого.

30.2. Координатні системи комп’ютерної графіки

При побудові на екрані монітора графічного "тривимірного" зображення ("сцени") використовуються чотири системи координат:

- *вихідні* координати (декартові, циліндричні або інші) – частина вхідної інформації про геометрію тіла;
- *світові* координати x, y, z – *декартові* (можуть бути нормованими) координати точок (вузлів) тіла, причому початок координат зазвичай поміщується у геометричний центр об’єкта зображення;
- *видові* координати $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ – ті ж світові координати, але повернуті так, щоб вісь $\bar{z}$ "дивилася" на точку огляду (або від неї), вісь $\bar{x}$ була горизонтальною (зліва направо), а $\bar{y}$ – вертикальною (згори вниз або навпаки) відносно позиції огляду;
- *віконні* (*усічені нормовані*) координати $\tilde{x}, \tilde{y}$ – відображення видових координат на площину вікна графічної програми (на екрані монітора) в цілих величинах (пікселях), причому $\tilde{x}_{\min} \geq 0$; $\tilde{y}_{\min} \geq 0$, а $\tilde{x}_{\max}$ і $\tilde{y}_{\max}$ не перевищують кількості пікселів у вікні графічної програми по горизонталі і вертикалі відповідно (мінус одиниця). Якщо створення ефекту перспективи не передбачено, то фактично $\tilde{x}, \tilde{y}$ – відмасштабовані та (за звичай) зсунуті видові координати $\bar{x}, \bar{y}$.

© К.М. Рудаков, 2025

При створенні ефекту перспективи віконні координати $\tilde{x}, \tilde{y}$ залежать також і від величини видової координати $\bar{z}$ (лінійна залежність).

Процедура відображення точки тіла (світові координати) на екран монітора (віконні координати) – це послідовність таких дій:

- призначення графічного відеорежиму;
- перерахунок координат;
- призначення кольорової палітри та (або) номера кольору точці тіла;
- вміщення інформації про колір точки у відповідне пікселю місце у відеосторінці відеопам'яті;
- після заповнення відеосторінки – відображення її на екрані.

30.3. Відображення геометрії або скінченно-елементної сітки на екрані монітора у вигляді каркасної сітки

Каркасна сітка скінченно-елементної сітки – зображення ліній, що з'єднують вузли скінченно-елементної сітки (СЕС). Це буває корисно при створенні скінченно-елементної сітки для контролю за її якістю, для відображення на екрані номерів вузлів (інформація для запровадження граничних умов) тощо. Розрізняють "прозору" каркасну сітку (з усіма лініями) та "непрозору", на якій усунено невидні з точки огляду ребра скінченних елементів.

Стисло алгоритм каркасного відображення скінченно-елементної сітки на екрані монітора (у вигляді каркасної сітки) є таким:

а) створення масиву зв'язків вузлів (пари вузлів: початок і кінець лінії);

б) призначення графічного відеорежиму, призначення і встановлення кольорової палітри, призначення кольору ліній каркасної моделі;

в) створення *світових* координат вузлів: перерахунок координат вузлів у декартову систему координат (за необхідності); знаходження значень $x_{\min}, x_{\max}, y_{\min}, y_{\max}, z_{\min}, z_{\max}$ вузлів тіла, координат геометричного центру тіла, максимального розміру поперечника тіла; паралельний перенос кординатної системи в геометричний центр тіла;

г) призначення координат точки огляду і перерахунок світових координат вузлів у *видові* координати;

д) підрахунок коефіцієнтів масштабування з урахуванням збереження пропорцій зображення, розмірів розглядуваної частини скінченно-елементної сітки, а також розміру вікна зображення (в пікселях);

е) перерахунок видових координат вузлів у *віконні* зі створенням ефекту перспективи або без нього, з усіканням зображення до розмірів "сцени";

ж) знаходження (для "непрозорої" каркасної сітки) видних і невидних ліній сполучення вузлів (ребер) та/або їх частин;

з) проведення на екрані ліній сполучення вузлів з урахуванням (за необхідності) відсікання невидних частин ліній та при їхньому виході за поле вікна.

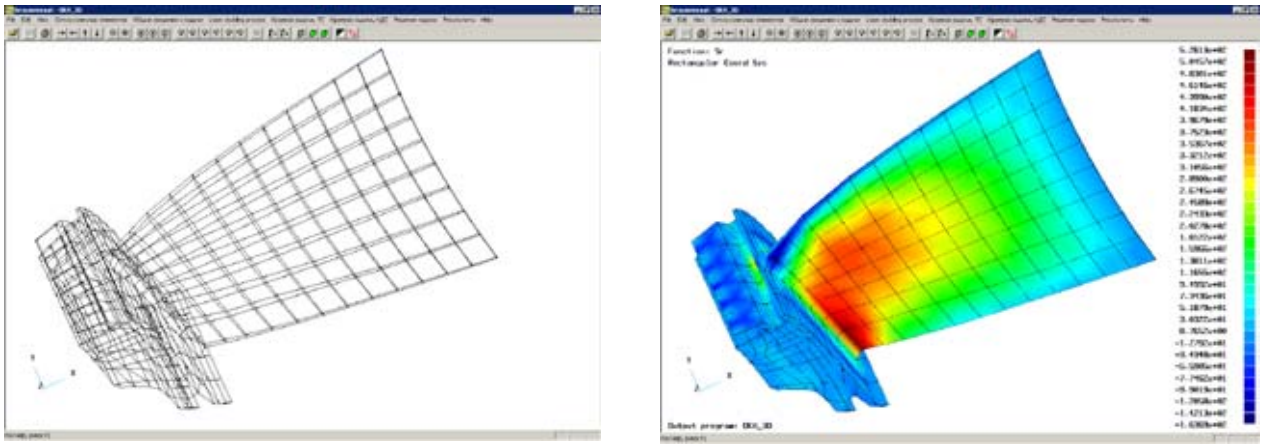
© К.М. Рудаков, 2025

Крім того, додатково можна висвітлювати на екрані номери вузлів і СЕ, на які вкаже курсор "миші", змінювати масштаб зображення, "вирізати" означену частину зображення і проводити інші маніпуляції.

За необхідності розгляду каркасної скінченно-елементної сітки з іншої точки огляду повторюються пункти, починаючи з пункту г).

На рис.30.1-а показано прозору каркасну скінченно-елементну сітку сектора диска ГТД з лопаткою, яку було зображено на екрані комп'ютера авторською програмою ОКА_3D (із застосуванням OpenGL).

При відображенні геометрії тіла проводяться аналогічні дії, тільки замість вузлів використовуються геометричні точки тіла, а для кращого пояснення обрису поверхонь можуть формуватися додаткові лінії.



а) **б)**

Рис.30.1 Зображення сектора диска ГТД з лопаткою: а) – прозора каркасна скінченно-елементна сітка; б) – твердотіле, з нанесеною ізосмугами функцією напружень σ_r

30.4. Відображення геометрії, скінченно-елементної сітки та результатів розрахунків на екрані монітора як твердотільного зображення

Твердотільне зображення тіла, представленого скінченними елементами, застосовується з метою контролю правильності (якості) представлення тіла скінченними елементами, а також для зображення на його поверхнях (також і на поверхнях розрізів) функцій фізичних величин, отриманих у результаті розв'язання крайових задач з використанням методу скінченних елементів (температури, переміщень, деформацій, напружень та ін.). Зображення, збережені у вигляді комп'ютерних файлів або твердих копій (зображень на папері), стають документами, які підтверджують проведення розрахунків і зроблені на їхній основі висновки.

Стисло алгоритм відображення сітки СЕ на екрані комп'ютера у вигляді твердотілого зображення має такий вигляд:

а) призначення графічного відеорежиму, пункти в) … е) з алгоритму відображення каркасної моделі;

б) створення масиву зв'язків вузлів на кожній із сторін СЕ (ідентифікація

© К.М. Рудаков, 2025

сторін СЕ);

в) визначення видимості сторони СЕ (розподіл сторін на внутрішні та зовнішні, а зовнішніх – на видимі, частково видимі і невидимі);

г) трасування ребер сторін СЕ (створення масивів віконних координат пікселів, що зображають ребра);

д) вилучення невидимої частини частково-видимої сторони СЕ;

е) призначення номера кольору (відтінку) сторони СЕ. При виводі ізоліній або ізосмуг – підрахування значення функції в кожній точці (пікселі) сторони СЕ і врахування цього значення при призначенні номера кольору (відтінку) пікселя. Пересилання інформації про колір пікселя у відеосторінку відеопам'яті;

ж) після створення всього образу (відеосторінки відеопам'яті) – зображення "сцени" на екрані.

Найбільш трудомісткою операцією в описаному алгоритмі є операція вилучення невидних зовнішніх сторін та їхніх частин. При цьому можна використати декілька алгоритмів, серед яких є алгоритми:

а) Галімберті та Монтарані (на основі точного геометричного розв'язку для геометричних об'єктів сцени, в даному випадку – сторін СЕ). Повільний, відмінна якість;

б) Варнока (використовується *труба зору*, яка може подрібнюватися). Наближений, швидкий, але можливі дефекти зображення;

в) Уоткінса (растрове розгортання вздовж $\tilde{x}$. Сцена розтинається площинами, паралельними горизонтальної осі $\tilde{x}$). Допускає апаратну реалізацію. Швидкий, якість зображення – добра;

г) Z – буферизації Ньюелла, Ньюелла та Санча (спочатку для кожного пікселя – сортування граней (сторін СЕ) за *віддаленням від точки огляду*; далі – зображення граней, починаючи від найбільш віддаленої). Дещо повільніший попереднього, відмінна якість. Допускає апаратну реалізацію;

д) метод максимуму Z (в кожному пікселі екрана встановлюється перпендикуляр, який "прошиває" різноманітні фрагменти сцени на відстанях Z_i, серед яких визначається фрагмент з $Z_{\max}$, на основі чого призначається колір пікселя). Швидкий, відмінна якість. Допускає апаратну реалізацію. Широко застосовується в спеціалізованих графічних станціях і у графічній бібліотеці OpenGL.

На рис.30.1-б показано твердотільну скінченно-елементну сітку з нанесеними на неї ізосмугами функції, зображену на екрані комп'ютера авторською програмою ОКА_3D. Алгоритм – метод максимуму Z, з OpenGL та із застосуванням апаратних відеоприскорювачів для ПЕОМ типу IBM PC/AT. Дефектів зображення немає, вилучення невидних поверхонь – ідеальне.

При відображенні геометрії тіла проводяться аналогічні дії, тільки замість вузлів використовуються геометричні точки тіла, а для кращого опису складних поверхонь ці поверхні можуть автоматично замінятися набором трикутних поверхонь меншого розміру, які й будуть створювати зображення таких поверхонь.

© К.М. Рудаков, 2025

З появою відкритої графічної бібліотеки OpenGL (на основі розробки фірми Silicon Graphics Inc.) фантастично полегшилося програмування алгоритмів зображення. В ній примітивами є двовимірні або тривимірні точки, лінії та багатокутники, які задаються *світовими координатами вузлів*, але у масштабі (абсолютні значення координат – не більше одиниці). Тому програмісту достатньо створити список примітивів, (масштабованих) світових координат і кольорів їх вузлів, задати масштаб та кут повороту видових координат, а потім передати інформацію про примітиви відповідним програмам. Усю іншу роботу виконує бібліотека OpenGL самостійно та дуже швидко. Кольорі плавно змінюються від вузла до вузла. Зображення можна додатково тонувати в залежності від призначеного кута падіння освітлення на поверхню. Також можна виводити на екран монітора ЕОМ растрові зображення. В OpenGL можна вводити (одною командою) перспективу у зображення.

Контекст "вікна" OpenGL відрізняється від стандартного контексту "вікна" API Windows, тому потрібно створювати "вікно" OpenGL, для чого достатньо застосувати визначену процедуру ініціації цього контексту з одночасним встановленням потрібних параметрів режиму OpenGL.

Контрольні питання до підрозділу 30.1

1. Чому деякі характеристики відеосистеми ПЕОМ є "перетином" характеристик монітору та відеокарти?
2. Чим відрізняються алфавітно-цифровий відеорежим від графічного?

Контрольні питання до підрозділу 30.2

1. Які координатні системи використовує комп’ютерна графіка для відображення результатів розрахунків характеристик теплового або напружено-деформованого стану тіл?
2. Чому віконні координати задаються в цілих числах?
3. Чому зображення на екрані монітора поновлюється лише після повного заповнення відеосторінки?

Контрольні питання до підрозділу 30.3

1. Які етапи має алгоритм каркасного відображення геометрії тіла або скінченно-елементної сітки на екрані монітора?
2. Для чого може створюватися каркасне відображення моделі тіла на екрані монітора?

Контрольні питання до підрозділу 30.4

1. Які етапи має алгоритм твердотільного зображення геометрії тіла, скінченно-елементної сітки або результатів розрахунків?
2. Яке призначення графічної бібліотеки OpenGL?

© К.М. Рудаков, 2025

Список літератури

1. Аммерал Л. Принципы программирования в машинной графике. – М.: Сол Систем, 1992. – 224 с.

2. Бабушка И. Численные процессы решения дифференциальных уравнений. Пер. с англ. В.Л. Каткова под ред. Г.И. Марчука / И. Бабушка, Э. Витасек, М. Прагер. – М.: Мир, 1969. – 368 с.

3. Баженов В.А., Дащенко А.Ф., Оробей В.Ф., Сурьянинов Н.Г. Численные методы в механике. – Одесса: Астропринт, 2004. – 564 с.

4. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов / Пер. с англ. А.С. Алексеева и др.; Под ред. А.Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.

5. Березин И.С. Методы вычислений: 2-е изд. / И.С. Березин, Н.П. Жидков. – М.: Наука, 1966. – Т.1. – 632 с.

6. Вазов В. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных / В. Вазов, Дж. Форсайт. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 354 с.

7. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М. : Наука, 1972. – 415 с.

8. Вайнберг М.М. Функциональный анализ. Специальный курс для педагогических институтов / М.М. Вайнберг. – М.: Просвещение, 1979. – 128 с.

9. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / Пер. с англ. В.В. Кобелева и А.П. Сейраняна под ред. Н.В. Баничука. – М.: Мир, 1987. – 542 с.

10. Василенко М.В., Алексейчук О.М. Теорія коливань і стійкості руху: Підручник. – К.: Вища шк., 2004. – 525 с.

11. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Том 1. ГТТИ, 1933. – 525 с.

12. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1977. – 303 с.

13. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы / Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 428 с.

14. Годунов С.К. Разностные схемы: введение в теорию / С.К. Годунов, В.С. Рябенький. – М.: Наука, 1979. – 400 с.

15. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления / Пер. с англ. Ю.М. Нечепуренко, А.Ю. Романова, А.В. Собянина и Е.Е. Тыртышникова под ред. В.В. Воеводина. – М.: Мир, 1999. – 548 с.

16. Демидович Б.П. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон. – М.: Наука, 1970. – 664 с.

17. Джордж А. Численное решение больших разреженных систем уравнений. Пер. с англ. Х.Д. Икрамова / А. Джордж, Дж. Лю. – М.: Мир, 1984. – 333 с.

© К.М. Рудаков, 2025

18. Еременко С.Ю. Методы конечных элементов в механике деформируемых тел. – Харьков: Основа, 1991. – 272 с.

19. Жермен П. Курс механики сплошных сред. Общая теория / Пер. с фр. В.В. Федулова. – М.: Высш. шк., 1983. – 399 с.

20. Завьялов Ю.С. Методы сплайн-функций. Под ред. Н.Н. Яненко / Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко. – М.: Наука, 1980. – 352 с.

21. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / Пер. с англ.; Под ред. Б.Е. Победри. – М.: Мир, 1975. – 541 с.

22. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. / Пер. с англ. Б.И. Квасова; Под ред. Н.С. Бахвалова. – М.: Мир, 1986. – 318 с.

23. Ильюшин А.А. Пластичность. Ч.1. Упруго-пластические деформации. – М.: ОГИЗ, 1948. – 376 с.

24. Исполов Ю.Г., Шабров Н.Н. Конечноэлементный анализ нестационарных полей температур в деталях ГТУ // Пробл. прочности. – 1989. – №12. – С. 82-87.

25. Калиткин Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М.: Физматгиз, 1978. – 512 с.

26. Канторович Л.Б. Функциональный анализ / Л.Б. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Наука, 1984. – 752 с.

27. Канторович Л.Б. Приближенные методы высшего анализа / Л.Б. Канторович, В.И. Крылов. – М.-Л.: Физматгиз, 1962. – 208 с.

28. Кильчевский Н.А. Основы тензорного исчисления с приложениями к механике. – К.: Наук. Думка, 1972. – 148 с.

29. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, 4-е изд., М.: Наука, 1976. – 542 с.

30. Колтунов М.А., Кравчук А.С., Майборода В.П. Прикладная механика деформируемого твердого тела: Учеб. пособие для студентов вузов. – М.: Высш. шк., 1983. – 349 с.

31. Коренев В.Г. Задачи теории теплопроводности и термоупругости. – М.: Наука, 1980. – 400 с.

32. Корн Г. Справочник по математике. Для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1984. – 831 с.

33. Краскевич В.Е. Численные методы в инженерных исследованиях / В.Е. Краскевич, К.Х. Зеленский, В.И. Гречко. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1986. – 263 с.

34. Крылов В.И. Вычислительные методы: В 2-х томах / В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырный. – М.: Наука. – 1976. – Т.1. – 302 с.; 1977. – Т.2. – 399 с.

35. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. – М.: Физматгиз, 1961. – 524 с.

36. Ланцош К. Вариационные принципы механики / Пер. с англ. В..Ф. Гантмахера; Под ред. Л.С. Полака. – М.: Мир, 1965. – 408 с.

37. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967. – 600 с.

© К.М. Рудаков, 2025

38. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики / Г.И. Марчук. – М.: Наука, 1989. – 608 с.

39. Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под общ. ред. А.С. Сахарова и И. Альтенбаха. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1982. – 480 с.

40. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций / А.П. Голованов, О.Н. Тюленева, А.Ф. Шигабутдинов. – М.: Физматлит, 2006. – 392 с.

41. Митчелл Э., Уайт Р. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. – М.: Мир, 1981. – 214 с.

42. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.

43. Мяченков В.И., Мальцев В.П., Майборода В.П. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов. – М.: Машиностроение, 1989. – 520 с.

44. Немчинов Ю.И. Расчет пространственных конструкций (метод конечных элементов). – Киев: Будівельник, 1980. – 232 с.

45. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. – М.: Мир, 1981. – 304 с.

46. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов: Уч. пособие для студентов авиац. спец. вузов. – М.: Высш. шк., 1985. – 392 с., ил.

47. Овсеенко А.Б. Напряженно-деформированное состояние в контактирующих телах: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. – К.: КПИ, 1990. – 16 с.

48. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред / Пер. с англ. А.М. Васильева; Под ред. Э.И. Григолюка – М.: Мир, 1976. – 464 с.

49. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы / Пер. с англ. Х.Д. Икрамова, Ю.А. Кузнецова. – М.: Мир, 1983. – 384 с.

50. Партон В.З. Методы математической теории упругости / В.З. Партон, П.И. Перлин. – М.: Наука. – 1981. – 688 с.

51. Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Изд-во МГУ, 1995. – 366 с.

52. Ползучесть элементов машиностроительных конструкций / Подгорный А.Н., Бортовой В.В., Гонтаровский П.П. и др.; Под ред. А.Н. Подгорного. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

53. Постнов В.А., Дмитриев С.А., Елтышев Б.К., Родионов А.А. Метод суперэлементов в расчетах инженерных сооружений. – Л.: Судостроение, 1979. – 288 с.

54. Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. – М.: Судостроение, 1974. – 344 с.

55. Приложение методов теории пластичности и ползучести к решению инженерных задач машиностроения: В 2 ч. – К. : Выша шк., 1991. Ч. 1. Можаровский Н.С. Теория пластичности и ползучести в инженерном деле : Учебник. – 264 с.

© К.М. Рудаков, 2025

56. Приложение методов теории пластичности и ползучести к решению инженерных задач машиностроения: В 2 ч. – К. : Выша шк., 1991. Ч. 2. Можаровский Н.С., Качаловская Н.Е. Методы и алгоритмы решения краевых задач : Учебн. пособие. – 287 с.

57. Пространственные задачи термопластичности / Ю.Н. Шевченко, М.Е. Бабешко, В.В. Пискун, В.Г. Савченко. – К.: Наук. думка, 1980. – 264 с.

58. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела: Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука, 1988. – 712 с.

59. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.

60. Ракитский Ю.В. Численные методы решения жестких систем / Ю.В. Ракитский, С.М. Устинов, И.Г. Черноруцкий. – М.: Наука, 1979. – 208 с.

61. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.

62. Розин Л. А. Основы метода конечных элементов в теории упругости. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1976. – 232 с.

63. Рудаков К.М. Ефективні алгоритми розв’язків тривимірних крайових задач механіки деформованого твердого тіла методом скінченних елементів / Автореф. дис. ... докт. техн. наук., К.: НТУУ „КПІ”, 1996. – 34 с.

64. Рудаков К.М. Чисельні методи аналізу в динаміці та міцності конструкцій: Навч. посібник. – К.: НТУУ "КПІ", 2007. – 379 с.

65. Самарский А.А. Теория разностных схем: Учеб. пособие. – М.: Наука, 1977. – 653 с.

66. Самарский А.А. Численные методы: Учеб. пособие для вузов / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: Наука, 1989. – 432 с.

67. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 349 с.

68. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.: Мир, 1980. – 512 с.

69. Термопрочность деталей машин / Под ред. И.А. Биргера и В.Ф. Шорра. – М.: Машиностроение, 1975. – 456 с.

70. Треногин В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин. – М.: Наука, 1980. – 495 с.

71. Тьюарсон Р. Разреженные матрицы / Р. Тьюарсон. – М.: Мир, 1977. – 189 с.

72. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений / Пер. с англ. В.В. Воеводина, В.Н. Фаддеевой. – М.: Наука, 1970. – 564 с.

73. Уилкинсон Дж. Х. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра / Дж.Х. Уилкинсон, С. Райнш. – М.: Машиностроение, 1976. – 389 с.

74. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. Справочное пособие / Писаренко Г.С. Можаровский Н.С. – Киев: Наук. Думка. 1981. – 496 с.

75. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений. Пер. с англ. / Дж.Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.

© К.М. Рудаков, 2025

76. Хан Х. Теория упругости: Основы линейной теории и ее применения / Пер. с нем. Е.А. Когана; Под ред. Э.И. Григолюка. – М.: Мир, 1988. – 344 с.

77. Хейгеман Л. Прикладные итерационные методы. Пер. с англ. А.Ю. Еремина и И.Е. Капорина; Под ред. Ю.А. Кузнецова / Л. Хейгеман, Д. Янг. – М.: Мир, 1986. – 448 с.

78. Цвик Л.Б. Обобщение алгоритма Шварца на случай областей, сопряженных без налегания // Докл. АН СССР, 1975. – 224. – N 2. – С. 309-312.

79. Чирков А.Ю. Смешанная схема метода конечных элементов для решения краевых задач теории упругости и малых упругопластических деформаций / А.Ю. Чирков. – Киев: ИПП НАН Украины, 2003. – 250 с.

80. Численные методы в инженерных исследованиях / В.Е. Краскевич, К.Х. Зеленский, В.И. Гречко. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1986. – 263 с.

81. Шевченко Ю.Н. Термопластичность при переменных нагружениях. – К.: Наук. думка, 1970. – 287 с.

82. Шлыков Ю.П. Контактное термическое сопротивление / Ю.П. Шлыков, Б.А. Горин, С.Н. Церевский. – М: Энергия, 1977. – 328 с.

83. ANSYS, Inc. Theory

84. Bathe Klaus-Jьrgen. Finite Element Procedures. Second Edition – Prentice Hall, 2014. – 1043 p.

85. Courant R. Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations // Bull. Amer. Math. Soc., 1943. – v.49. – s. 1-23.

86. Irons B.M. A Frontal Program for Finite Element Analysis // Int. J. Numer. Meths. Eng., 1970. – N. 2. – P. 5-32.

87. Krieg R.D., Krieg D.B. Accuracies of numerical solution for the elastic-perfectly plastic model // J. Pressure Vessel Technology: Trans. ASME, 1977. – 99. – N. 4. – P. 510-515.

88. Lord Rayleigh (J.W. Strutt). On the theory of resonance // Trans. Roy. Soc. (London), 1870. – A161. – P. 77-118.

89. Ritz W. Ьber eine neue Methode zur Lösung gemissen Randwertaufgaben // Göttingener Nachrichten, Mathematik und Physik, Klasse, 1908. – s. 236-248.

90. Schwarz H.A. Über einige Abbildungsaufgaben. Ges. Math. Abh., 1869. – s. 65 – 83.

91. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method. Volume 1: The Basis. – Oxford: BH, 2000. – 689 p.

92. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method. Volume 2: Solid Mechanics. – Oxford: BH, 2000. – 459 p.

© К.М. Рудаков, 2025

Іменний покажчик

Прізвище	№ Розділу
Абрамов	7
Адамс	11
Айронс	24
Альмансі	12
Амонтон	27,28
Аристотель	12
Башфорт	11
Бернуллі	3, 20,24
Бернштейн	9
Берстоу	3
Бессель	9
Біргер	23
Больцман	13
Бубнов	9,17,19,21,23
Буняківський	2
Бюдан	3
Вайнберг	2
Варнок	39
Вілсон	25
Гавурін	7
Гайан	26
Галілей	12
Галімберті	39
Гальоркін	16,17,18,19,21,23
Гамель	12
Гамільтон	12
Гато	2
Гаусс	5,7,8,9,10,12,13,17, 21,24
Гершгорін	6
Гівенс	26
Гільберт	2,15
Гір	11
Горнер	3
Грам	5,7,9,26
Греффе	3
Грін	12,17
Гук	12,13,22,23,24
Гюа	3
Да Вінчі	27,28
Д'Аламбер	13, 25
Данилевський	6,26
Декарт	3
Джон	27,28
Дірак	9,17
Дімсдейл	11
Діріхле	15, 17
Друккер	13
Дюамель	13
Дюфорт	16
Ейлер	2,11,12,13,16,18, 20,24,29
Ейткен	3
Журавський	24
Зейдель	7,8
Зламал	20
Іллюшин	13,22,23
Ісполов	18,21
Канієль	26
Канторович	3,8,17,29
Кахан	26
Катхілл	4
Келдиш	17
Келог	16,18
Кельвін Котес	2110
Кі	20
Кірхгоф	20
Клаф	19
Корнейль	26
Коші	2,3,11,12
Крамер	5
Кранк	16,18,21
Крилов	5,6,9, 17,26
Крістофель	12
Кронекер	12,19,21,22
Кулон	27,28
Кун	27,28
Курант	16,19
Кутта	11
Лагерр	10
Лагранж	2,3,9,10,12,13, 17,19, 20,23, 25,27,28
Ланцош	25,26
Лаплас	14,16,17
Леверр'є	6
Лежандр	9,10,17,24
Лейбніц	10,12
Ліпшіц	8,11
Лобатто	10
Лобачевський	3
Лоде	24
Люстернік	6,7
Маккі	4
Марков	10
Мілн	11
Міндлін	20
Мінковський	2,18
Монтарані	30
Мултон	11
Мюллер	3
Надаї	24
Нейман	13
Ніколсон	16,18,21
Нолл	12,13
Хреннікoв	19
Ньютон	3,8,9,10,11,21, 22,23,26,29
Ньюмарк	25
Одквіст	13,22,24
Остроградський	13,17
Патон	19
Пеж	26
Пейн	24
Петров	9,17
Пісмен	16
Прандтль	13,15,22
Пікар	8
Пуассон	13,22,23
Работнов	22
Рафсон	8,21,23
Рвачёв	17
Рейс	13,22
Рейснер	20
Релей	9
Реомюр	21
Речфорд	16
Рісс	2
Рітц	17,19,26
Річардсон	7,11,15,16,18
Риман	17
Розенброк	18
Рунге	9,11
Рутісхаузер	26
Саад	26
Саймон	26
Самарський	16
Санч	30
Сеа	2
Сен-Венан	12,29
Сімпсон	10
Сінг	20
Соболев	2,14
Стефан	13
Стефенсен	3
Стірлінг	9
Стокс	17
Таккер	27,28
Тейлор	8,11, 15,16,18, 20,22,23
Тимошенко	20
Удзава	28
Уїлкінс	22
Уілкінсон	26
Уоткінс	30
Фаренгейт	21
Франкел	16
Фробеніус	4,6

© К.М. Рудаков, 2025

Фур'є	3,9,12,13,19,21	Цельсій	7,9,10	Фреше	2
Хаболт	25	Чебишев	21	Штурм	3,26
Хаусхолдер	26	Шабров	18,21	Юнг	13,22,23,28
Хеммінг	11	Шварц	2,28	Якобі	7,8,10,24,26,29
Хестенс	7	Шмідт	5,7,26	Ямада	23
Холецький	4,5,6,7,8,18,21, 23,26	Штіфель	7	Krieg	22
		Ньюелл	30	Ostenfeld	19
Ерміт	9,10,20			Trefftz	17

© К.М. Рудаков, 2025

Додаток

ПРОГРАМА ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ МАШИННОЇ АРИФМЕТИКИ В ЕОМ (C++, консоль)

```
#include "stdafx.h"
#include "math.h"
#include "stdio.h"

void Beta(int &beta);
void ForFloat (int beta);
void ForDouble(int beta);
float Copyx(float x);
double Copyx(double x);


//////////////////////
//    Головна програма
int main(int argc, char* argv[])
{
//    Визначення beta - основи системи числення в ЕОМ
      int beta;
      Beta(beta);
//    Визначення параметрів машинної арифметики:
//    - одинарна точність
      ForFloat(beta);
//    - подвійна точність
      ForDouble(beta);
      return 0;
}


//////////////////////////////
//    Програми копіювання числа
float  Copyx(float x)  { return x; }
double Copyx(double x) { return x; }



//////////////////////////////////////////////////////
//    Визначення beta - основи системи числення у ЕОМ
void Beta(int &beta)
{
      float b0, a1, a0 = 1.0f;
L1:   a0 *= 2.0f;
      a1 = a0 + 1.0f;
      if( (a1 - a0) == 1.0f ) goto L1;
      b0  = 1.0f;
L2:   b0 *= 2.0f;
      if( (a0+b0) == a0 ) goto L2;
      beta = int( (a0+b0)-a0 );
      printf("=========\n");
      printf(" beta = %d\n", beta);
}
```

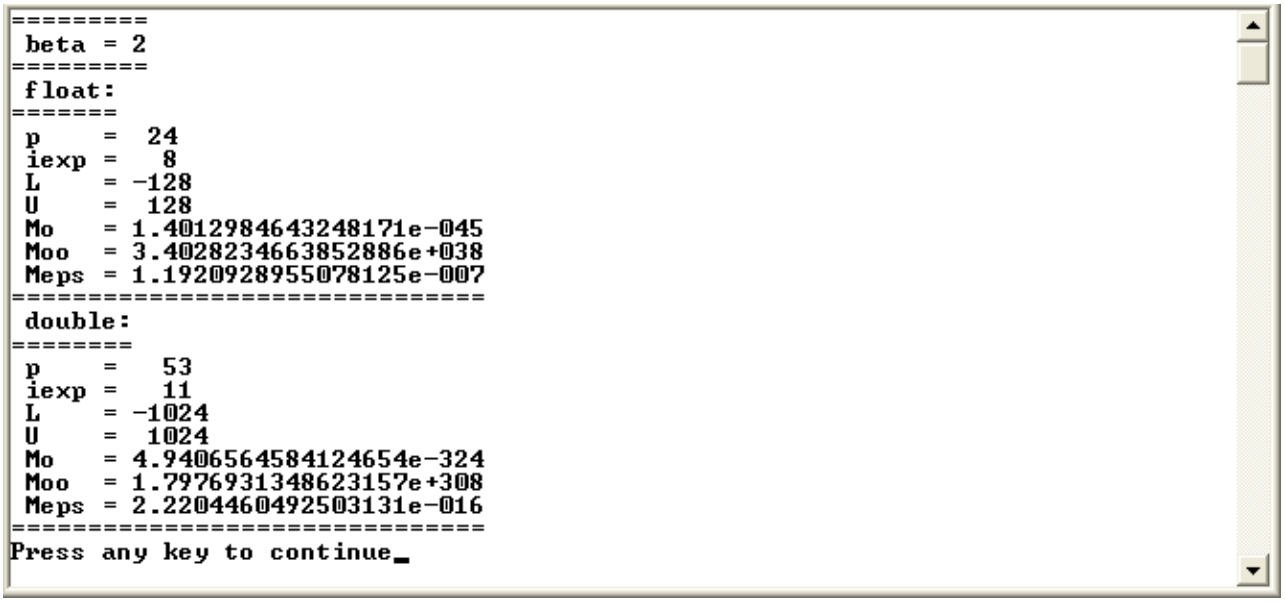
© К.М. Рудаков, 2025

```
////////////////////////////////////////////////////////////////
//    Визначення параметрів машинної арифметики. Одинарна точність
void ForFloat(int beta)
{
      printf("=========\n float:\n=======\n");
/////////////////////////////////////////////
//    визначення p - кількості розрядів мантиси
      float b1, c1, a1 = 1.0f; int p = 0;
L3:   p++;
      a1 = a1 * beta;
      b1 = Copyx(a1 + 1.0f);
      c1 = Copyx(b1 - a1);
      if( c1 == 1.0f ) goto L3;
      printf(" p    =  %d\n", p);
/////////////////////////////////////////////////
//    визначення iexp - кількості бітів під степінь
//               q - степінь beta (beta^q)
      int U, L, iexp, mx;
      float Moo, y, a, Mo;
      int i = 0; int q = 1;
      float z = 1.0f / float(beta);
L4:   y = z;
      z = Copyx(y * y);
      a = Copyx(z * 1.0f);
      if(( Copyx(a + a) == 0.0) || (fabs(z) >= y) ) goto L5;
      i++;
      q *= beta;
      goto L4;
L5:   iexp = i + 1;
      mx = beta * q;
      printf(" iexp =   %d\n", iexp);
//////////////////////////////////////
//    визначення: Mo  - машинного нуля
//                Moo - машинної нескінченності
L6:   Mo = y;
      int k = q;
      y = y / beta;
      a = Copyx(y * 1.0f);
      if(( Copyx(a + a) == 0.0) || (fabs(y) >= Mo) ) goto L7;
      k++;
      goto L6;
L7:   L = - k;
      if( mx > (k + k - 3) ) goto L8;
      mx = beta * mx;
      iexp++;
L8:   U = mx + L;
      Moo = float( pow(double (beta), double(U)) *
                              ( 1.0 - pow(double(beta), double(-p)) ) );
      printf(" L    = %d\n", L);
      printf(" U    =  %d\n", U);
      printf(" Mo   = %21.16e\n", Mo);
      printf(" Moo  = %21.16e\n", Moo);
//////////////////////////////////////////
//    визначення Meps  - машинного іпсилону
      float Meps;
      a = 1.0f;
L9:   Meps = Copyx(a);
      a = a / beta;
      y = Copyx(a + 1.0f);
      if(y > 1.0f) goto L9;
      printf(" Meps = %21.16e\n", Meps);
      printf("==============================\n");
}
```

© К.М. Рудаков, 2025

```
////////////////////////////////////////////////////////////
//    Визначення параметрів машинної арифметики. Подвійна точність
void ForDouble(int beta)
{
      printf(" double:\n========\n");
/////////////////////////////////////////////
//    визначення p - кількості розрядів мантиси
      double b1, c1, a1 = 1.0; int p = 0;
L3:   p++;
      a1 = a1 * beta;
      b1 = Copyx(a1 + 1.0);
      c1 = Copyx(b1 - a1);
      if( c1 == 1.0 ) goto L3;
      printf(" p    =   %d\n", p);
/////////////////////////////////////////////////
//    визначення iexp - кількості бітів під степінь
//               q - степінь beta (beta^q)
      int U, L, iexp, mx;
      double Moo, y, a, Mo;
      int i = 0; int q = 1;
      double z = 1.0 / double(beta);
L4:   y = z;
      z = Copyx(y * y);
      a = Copyx(z * 1.0);
      if(( Copyx(a + a) == 0.0) || (fabs(z) >= y) ) goto L5;
      i++;
      q *= beta;
      goto L4;
L5:   iexp = i + 1;
      mx = beta * q;
      printf(" iexp =   %d\n", iexp);
//////////////////////////////////////
//    визначення: Mo  - машинного нуля
//                Moo - машинної нескінченності
L6:   Mo = y;
      int k = q;
      y /= double(beta);
      a = Copyx(y * 1.0);
      if(( Copyx(a + a) == 0.0) || (fabs(y) >= Mo) ) goto L7;
      k++;
      goto L6;
L7:   L = -k;
      if( mx > (k + k - 3) ) goto L8;
      mx = beta * mx;
      iexp++;
L8:   U = mx + L;
      Moo = pow(double (beta), double(U - 1)) *
                        ( 1.0 - pow(double(beta), double(-p)) ) * beta;
      printf(" L    = %d\n", L);
      printf(" U    =  %d\n", U);
      printf(" Mo   = %21.16e\n", Mo);
      printf(" Moo  = %21.16e\n", Moo);
//////////////////////////////////////////
//    визначення Meps - машинного іпсилону
      double Meps;
      a = 1.0;
L9:   Meps = a;
      a = a / beta;
      y = Copyx(a + 1.0);
      if(y > 1.0) goto L9;
      printf(" Meps = %21.16e\n", Meps);
      printf("==============================\n");
}
```

На екрані монітора ПЕОМ з процесором Intel Pentium IV та більш сучасним з’являється наступне зображення:



Примітка. Програми копіювання числа застосовуються для того, щоб змусити сучасний компілятор виконувати дію буквально, не застосовувати "маленькі" хитрощі, які йому притаманні для прискорення масових обчислень і які б не дозволили отримати реальні характеристики машинної арифметики ЕОМ.

© К.М. Рудаков, 2025

Навчальне видання

Рудаков Костянтин Миколайович

Чисельні методи аналізу в динаміці та міцності конструкцій.

Навчальний посібник

В авторській редакції

Рудаков Костянтин Миколайович,
доктор технічних наук, професор,
професор кафедри динаміки, міцності машин і опору матеріалів
Національного технічного університету України
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"

Матеріал, викладений у цій книзі, автором перевірений. Але, оскільки імовірність людських помилок існує завжди, автор не може гарантувати абсолютну точність і правильність наведеної інформації. Об’єм книги дуже обмежений у порівнянні з реальним обсягом інформації, викладеним у літературних джерелах. Тому автор не несе ніякої відповідальності за можливі негативні наслідки, пов’язані з використанням матеріалів цієї книги.

© К.М. Рудаков, 2025