

Додаток 4

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ (теорія)

Д4.1. Постановка крайової задачі незв'язаної теплопровідності

У кожній елементарній одиниці об'єму середовища (підхід Лагранжа) баланс потоку тепла визначається співвідношенням

$$c_p \bar{\rho} \frac{\partial T}{\partial t} + c_p \bar{\rho} (\nabla_j T) V_j - \lambda \nabla_j \nabla_j T = \hat{\omega} \quad (Д4.1)$$

за початкової умовою

$$T(x^j, 0) = \hat{T}_0(x^j). \quad (Д4.2)$$

На поверхні (тіла, об'єму, рідини) граничні умови (ГУ):

- за температурою поверхні (її частини S_T)

$$T(x^j, t)|_{S_T} = \hat{T}(x^j, t); \quad (Д4.3)$$

- за тепловим потоком (у напрямку зовнішньої нормалі $\vec{\nu}$ до поверхні)

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial \nu} \Big|_{S_G} = \hat{q}|_{S_q} + \tilde{q}|_{S_\alpha} + \check{q}|_{S_\beta}, \quad (Д4.4)$$

де $\hat{q} = q(x^j, t)$ – відомий потік тепла через границю S_q . Для конвекційної складової теплового потоку через поверхню у MSC.Nastran використовують лінійну

$$\tilde{q}|_{S_\alpha} = -\alpha(T - \hat{T}_\infty)|_{S_\alpha} \quad (Д4.5a)$$

або одну з нелінійних залежностей

$$\tilde{q}|_{S_\alpha} = -\alpha(T - \hat{T}_\infty)^{\mu+1}|_{S_\alpha} = -\alpha\tilde{Q}|_{S_\alpha}, \quad \text{де } \tilde{Q} = (T - \hat{T}_\infty)^{\mu+1}; \quad (Д4.5б)$$

$$\tilde{q}|_{S_\alpha} = -\alpha(T^\mu - \hat{T}_\infty^\mu)|_{S_\alpha} = -\alpha\check{Q}|_{S_\alpha}, \quad \text{де } \check{Q} = (T^\mu - \hat{T}_\infty^\mu); \quad (Д4.5в)$$

а для променевої складової теплового потоку – вираз

$$\check{q}|_{S_\beta} = -\beta f[e_e(T + T_{abs})^4 - a_e \hat{T}_a^4]|_{S_\beta} = -\beta f[e_e W - a_e \hat{T}_a^4]|_{S_\beta}, \quad \text{де } W = (T + T_{abs})^4. \quad (Д4.6)$$

Позначено: $\lambda, c_p, \alpha, \beta$ – коефіцієнти теплопровідності (Вт/м град), теплоємності (Дж/(кг град)), конвекційної тепловіддачі (Вт/(м² град)) і постійна Стефана-Больцмана (Вт/(м² град⁴)) відповідно; $\bar{\rho}$ – густина матеріалу тіла (кг/м³); $\hat{\omega}$ – потужність внутрішнього джерела (або стоку) тепла; поверхня з ГУ $S_G = S_q \cup S_\alpha \cup S_\beta \cup S_T$; $T = T(x^j, t)$ – температура; t – час; $\hat{T}_\infty = T_\infty(x^j, t)$ – температура середовища біля поверхні S_α з конвекційним теплообміном; T_{abs} – зміщення розрахункової температури T від абсолютного нуля; $\hat{T}_a = \hat{T}_a(\vec{x}, t)$ – абсолютна температура тіла, з яким розглядуване тіло (об'єм, рідина) має промінистий теплообмін через поверхню S_β ; $0 \leq \mu \leq 1$ – показник степеневих залежностей; $0 \leq e_e \leq 1$ та $0 \leq a_e \leq 1$ – коефіцієнти випромінювання поверхнею джерела та спроможності поверхні тіла до поглинання відповідно. Значок „[^]” над змінною вказує на те, що її величина задається.

Фактор освітленості поверхні $(S_\beta)_i$ тіла променевим джерелом з поверхні S_j обчислюється за формулою

$$f_{i-j} = \frac{1}{(S_\beta)_i} \int_{(S_\beta)_i} \int_{S_j} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi r^2} d(S_\beta)_i dS_j, \quad (Д4.7)$$

де поверхня S_j – та, що випромінює, а $(S_\beta)_i$ – що поглинає; r – відстань між двома точками на поверхнях S_j та $(S_\beta)_i$; θ_i та θ_j – кути між лінією, що з'єднує точки на поверхнях, та нормаллями до цих поверхонь.

Рівняння стаціонарної теплопровідності виводиться безпосередньо з (Д4.1) виключенням компонентів, що залежать від часу (тобто при $\partial T / \partial t \equiv 0$):

$$c_p \bar{\rho} (\nabla_j T) V_j - \lambda \nabla_j \nabla_j T = \hat{\omega}. \quad (\text{Д4.8})$$

Для твердих тіл характерно відносно малі переміщення точок тіла, тому звичайно нехтують конвекційним переносом тепла у тілі, тобто у рівняннях (Д4.1) та (Д4.8) вважають $c_p \bar{\rho} (\nabla_j T) V_j \equiv 0$, тому вони приймають вигляд:

$$c_p \bar{\rho} \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \nabla_j \nabla_j T = \hat{\omega}; \quad (\text{Д4.1a})$$

$$\lambda \nabla_j \nabla_j T = -\hat{\omega}. \quad (\text{Д4.8a})$$

У залежності від конкретних умов задачі у рівняннях (Д4.1), (Д4.4) і (Д4.8) можлива відсутність заданих теплового потоку ($S_q = 0$ або $\hat{q}|_{S_q} = 0$), конвекційного теплообміну ($S_\alpha = 0$ або $\hat{q}|_{S_\alpha} = 0$), промінистого теплообміну ($S_\beta = 0$ або $\hat{q}|_{S_\beta} = 0$) і об'ємного теплового джерела ($\hat{\omega} = 0$).

Д4.2. Урахування температурної залежності характеристик матеріалу

Звичайно коефіцієнт теплопровідності – помірна функція температури, що зменшується зі збільшенням температури для твердих матеріалів і збільшується зі збільшенням температури для рідин і газів. Крім того, він може залежати від напрямку (бути тензором другого рангу λ_{ij}) в анізотропному матеріалі. Теплоємність матеріалу теж є функцією температури, але помірною.

Взагалі, кожна характеристика матеріалу може залежати від температури. Розглянемо проблему на прикладі коефіцієнта теплопровідності λ . У діалозу FEMAP вводиться значення $\lambda_{RM} = \lambda(T_{RM})$, де T_{RM} є температурою випробування матеріалу (якщо вона не вказана, то звичайно дорівнює 20°C). Також вводиться функція температури $F(T)$. Отже, поточне значення $\lambda(T) = \lambda_{RM} \cdot F(T)$. Але усі функції у FEMAP зберігаються у табличному (дискретному) вигляді. Тому для проміжних значень температури повинна застосовуватися апроксимаційна формула. У MSC.Nastran використовується лінійна апроксимація, тому поточне значення:

$$\lambda(T) = \lambda_{RM} \cdot F(T) \approx \lambda_{RM} \cdot \left\{ F(T_{(k)}) + \frac{T - T_{(k)}}{T_{(k+1)} - T_{(k)}} [F(T_{(k+1)}) - F(T_{(k)})] \right\}, \quad (\text{Д4.9})$$

де k – номер точки на графіку $F(T)$.

Д4.3. Ослаблення постановки крайової задачі теплопровідності

У „Help” MSC.Nastran зазначено, що для розв'язування отриманої системи рівнянь застосовано метод Петрова-Гальоркіна (SUPG), тобто метод Петрова з обиранням вагових функцій такими, що дорівнюють базисним функціям. Цей метод допускає нелінійність задачі, простий у використанні, тому застосовується найчастіше.

Відповідно до методу Петрова-Гальоркіна (інша назва: метод зважених похибок наближення – МВПН) можна завжди записати потрібну кількість наступних функціоналів, які дорівнюють нулю:

$$F_n = \int_{\Omega} \bar{R}_\Omega \bar{w}_n d\Omega + \int_S \bar{R}_S \bar{w}_n dS = 0; \quad n = 1, 2, \dots, J, \quad (\text{Д4.10})$$

де вектори \vec{R}_Ω і \vec{R}_S – об'ємний і поверхневий N -вимірні вектори нев'язок (похибок наближення, розв'язку крайової задачі) відповідно; w_n і \tilde{w}_n – вагові функції, до яких у (Д4.10) пред'являється лише одна вимога – повноти. Завжди можна прийняти, що $\tilde{w}_n = w_n$.

Оскільки шуканий результат – скалярна функція температури $T = T(\vec{x}, t)$, то для формули (Д4.10) величина $N = 1$, а \vec{R}_Ω і \vec{R}_S перетворюються на скаляри R_Ω і R_S . З виразів (Д4.1), (Д4.4), (Д4.5а) і (Д4.6) відповідно до формули (Д4.10) складемо J функціоналів

$$F_n = \int_{\Omega} \left(c_P \bar{\rho} \frac{\partial T}{\partial t} + (c_P \bar{\rho} \nabla_j T) V_j - \lambda \nabla_j (\nabla_j T) - \hat{\omega} \right) w_n d\Omega + \int_S \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \nu} - \hat{q} \Big|_{S_q} + \alpha (T - \hat{T}_\infty) \Big|_{S_\alpha} + \beta f [e_e W - a_e \hat{T}_a^4] \Big|_{S_\beta} \right) w_n dS = 0; \quad 1 \leq n \leq J. \quad (\text{Д4.11})$$

У формулі (Д4.11) найвищий порядок похідної – другий. Але за допомогою формули Гріна-Стокса можна понизити його до першого. У нашому випадку ця формула для скалярних функцій w_n і T буде мати вигляд:

$$\int_{\Omega} \lambda \nabla_j (\nabla_j T) w_n d\Omega = \int_S \lambda \frac{\partial T}{\partial \nu} w_n dS - \int_{\Omega} (\nabla_j w_n) (\lambda \nabla_j T) d\Omega. \quad (\text{Д4.12})$$

Вона дозволяє не тільки понизити порядок похідної до першого, а також одночасно виключити з (Д4.12) інтеграл по всій площі тіла S :

$$\begin{aligned} F_n &= \int_{\Omega} \left(c_P \bar{\rho} \frac{\partial T}{\partial t} + (c_P \bar{\rho} \nabla_j T) V_j - \lambda \nabla_j (\nabla_j T) - \hat{\omega} \right) w_n d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla_j T) \lambda (\nabla_j w_n) d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} \lambda \nabla_j (\nabla_j T) w_n d\Omega - \int_{S_q} \hat{q} w_n dS + \int_{S_\alpha} \alpha (T - \hat{T}_\infty) w_n dS + \int_{S_\beta} \beta f [e_e W - a_e \hat{T}_a^4] w_n dS = \\ &= \int_{\Omega} c_P \bar{\rho} \frac{\partial T}{\partial t} w_n d\Omega + \int_{\Omega} (c_P \bar{\rho} \nabla_j T) V_j w_n d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla_j T) \lambda (\nabla_j w_n) d\Omega + \int_{S_\alpha} \alpha T w_n dS - \int_{S_q} \hat{q} w_n dS - \\ &- \int_{S_\alpha} \alpha \hat{T}_\infty w_n dS + \int_{S_\beta} \beta f e_e W w_n dS - \int_{S_\beta} \beta f a_e \hat{T}_a^4 w_n dS - \int_{\Omega} \hat{\omega} w_n d\Omega = 0; \quad 1 \leq n \leq J. \end{aligned} \quad (\text{Д4.13а})$$

Це й є слабке формулювання методу Петрова-Гальоркіна (МЗПН) для задачі теплопровідності. Зазначимо, що вимоги для вагових функцій змінилися: окрім повноти вони ще повинні бути один раз диференційованими.

Якщо замість (Д4.5а) застосовувати нелінійні залежності (Д4.5б) або (Д4.5в), то замість (Д4.13а) можна отримати відповідно:

$$F_n = \int_{\Omega} c_P \bar{\rho} \frac{\partial T}{\partial t} w_n d\Omega + \int_{\Omega} (c_P \bar{\rho} \nabla_j T) V_j w_n d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla_j T) \lambda (\nabla_j w_n) d\Omega + \int_{S_\alpha} \alpha \tilde{Q} w_n dS - \int_{S_q} \hat{q} w_n dS + \int_{S_\beta} \beta f e_e W w_n dS - \int_{S_\beta} \beta f a_e \hat{T}_a^4 w_n dS - \int_{\Omega} \hat{\omega} w_n d\Omega = 0; \quad 1 \leq n \leq J. \quad (\text{Д4.13б})$$

$$F_n = \int_{\Omega} c_P \bar{\rho} \frac{\partial T}{\partial t} w_n d\Omega + \int_{\Omega} (c_P \bar{\rho} \nabla_j T) V_j w_n d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla_j T) \lambda (\nabla_j w_n) d\Omega + \int_{S_\alpha} \alpha \tilde{\tilde{Q}} w_n dS - \int_{S_q} \hat{q} w_n dS + \int_{S_\beta} \beta f e_e W w_n dS - \int_{S_\beta} \beta f a_e \hat{T}_a^4 w_n dS - \int_{\Omega} \hat{\omega} w_n d\Omega = 0; \quad 1 \leq n \leq J. \quad (\text{Д4.13в})$$

Д4.4. Скінченно-елементне представлення крайової задачі теплопровідності

Наближений розв'язок крайової задачі в об'ємі Ω можна шукати у вигляді усіченого ряду:

$$T = T(\vec{x}, t) \approx \sum_{m=1}^J \theta_m(t) \cdot \Phi_m(\vec{x}), \quad (\text{Д4.14})$$

де $\Phi_m(\bar{x})$ є повна за енергією система лінійно незалежних базисних функцій.

У результаті скінченно-елементного представлення об'єму Ω у вигляді сукупності з N^e СЕ з об'ємами Ω^e сітка СЕ містить N^U вузлів. Відповідно до ідеології методу скінченних елементів (МСЕ) функції $\Phi_m(x^i)$ розкладу (Д4.14) можна представити у вигляді

$$\Phi_m(x^i) = \sum_{\Omega^e \subset \Lambda_m} \chi^e(x^i) \cdot \varphi_m^e(x^i), \quad (Д4.15)$$

де Λ_m – множина СЕ, що містять вузол m ; $\varphi_m^e(x^i)$ – базисна функція скінченного елемента номер e (звичайно це інтерполяційний поліном), яка відповідає вузлу m у межах Ω^e ; функція приналежності до СЕ (оператор інцидентності):

$$\chi^e(x^i) = \begin{cases} 1, & x^i \subset \Omega^e; \\ 0, & x^i \not\subset \Omega^e. \end{cases} \quad (Д4.16)$$

Інакше кажучи, замість (Д4.14) маємо скінченно-елементну апроксимацію

$$T_N^h(x^i, t) = \sum_{m=1}^{N^U} \theta_m(t) \cdot \sum_{\Omega^e \subset \Lambda_m} \chi^e(x^i) \cdot \varphi_m^e(x^i), \quad (Д4.17)$$

в якій N^U – кількість вузлів СЕС, що замінює раніше введене число J – кількість функціоналів (Д4.13); $\theta_m(t)$ – вузлові значення температури як функції часу.

У якості вагових функцій без обмеження загальності і відповідно до методу Гальоркіна (правильніше: Бубнова-Гальоркіна) приймемо ті ж базисні функції (Д4.15), тобто

$$w_n(x^i) = \Phi_n(x^i). \quad (Д4.18)$$

Вектор W у (Д4.13) можна апроксимувати аналогічно (Д4.17):

$$W_N^h(x^i, t) = \sum_{m=1}^{N^U} \psi_m(t) \cdot \sum_{\Omega^e \subset \Lambda_m} \chi^e(x^i) \cdot \varphi_m^e(x^i), \quad (Д4.19)$$

де $\psi_m(t)$ – вузлові значення вектора W , тобто

$$\psi_m(t) = [\theta_m(t) + T_{abs}]^4. \quad (Д4.20)$$

Підставимо (Д4.17) ... (Д4.19) у (Д4.13а). З урахуванням (Д4.16) і (Д4.20) одержимо нелінійну систему рівнянь

$$G_{mn} \frac{d\theta_m}{dt} + K_{mn} \theta_m + R_{mn} \cdot [\theta_m(t) + T_{abs}]^4 = P_n, \quad 1 \leq m, n \leq N^U, \quad (Д4.21а)$$

з компонентами

$$G_{mn} = \sum_{\Omega^e \subset \Lambda_{mn}} G_{mn}^e; \quad K_{mn} = \sum_{\Omega^e \subset \Lambda_{mn}} K_{mn}^e; \quad R_{mn} = \sum_{m\Omega^e \subset \Lambda_n} R_{mn}^e; \quad P_n = \sum_{\Omega^e \subset \Lambda_n} P_n^e, \quad (Д4.22)$$

де Λ_m – множина СЕ, що містять вузол номер m ; $\Lambda_{mn} = \Lambda_m \cap \Lambda_n$ – перетинання зазначених множин (кількість вузлів у СЕ обмежено величиною M^e , яка в різних СЕ може бути різною). Компоненти збірок (Д4.22):

$$G_{mn}^e = \int_{\Omega^e} c_p \bar{\rho} \varphi_m^e \varphi_n^e d\Omega; \quad 1 \leq m, n \leq N^U; \quad (Д4.23)$$

$$K_{mn}^e = \int_{\Omega^e} (\nabla_j \varphi_m^e) \lambda (\nabla_j \varphi_n^e) d\Omega + \int_{\Omega^e} c_p \bar{\rho} V_j (\nabla_j \varphi_m^e) \varphi_n^e d\Omega + \int_{S_\alpha^e} \alpha \varphi_m^e \varphi_n^e dS; \quad (Д4.24а)$$

$$R_{mn}^e = \int_{S_\beta^e} \beta f e_e \varphi_m^e \varphi_n^e dS; \quad 1 \leq m, n \leq N^U; \quad (Д4.25)$$

$$P_n^e = \int_{S_q^e} \hat{q} \varphi_n^e dS + \int_{S_\alpha^e} \alpha \hat{T}_\infty \varphi_n^e dS + \int_{S_\beta^e} \beta f a_e \hat{T}_a^4 \varphi_n^e dS + \int_{\Omega^e} \hat{\omega} \varphi_n^e d\Omega; \quad 1 \leq n \leq N^U. \quad (Д4.26а)$$

Позначено: S_q^e , S_α^e , S_β^e – поверхні СЕ, що виходять на S_q , S_α і S_β відповідно.

Початкова умова (Д4.2) перетвориться у

$$T_N^h((x^i)_m, 0) = \hat{\theta}_m(0) = \hat{T}_0((x^i)_m), \quad (Д4.27)$$

а гранична (Д4.3) – у

$$T_N^h((x^i)_m, t) |_{s_T} = \hat{\theta}_m(t) |_{s_T} = \hat{T}((x^i)_m, t), \quad (Д4.28)$$

де $(x^i)_m$ – глобальні координати вузла з номером m .

У випадку стаціонарної теплопровідності з (Д4.21а) зникає член з похідної за часом, тому залишається система алгебраїчних рівнянь (САР)

$$K_{mn}\theta_m + R_{mn} \cdot (\theta_m + T_{abs})^4 = P_n; \quad 1 \leq m, n \leq N^U, \quad (Д4.29а)$$

яка доповнюється граничними умовами 1-го роду (Д4.28) і розв'язується відносно θ_m .

Якщо замість (Д4.13а) застосувати (Д4.13б) або (Д4.13в), то нелінійну складову з вектором \tilde{Q} або \tilde{Q} (див. також (Д4.5б) або (Д4.5в) відповідно) доцільно повністю винести в праву частину. Тоді замість (Д4.24а) та (Д4.26а) маємо

$$\tilde{K}_{mn}^e = \int_{\Omega^e} (\nabla_j \varphi_m^e) \lambda (\nabla_j \varphi_n^e) d\Omega + \int_{\Omega^e} c_p \bar{\rho} V_j (\nabla_j \varphi_m^e) \varphi_n^e d\Omega; \quad 1 \leq m, n \leq N^U; \quad (Д4.24б)$$

$$\tilde{P}_n^e = \int_{S_q^e} \hat{q} \varphi_n^e dS + \int_{S_\beta^e} \beta f a_e \hat{T}_a^4 \varphi_n^e dS + \int_{\Omega^e} \hat{\omega} \varphi_n^e d\Omega; \quad 1 \leq n \leq N^U. \quad (Д4.26б)$$

та вектор

$$N_n^e = \int_{S_\alpha^e} \alpha (T - \hat{T}_\infty)^{\mu+1} \varphi_n^e dS \quad \text{або} \quad N_n^e = \int_{S_\alpha^e} \alpha (T^\mu - \hat{T}_\infty^\mu) \varphi_n^e dS; \quad 1 \leq n \leq N^U, \quad (Д4.30)$$

з якого збирається додатковий глобальний вектор $N_n = \sum_{\Omega^e \subset \Lambda_n} N_n^e$. Формули (Д4.21) та (Д4.29)

дещо змінюються:

$$G_{mn} \frac{d\theta_m}{dt} + \tilde{K}_{mn} \theta_m + R_{mn} \cdot [\theta_m(t) + T_{abs}]^4 = \tilde{P}_n + N_n; \quad 1 \leq m, n \leq N^U; \quad (Д4.21б)$$

$$\tilde{K}_{mn} \theta_m + R_{mn} \cdot (\theta_m + T_{abs})^4 = \tilde{P}_n + N_n; \quad 1 \leq m, n \leq N^U. \quad (Д4.29б)$$

Примітка. Це не єдині можливі варіанти САР для задач теплопровідності. Якщо САР розв'язується багато разів, бажано мати стабільну її матрицю. Це досягається переміщенням усіх нелінійних складових САР у праву частину.

Д4.5. Алгоритм Ньютона-Рафсона розв'язування нелінійної САР крайової задачі стаціонарної теплопровідності

САР (Д4.29а) – нелінійна при наявності променевого теплообміну, а САР (Д4.29б) – завжди. Вони будуть нелінійними й тоді, коли властивості матеріалу будуть залежати від температури. У MSC.Nastran такі САР розв'язуються методом Ньютона-Рафсона. Для випадку (Д4.29б) на $(k+1)$ -ій ітерації зі САР

$$\tilde{K}_{mn} \Delta \theta_m = b_n; \quad 1 \leq m, n \leq N^U \quad (Д4.31)$$

знаходяться компоненти $\Delta \theta_m$, потім $(\theta_m)^{(k+1)} = (\theta_m)^{(k)} + \Delta \theta_m$. У (Д4.31) позначено:

$$\tilde{K}_{mn} = \left(\tilde{K}_{mn} + 4R_{mn} \cdot (\theta_m + T_{abs})^3 - \partial N_n / \partial \theta_m \right)^{(k)}; \quad 1 \leq m, n \leq N^U; \quad (Д4.32)$$

$$b_n = \left(\tilde{P}_n + N_n - \tilde{K}_{mn} \theta_m - R_{mn} \cdot (\theta_m(t) + T_{abs})^4 \right)^{(k)}; \quad 1 \leq n \leq N^U. \quad (Д4.33)$$

У випадку (Д4.29а) у останніх формулах замість \tilde{K}_{mn} використовуються K_{mn} , а компоненти N_n – відсутні.

Для зупинення ітерацій використовуються три критерії (ε – задана точність):

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{N^U} (\Delta \theta_n)^2} < \varepsilon \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{N^U} (\theta_n^{(k+1)})^2}, \quad \sum_{n=1}^{N^U} |\Delta \theta_n| < \varepsilon \cdot \sum_{n=1}^{N^U} |\theta_n^{(k+1)}| \quad \text{та} \quad \max \{ |\Delta \theta_n| / |\theta_n| \} < \varepsilon. \quad (Д4.34)$$

Д4.6. Алгоритм Ньюмарка розв'язування крайової задачі нестационарної теплопровідності

Отримані системи (Д4.21) містять похідну за часом. У MSC.Nastran застосований один з можливих варіантів розв'язання цієї проблеми, який використовує метод Ньюмарка. Цей метод при застосуванні до параболічних рівнянь фактично збігається з відомою двошаровою ваговою схемою.

Для скорочення виразів введемо позначення:

$$Z_n(t) = -\tilde{K}_{mn} \theta_m(t) - R_{mn} \cdot [\theta_m(t) + T_{abs}]^4; \quad F_n(t) = \tilde{P}_n + N_n(t); \quad 1 \leq m, n \leq N^U. \quad (Д4.35)$$

Умножимо (Д4.21б) на dt та проведемо інтегрування у межах часового кроку величиною $\Delta\tau$:

$$\int_{\theta_m^\tau}^{\theta_m^{\tau+\Delta\tau}} d\theta_m = \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} (G_{mn})^{-1} \cdot [Z_n(t) + F_n(t)] dt; \quad m, n = 1, 2, \dots, N^U. \quad (Д4.36)$$

Лівий інтеграл точно дорівнює $\theta_m^{\tau+\Delta\tau} - \theta_m^\tau$, а от правий обчисленим точно бути не може, оскільки він залежить від ще невідомої температури. Розклавши підінтегральний вираз в правій частині (Д4.35) у ряд в околі τ і так само в околі $\tau + \Delta\tau$, обмежившись першими членами ряду, одержимо після інтегрування і додавання результатів, помножених на $(1-\omega)$ і ω відповідно, двошарову вагову схему:

$$\theta_m^{\tau+\Delta\tau} - \theta_m^\tau = \Delta\tau \cdot \{ (1-\omega)(G_{mn}^\tau)^{-1} [Z_n^\tau + F_n^\tau] + \omega(G_{mn}^{\tau+\Delta\tau})^{-1} [Z_n^{\tau+\Delta\tau} + F_n^{\tau+\Delta\tau}] \}, \quad (Д4.37)$$

де $0 \leq \omega \leq 1$; $m, n = 1, 2, \dots, N^U$. Приймаючи незмінність (на часовому відрізку величиною $\Delta\tau$) матриці G_{mn} , одержимо після приведення подібних САР (для заданої величини ω):

$$\begin{aligned} & (G_{mn} + \omega\Delta\tau\tilde{K}_{mn}^{\tau+\Delta\tau}) \cdot \theta_m^{\tau+\Delta\tau} + \omega\Delta\tau R_{mn}^{\tau+\Delta\tau} \cdot (\theta_m^{\tau+\Delta\tau} + T_{abs})^4 = \\ & = (G_{mn} - (1-\omega)\Delta\tau\tilde{K}_{mn}^\tau) \theta_m^\tau + (1-\omega)\Delta\tau R_{mn}^\tau \cdot (\theta_m^\tau + T_{abs})^4 + \omega\Delta\tau F_n^{\tau+\Delta\tau} + (1-\omega)\Delta\tau F_n^\tau, \end{aligned} \quad (Д4.38)$$

де $m, n = 1, 2, \dots, N^U$ і в яку при наявності S_T необхідно ввести граничні умови (Д4.28).

Очевидно, що $\omega = (t - \tau) / \Delta\tau$; $\tau \leq t \leq \tau + \Delta\tau$; $0 \leq \omega \leq 1$; t – час, якому відповідає ω .

Нелінійність САР (Д4.38) може бути обумовлено температурною залежністю коефіцієнтів λ , c_p , $\bar{\rho}$, наявністю променевого теплообміну або застосуванням нелінійних законів конвекційного теплообміну (Д4.5б) та (Д4.5в). Така САР на кожному часовому кроці розв'язуються у MSC.Nastran із застосуванням ітераційного метода Ньютона-Рафсона.

У MSC.Nastran для *першого* часового кроку розв'язування задачі нестационарної теплопровідності застосовується процедура оцінки верхньої межі часового кроку за *наближеною* формулою (умова узгодженості):

$$\Delta\tau \leq (h^2 c_p \bar{\rho} / \lambda) / 10, \quad (Д4.39)$$

де h – мінімальна відстань між вузлами СЕС. Подальші значення для часового кроку MSC.Nastran розраховує автоматично у адаптивному процесі.

Додаток 5

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ПРО НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ТВЕРДИХ ТІЛ. СТАТИКА (теорія)

Д5.1. Основні рівняння механіки тіла, що деформується, у елементарному об'ємі тіла

При постановках крайових задач про напружено-деформований стан твердого тіла, що деформується, застосовуються відповідні комбінації рівнянь статичної рівноваги, геометричних співвідношень та рівнянь фізичних моделей матеріалу. Тут будуть розглянуті тільки ті, що застосовуються у MSC.Nastran. Враховано, що у MSC.Nastran усі задачі формулюються у переміщеннях із застосуванням Лагранжевого підходу.

Звичайно припускається, що в початковий момент t_0 в розглядуваному тілі переміщення $U_i(\vec{x}, t_0)$, деформації $\varepsilon_{ij}(\vec{x}, t_0)$, напруження $(\sigma_{mn})_0 = \sigma_{mn}(\vec{x}, t_0)$ мають відомі (частіше – нульові) значення, відомо початкове поле температур $\hat{T}_0 = T(\vec{x}, t_0)$. Далі припускається, що навантаження змінюється кроками (n – номер кроку), що в об'ємі тіла Ω , а також на частині його поверхні $S_G = S_U \cup S_P$ за деякий проміжок часу $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ відбудеться зміна навантажень, тобто на момент часу t^{n+1} були прикладені: $\hat{O}_m(\vec{x}, t) = \rho \cdot \hat{F}_m(\vec{x}, t)$ – об'ємні сили ($\vec{F}(\vec{x}, t)$ – вектор масової сили), $\hat{P}_m(\vec{x}, t)$ – поверхневі сили на S_P ; $\hat{R}_m(\vec{x}, t)$ – зосереджені сили; відбулися переміщення $\hat{U}_i(\vec{x}, t)$ – на S_U , а також в Ω змінилася температура на величини $\Delta \hat{T}(\vec{x}, t) = \hat{T}(\vec{x}, t) - \hat{T}_0$. Тоді для визначення в кожній точці (її однорідного околу) тіла величин: $U_i(\vec{x}, t)$ – переміщень, $\varepsilon_{ij}(\vec{x}, t)$ – деформацій, $\sigma_{mn}(\vec{x}, t)$ – напружень, а також інших, похідних від них, формулюється крайова задача.

Д5.1.1. Системи координат

У MSC.Nastran застосовуються три системи координат (усі – ортогональні): декартова, циліндрична та сферична. Але всі рівняння розглядаються у „фізичній”, тобто в нормованій, системі координат:

$$\vec{b}_j = \vec{e}_j / \sqrt{g_{jj}}; \quad j = 1, 2, 3, \quad (Д5.1)$$

де \vec{e}_j – вектори основного базису; g_{ij} – компоненти метричного тензора. Це дозволяє виключити метрику простору з фізичних рівнянь.

Д5.1.2. Рівняння статичної рівноваги у точці (елементарному об'ємі) тіла

Рівняння рівноваги як окремих випадок рівняння руху описуються формулою:

$$\nabla^n \sigma_{mn} + \hat{O}_m = 0, \quad (Д5.2)$$

де значок « \wedge » над змінною вказує на те, що її величина задається. У (Д5.2) тензор напружень $\sigma_{mn}(\vec{x}, t)$ – Кірхгофа 1-го роду, тобто відносно початкової конфігурації.

Д5.1.3. Геометричні співвідношення у точці (елементарному об'ємі) тіла

Відповідно до підходу Лагранжа координати будь-якої точки тіла M (або центра елементарного об'єму, див. рис.Д5.1) після деформування можуть бути описані формулою $x_i = x_i(X_j, t)$, де $x_i(X_j, 0) = X_j$ – початкові координати точки; $i, j = 1, 2, 3$, а n – номер часового шару (кроку навантаження). Оскільки у „фізичній” системі координат компоненти метричного тензора $g_{ij} = g^{ij} = \delta_{ij}$, то компоненти тензора міри деформації Коші-Гріна:

$$G_{ij} = F_{ik} \cdot F_{jk} = \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j}, \text{ де } F_{ik} = \frac{\partial x_k}{\partial X_i}. \quad (Д5.3)$$

Тоді *поточні* компоненти симетричного тензора деформації Лагранжа–Гріна (відносно *початкової* конфігурації):

$$\varepsilon_{ij} = (G_{ij} - \delta_{ij})/2, \quad (Д5.4)$$

або через компоненти вектора переміщень U_j :

$$\varepsilon_{ij} = (\nabla^j U_i + \nabla^i U_j + \nabla^i U_k \nabla^j U_k)/2; \quad i, j, k=1,2,3. \quad (Д5.5)$$

де позначено

$$\nabla^i U_j = \partial U_j / \partial X^i - U_k \Gamma_{ij}^k; \quad \nabla_j U^i = \partial U^i / \partial X_j + U^k \Gamma_{jk}^i; \quad (Д5.6)$$

Γ_{ij}^m – символи Крістофеля другого роду, що симетричні за нижніми індексами і є компонентами розкладу $\partial \overset{\circ}{e}_j / \partial X^i$ по вихідному базису $\overset{\circ}{e}_m$, виражаються формулою

$$\Gamma_{mi}^j = \Gamma_{im}^j = g^{jn} (\partial g_{mn} / \partial X_i + \partial g_{in} / \partial X_m - \partial g_{mi} / \partial X_n) / 2. \quad (Д5.7)$$

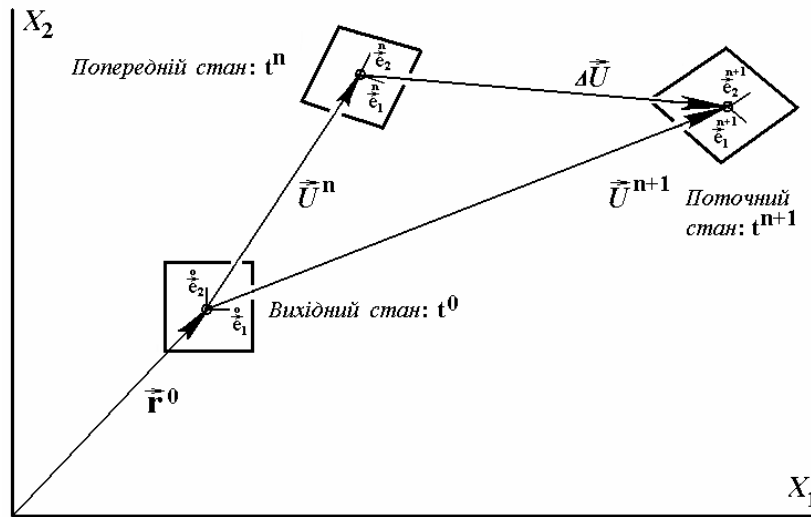


Рис.Д5.1. Стани деформування елементарного об'єму (двовимірний випадок, декартові координати)

Якщо деформації – малі, то в (Д5.5) величинами другого порядку малості нехтують:

$$\varepsilon_{ij} = (\nabla^i U_j + \nabla^j U_i) / 2. \quad (Д5.8)$$

Оскільки завжди можна записати, що $U_i^{n+1} = U_i^n + \Delta U_i$ (див. рис.Д5.1), то для практичного застосування часто замість рівняння (Д5.5), використовуючи цей факт і лінійність оператора ∇ , отримують іншу точну формулу:

$$\varepsilon_{ij} = (\varepsilon_{ij})^{n+1} = (\varepsilon_{ij})^n + \Delta \varepsilon_{ij}; \quad i, j, k=1,2,3; \quad (Д5.9)$$

де

$$\Delta \varepsilon_{ij} = (\Delta \varepsilon_{ij})_L + (\Delta \varepsilon_{ij})_{NL}, \quad (Д5.10)$$

тобто приращення деформацій має лінійну та нелінійну частини;

$$(\varepsilon_{ij})^n = (\nabla^j U_i + \nabla^i U_j + \nabla^i U_k \nabla^j U_k)^n / 2; \quad (Д5.11)$$

$$(\Delta \varepsilon_{ij})_L = [\nabla^j (\Delta U_i) + \nabla^i (\Delta U_j) + \nabla^i (U_k)^n \cdot \nabla^j (\Delta U_k) + \nabla^i (\Delta U_k) \cdot \nabla^j (U_k)^n] / 2; \quad (Д5.12)$$

$$(\Delta \varepsilon_{ij})_{NL} = [\nabla^j (\Delta U_k) \cdot \nabla^i (\Delta U_k)] / 2. \quad (Д5.13)$$

Завжди вважається, що деформації – сумісні (відповідають відомим рівнянням сумісності), а також використовується принцип суперпозиції деформацій різноманітної природи:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^T + \varepsilon_{ij}^C + \varepsilon_{ij}^P, \quad (Д5.14)$$

тобто загальні деформації ε_{ij} є алгебраїчною сумою пружних ε_{ij}^e , температурних ε_{ij}^T , повзучості ε_{ij}^C та пластичності ε_{ij}^P . Пружні деформації є завжди, інші – тільки коли розглядається відповідна крайова задача.

Д5.1.4. Рівняння фізичних моделей матеріалу у точці (елементарному об'ємі) тіла

Д5.1.4.1. Рівняння для визначення температурних деформацій

Компоненти тензора температурної деформації для ізотропного матеріалу в MSC.Nastran та FEMAP Structural розраховуються за формулою

$$\varepsilon_{ij}^T = \delta_{ij} \alpha_T \Delta \hat{T}; \quad \Delta \hat{T} = T - T_{ref}, \quad (Д5.15-а)$$

де α_T – коефіцієнт лінійного температурного подовження; T_{ref} – температура, при якій у тілі температурна деформація відсутня (завжди призначається для проведення розрахунків). У випадку анізотропії:

$$\varepsilon_{ij}^T = (\alpha_{ij})_T \Delta \hat{T}, \quad (Д5.15-б)$$

де тензор коефіцієнтів лінійного температурного подовження $(\alpha_{ij})_T$ – діагональний.

Коефіцієнт лінійного температурного подовження, як й інші характеристики матеріалу, може залежати від температури, хоча така залежність – слабка й нею часто нехтують. При цьому у діалогі FEMAP вводиться значення $\alpha_{T_{RM}} = \alpha_T(T_{RM})$, де T_{RM} є температурою випробування матеріалу (якщо вона не вказана, то звичайно дорівнює $20^\circ C$), а також – функція температури $F(T)$, причому $F(T_{RM}) \equiv 1$. Поточне значення $\alpha_T(T) = \alpha_{T_{RM}} \cdot F(T)$. Але усі функції у FEMAP зберігаються у табличному (дискретному) вигляді. Тому для проміжних значень температури повинна застосовуватися апроксимаційна формула. У MSC.Nastran використовується лінійна апроксимація, тому поточне значення (див. також (Д4.9)):

$$\alpha_T(T) = \alpha_{T_{RM}} \cdot F(T) \approx \alpha_{T_{RM}} \cdot \left\{ F(T_{(k)}) + \frac{T - T_{(k)}}{T_{(k+1)} - T_{(k)}} [F(T_{(k+1)}) - F(T_{(k)})] \right\}, \quad (Д5.16)$$

де k – номер точки на графіку $F(T)$.

Зміну температури пов'язують зі зміною енергії атомів, яка супроводжується зміною амплітуди їх коливань. Тому у звичайних умовах *ніщо не може завадити реалізації температурних деформацій*. За це їх звать такими, „що не стискаються”. Температурна деформація завжди миттєва, тобто *відповідає поточній температурі*, тому замість (Д5.15-а) потрібно застосовувати вираз

$$\varepsilon_{ij}^T = \delta_{ij} \alpha_T(T_{RM}) \cdot [F(T) \cdot T - F(T_{ref}) \cdot T_{ref}]. \quad (Д5.15-в)$$

Але у MSC.vN4W чомусь застосовують „січне” для температурного діапазону значення α_T (тобто вводиться абсолютна пам'ять щодо зміни цього коефіцієнта, що не відповідає сутності температурних деформацій, які завжди є миттєвими), а саме

$$\bar{\alpha}_T = \int_{T_{ref}}^T \alpha_T(T) dT / (T - T_{ref}), \quad \text{оскільки} \quad \int_{T_{ref}}^T \alpha_T(T) dT = \bar{\alpha}_T \cdot (T - T_{ref}). \quad (Д5.17)$$

Однак ця формула застосовується лише тоді, коли T_{ref} співпадає з T_{RM} . Якщо ця умова не виконується, використовують іншу формулу. Аналогічно формулі (Д5.17) вводяться ще дві „січні” величини:

$$\tilde{\alpha}_T = \int_{T_{ref}}^{T_{RM}} \alpha_T(T) dT / (T_{RM} - T_{ref}); \quad \check{\alpha}_T = \int_{T_{RM}}^T \alpha_T(T) dT / (T - T_{RM}). \quad (Д5.18)$$

Якщо $T_{ref} < T_{RM} < T$, то $\int_{T_{ref}}^T \alpha_T(T) dT = \int_{T_{ref}}^{T_{RM}} \alpha_T(T) dT + \int_{T_{RM}}^T \alpha_T(T) dT$, тому

$$\bar{\alpha}_T \cdot (T - T_{ref}) = \tilde{\alpha}_T \cdot (T_{RM} - T_{ref}) + \check{\alpha}_T \cdot (T - T_{RM}). \quad (Д5.19)$$

З формули (Д5.19) отримують, що:

$$\bar{\alpha}_T = [\tilde{\alpha}_T \cdot (T_{RM} - T_{ref}) + \check{\alpha}_T \cdot (T - T_{RM})] / (T - T_{ref}) = \check{\alpha}_T + (\tilde{\alpha}_T - \check{\alpha}_T)(T_{RM} - T_{ref}) / (T - T_{ref}). \quad (Д5.20)$$

Формула (Д5.20) не зміниться при всіх інших співвідношеннях між T_{ref} , T_{RM} та T . У випадку $T_{RM} = T_{ref}$ вона вироджується у (Д5.16); при $T = T_{ref}$ нею користуватися не можна, але це й не потрібно, оскільки при цьому температурна деформація відсутня.

Д5.1.4.2. Рівняння для визначення лінійно-пружних деформацій

Між напруженнями та *пружними* деформаціями існує однозначна функціональна залежність. Звичайно вводять поняття функціоналу пружної енергії (або пружного потенціалу) W , за допомогою якого закон пружності виражається як

$$\sigma_{mn} = \partial W / \partial \varepsilon_{mn}^e. \quad (Д5.21)$$

Для лінійно-пружної моделі матеріалу це є закон Гука:

$$\sigma_{mn} = E_{mnij} \varepsilon_{ij}^e \quad \text{або} \quad \varepsilon_{ij}^e = C_{ijmn} \sigma_{mn}, \quad (Д5.22)$$

де E_{mnij} , C_{ijmn} – тензори четвертого рангу з модулів пружності, які в загальному випадку можуть залежати від координат і температури. Крім того, розрізняють матеріали ізотропні та анізотропні. У MSC.Nastran можна застосовувати такі різновиди анізотропії: ортотропія та повна анізотропія (двовимірна або тривимірна).

У матричному запису лінійний закон Гука для *анізотропного* матеріалу має вигляд

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} & E_{16} \\ & E_{22} & E_{23} & E_{24} & E_{25} & E_{26} \\ & & E_{33} & E_{34} & E_{35} & E_{36} \\ & & & E_{44} & E_{45} & E_{46} \\ \text{Симетрично} & & & & E_{55} & E_{56} \\ & & & & & E_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^e \\ \varepsilon_{22}^e \\ \varepsilon_{33}^e \\ \gamma_{12}^e \\ \gamma_{23}^e \\ \gamma_{31}^e \end{Bmatrix} \quad (Д5.23)$$

для тривимірного випадку та

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^e \\ \varepsilon_{22}^e \\ \gamma_{12}^e \end{Bmatrix} \quad (Д5.24)$$

для двовимірного. Тут $2\gamma_{ij}^e = \varepsilon_{ij}^e$ при $i \neq j$, а усі константи задаються у напрямках головних осей анізотропії.

Для *ортотропного* матеріалу в тривимірному випадку закон Гука (Д5.22) записується у вигляді

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^e \\ \varepsilon_{22}^e \\ \varepsilon_{33}^e \\ \gamma_{12}^e \\ \gamma_{23}^e \\ \gamma_{31}^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_{11} & -\nu_{21}/E_{22} & -\nu_{31}/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_{11} & 1/E_{22} & -\nu_{32}/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_{11} & -\nu_{23}/E_{22} & 1/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{31} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{Bmatrix}, \quad (Д5.25)$$

де $\nu_{12}/E_{11} = \nu_{21}/E_{22}$, $\nu_{13}/E_{11} = \nu_{31}/E_{33}$ та $\nu_{23}/E_{22} = \nu_{32}/E_{33}$, тобто матриця – симетрична, містить 9 незалежних констант: $E_{11}, E_{22}, E_{33}, G_{12}, G_{23}, G_{31}, \nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{31}$. У двовимірному випадку

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11}/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & \nu_{12}E_{22}/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & 0 \\ \nu_{12}E_{22}/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & E_{22}/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^e \\ \varepsilon_{22}^e \\ \gamma_{12}^e \end{Bmatrix}, \quad (Д5.26)$$

де $\nu_{12}/E_{11} = \nu_{21}/E_{22}$; $G_{12} = E_{11}E_{22}/(E_{11} + E_{22} + 2E_{11}\nu_{12})$, тобто матриця містить лише 3 незалежні константи: E_{11}, E_{22}, ν_{12} .

У ізотропного матеріалу незалежних пружних характеристик лише дві: модуль Юнга E та коефіцієнт Пуассона ν , тобто усі $E_{ij} = E$ та $\nu_{ij} = \nu$. Модуль зсуву пов'язаний з цими характеристиками формулою $G = E/[2(1+\nu)]$.

Для двовимірної задачі є ще одне додаткове рівняння: для σ_{33} у випадку плоского деформованого стану (ПДС, при $\varepsilon_{33}^e = 0$) або для ε_{33}^e у випадку плоского напруженого стану (ПНС, при $\sigma_{33} = 0$). У випадку вісесиметричної задачі компоненти $\varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta r} = \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = 0$.

Д5.1.4.3. Рівняння для визначення нелінійно-пружних деформацій

У MSC.Nastran є лише дві моделі нелінійно-пружних матеріалів.

Для *ізотропного* пружно-нелінійного матеріалу (у MSC.Nastran позначається як **Nonlinear Elastic**) фізичні рівняння можна представити у вигляді трьох законів:

- закон пружної зміни об'єму

$$\varepsilon_V^S = \sigma_V / 3k; \quad \varepsilon_V^P = \varepsilon_V^C = 0; \quad (Д5.27)$$

- тензорне співвідношення (закон зміни форми)

$$e_{ij}^S = \varphi \cdot S_{ij}; \quad \varphi = \frac{3\varepsilon_u^S}{2\sigma_u}; \quad (Д5.28)$$

- рівняння стану, що визначається експериментально та задається у вигляді функціональної залежності (функціоналу):

$$\sigma_u = K(\varepsilon_u^S), \quad (Д5.29)$$

де $\varepsilon_V = \delta_{ij}\varepsilon_{ij}/3$ і $\sigma_V = \delta_{ij}\sigma_{ij}/3$ – об'ємна деформація і напруження відповідно; $k = k(\bar{x}, T)$ – модуль об'ємного стискування; $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_V$ і $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_V$ – компоненти девіаторних частин тензорів деформацій і напружень відповідно; ε_u^S і σ_u – інтенсивності „стиснених” деформацій $\varepsilon_{ij}^S = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^T$ і напружень σ_{ij} відповідно. У пружному матеріалі немає необоротних деформацій, тому „стиснені” деформації – пружні. З урахуванням (Д5.7) та (Д5.20) $\varepsilon_u^S = \varepsilon_u$. У MSC.Nastran функціонал (Д5.29) вводиться у вигляді таблиці для двох квадрантів: першого (крива розтягу) та третього (крива стиску). Деформації – малі.

Інший пружно-нелінійний матеріал – типу *гуми* з коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0.5$ (матеріал, що не стискується). У MSC.Nastran для такого матеріалу (позначається як **Hyperelastic**) застосовується полігональна форма моделі Муни-Рівліна (Mooney-Rivlin).

При $\nu = 0.5$ третій інваріант тензора міри деформацій Коші-Гріна (перший вираз у (Д5.3))

$$I_3 = \det G_{ij} = 1, \quad (Д5.30)$$

тобто компоненти G_{ij} повинні задовольняти цій умові. Якщо скористатися теорією штрафу, то вираз для функціоналу пружної енергії можна представити у вигляді

$$W = \bar{W}(\varepsilon_{ij}) + \lambda(I_3 - 1), \quad (Д5.31)$$

де $\bar{W} = \bar{W}(I_1, I_2)$, а інваріанти

$$I_1 = \delta^{im}G_{mi}; \quad I_2 = (\delta^{im}\delta^{jn}G_{mi}G_{nj} - \delta^{im}\delta^{jn}G_{ij}G_{mn})/2. \quad (Д5.32)$$

Тоді замість (Д5.21)

$$\sigma^{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} + \lambda \frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} + 2\lambda G^{ij} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} + pG^{ij}, \quad (Д5.33)$$

де $p = 2\lambda$ – гідростатичний тиск, а компоненти ε_{ij} задовольняють умові (Д5.23). Отже, перший доданок у (Д5.33) описує „викривлення”, а другий – зміну об'єму.

Апроксимацію $\bar{W} = \bar{W}(I_1, I_2)$ поліномом можна записати у вигляді зрізаного ряду:

$$\bar{W} = \sum_{m+n=1}^p A_{mn} (I_1 - 3)^m (\bar{I}_2 - 3)^n; \quad m, n = 0, 1, \dots \quad (Д5.34)$$

де $p = \max\{m + n\}$; $\bar{I}_2 = (I_1^2 - I_2) / 2$; а компоненти A_{mn} мають таку же розмірність, як і модуль Юнга.

У цьому розкладі звичайно зберігають члени однакової степені p . Наприклад, якщо $p = 3$, то отримаємо дев'ятикомпонентну модель:

$$\begin{aligned} \bar{W} \approx & A_{10}(I_1 - 3) + A_{01}(\bar{I}_2 - 3) + A_{11}(I_1 - 3)(\bar{I}_2 - 3) + A_{20}(I_1 - 3)^2 + A_{02}(\bar{I}_2 - 3)^2 + \\ & + A_{30}(I_1 - 3)^3 + A_{03}(\bar{I}_2 - 3)^3 + A_{21}(I_1 - 3)^2(\bar{I}_2 - 3) + A_{12}(I_1 - 3)(\bar{I}_2 - 3)^2. \end{aligned} \quad (Д5.35)$$

З (Д5.35) легко отримати моделі з п'яти ($p = 2$) та трьох ($p = 1$) компонентів. Якщо зберегти лише два лінійних члена ($p = 1$), то це буде модель Муні-Рівліна, яка задовільно описують поведінку матеріалів типа „гума” при деформаціях десь до 450...500 відсотків:

$$\bar{W} \approx A_{10}(I_1 - 3) + A_{01}(\bar{I}_2 - 3) = A_{10}(I_1 - 3) + A_{01}(I_1^2 - I_2 - 6) / 2. \quad (Д5.36)$$

Якщо в (Д5.36) прийняти $A_{01} = 0$, то це буде модель неогуківського матеріалу.

Однак якщо застосовувати співвідношення (Д5.33), то необхідно залучати ще одне рівняння для визначення величини гідростатичного тиску, що збільшує загальну кількість рівнянь. Тому замість виразу (Д5.33) звичайно застосовують модель

$$W = \bar{W} + \sum_k D_k (J - 1)^{2(k+1)}; \quad \text{або} \quad W = \bar{W} + \sum_k D_k (J - 1 - \alpha_T \Delta T)^{2(k+1)}; \quad k = 0, 1, \dots \quad (Д5.37)$$

де J – детермінант градієнта деформацій $F_{ij} = \partial x_i / \partial X_j$; $\alpha_T \Delta T$ – температурна деформація, а компоненти D_k мають таку же розмірність, як і модуль Юнга. Простіший варіант:

$$W = \bar{W} + D_0 (J - 1)^2 \quad \text{або} \quad W = \bar{W} + D_0 (J - 1 - \alpha_T \Delta T)^2. \quad (Д5.38)$$

Величину D_0 розраховують за формулою

$$D_0 = (A_{10} + A_{01}) / (1 - 2\nu), \quad (Д5.39)$$

де коефіцієнт Пуассона ν необхідно задавати у межах 0.495 ... 0.4999 (рекомендують, щоб було $D_0 < 10^3 (A_{10} + A_{01})$). Якщо \bar{W} відповідає (Д5.36), а деформації – незначні, то величини $2(A_{10} + A_{01}) = G$ – модуль зсуву, а $2D_0 = K$ – об'ємний модуль.

Є й інші моделі. Наприклад, така:

$$W = A_{10}(I_1 - 3) + A_{01}(I_2 - 3) + C(I_3^{-2} - 1) + D(I_3 - 1)^2, \quad (Д5.40)$$

де для обчислення C та D застосовують формули:

$$C = A_{10} / 2 + A_{01}; \quad D = [A_{10}(5\nu - 2) + A_{01}(11\nu - 5)] / [2(1 - 2\nu)]. \quad (Д5.41)$$

Д5.1.4.4. Рівняння для визначення пружно-пластичних деформацій

У MSC.Nastran застосовується декілька моделей пружно-пластичного матеріалу: для ізотропного, ортотропного та анізотропного матеріалу з ізотропним, кінематичним або ізотропно-кінематичним зміцненням, для чотирьох різних умов визначення пластичного стану, з можливістю урахування впливу температури або швидкості деформування матеріалу на межу його плинності. У всіх моделях деформації – малі.

Але у супроводжувальній документації („Help”) немає детального пояснення щодо застосованих пружно-пластичних моделей матеріалів. Тому моделі матеріалу для визначення пружно-пластичних деформацій у MSC.Nastran наведені тут з деякою долею імовірності.

У моделі асоційованої пластичної плинності виконується закон пружної зміни об'єму (Д5.25), а приріст пластичних деформацій відповідає напрямку нормалі до „поверхні плинності”:

$$\Delta \varepsilon_{ij}^P = \Delta \lambda^P \frac{\partial g}{\partial S_{ij}}, \quad (Д5.42)$$

де g – „пластичний потенціал”, $\Delta\lambda^P$ – функціонал. Звичайно з „пластичним потенціалом” асоціюють вираз для „поверхні плинності”:

$$\phi = Q(S_{ij}) - H(\chi, T, \dot{\varepsilon}_u^S) = 0, \quad (D5.43)$$

де параметр χ визначає ізотропне зміцнення матеріалу. Якщо поверхня має окремі частини, що апроксимуються різними виразами, то є ребра, де ці частини поверхні стикаються. У точках на цих ребрах приріст пластичних деформацій визначається як сума вкладів від кожної з частин поверхні, що стикаються (модель Койтера). Тому:

$$\Delta\varepsilon_{ij}^P = \sum_k (\Delta\lambda^P)^{(k)} \frac{\partial Q^{(k)}}{\partial S_{ij}} = \sum_k (\Delta\lambda^P)^{(k)} \cdot \text{grad}Q^{(k)}, \quad (D5.44)$$

де k вказує відповідну напруженому стану частину „поверхні плинності”.

У MSC.Nastran вважається, що частини „поверхні плинності” описуються формулами типу

$$\phi = f^{(k)}(S_{ij} - \alpha_{ij}) - H(\chi, T, \dot{\varepsilon}_u^S) = 0, \quad (D5.45)$$

де $H(\chi, T, \dot{\varepsilon}_u^S)$ – „миттєва термомеханічна поверхня”, яка апроксимується виразом білінійної ізотропної моделі

$$H(\chi, T, \dot{\varepsilon}_u^S) = \sigma_S(T, \dot{\varepsilon}_u^S) + \beta \cdot E_P \cdot \chi, \quad (D5.46)$$

де $\sigma_S(T, \dot{\varepsilon}_u^S)$ – межа плинності, яка може залежати від температури T або від швидкості деформування матеріалу в точці тіла $\dot{\varepsilon}_u^S$; E_P – модуль зміцнення матеріалу на даній частині „миттєвої термомеханічної поверхні”. У випадку, коли функція $H(\chi, T, \dot{\varepsilon}_u^S)$ задається таблицею (у FEMAP – функцією типу **4.vs.Stress**), то застосовується формула типу (D5.46), причому модуль E_P розраховується на *кожному* лінійному відрізку функції, а $\sigma_S(T, \dot{\varepsilon}_u^S)$ відповідає початку такого лінійного відрізка.

Прирошення компонентів тензора „мікронапружень” α_{ij} , який описує кінематичне зміцнення матеріалу, обчислюються як

$$\Delta\alpha_{ij} = (1 - \beta) \cdot E_P \cdot \Delta\varepsilon_{ij}^P. \quad (D5.47)$$

Параметром β задається тип зміцнення: при $\beta = 0$ – кінематичне; $\beta = 1$ – ізотропне; $0 < \beta < 1$ – ізотропно-кінематичне (у MSC.Nastran при цьому (імовірно) покладається $\beta = 0.5$).

У MSC.Nastran межа плинності обчислюється як

$$\sigma_S(T, \dot{\varepsilon}_u^S) = (\sigma_S)_0 \cdot \varphi(T) \quad \text{або} \quad \sigma_S(T, \dot{\varepsilon}_u^S) = (\sigma_S)_0 \cdot \psi(\dot{\varepsilon}_u^S), \quad (D5.48)$$

де $\varphi(T)$ та $\psi(\dot{\varepsilon}_u^S)$ – табличні функції; $(\sigma_S)_0$ – початкове значення межі плинності.

Для функцій $f^k(S_{ij} - \alpha_{ij})$ може використовуватися 4 варіанта. Для металів:

- теорія Мізеса-Генкі (ізотропний матеріал, геометрична інтерпретація: одна поверхня у вигляді нескінченного циліндра) $f(S_{ij} - \alpha_{ij}) = \sqrt{3(S_{ij} - \alpha_{ij})(S_{ij} - \alpha_{ij})/2}$;

- теорія Треска-Сен-Венана (ізотропний матеріал, геометрична інтерпретація: шестигранна нескінченна призма) $f^{(1)} = |[(\sigma_1 - \alpha_1) - \lambda \cdot (\sigma_2 - \alpha_2)]/2|$, $f^{(2)} = |[(\sigma_2 - \alpha_2) - \lambda \cdot (\sigma_3 - \alpha_3)]/2|$, $f^{(3)} = |[(\sigma_3 - \alpha_3) - \lambda \cdot (\sigma_1 - \alpha_1)]/2|$.

Тут σ_j та α_j – головні значення напружень і „мікронапружень” відповідно.

Для ґрунтів у вигляді сипучих матеріалів (гравій, пісок):

- теорія Друкера-Прагера (ізотропний пружний та ідеально-пластичний матеріал, геометрична інтерпретація: конус з вершиною в області додатних значень напружень) $\phi = \sqrt{3S_{ij}S_{ij}/2} + 3\beta\sigma_V - \sigma_S(T, \dot{\varepsilon}_u^S) = 0$, де $\sigma_V = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$. Величини β та σ_S автоматично перераховуються MSC.Nastran виходячи з двох параметрів, що визначаються з експе-

риментів: коефіцієнту „зчеплення” $C \geq 0$ та „кута внутрішнього тертя” φ , причому $\sigma_s = 6C \cos \varphi / [\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)]$ та $\beta = 2 \sin \varphi / [\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)]$, а кут $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$;

- теорія Мора-Кулона (Mohr-Coulomb).

Д5.1.4.5. Рівняння для визначення деформацій повзучості

У моделях технічної теорії повзучості для ізотропного матеріалу виконується закон пружної зміни об'єму (Д5.25), а компоненти тензора деформації повзучості або швидкості повзучості визначаються відповідно з виразів

$$\varepsilon_{ij}^C = \varepsilon_u^C \frac{\partial g}{\partial S_{ij}} \quad \text{або} \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^C = \dot{\varepsilon}_u^C \frac{\partial g}{\partial S_{ij}}, \quad (Д5.49)$$

де $g = g(\varepsilon_u^C, \sigma_u, T, t)$ – „потенціал повзучості”. Звичайно „потенціал повзучості” обирають таким чином, що $\partial g / \partial S_{ij} = 3S_{ij} / (2\sigma_u)$, а саме:

$$g = \sqrt{(3S_{ij}S_{ij} / 2)} - \Phi(\varepsilon_u^C, T, t) = 0. \quad (Д5.50)$$

Тоді відповідно

$$\varepsilon_{ij}^C = \frac{3\varepsilon_u^C}{2\sigma_u} S_{ij} \quad \text{або} \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^C = \frac{3\dot{\varepsilon}_u^C}{2\sigma_u} S_{ij}. \quad (Д5.51)$$

Рівняння кривої повзучості (що визначається експериментально), тобто вираз для ε_u^C , у MSC.Nastran визначаються одним з варіантів:

- емпіричною формулою $\varepsilon_u^C(\sigma_u, t) = A(\sigma_u) \cdot \{1 - \exp[-R(\sigma_u) \cdot t]\} + K(\sigma_u) \cdot t$, де $A(\sigma_u) = a \cdot \sigma_u^b$ або $A(\sigma_u) = a \cdot \exp(b \cdot \sigma_u)$; $R(\sigma_u) = c \cdot \exp(d \cdot \sigma_u)$ або $R(\sigma_u) = c \cdot \sigma_u^d$; $K(\sigma_u) = e \cdot [sh(f \cdot \sigma_u)]^g$ або $K(\sigma_u) = e \cdot \exp(f \cdot \sigma_u)$; a, b, c, d, e, f, g – постійні апроксимації, що визначаються у експерименті; σ_u – напруження; t – час;

- емпіричною формулою $\varepsilon_u^C(\sigma_u, t) = a \cdot \sigma_u^b \cdot t^d$ (ті ж позначки);
- таблицею.

Як і в будь-якій еволюційній задачі, потрібно задавати початкові умови. В задачі повзучості звичайно задаються нульові початкові деформації повзучості, тобто $\varepsilon_u^C(\vec{x}, 0) = 0$.

Д5.1.5. Граничні умови

Додатково до рівнянь рівноваги, геометричних і фізичних залучаються ГУ на S_U і S_P :

- ГУ 1-го роду (відомі переміщення):

$$U_i|_{S_U} = \hat{U}_i; \quad (Д5.52)$$

- ГУ 2-го роду (природні):

$$\sigma_{mn} \nu_n|_{S_P} = \hat{P}_m, \quad (Д5.53)$$

а також зосереджені сили \hat{R}_m , прикладені в обмеженій кількості вузлів СЕС.

Д5.1.6. Варіаційна постановка статичної крайової задачі

Для розв'язування крайової задачі часто зручніше мати її варіаційну постановку.

Для отримання варіаційної постановки задачі використовуються рівняння рівноваги та геометричні, а також властивість симетрії тензора напружень і теорема Остроградського-Гауса. В підсумку отримується наступний функціонал відносно варіацій переміщень і зв'язаних із ними деформацій

$$F = \int_{\Omega} \sigma_{mn} \delta \varepsilon_{mn} d\Omega - \int_{\Omega} \hat{O}_m \delta U_m d\Omega - \int_{S_P} \hat{P}_m \delta U_m dS - \hat{R}_m \delta U_m, \quad (Д5.54)$$

що в поєднанні з кінематичними ГУ (Д5.52) на поверхні S_U визначає незліченну множину можливих (віртуальних) напружено-деформованих станів. Дійсний НДС є одним з

віртуальних, але він додатково задовольняє фізичним рівнянням зв'язків $\sigma_{mn} \propto \varepsilon_{mn}$. Для знаходження дійсних полів σ_{mn} , U_i , ε_{ij} використовується теорема варіаційного числення: дійсні поля надають мінімум функціоналу (Д5.54).

Додатково треба відзначити, що, окрім задачі повзучості та динамічних задач (останні розглядаються в Розділі 6), час не є параметром, тобто явно не входить у рівняння. У цих випадках час застосовується лише для того, щоб розрізнити початковий стан з наступними.

Якщо в (Д5.54) ε_{ij} використовується тензор значних деформацій Лагранжа–Гріна (Д5.5), то σ_{ij} – симетричний другий тензор напружень Піола–Кірхгофа, а інтегрування проводиться у початковій конфігурації тіла (докладно не розглядаємо). Такий варіант зветься *повним Лагранжевим формулюванням* (Total Lagrangian Formulation).

Д5.2. Скінченно-елементне представлення крайових задач про НДС твердого тіла, що деформується

Д5.2.1. Вектори переміщень, деформацій, напружень

У MSC.Nastran реалізовано варіант МСЕ, в якому шуканим є вектор переміщень. У матричному позначенні це вектор

$$\{U\} = \{U_1; U_2; U_3\}^T. \quad (Д5.55)$$

Наближений розв'язок крайової задачі в об'ємі Ω (компоненти вектора переміщень) можна шукати у вигляді усіченого ряду:

$$U_n = U_n(\bar{x}, t) \approx \sum_{m=1}^{N^B} (q_n)_m(t) \cdot \Phi_m(\bar{x}), \quad (Д5.56)$$

де $\Phi_m(\bar{x})$ є повна за енергією система лінійно незалежних базисних функцій; N^B – загальна їх кількість; $(q_n)_m(t)$ – шукані вузлові значення; а відповідно до ідеології МСЕ

$$\Phi_m(\bar{x}) = \sum_{\Omega^e \subset \Lambda_m} \chi^e(\bar{x}) \cdot \varphi_m^e(\bar{x}). \quad (Д5.57)$$

Тут Λ_m – множина СЕ, що містить вузол з номером m ; $\varphi_m^e(\bar{x})$ – базисна функція скінченного елемента номер e (звичайно це інтерполяційний поліном), що відповідає вузлу m в межах об'єму СЕ Ω^e ; функція приналежності до СЕ (оператор інцидентності):

$$\chi^e(\bar{x}) = \begin{cases} 1, & \bar{x} \subset \Omega^e; \\ 0, & \bar{x} \not\subset \Omega^e. \end{cases} \quad (Д5.58)$$

Інакше кажучи, замість (Д5.56) маємо скінченно-елементну апроксимацію

$$U_n = U_n(\bar{x}, t) \approx \sum_{m=1}^{N^U} (q_n)_m(t) \sum_{\Omega^e \subset \Lambda_m} \chi^e(\bar{x}) \cdot \varphi_m^e(\bar{x}), \quad (Д5.59)$$

де N^U – загальна кількість вузлів у тілі.

Оскільки для будь-якої точки в межах СЕ $\chi^e(\bar{x}) = 1$, то в межах СЕ $\Phi_m(\bar{x}) = \varphi_m^e(\bar{x})$. За межами СЕ $\chi^e(\bar{x}) = 0$, тому в (Д5.59) фактично йде підсумовування тільки по M вузлах того СЕ, у якому розташована розглянута точка з координатами \bar{x} . Тому вводиться матриця базисних функцій СЕ $[\phi]$, через яку проводиться тотожна заміна формули (Д5.59):

$$\{U\} = [\phi] \{q\}_e, \quad (Д5.60)$$

де вектор переміщень у вузлах СЕ

$$\{q\}_e = \{(q_1, q_2, q_3)_1, \dots, (q_1, q_2, q_3)_m, \dots, (q_1, q_2, q_3)_M\}^T, \quad (Д5.61)$$

у якому $(q_1, q_2, q_3)_m$ – переміщення m -го вузла СЕ; $m = 1, 2, \dots, M$. Цей вектор є результатом вибірки значень переміщень $\{q\}_e$ у вузлах даного СЕ з глобального вектора вузлових переміщень $\{q\}$.

Оскільки в тривимірному випадку вектор $\{U\}$ має розмірність 3×1 , а $\{q\}_e - 3M \times 1$, то розмірність матриці базисних функцій – $3 \times 3M$. Матриця $[\phi]$ – блочна:

$$[\phi] = [[\phi]_1, [\phi]_2, \dots, [\phi]_M], \quad (Д5.62)$$

у якій блок для m -го вузла має вигляд:

$$[\phi]_m = \begin{bmatrix} \varphi_m^e & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_m^e & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_m^e \end{bmatrix}. \quad (Д5.63)$$

Для будь-якої точки тіла в межах СЕ вводяться вектори повних і температурних деформацій, напружень:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}\}^T; \quad (Д5.64)$$

$$\{\varepsilon^T\} = \{\alpha_T\} \Delta \hat{T} = \{(\alpha_T)_x, (\alpha_T)_y, (\alpha_T)_z, 0, 0, 0\}^T \cdot \Delta \hat{T}; \quad (Д5.65)$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}\}^T, \quad (Д5.66)$$

де $\gamma_{mn} = 2\varepsilon_{mn}$ при $m \neq n$; а також аналогічні в заповненні вектора пружних $\{\varepsilon^e\}$ і необоротних $\{\varepsilon^P\}$ та $\{\varepsilon^C\}$ деформацій.

Д5.2.2. Малі деформації

Вводиться матриця $[B]$ диференціювання по глобальним координатам, з використанням якої лінійні рівняння (Д5.8) записуються у вигляді

$$\{\varepsilon\} = [B]\{q\}_e. \quad (Д5.67)$$

Оскільки вектор $\{\varepsilon\}$ має розмірність 6×1 , а $\{q\}_e - 3M \times 1$, то розмірність матриці $[B]$ – $6 \times 3M$. Позначимо:

$$p_{im} = \partial \varphi_m^e / \partial x^i. \quad (Д5.68)$$

Матриця диференціювання – блочна:

$$[B] = [[B]_1, [B]_2, \dots, [B]_M], \quad (Д5.69)$$

блоки якої, наприклад, для декартової системи координат, мають таке заповнення:

$$[B]_{m_{дск}} = \begin{bmatrix} p_{1m} & 0 & 0 \\ 0 & p_{2m} & 0 \\ 0 & 0 & p_{3m} \\ p_{2m} & p_{1m} & 0 \\ 0 & p_{3m} & p_{2m} \\ p_{3m} & 0 & p_{1m} \end{bmatrix}. \quad (Д5.70)$$

Лінійний закон Гука (Д5.15) запишемо у вигляді

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon^e\}, \quad (Д5.71)$$

де $[D]$ – матриця модулів пружності. Якщо матеріал пружно-ізотропний, то матриця

$$[D] = 2G(\bar{x}, T) \cdot \begin{pmatrix} a & b & b & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 & 0 & 0 \\ b & b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad (Д5.72)$$

де $2G(\bar{x}, T) = E/(1 + \mu)$; $a = (1 - \mu)/(1 - 2\mu)$; $b = \mu/(1 - 2\mu)$; $c = 0.5$; $E = E(\bar{x}, T)$ – модуль Юнга; $\mu = \mu(\bar{x}, T)$ – коефіцієнт Пуассона. Для анізотропних матеріалів матриця $[D]$ також симетрична, але має дещо інше заповнення.

Д5.2.3. САР при малих деформаціях

Використовуючи введені позначення, виразимо варіаційний функціонал (Д5.54) у матричному вигляді:

$$\begin{aligned}
 F = & \sum_e \int_{\Omega^e} \delta \{q\}_e^T [B]^T [D] [B] \{q\}_e d\Omega - \sum_e \int_{\Omega^e} \delta \{q\}_e^T [B]^T [D] \{\alpha_T\} \Delta \hat{T} d\Omega - \\
 & - \sum_e \int_{\Omega^e} \delta \{q\}_e^T [B]^T [D] (\{\varepsilon^P\} + \{\varepsilon^C\}) d\Omega - \sum_e \int_{S_p^e} \delta \{q\}_e^T [\phi]^T \{\hat{P}\} dS - \\
 & - \sum_e \int_{\Omega^e} \delta \{q\}_e^T [\phi]^T \{\hat{O}\} d\Omega - \delta \{q\}_e^T [\phi]^T \{\hat{R}\}.
 \end{aligned} \tag{Д5.73}$$

Оскільки вектор вузлових значень переміщень $\{q\}_e$ не залежить від параметрів інтегрування, він, а також вектор $\delta \{q\}_e^T$ можуть бути винесеними за межі інтеграла. Позначимо:

$$[K]_e = \int_{\Omega^e} [B]^T [D] [B] d\Omega; \tag{Д5.74}$$

$$\{P\}_e = \int_{\Omega^e} [\phi]^T \{\hat{O}\} d\Omega + \int_{S_p^e} [\phi]^T \{\hat{P}\} dS + [\phi]^T \{\hat{R}\}; \tag{Д5.75}$$

$$\{Q\}_e = \int_{\Omega^e} [B]^T [D] \{\alpha_T\} \Delta \hat{T} d\Omega; \tag{Д5.76}$$

$$\{H\}_e = \int_{\Omega^e} [B]^T [D] (\{\varepsilon^P\} + \{\varepsilon^C\}) d\Omega. \tag{Д5.77}$$

За умови мінімуму функціоналу (Д5.73) у вигляді $\partial F / \partial (\delta \{q\}_e^T) = 0$ одержимо систему алгебраїчних рівнянь (САР) вигляду

$$[K] \{q\} = \{P\} + \{Q\} + \{H\} \tag{Д5.78}$$

відносно глобального вектора $\{q\}$ значень вузлових переміщень. У (Д5.77) позначені збірки по ступенях свободи: $[K] = \sum_e [K]_e$; $\{P\} = \sum_e \{P\}_e$; $\{Q\} = \sum_e \{Q\}_e$; $\{H\} = \sum_e \{H\}_e$. Вектор $\{P\}$ обумовлений зовнішніми силовими навантаженнями і масовими силами; вектори $\{Q\}$ і $\{H\}$ – фіктивними, що відбивають вплив температури (вектор $\{Q\}$) і необоротних деформацій (вектор $\{H\}$), якщо останні враховуються. При відсутності необоротних деформацій САР (Д5.78) – лінійна (СЛАР), при наявності – нелінійна.

Д5.2.4. Геометричні рівняння при значних деформаціях

Позначимо

$$\varepsilon_{ij} = (\varepsilon_{ij})_L + (\varepsilon_{ij})_{NL}, \tag{Д5.79}$$

де $(\varepsilon_{ij})_L$ – лінійна частина тензора деформацій (Д5.5), тобто (Д5.8); а $(\varepsilon_{ij})_{NL}$ – нелінійна частина, тобто

$$(\varepsilon_{ij})_{NL} = \frac{1}{2} \nabla^i U_k \nabla^j U^k. \tag{Д5.80}$$

У декартовій системі координат $U^i = U_i$, усі символи Крістофеля $\Gamma_{ij}^k = 0$, $\nabla^i = \partial / \partial x^i$, тому

$$(\varepsilon_{ij})_{L\text{ДСК}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x^j} + \frac{\partial U_j}{\partial x^i} \right); \quad (\varepsilon_{ij})_{NL\text{ДСК}} = \frac{1}{2} \frac{\partial U_k}{\partial x^i} \frac{\partial U_k}{\partial x^j}; \quad i, j, k = 1, 2, 3. \tag{Д5.81}$$

тобто у формулі (Д5.72) залишається по п'ять складових. Позначимо:

$$b_{ij} = \partial U_i / \partial x^j \tag{Д5.82}$$

та введемо вектор

$$\{\theta\} = \{ \{\theta_{x^1}\}, \{\theta_{x^2}\}, \{\theta_{x^3}\} \}^T, \quad \text{де } \{\theta_{x^j}\} = \{b_{1j}, b_{2j}, b_{3j}\}^T. \tag{Д5.83}$$

Тоді друге співвідношення (Д5.81) можна представити у вигляді

$$\{\varepsilon\}_{NLДСК} = \frac{1}{2}[A]\{\theta\}, \quad (Д5.84)$$

де матриця $[A]$ розмірністю 6×9 (тривимірний випадок) у ДСК має вигляд:

$$[A]_{ДСК} = \begin{bmatrix} b_{11}; & b_{21}; & b_{31}; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{12}; & b_{22}; & b_{32}; & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{13}; & b_{23}; & b_{33} \\ b_{12}; & b_{22}; & b_{32}; & b_{11}; & b_{21}; & b_{31}; & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{13}; & b_{23}; & b_{33}; & b_{12}; & b_{22}; & b_{32} \\ b_{13}; & b_{23}; & b_{33}; & 0 & 0 & 0 & b_{11}; & b_{21}; & b_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\theta_{x_1}\}^T; & \{0\}^T; & \{0\}^T \\ \{0\}^T; & \{\theta_{x_2}\}^T; & \{0\}^T \\ \{0\}^T; & \{0\}^T; & \{\theta_{x_3}\}^T \\ \{\theta_{x_2}\}^T; & \{\theta_{x_1}\}^T; & \{0\}^T \\ \{0\}^T; & \{\theta_{x_3}\}^T; & \{\theta_{x_2}\}^T \\ \{\theta_{x_3}\}^T; & \{0\}^T; & \{\theta_{x_1}\}^T \end{bmatrix}, \quad (Д5.85)$$

де $\{0\} = \{0, 0, 0\}^T$ – нульовий вектор.

Вектори $\{\theta_{x_j}\}$ можна виразити через вузлові значення переміщень як

$$\{\theta_{x_j}\} = [C_j]\{q\}_e, \quad (Д5.86)$$

де матриця

$$[C_j] = [[p_{j1}], [p_{j2}], \dots, [p_{jM}]], \text{ а } [p_{jm}] = \begin{bmatrix} p_{jm}; & 0; & 0 \\ 0; & p_{jm}; & 0 \\ 0; & 0; & p_{jm} \end{bmatrix}. \quad (Д5.87)$$

Тоді з врахуванням (Д5.83)

$$\{\theta\} = [C]\{q\}_e, \quad (Д5.88)$$

де матриця $[C]$ розмірністю $9 \times 3M$

$$[C] = \begin{bmatrix} [C_1] \\ [C_2] \\ [C_3] \end{bmatrix}. \quad (Д5.89)$$

Отже, з огляду на (Д5.88), можемо записати, що

$$\{\varepsilon\}_{NLДСК} = \frac{1}{2}[A]\{\theta\} = \frac{1}{2}[A][C]\{q\}_e = \frac{1}{2}[\bar{B}]\{q\}_e, \quad (Д5.90)$$

де позначена матриця диференціювання нелінійних складових тензора деформацій (розмірністю $6 \times 3M$)

$$[\bar{B}] = [A][C]. \quad (Д5.91)$$

Отже

$$\{\varepsilon\} = (\{\varepsilon\}_L + \{\varepsilon\}_{NL}) = \left([B] + \frac{1}{2}[\bar{B}] \right) \{q\}_e, \quad (Д5.92)$$

причому матриця диференціювання лінійної частини тензора деформацій $[B]$ відповідає формулам (Д5.62) і (Д5.63).

Введемо позначення:

$$[\tilde{B}] = [B] + \frac{1}{2}[\bar{B}]. \quad (Д5.93)$$

Тоді остаточно запишемо, що з урахуванням нелінійних членів, що

$$\{\varepsilon\} = [\tilde{B}]\{q\}_e. \quad (Д5.94)$$

Матриця $[B]_{NL}$ є лінійною функцією переміщень через матрицю $[A]$, тому що з (Д5.85) з урахуванням (Д5.87):

$$[A] = \begin{bmatrix} ([C_1]\{q\}_e)^T; & \{0\}^T; & \{0\}^T \\ \{0\}^T; & ([C_2]\{q\}_e)^T; & \{0\}^T \\ \{0\}^T; & \{0\}^T; & ([C_3]\{q\}_e)^T \\ ([C_2]\{q\}_e)^T; & ([C_1]\{q\}_e)^T; & \{0\}^T \\ \{0\}^T; & ([C_3]\{q\}_e)^T; & ([C_2]\{q\}_e)^T \\ ([C_3]\{q\}_e)^T; & \{0\}^T; & ([C_1]\{q\}_e)^T \end{bmatrix}. \quad (Д5.95)$$

Тому, враховуючи (Д5.88), (Д5.91) та (Д5.95), можна одержати, що вектор прирощення нелінійної складової деформацій

$$\begin{aligned} \{d\varepsilon\}_{NL} &= d\{\varepsilon\}_{NL} = d\left(\frac{1}{2}[\bar{B}]\{q\}_e\right) = d\left(\frac{1}{2}[A]\{\theta\}\right) = \frac{1}{2}(d[A]\{\theta\} + [A]d\{\theta\}) = [A]d\{\theta\} = \\ &= [A][C]\{dq\}_e = [\bar{B}]\{dq\}_e. \end{aligned} \quad (Д5.96)$$

Отже, вектор прирощення деформацій:

$$\{d\varepsilon\} = ([B] + [\bar{B}])\{dq\}_e = [\tilde{B}]\{dq\}_e, \quad \{\delta\varepsilon\} = [\tilde{B}]\{\delta q\}_e, \quad (Д5.97)$$

де $[\tilde{B}] = ([B] + [\bar{B}])$ – повна матриця диференціювання для одержання вектора *прирощення* деформацій, яка *залежить від переміщень*. Особливо відзначимо, що матриця диференціювання для одержання *повного* вектора переміщень, яка також залежить від переміщень, має дещо інше наповнення (порівняйте (Д5.97) з (Д5.93)). Ці загальні вирази зберігають вигляд і для інших координатних систем (циліндричної, сферичної тощо).

Д5.2.5. САР при значних деформаціях і методи її розв'язування у MSC.Nastran

Коли деформації – значні, замість (Д5.6) використовується нелінійне рівняння (Д5.5), а замість (Д5.60) – вираз (Д5.94). Оскільки у MSC.Nastran для розв'язування *нелінійних* САР використовується метод Ньютона-Рафсона, то для отримання САР застосовується декілька інший шлях, ніж у Розділі Д5.2.3.

Якщо у функціоналі (Д5.66) не робити заміну напружень згідно з формулою (Д5.64) на вираз через переміщення, то, з урахуванням другого виразу (Д5.97) і за умови мінімуму функціоналу (Д5.66) у вигляді $\partial F / \partial(\delta\{q\}_e^T) = 0$, отримаємо:

$$\sum_e \int_{\Omega^e} [\tilde{B}]^T \{\sigma\} d\Omega = \{P\}. \quad (Д5.98)$$

Згідно з методом Ньютона-Канторовича розв'язування нелінійних САР вважається, що

$$\{\psi\}^{(k+1)} \approx \{\psi\}^{(k)} + \left. \frac{\partial\{\psi\}}{\partial\{q\}} \right|^{(k)} \cdot \{dq\} \approx \{0\}; \quad \{q\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k)} + \{dq\}, \quad (Д5.99)$$

де вектор похибки (нев'язки) $\{\psi\}$ визначається як різниця між правою та лівою частинами САР; k – номер ітерації. З (Д5.98):

$$\{\psi\}^{(k)} = \{P\} - \sum_e \int_{\Omega^e} ([\tilde{B}]^T \{\sigma\})^{(k)} d\Omega; \quad k = 0, 1, \dots; \quad (Д5.100)$$

а відповідно до (Д5.99) та (Д5.100), оскільки $\partial\{P\} / \partial\{q\} = [0]$:

$$\left. \frac{\partial\{\psi\}}{\partial\{q\}} \right|^{(k)} \{dq\} = - \frac{\partial}{\partial\{q\}} \left(\sum_e \int_{\Omega^e} [\tilde{B}]^T \{\sigma\} d\Omega \right)^{(k)} \{dq\} =$$

$$= - \left(\sum_e \int_{\Omega^e} d[\tilde{B}]^T \{\sigma\} d\Omega + \sum_e \int_{\Omega^e} [\tilde{B}]^T d\{\sigma\} d\Omega \right)^{(k)}. \quad (Д5.101)$$

Оскільки $d[B] \equiv [0]$, то з урахуванням (Д5.85) ... (Д5.89), (Д5.91):

$$\begin{aligned} \sum_e \int_{\Omega^e} d[\tilde{B}]^T \{\sigma\} d\Omega &= \sum_e \int_{\Omega^e} d[\bar{B}]^T \{\sigma\} d\Omega = \sum_e \int_{\Omega^e} d([A][C])^T \{\sigma\} d\Omega = \\ &= \sum_e \int_{\Omega^e} [C]^T d[A]^T \{\sigma\} d\Omega = \sum_e \int_{\Omega^e} [C]^T [S] d\{\theta\} d\Omega = \sum_e \left(\int_{\Omega^e} [G]^T [S] [G] d\Omega \cdot \{dq\}_e \right), \end{aligned} \quad (Д5.102)$$

де введені матриці:

$$[\tilde{S}] = \begin{bmatrix} [S] & 0 & 0 \\ 0 & [S] & 0 \\ 0 & 0 & [S] \end{bmatrix}; \quad [S] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}; \quad (Д5.103)$$

$$[G] = [[G]_1, [G]_2, \dots, [G]_M]; \quad (Д5.104)$$

M – кількість вузлів у СЕ, а матриця $[G]_m$ для декартової системи координат ($m = 1, 2, \dots, M$)

$$[G]_m = \begin{bmatrix} p_{1m} & p_{2m} & p_{3m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{1m} & p_{2m} & p_{3m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{1m} & p_{2m} & p_{3m} \end{bmatrix}^T. \quad (Д5.105)$$

В матриці $[S]$ компоненти напружень σ_{ij} розраховують відповідно до фізичних законів (див. Розділ Д5.1.4) на основі вектора вузлових переміщень $\{q\}$.

Введемо глобальну симетричну матрицю

$$[K_\sigma] = \sum_e [K_\sigma]_e, \quad \text{де } [K_\sigma]_e = \int_{\Omega^e} [G]^T [S] [G] d\Omega. \quad (Д5.106)$$

З фізичного закону (Д5.64) із застосуванням (Д5.97):

$$d\{\sigma\} = [D]d\{\varepsilon^e\} = [D]d(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^T\} - \{\varepsilon^P\} - \{\varepsilon^C\}) = [D]([\tilde{B}]^T \{dq\}_e - \{d\varepsilon^T\} - \{d\varepsilon^P\} - \{d\varepsilon^C\}). \quad (Д5.107)$$

Підставимо цей вираз у (Д5.101):

$$\begin{aligned} \sum_e \int_{\Omega^e} [\tilde{B}]^T \{d\sigma\} d\Omega &= \sum_e \left(\int_{\Omega^e} [\tilde{B}]^T [D] [\tilde{B}] d\Omega \cdot \{dq\}_e \right) - \sum_e \int_{\Omega^e} [\tilde{B}]^T [D] \{\alpha_T\} d\hat{T} d\Omega - \\ &\quad - \sum_e \int_{\Omega^e} [\tilde{B}]^T [D] (\{d\varepsilon^P\} + \{d\varepsilon^C\}) d\Omega. \end{aligned} \quad (Д5.108)$$

Позначимо:

$$[\bar{K}]_e = \int_{\Omega^e} [\tilde{B}]^T [D] [B] d\Omega + \int_{\Omega^e} [B]^T [D] [\tilde{B}] d\Omega + \int_{\Omega^e} [\tilde{B}]^T [D] [\tilde{B}] d\Omega; \quad (Д5.109)$$

$$\{dQ\} = \sum_e \int_{\Omega^e} [\tilde{B}]^T [D] \{\alpha_T\} d\hat{T} d\Omega; \quad \{dH\} = \sum_e \int_{\Omega^e} [\tilde{B}]^T [D] (\{d\varepsilon^P\} + \{d\varepsilon^C\}) d\Omega, \quad (Д5.110)$$

тоді (Д5.107) запишемо у вигляді

$$\sum_e \int_{\Omega^e} [\tilde{B}]^T \{d\sigma\} d\Omega = \sum_e \left(([K]_e + [\bar{K}]_e) \cdot \{dq\}_e \right) - \{dQ\} - \{dH\}. \quad (Д5.111)$$

Підставимо отримані вирази в (Д5.101), а результат – в (Д5.99):

$$([K] + [\bar{K}] + [K_\sigma])^{(k)} \{dq\} = \{\psi\}^{(k)} + \{dQ\} + \{dH\}; \quad \{q\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k)} + \{dq\}. \quad (Д5.112)$$

Реально розглядаються не нескінченно малі прирости, а такі, що мають кінцеві величини. Тому в (Д5.110) замість знаку диференціалу d використовують знак прирощення Δ , а замість (Д5.112) – такий вираз:

$$([K] + [\bar{K}] + [K_\sigma])^{(k)} \{\Delta q\} = \{\psi\}^{(k)} + \{\Delta Q\} + \{\Delta H\}; \quad \{q\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k)} + \{\Delta q\}. \quad (Д5.113)$$

Формула (Д5.113) відповідає одній ітерації алгоритму Ньютона-Рафсона розв'язання нелінійної САР, який побудовано на основі методу Ньютона-Канторовича. У (Д5.113) матриця нестабільна, збирається знову на кожній ітерації. Для алгоритму доведено теореми існування та унікальності розв'язку. Є декілька варіантів модифікації цього методу, у яких матриця САР оновлюється через декілька ітерацій або зовсім не оновлюється.

Матриця $[\bar{K}]$ зветься матрицею *значних переміщень*, а $[K_\sigma]$ – матрицею *геометричної жорсткості* (geometric stiffness matrix).

Д5.2.6. Алгоритм „двох кроків” одержання розв'язку у MSC.Nastran задачі для тіл з малою жорсткістю

Якщо тіло має малу жорсткість, а деформації не вважаються значними, то в MSC.Nastran застосовується алгоритм „двох кроків”, в якому на першому кроці розв'язується лінійна САР (Д5.71), а на другому до матриці жорсткості $[K]$ додається матриця *геометричної жорсткості* $[K_\sigma]$ (див. формулу (Д5.106)):

$$([K]+[K_\sigma])\{q\} = \{P\} + \{Q\} + \{H\}. \quad (Д5.114)$$

В матриці $[K]_\sigma$ компоненти напружень σ_{ij} розраховують відповідно до фізичних законів (див. Розділ Д5.1.4) на основі вектора вузлових переміщень $\{q\}$, який одержано на першому кроці.

Д5.2.7. Крайова задача про втрату стійкості твердого тіла, що деформується

При постановці крайової задачі про втрату стійкості твердого тіла розрізняють *початковий* та *суміжний* стани тіла.

Розв'язок для початкового стану одержується звичайним чином (див. Розділ Д5.2). Для отримання розв'язку для суміжного стану є САР (Д5.113). Але невідомо, яке приращення навантаження потрібно зробити, щоб навантаження досягло критичного значення. Звичайно роблять таким чином. Процес навантаження (від початкового стану до моменту втрати стійкості) вважається пропорційним, тоді додаткове навантаження можна призначати подібно до формули $P_j = P_j^* + \Delta P_j = \alpha P_j^*$, тобто $\Delta P_j = (\alpha - 1)P_j^*$. Це стосується і температурного навантаження, тому вектор $\{\Delta Q\} = (\alpha - 1)\{Q^*\}$. Оскільки початковий стан – врівноважений, то, відповідно до формули (Д5.100) вектор нев'язки $\{\psi\} = (\alpha - 1)\{P^*\}$. Компоненти вектора ΔH (від необоротних деформацій) і $[K_\sigma]\{\Delta q\}$ (від напружень) теж зміняться пропорційно, хоча пропорційні множники будуть іншими, тобто γ та β відповідно. За умовою $\{\Delta H\} = \{0\}$ (відсутності необоротних деформацій) та $[\bar{K}] = [0]$ (деформації – малі) $\beta = \alpha$. Якщо тільки $\{\Delta H\} = \{0\}$, тобто деформації – великі, але пружні, то $\beta \approx \alpha$.

Відомо, що втрата стійкості тіла може проходити за різними геометричними формами, для яких множники α, β та γ повинні бути своїми, тобто таких коефіцієнтів буде багато (теоретично – безліч). Тоді з (Д5.113) отримаємо САР:

$$([K]+[\bar{K}]+\beta_i[K_\sigma])\{\Delta q\} = (\alpha_i - 1)\{P^*\} + \{Q^*\} + (\gamma_i - 1)\{H^*\}; \quad i = 1, 2, \dots, \quad (Д5.115)$$

в якому у випадку малих деформацій матриця $[\bar{K}] = [0]$, тобто відсутня.

Оскільки після втрати тілом стійкості немає єдиного геометричного стану тіла, то і немає єдиного розв'язку САР (Д5.115). Тобто матриця цієї САР у моменті втрати стійкості є виродженою, а її детермінант дорівнює нулю:

$$\det([K]+[\bar{K}]+\beta_i[K_\sigma]) = 0; \quad i = 1, 2, \dots, \quad (Д5.116)$$

При $\beta \approx \alpha$ кожне отримане значення множника β_i буде вказувати ступень недовантаження ($\beta_i > 1$) або перевантаження ($\beta_i < 1$) тіла відносно i -го стану втрати стійкості.

На практиці звичайно є сенс розглядати лише декілька значень β_i (менших за модулем).

У MSC.Nastran для задачі втрати стійкості тіла приймаються такі допущення:

- відхилення геометрії тіла перед деформуванням – малі, тобто $[\bar{K}] = [0]$;
- конфігурація рівноваги тіла на момент втрати стійкості – початкова геометрія;
- реакція матеріалу на момент втрати стійкості – лінійна або нелінійна, але – пружна, тобто $\beta \approx \alpha$;
- поведінка тіла після того, як стійкість втрачена, не прогнозується.

Примітка Д5.1. Коли приймається $[\bar{K}] = [0]$, то розрахункові критичні навантаження звичайно є завищеними відносно експериментальних, оскільки при втраті стійкості деформації – значні, хоча й необов’язково мають необоротну складову.

Примітка Д5.2. Рекомендується задавати початкове навантаження таким, що наближується до критичного навантаження.

Додаток 6

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ПРО НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ТВЕРДИХ ТІЛ. ДИНАМІКА (теорія)

Д6.1. Постановка крайової динамічної задачі термопружності

Постановка крайової динамічної задачі термопружності з в'язким тертям (демпфіруванням) в більшості моментів співпадає з постановками крайової (квазі)статичної задачі термопружності (див. Додаток 5), тому звернемо увагу лише на розбіжності.

Примітка Д6.1. Динамічні задачі звичайно розглядають у межах теорії коливань і стійкості руху. Це дуже значний обсяг інформації. Тому тут розглядаємо лише основні відомості.

Звичайно задаються початкові умови для переміщень і швидкостей, тобто при $t_0 = 0$:

$$U_m(\vec{x}, 0) = \hat{U}_m(\vec{x}); \quad (Д6.1)$$

$$\frac{\partial U_m(\vec{x}, 0)}{\partial t} = \hat{g}_m(\vec{x}). \quad (Д6.2)$$

Рівняння рівноваги (Д5.2) із застосуванням принципу Д'аламбера замінюється на повне рівняння руху з урахуванням демпфірування:

$$\nabla^n \sigma_{mn} + \hat{O}_m = \bar{\rho} \frac{\partial^2 U_m}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial U_m}{\partial t}. \quad (Д6.3)$$

Систему рівнянь динамічної термопружності та природні граничні умови (Д5.46) можна виразити через компоненти тензора переміщень:

$$\nabla^n \left\{ E_{mnij}(T) \left[\frac{1}{2} (\nabla^i U_j + \nabla^j U_i + \nabla^i U_n \nabla^j U_n) \right] \right\} - \bar{\rho} \frac{\partial^2 U_m}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial U_m}{\partial t} = \nabla^n E_{mnij}(T) \delta_{ij} \alpha_T \Delta \hat{T} - \hat{O}_m; \quad (Д6.4)$$

$$\left\{ E_{mnij}(T) \left[\frac{1}{2} (\nabla^i U_j + \nabla^j U_i + \nabla^i U_n \nabla^j U_n) \right] \right\} \nu_n = E_{mnij}(T) \delta_{ij} \alpha_T \Delta \hat{T} \nu_n + \hat{P}_m. \quad (Д6.5)$$

У сукупності з ГУ (Д5.45), (Д6.5) та початковими умовами (Д6.1) і (Д6.2) рівняння (Д6.4) є системою диференціальних рівнянь в точці тіла, записаною відносно переміщень, розв'язок якої дасть опис зміни НДС в часі з урахуванням динамічного навантаження і в'язкого тертя. Очевидно, що ця система у операційному вигляді може бути записана як:

$$M \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} + C \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + K(\vec{U}) = \vec{f}. \quad (Д6.6)$$

При варіаційній постановці динамічної задачі можна використати варіаційний принцип Лагранжа, якщо в якості об'ємної сили розглядати $\bar{O}_m = \hat{O}_m - \bar{\rho} \frac{\partial^2 U_m}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial U_m}{\partial t}$, тобто відповідно до принципу д'Аламбера врівноважити тіло інерційною силою та силою, що демпфірує. Як і для крайової задачі термопружності, знов одержуємо варіаційний функціонал (Д5.47).

Динамічна задача у загальній постановці звичайно розв'язується не завжди, а лише у випадках аналізу перехідних гармонійних процесів та коли сили, що вимушують, не є гармонійними. Існує деяке „критичне” значення коефіцієнта демпфірування, при перевищенні якого коливань у системі виникнути не може.

Д6.2. Скінченно-елементне представлення крайової динамічної задачі

Викладене у Розділі Д5.2 повторюється (але необоротні деформації відсутні) до формули (Д5.53), замість якої, враховуючі (Д6.3), запишемо:

$$\begin{aligned}
F = & \sum_e \int_{\Omega^e} \{\delta q\}_e^T [B]^T [D] ([B] \{q\}_e - \{\alpha_T\} \Delta \hat{T}) d\Omega - \\
& - \sum_e \int_{\Omega^e} \{\delta q\}_e^T [\phi]^T \{\hat{O}\} d\Omega + \sum_e \int_{\Omega^e} \{\delta q\}_e^T [\phi]^T \bar{\rho} \frac{\ddot{a}^2([\phi] \{q\}_e)}{\ddot{a}t^2} d\Omega + \\
& + \sum_e \int_{\Omega^e} \{\delta q\}_e^T [\phi]^T \alpha \frac{\ddot{a}([\phi] \{q\}_e)}{\ddot{a}t} d\Omega - \sum_e \int_{S_p^e} \{\delta q\}_e^T [\phi]^T \{\hat{P}\} dS - \{\delta q\}_e^T [\phi]^T \{\hat{R}\}, \quad (Д6.7)
\end{aligned}$$

де, як і раніше, $\{q\}_e = \{q(t)\}_e$. У (Д6.7) матриця базисних функцій $[\phi]$ не залежить від часу, а вектори $\{\delta q\}_e$ і $\{q\}_e$ не залежать від параметрів інтегрування і їх можна винести за межі інтегралів. Тому (Д6.7) запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned}
F = & \sum_e \{\delta q\}_e^T \left(\int_{\Omega^e} \bar{\rho} [\phi]^T [\phi] d\Omega \cdot \frac{d^2 \{q\}_e}{dt^2} + \int_{\Omega^e} \alpha [\phi]^T [\phi] d\Omega \cdot \frac{d \{q\}_e}{dt} + \int_{\Omega^e} [B]^T [D] [B] d\Omega \cdot \{q\}_e \right) + \\
& + \sum_e \{\delta q\}_e^T \left(- \int_{\Omega^e} [\phi]^T \{\hat{O}\} d\Omega - \int_{S_p^e} [\phi]^T \{\hat{P}\} dS - \int_{\Omega^e} [B]^T [D] \{\alpha_T\} \Delta \hat{T} d\Omega - [\phi]^T \{\hat{R}\} \right). \quad (Д6.8)
\end{aligned}$$

Позначимо:

$$[M]_e = \int_{\Omega^e} \bar{\rho} [\phi]^T [\phi] d\Omega; \quad [C]_e = \int_{\Omega^e} \alpha [\phi]^T [\phi] d\Omega. \quad (Д6.9)$$

Використовуючи позначення (Д6.9), (Д5.67) ... (Д5.69), з (Д6.8) отримаємо, що

$$F = \sum_e \{\delta q\}_e^T \left([M]_e \frac{d^2 \{q\}_e}{dt^2} + [C]_e \frac{d \{q\}_e}{dt} + [K]_e \{q\}_e - \{P\}_e - \{Q\}_e \right). \quad (Д6.10)$$

Використовуючи умову мінімізації (Д6.10) у вигляді $\partial F / \partial \{\delta q\}_e^T = 0$, отримаємо САР вигляду

$$[M] \frac{d^2 \{q(t)\}}{dt^2} + [C] \frac{d \{q(t)\}}{dt} + [K] \{q(t)\} = \{P(t)\} + \{Q(t)\} = \{f(t)\}, \quad (Д6.11-а)$$

або в іншому позначенні

$$[M] \{\ddot{q}(t)\} + [C] \{\dot{q}(t)\} + [K] \{q(t)\} = \{f(t)\} \quad (Д6.11-б)$$

відносно глобального вектора дійсних переміщень $\{q(t)\}$ у вузлах скінченно-елементної сітки, додатково враховуючи кінематичні ГУ з (Д5.32) і початкові умови (Д6.1) і (Д6.2). Цю САР ще необхідно наблизити у часі.

Д6.3. Скінченно-елементне розв'язування крайових динамічних задач

Існує декілька характерних варіантів крайових динамічних задач. Всі вони є окремими випадками сформульованої вище крайової динамічної задачі.

Д6.3.1. Безпосереднє розв'язування динамічного рівняння

При *безпосередньому* розв'язуванні динамічного рівняння (Д6.11) у MSC.Nastran застосована рекурентна тришарова схема другого порядку наближення за методом Ньюмарка (1959 р.), яка має вигляд:

$$\begin{aligned}
& ([M] + 0.5\Delta t_n [C] + (0.5\Delta t_n)^2 [K]) \{q\}^{(2n+2)} = \\
& = 2([M] - (0.5\Delta t_n)^2 [K]) \{q\}^{(2n+1)} - ([M] - 0.5\Delta t_n [C] + (0.5\Delta t_n)^2 [K]) \{q\}^{(2n)} + \\
& + (0.5\Delta t_n)^2 [\{f\}^{(2n+2)} + 2\{f\}^{(2n+1)} + \{f\}^{(2n)}]. \quad n = 0, 1, \dots \quad (Д6.12)
\end{aligned}$$

Щоб зберегти другий порядок наближення за часом на першому часовому кроці, обчислимо $\{q\}^{(1)}$ як результат розкладу в ряд Тейлора в околі $t = 0$ на кроці Δt_n з потрібною точністю:

$$\{q\}^{(1)} = \{q\}^{(0)} + \Delta t_n \{\dot{q}\}^{(0)} + \Delta t_n^2 \{\ddot{q}\}^{(0)} / 2 + O(\Delta t_n^3). \quad (Д6.13)$$

З початкових умов відомо, що $\{q\}^{(0)} = \{\widehat{U}\}$ і $\{\dot{q}\}^{(0)} = \{\widehat{g}\}$ (див. (Д6.1) і (Д6.2)). Враховуючи, що згідно з основним рівнянням (Д6.11)

$$\{\ddot{q}\} = [M]^{-1}(-[C]\{\dot{q}\} - [K]\{q\} + \{f\}), \quad (Д6.14)$$

з (Д6.13) отримаємо

$$\{q\}^{(1)} = \{\widehat{U}\} + \Delta t_n \{\widehat{g}\} + \Delta t_n^2 [M]^{-1}(-[C]\{\widehat{g}\} - [K]\{\widehat{U}\} + \{f\}^{(0)}) / 2 + O(\Delta t_n^3). \quad (Д6.15-а)$$

або, якщо знехтувати членами другого порядку наближення:

$$\{q\}^{(1)} = \{\widehat{U}\} + \Delta t_n \{\widehat{g}\} + O(\Delta t_n^2). \quad (Д6.15-б)$$

Таким чином, перш ніж використати тришарову схему (Д6.12), необхідно насамперед застосувати один з виразів (Д6.15), які на першому часовому кроці забезпечують другий та третій порядок наближення за часом. Для того, щоби можна було швидко обернути матрицю $[M]$, її звичайно при інтегруванні за формулою (Д6.9) діагоналізують. Хоча процес діагоналізації – наближений, застосування (Д6.15-а) дає підвищену точність $O(\Delta t_n^3)$ при відносно незначних затратах часу, що добре впливає на точність подальшого розв'язку.

Д6.3.2. Задача про власні частоти та форми коливань

Розглядається нетривіальний розв'язок рівняння (Д6.11) за відсутності зовнішніх впливів і змінних кінематичних граничних умов, тобто рівняння

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [C]\{\dot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = \{0\}. \quad (Д6.16)$$

Примітка Д6.2. Для деяких задач дуже важливо врахувати вплив напруженого стану на власні частоти та форми коливань. Наприклад, розтяг лопатки газотурбінного двигуна від відцентрових масових сил. У цьому випадку потрібно у рівнянні (Д6.16) замість матриці $[K]$ використовувати матрицю $([K] + [K_\sigma])$, де матриця геометричної жорсткості $[K_\sigma]$ відповідає формулі (Д5.99). Для її побудови необхідно мати розв'язок крайової задачі як статичної. Отже, тоді спочатку розв'язується статична задача при заданих силових навантаженнях та граничних умовах 1-го роду, а потім знаходяться власні частоти та форми коливань.

Д6.3.2.1. Розв'язування при відсутності демпфірування

З (Д6.16) без врахування демпфірування

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = \{0\}. \quad (Д6.17)$$

Розв'язок можна шукати у вигляді

$$\{q(t)\} = \{A\} \cos(\omega t + \beta), \quad (Д6.18)$$

де $\{A\}$ – вектор амплітудних значень вузлових переміщень; $\omega = 2\pi f$ – колова частота, β – фаза коливань. Після прямої підстановки (Д6.18) у (Д6.17) та скорочення на $\cos(\omega t + \beta)$ отримаємо САР:

$$(-\omega^2 [M] + [K])\{A\} = \{0\}. \quad (Д6.19)$$

У цієї системі ненульові значення компонентів $\{A\}$ можливі лише при умові, що

$$\det[K - \omega^2 [M]] = 0. \quad (Д6.20)$$

Якщо квадратні матриці $[M]$ та $[K]$ – додатне визначені (звичайно для задачі лінійної пружності), то рівняння (Д6.20) має N додатних розв'язків – власних частот ω_k , причому можливі парні значення (тут N – кількість невідомих у САР (Д6.19)).

Маючи N значень власних частот ω_k , розв'язок системи (Д6.17) можна шукати у вигляді лінійної комбінації з N виразів (Д6.18):

$$\{q(t)\} = \sum_{k=1}^N \{A\}_k \cdot \cos(\omega_k t + \beta_k). \quad (Д6.21)$$

Оскільки значення компонентів власних векторів $\{A\}_k$ можуть бути знайдені не однозначно, а з точністю до постійного множника, то звичайно їх нормують за правилом:

$$\{A\}_k^T [M] \{A\}_k = 1. \quad (Д6.22)$$

Доведено, що власні вектори $\{A\}_k$ ортогональні відносно матриць $[M]$ та $[K]$, тобто

$$\{A\}_k^T [M] \{A\}_m = 0; \quad \{A\}_k^T [K] \{A\}_m = 0; \quad k \neq m. \quad (Д6.23)$$

Ще можна відзначити, що звичайно шукаються не всі корні рівняння (Д6.20), а декілька (позначимо як Na) найменших значень, оскільки тільки при нижчих власних частотах амплітуди коливань мають відносно великі значення. Інакше кажучи, декілька перших власних частот та форм коливань достатньо для отримання задовільного наближення розв'язку (Д6.21). Для цього розроблено декілька ефективних алгоритмів, які використовуються у MSC.Nastran.

Д6.3.2.2. Розв'язування при наявності демпфірування

Розв'язок системи (Д6.16) шукається у вигляді

$$\{q(t)\} = \{A\} \cdot e^{\lambda t}, \quad (Д6.24)$$

Після прямої підстановки (Д6.24) у (Д6.16) та скорочення на $e^{\lambda t}$ отримаємо:

$$(\lambda^2 [M] + \lambda [C] + [K]) \{A\} = \{0\}. \quad (Д6.25)$$

У цієї системі ненульові значення компонентів $\{A\}$ можливі лише при умові, що

$$\det[\lambda^2 [M] + \lambda [C] + [K]] = 0. \quad (Д6.26)$$

Розв'язок цього рівняння у загальному випадку дає $2N$ коренів λ_n , серед яких є дійсні $\lambda_n = -h_n \pm a_n$ та попарно-комплексні $\lambda_n = -h_n \pm i\bar{\omega}_n$. Дійсні корені – це слідство демпфірування, що перевищує критичне, коли коливань немає. Частина коренів, що позначена як h_n , є n -им коефіцієнтом демпфірування, а мніма частина попарно-комплексного кореня $\bar{\omega}_n$ – коловою частотою тіла з наявним демпфіруванням. Серед власних форм також будуть дійсні та попарно-комплексні форми. Отримати такий розв'язок значно складніше, ніж для (Д6.20). Для цього теж розроблено декілька методів.

Д6.3.3. Розв'язування динамічного рівняння із застосуванням методу розкладання розв'язку за власними формами коливань

Замість (Д6.21) вектор вузлових переміщень можна представити у вигляді розкладу

$$\{q(t)\} \approx \sum_{k=1}^{Na} (\{A\}_k \cdot u_k(t)), \quad (Д6.27)$$

яке дає точне значення при $Na = N$. Підставивши (Д6.27) у (Д6.11), помножимо отриманий вираз зліва на $\{A\}_m^T$ і, використовуючи властивості (Д6.23), тобто ортогональності форм власних коливань, отримаємо систему рівнянь відносно функцій $u_m(t)$:

$$M_m \ddot{u}_m + \{A\}_m^T [C] \{A\}_k \dot{u}_k + K_m u_m = F_m(t), \quad (Д6.28)$$

де позначено: $M_m = \{A\}_m^T [M] \{A\}_m$; $K_m = \{A\}_m^T [K] \{A\}_m$; $F_m = \{A\}_m^T \{f\}$.

Ця система у загальному випадку може бути проінтегрована аналогічно викладеному у Розділі Д6.3.2 або іншим чином.

Бувають випадки, коли й $\{A\}_k^T [C] \{A\}_m = 0$ при $k \neq m$, наприклад, коли матрицю $[C]$ можна представити у вигляді лінійної комбінації матриць $[M]$ і $[K]$. Тоді (Д6.28) спрощується до Na незв'язаних між собою рівнянь

$$M_m \ddot{u}_m + C_m \dot{u}_m + K_m u_m = F_m(t), \quad (Д6.29)$$

де $C_m = \{A\}_m^T [C] \{A\}_m$. Функції $u_k(t)$ для (Д6.27) тепер можна шукати у вигляді

$$u_m(t) = U_m \cdot e^{i\omega t}, \quad (Д6.30)$$

де $i = \sqrt{-1}$; ω – колова частота. З (Д6.29) отримаємо Na незв'язаних між собою рівнянь

$$(-\omega^2 M_m + i\omega C_m + K_m) \cdot U_m = F_m(t) \cdot e^{-i\omega t} \quad (Д6.31)$$

відносно функцій U_m . Амплітудно-частотними характеристиками $W_m(\omega)$ (АЧХ, або передавальними функціями) називають вирази, що відповідають відношенню реакції U_m до вхідного сигналу $F_m(t) \cdot e^{-i\omega t}$. Отже, з (Д6.31) у цьому випадку АЧХ обчислюються за формулою

$$W_m(\omega) = 1/(-\omega^2 M_m + i\omega C_m + K_m). \quad (\text{Д6.32})$$

Потім, згідно з формулою (Д6.30), функції $u_k(t)$ знаходяться як

$$u_m(t) = W_m(\omega) \cdot F_m(t). \quad (\text{Д6.33})$$

Отже, коли АЧХ відомі, то для знаходження $\{q(t)\}$ послідовно застосовують формули (Д6.33) і (Д6.27). Якщо дисипація енергії не враховується, то матриця $[C]$ та її компоненти у наведених вище рівняннях відсутні.

Функція-розв'язок $u_m(t)$ – комплексна. Її можна представити у вигляді:

$$u_m(t) = \text{Re}(u_m(t)) + i \cdot \text{Im}(u_m(t)) = |u_m(t)| e^{i\phi}, \quad (\text{Д6.34})$$

де $|u_m(t)|$ – амплітуда; $\phi = \text{arctg}(\text{Im}(u_m(t))/\text{Re}(u_m(t)))$ – фаза коливального процесу.

Д6.3.4. Задача про стохастичне збудження тіла

Досить часто у природі збудження тіла є випадковим (імовірним, стохастичним). Наприклад, збудження споруд при землетрусу, автомобілів – при пересуванні бруківкою, споруд – вітровим навантаженням, кораблів – морськими хвилями. Відгук тіла на збудження завжди детермінований. Але реалізація випадкового збудження наперед невідома, тому оцінки можна робити суцільно статистично (щільність розподілу випадкової функції, стандартне відхилення, імовірність перевищення деякого значення тощо). Точні розв'язки вимагають нескінченної кількості оцінок. У MSC.Nastran застосовують один з *кореляційних* методів, який дає досить добре наближення – метод *моментів* з кореляційною функцією *другого* порядку. Він обмежується лише двома оцінками: *математичним сподіванням* m_q та *кореляційною функцією* K_q , яка у свою чергу є математичним сподіванням від двох відцентрованих випадкових функцій:

$$m_q(t) = M(q(t)); \quad K_q(t_1, t_2) = M(\tilde{q}(t_1), \tilde{q}(t_2)); \quad \tilde{q}(t) = q(t) - m_q(t), \quad (\text{Д6.35})$$

де $M()$ – оператор усереднення; t_1 та t_2 – випадкові значення часу. Доказано, що в цих двох функціях міститься значна частина інформації про випадковий процес.

Якщо m_q – постійна величина, а всі інші статистичні характеристики – незмінні відносно деякої величини зсуву у часі $\tau = t_1 - t_2$, то кореляційна функція залежить лише від цього зсуву у часі: $K_q(t_1, t_2) = K_q(\tau)$. Такі випадкові коливання називають *стаціонарними*. Вони можуть визначатися лише однією невідповідною функцією – *спектральною щільністю* $S_q(\omega)$, яка є дисперсією, що припадає на одиницю довжини частотного інтервалу, тобто:

$$S_q(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} K_q(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau; \quad K_q(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_q(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (\text{Д6.36})$$

Майже всі стаціонарні випадкові навантаження відповідають умовам *ергодичності*. Це означає, що достатньо довга реалізація цих навантажень несе в собі всю інформацію про їхні статистичні властивості. Тому для ергодичних процесів осереднення по ансамблю реалізацій може бути замінене осередненням у часі.

Отже, досить знати АЧХ усіх точок тіла, щоб знайти їх миттєві відгуки. Тому в MSC.Nastran при стохастичному збудженні тіла для m -го відклику результуюча спектральної щільності реакції (дійсне число) розраховується як

$$S_m(\omega) = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} (W_m(\omega))_{\alpha} \cdot (\bar{W}_m(\omega))_{\beta} \cdot S_{\alpha\beta}(\omega), \quad (\text{Д6.37})$$

де $W_m(\omega)$ – відповідна АЧХ; α та β означають два стану навантаження; риса вказує на комплексно-спряжене значення; $S_{\alpha\beta}(\omega)$ – функція спектральної щільності збудження (Power Spectral Density, скорочено PSD).

Таблиця Д6.1. $K(\tau)$ та $S(\omega)$ для стаціонарних випадкових процесів

№ з.п.	Кореляційна функція $K(\tau)$	Спектральна щільність $S(\omega)$
1	$K_0 e^{-\gamma \tau }$	$2\gamma K_0 / [\pi(\gamma^2 + \omega^2)]$
2	$K_0 e^{-(\gamma^2 \tau^2)/4}$	$\frac{2K_0}{\gamma\sqrt{\pi}} e^{-(\omega/\gamma)^2}$
3	$K_0 e^{-\gamma \tau } \cos \beta\tau$	$\frac{2\gamma K_0}{\pi} \frac{\omega^2 + \beta^2 + \gamma^2}{(\omega^2 - \beta^2 - \gamma^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}$
4	$K_0 e^{-\gamma \tau } (\cos \beta\tau + \frac{\gamma}{\beta} \sin \beta \tau)$	$\frac{2\gamma K_0}{\pi} \frac{\beta^2 + \gamma^2}{(\omega^2 - \beta^2 - \gamma^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}$
5	$K_0 \frac{\sin \omega_b \tau}{\omega_b \tau}$	$\frac{K_0}{\omega_b} \text{ при } \omega < \omega_b \text{ та } 0 \text{ при } \omega > \omega_b$
6	$K_1 \delta(\tau)$	K_1 / π

У таблиці Д6.1 представлено деякі аналітичні вирази для $K(\tau)$ і $S(\omega)$, а також їхній графічний вигляд. Випадки 1 і 2 відповідають процесам зі спектральною щільністю, яка монотонно зменшується. Випадки 3 і 4 можна застосовувати для описування процесів з частотами ω , які переважають та близькі до β . Випадок 5 відповідає рівномірному розподілу енергії для частотного діапазону $|\omega| < \omega_b$. Випадок 6 – „білий шум”, можна розглядати як випадок 5 при $\omega_b \rightarrow \infty$. Такий процес має нескінченну енергію, тому є абстракцією.

У попередніх версіях MSC.Nastran спектральна щільності реакції при стохастичному збудженні обчислюється тільки для вказаних вузлів та їх ступенів свободи. У MSC.Nastran 2001 з'явилася додаткова можливість побудови її *середньоквадратичного* значення \bar{u}_m (RMS), яке може бути отримано або як інтеграл або як чисельне наближення (апроксимація):

$$\bar{u}_m = \sqrt{\int_f |S_{mf}| df} \cong \sqrt{\sum_f C_f S_m}, \quad (\text{Д6.38})$$

от трапецеїдального методу інтегрування, де частотно-залежні коефіцієнти S_{mf} (при $f = f_m$), умноженні на частотні коефіцієнти:

$$C_{fi} = (f_{i+1} - f_{i-1})/2 \quad \text{при } 1 < i < N; \quad C_{f1} = (f_2 - f_1)/2; \quad C_{fN} = (f_N - f_{N-1})/2. \quad (\text{Д6.39})$$

Чутливість конструкції – похідна середньоквадратичного значення \bar{u}_m за кожної змінної проекту. Чутливість маємо для прискорення, швидкості та векторів зміщення. Фактично похідні розраховані от скінчених приростів спектральної чутливості $\Delta S_m^x(\omega)$, які, у свою чергу, отримані від малих різниць у векторних величинах $\Delta W_{m\alpha}^x$. Із рівняння (Д6.38) можна отримати:

$$\Delta \bar{u}_m^x = \frac{1}{2\bar{u}_m^x} \sum_f C_f \cdot \Delta S_{mf}^x, \quad (\text{Д6.40})$$

де з формули (Д6.37):

$$\Delta S_{mf}^x = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} S_{\alpha\beta} \cdot (\Delta W_{m\alpha} \cdot W_{m\alpha}^* + W_{m\alpha} \cdot \Delta W_{m\alpha}^*). \quad (\text{Д6.41})$$

Тут $\Delta W_{m\alpha}^x$ обчислені для кожного значення x . З правої частини (Д6.41) для ΔS_{mf}^x вибирається дійсна частина.