Лекція №10

Розділ 8. СИНТЕЗ ПЛОСКИХ МЕХАНІЗМІВ

При проектуванні схем механізмів (синтезі) за вибраною структурною схемою і заданими кінематичними характеристиками визначають розміри ланок механізмів, які забезпечили б необхідні рухи.

Тема 8.1. СИНТЕЗ КІНЕМАТИЧНИХ СХЕМ МЕХАНІЗМІВ З НИЖЧИМИ ПАРАМИ

Мова йде про важільні механізми. Їх кінематичний синтез містить цілий ряд конкретних задач:

8.1.1. Умова існування кривошипа в чотириланкових механізмах (правило Грасгофа)

При синтезі механізму важливою умовою є можливість провертання його ланок, тобто наявність в його схемі одного або кількох кривошипів. Ця умова залежить від співвідношення довжин ланок.

Розглянемо чотириланковий механізм (рис. 8.1) з довжинами ланок *a, b, c,* і *d*.

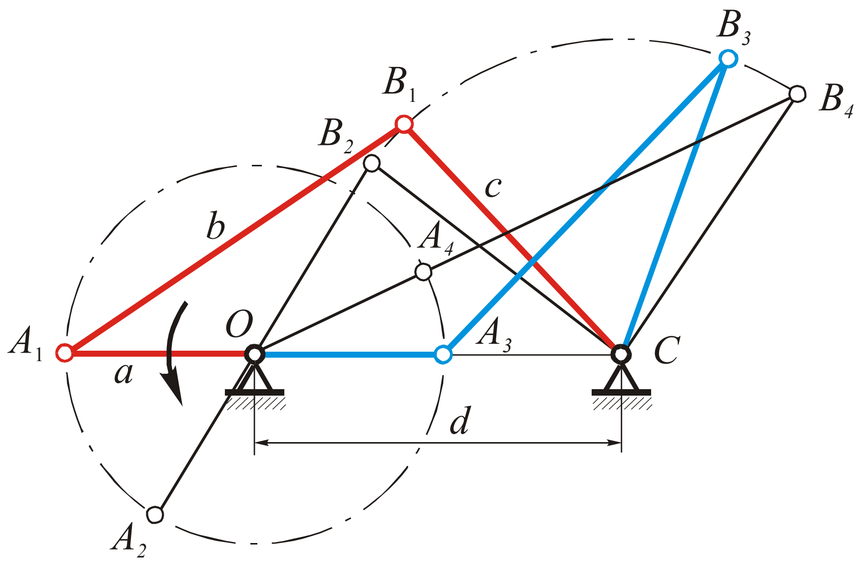


Рис. 9.1 Шарнірно-важільний чотириланковий механізм

Як відомо, кривошип – це ланка механізму, яка здійснює повний оберт. Щоб ланка OA могла бути кривошипом, вона має пройти через два крайніх положення: OA_1 і OA_3.

Приймемо, що розмір a (ланка OA) – найменший, а розмір d (стояк OC) – найбільший.

Розглянемо трикутник A_1B_1C. Оскільки в трикутнику довжина однієї сторони менша від суми довжин двох інших сторін, запишемо таку нерівність:

$$d + a < b + c. \tag{8.1}$$

Для трикутника A_3B_3C справедлива така умова:

$$d - a < b + c. \tag{8.2}$$

Оскільки за умовою $d > a$, то нерівність (8.1) забезпечує виконання нерівності (8.2) незалежно від співвідношення сторін b і c. Якщо найдовшою є ланка AB ($b > c > d$) або BC ($c > b > d$), то нерівність (8.1) тим більше виконується.

Нерівність (8.1) дозволяє сформулювати *правило Грасгофа*.

Положення кривошипа OA_2 і OA_4 відповідають крайнім положенням коромисла CB.

8.1.2. Приклади синтезу чотириланкових механізмів

а) Синтез кривошипно-коромислового механізму за двома положеннями ланок.

За заданою відстанню між шарнірами O і C, які належать стояку (рис. 8.2), довжиною коромисла l_3 та його кутовим координатам γ_1 і γ_2 в крайніх положеннях механізму треба знайти невідомі довжини ланок: кривошипа l_1 і шатуна l_2.

Для цього з'єднуємо прямими точки B_1 і B_2 з точкою O. Маємо

$$l_{OB_1} = l_1 + l_2;$$

$$l_{OB_2} = l_2 - l_1.$$

Звідси

$$l_1 = \left(l_{OB_1} - l_{OB_2}\right)/2;$$

$$l_2 = \left(l_{OB_1} + l_{OB_2}\right)/2.$$

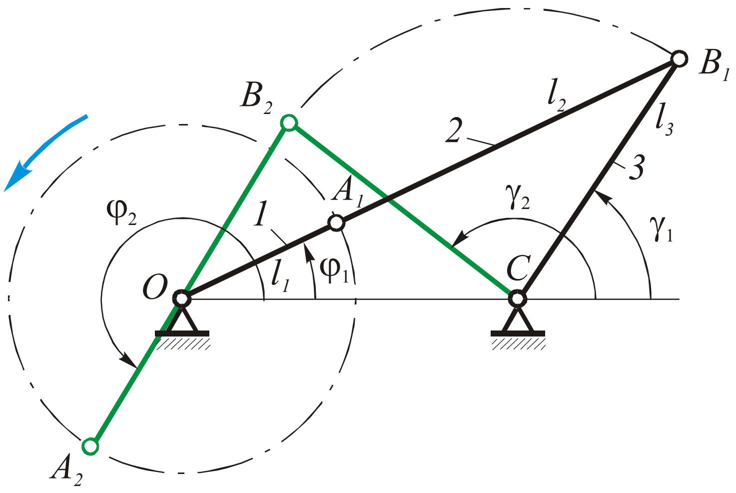


Рис. 8.2 Синтез кривошипно-коромислового механізму

б) Синтез кривошипно-повзункового механізму за середньою швидкістю вихідної ланки.

При проектуванні машин часто задають середню швидкість повзуна V_c (м/с). Розглянемо центральний кривошипно-повзунковий механізм (рис. 8.3).

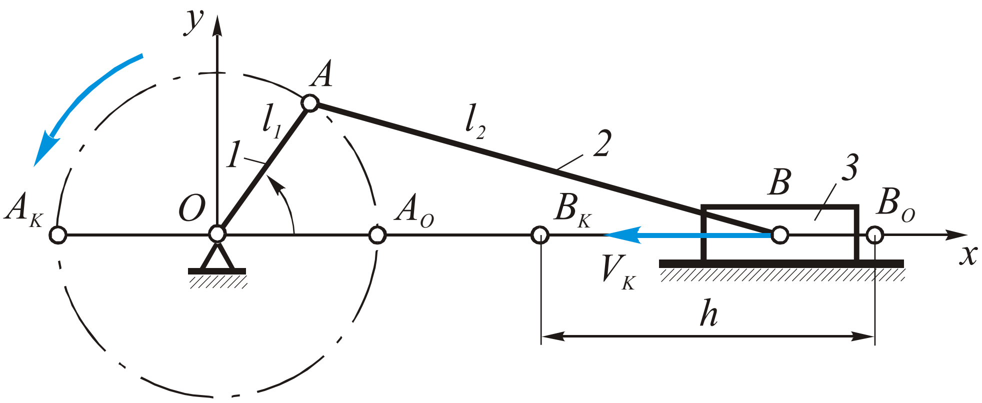


Рис. 8.3 Синтез кривошипно-повзункового механізму

Тут подвійний хід повзуна відповідає одному повному оберту кривошипа. Можна записати, що

$$2h = 4l_1.$$

Якщо частота обертання кривошипа (кількість обертів за секунду) n (с$^{-1}$), то

$$V_c = 2hn = 4l_1 n.$$

Звідси довжина кривошипа

$$l_1 = V_c / 4n.$$

Довжину коромисла вибирають, задаючись співвідношенням $\lambda_2 = l_2 / l_1$. Чим менше це співвідношення, тим менші габарити механізму, але більші тиски виникають в несприятливих положеннях механізму в кінематичних парах. Наприклад, для механізмів двигунів внутрішнього згорання вибирають це співвідношення в межах $\lambda_2 = 3...5$.

Тема 8.2. СИНТЕЗ МЕХАНІЗМІВ З ВИЩИМИ ПАРАМИ

8.2.1. Основна теорема зачеплення

До переваг цих механізмів слід віднести можливість реалізувати необхідні закони руху за мінімальної кількості ланок та відносно вищу точність відтворення цих законів у порівнянні з шарнірно-важільними механізмами.

Механізми з вищими парами можуть мати одну пару спряжених профілів, наприклад кулачкові механізми, або кілька пар, як в зубчастих механізмах.

Між геометрією спряжених профілів та законом відносного руху елементів вищої кінематичної пари існує взаємозв'язок. Встановлює його *основна теорема зачеплення.*

В задачах синтезу спряжених профілів закон відносного руху вважається заданим. Дійсно, у співвідношенні

$$\overline{\omega}_2 = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_{21}.$$

швидкості $\overline{\omega}_1$ і $\overline{\omega}_2$ відомі. Звідси

$$\overline{\omega}_{12} = \overline{\omega}_1 - \overline{\omega}_2 \qquad (8.3)$$

На рис. 8.4 наведені приклади, з яких видно, що вектори швидкостей $\overline{\omega}_1$ і $\overline{\omega}_2$ можуть бути паралельними, перетинатися або перехрещуватися.

Вісь, яка проходить через точку *P*, є миттєвою віссю обертання однієї з ланок в системі координат, пов'язаною з іншою ланкою.

Коли осі обертання нерухомі і паралельні, аксоїдами є циліндри (рис. 8.4 а), які дотикаються по твірній і перекочуються один по одному без ковзання.

Коли осі обертання нерухомі і перетинаються в деякій точці (рис. 8.4 б), аксоїдами є конуси з кутами при вершинах $2\delta_{w1}$ і $2\delta_{w2}$. Ці кути визначають положення миттєвої осі обертання в основній системі відліку.

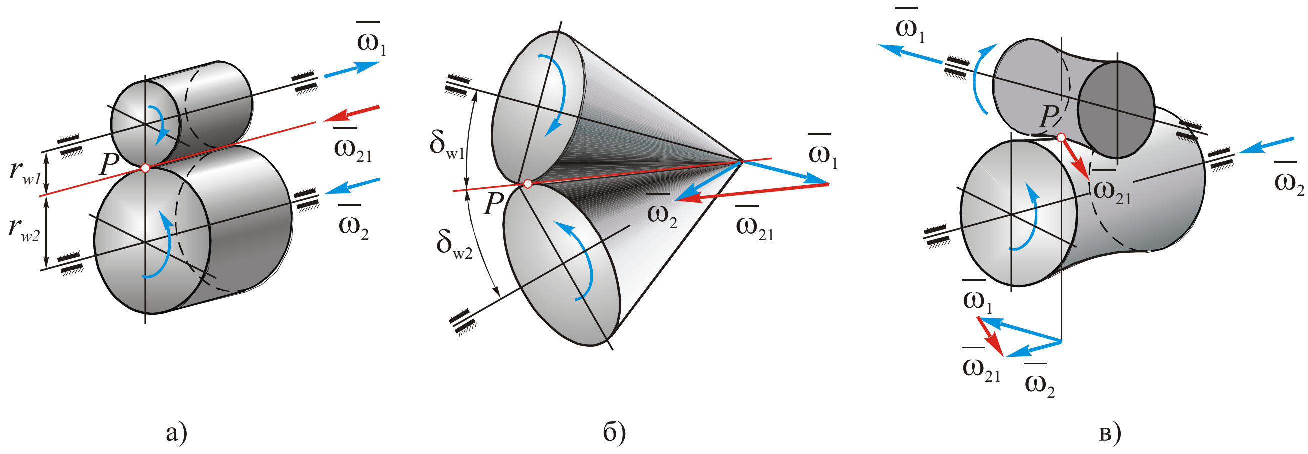


Рис. 8.4 Типи аксоїдів: а – циліндри; б – конуси; в – гіперболоїди

Коли осі обертання перехрещуються (рис. 8.4 в), відносний рух ланок є гвинтовим, тобто складається з обертального навколо деякої осі і поступального вздовж цієї осі. В цьому випадку мову слід вести про *миттєву гвинтову вісь*. Якщо швидкості обертання ланок $\overline{\omega}_1$ і $\overline{\omega}_2$ постійні, то аксоїдами є гіперболоїдами обертання з прямолінійною твірною, які перекочуються один по одному, дотикаючись по миттєвій гвинтовій осі, ковзаючи при цьому вздовж цієї осі.

В загальному випадку основна теорема зачеплення може бути сформульована так:

Довести цю теорему досить просто, йдучи від протилежного твердження: неперпендикулярність спільної нормалі в точці контакту спряжених поверхонь до напрямку вектора відносної швидкості передбачає наявність ще однієї складової швидкості – у напрямку цієї нормалі. А в цьому випадку елементи вищої пари мають або взаємно проникати, або відриватись один від одного, що суперечить умові утворення вищої кінематичної пари.

8.2.2. Основна теорема зачеплення для плоских механізмів (теорема Віліса).

Для плоских механізмів з вищою парою вводиться поняття *миттєвого центру обертання*.

Центроїда утворюється як лінія перетину аксоїда з поперечною січною площиною. Як і аксоїди, центроїди перекочуються одна по одній без ковзання.

Точка дотику центроїд P називається *полюсом зачеплення* (див. рис. 8.4 а).

Основна теорема плоского зачеплення формулюється так:

Для доведення цієї теореми скористаємось рис. 8.5.

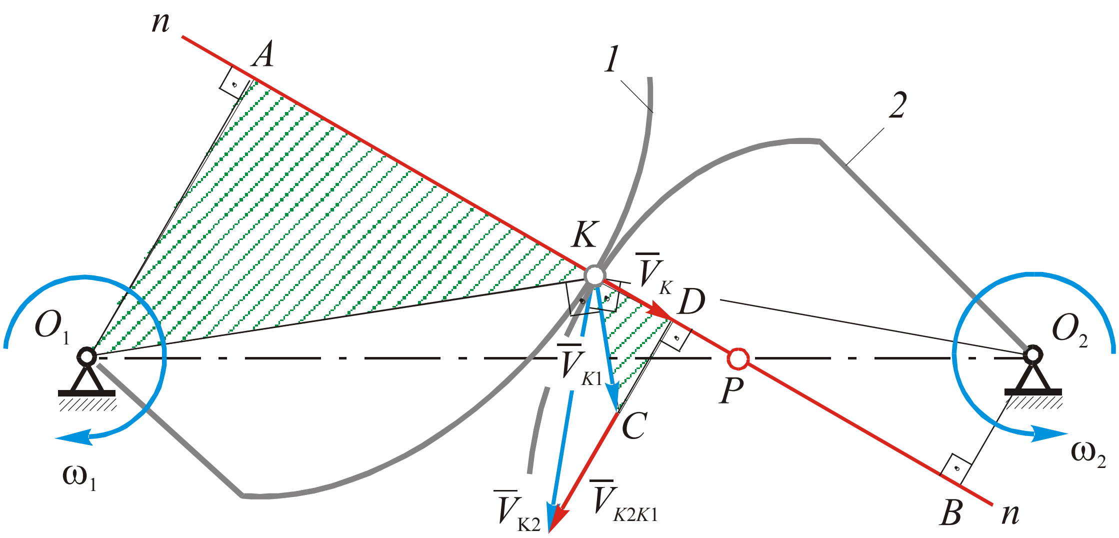


Рис. 8.5 Плоский механізм з вищою парою

Тут $\bar{V}_{K1}$ і $\bar{V}_{K2}$ – абсолютні швидкості точки K для першої і другої ланки відповідно. Для них справедливе співвідношення:

$$\bar{V}_{K2} = \bar{V}_{K1} + \bar{V}_{K2K1}.$$

Згідно с основною теоремою зачеплення, сформульованою в п. 8.2.1, швидкість точки K у напрямку спільної нормалі n-n для обох ланок однакова: $\bar{V}_{K1}^{n} = \bar{V}_{K2}^{n} = \bar{V}_K$.

З подібності трикутників O_1AK і KDC можна записати співвідношення:

$$\frac{O_1A}{O_1K} = \frac{KD}{KC} \tag{8.4}$$

Враховуючи, що $KD = \left|\bar{V}_K\right| = \left|\bar{V}_{K2}^{n}\right| = \omega_2\left(\mu_l \cdot O_2B\right)$ і $KC = \left|\bar{V}_{K1}\right| = \omega_1\left(\mu_l \cdot O_1K\right)$, співвідношення (8.4) перепишемо у вигляді

$$\frac{O_1A}{O_1K} = \frac{\omega_2\left(\mu_l \cdot O_2B\right)}{\omega_1\left(\mu_l \cdot O_1K\right)}$$

або

$$\frac{O_1A}{O_2B} = \frac{\omega_2}{\omega_1}. \qquad (8.5)$$

Тепер розглянемо трикутники O_1AP і O_2BP. Вони також подібні. Отже

$$\frac{O_1A}{O_2B} = \frac{O_1P}{O_2P}.$$

Тобто

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{O_1P}{O_2P} = u_{21}, \qquad (8.6)$$

що й треба було довести.

Згідно з основною теоремою плоского зачеплення положення полюса зачеплення P однозначно визначається через міжосьову відстань O_1O_2 і передатне відношення u_{21}, які в задачах синтезу мають бути заданими.

8.2.3. Графічні методи синтезу спряжених профілів

8.2.3.1. Метод послідовних положень профілів

В основу методу покладено принцип оберненості руху, згідно з яким одна з центроїд ($Ц_2$ на рис. 8.6) зупиняється, а стояк разом з іншою центроїдою ($Ц_1$) обертається зі швидкістю $-\omega_2$. При цьому центроїда $Ц_1$ здійснює одночасно відносний обертальний рух навколо полюса P зі швидкістю ω_{12}.

Метод полягає у кресленні ряду послідовних положень профілю $П_1$ та побудові профілю $П_2$ як внутрішньої обвідної цих положень (рис. 8.6 а).

На центроїдах показані точки, якими вони дотикаються при перекочуванні: відповідно 1^* і 1^{**}; 2^* і 2^{**} і т.д. Оскільки центроїди перекочуються без ковзання, положення відповідних точок визначають, виходячи з умов рівності відповідних дуг центроїд: $\cup P1^* = \cup P1^{**}$; $\cup P2^* = \cup P2^{**}$; ...; $\cup P10^* = \cup P10^{**}$.

В оберненому русі лінія, що сполучає центри обертання центроїд O_1O_2, займатиме послідовні положення O_2-1; O_2-2; ...; O_2-10. Точки 1^{**}, 2^{**}, ..., 10^{**} нерухомої центроїди $Ц_2$, які є миттєвими центрами обертання центроїди $Ц_1$, розглядаємо як полюси зачеплення у відповідних положеннях.

Коли полюс зачеплення перебуватиме в точці 2^{**}, тобто центроїда $Ц_1$ займе положення $Ц_1^{(2)}$ (рис. 8.6 б), промінь $O_1 2^*$ збіжиться з лінією центрів O_2-2. При цьому центроїда $Ц_1$ повернеться на кут $\varphi^{(2)}$. Прив'яжемо профіль $П_1$ до лінії O_1P (вихідне положення нашої побудови). В положенні лінії центрів O_2-2 профіль займе положення 2. На рис. 8.6 а положення профілів в оберненому русі вказані в кружках.

Шуканий спряжений профіль $П_2$ будуємо як обвідну отриманих послідовних положень заданого профілю $П_1$. На рис. 8.6 а цей профіль виділений штрихуванням.

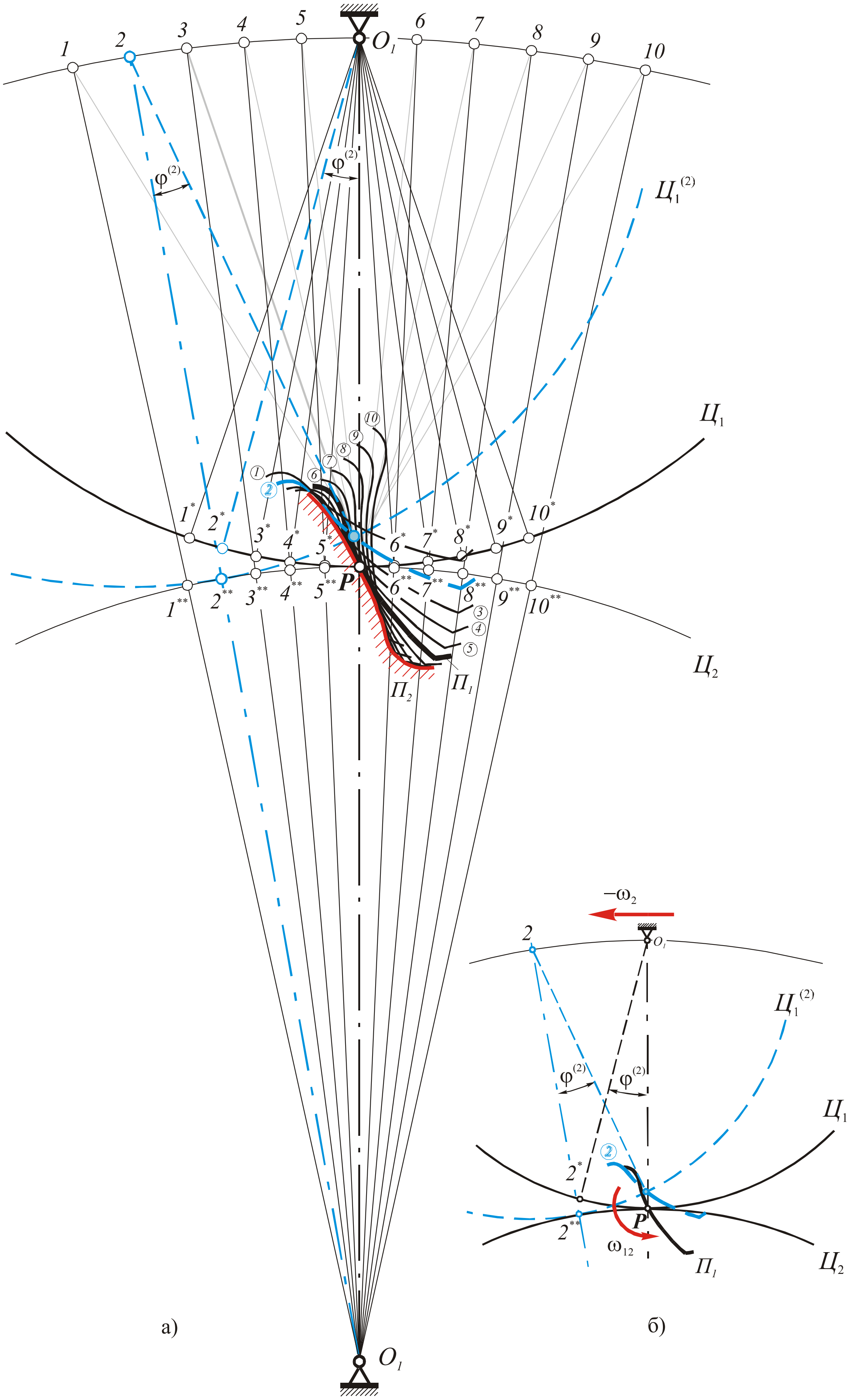


Рис. 8.6 Синтез спряжених профілів за методом послідовних положень

8.2.3.2. Спосіб Рело

Спряжений профіль можна побудувати за положеннями нормалей. Базується спосіб на основній теоремі зачеплення. Він досить ефективний у випадках, коли можна легко визначити положення нормалей до заданого профілю.

Вважатимемо заданими міжосьову відстань O_1O_2, закон відносного руху ланок $u_{21} = \omega_2 : \omega_1 = O_1P : O_2P$ та профіль $П_2$ (рис. 8.7). Побудуємо спряжений з ним профіль $П_1$.

Виберемо на профілі $П_2$ ряд точок 1_2, 2_2, 3_2, ... 6_2. Проведемо через них нормалі до профілю до перетину з центроїдою $Ц_2$ в точках 1^{**}, 2^{**}, 3^{**}, ..., 6^{**} відповідно. Відкладемо на центроїді $Ц_1$ точки 1^*, 2^*, 3^*, ..., 6^*, з якими відповідні точки центроїди $Ц_2$ вступають в контакт при проходженні полюса P. Для цього скористаємось умовами: $\cup P1^* = \cup P1^{**}$; $\cup P2^* = \cup P2^{**}$; ...; $\cup P6^* = \cup P6^{**}$, оскільки центроїди перекочуються без ковзання.

Згідно з основною теоремою зачеплення точка контакту спряжених профілів лежить на нормалі, яка проходить через полюс. Виходячи з цього, можна знайти положення точок профілю $П_2$ на нерухомі площині, коли вони вступають в контакт з профілем $П_1$. Для прикладу візьмемо точку 1_2. Вона є вершиною трикутника $O_2 1_2 1^{**}$ (рис. 8.7 б). Повернемо цей трикутник разом з центроїдою $Ц_2$ відносно точки O_2 до суміщення точки 1^{**} з полюсом P (рис. 8.7 в). Оскільки сторона трикутника $1_2 1^{**}$ збігається з нормаллю до профілю $П_2$ в точці 1_2 , то точку 1 слід розглядати як точку контакту профілів.

Аналогічно можна знайти положення інших точок контакту на нерухомій площині (див. рис. 8.7 а).

Геометричне місце точок контакту спряжених профілів* 1, 2, 3, ..., 6 *називається лінією зачеплення.

Нормаль до профілю $П_2$, що проходить через полюс зачеплення, є спільною для обох профілів. В положенні, що розглядається, в полюсі P зустрілись точки 1^* і 1^{**} центроїд $Ц_1$ і $Ц_2$ (див. рис. 8.7 в, г). Повертаючи центроїди у вихідне положення, повертаємо одночасно і трикутник $O_1 1 1^*$ (рис. 8.7 г, д). Отримана точка 1_1 профілю $П_1$ є спряженою з точкою 1_2 профілю $П_2$.

Аналогічно знаходимо й інші точки профілю $П_1$. З’єднуючи плавною кривою точки 1_1, 2_1, 3_1, ... , 6_1, отримаємо шуканий профіль $П_1$, спряжений з заданим профілем $П_2$ (рис. 8.7 а).

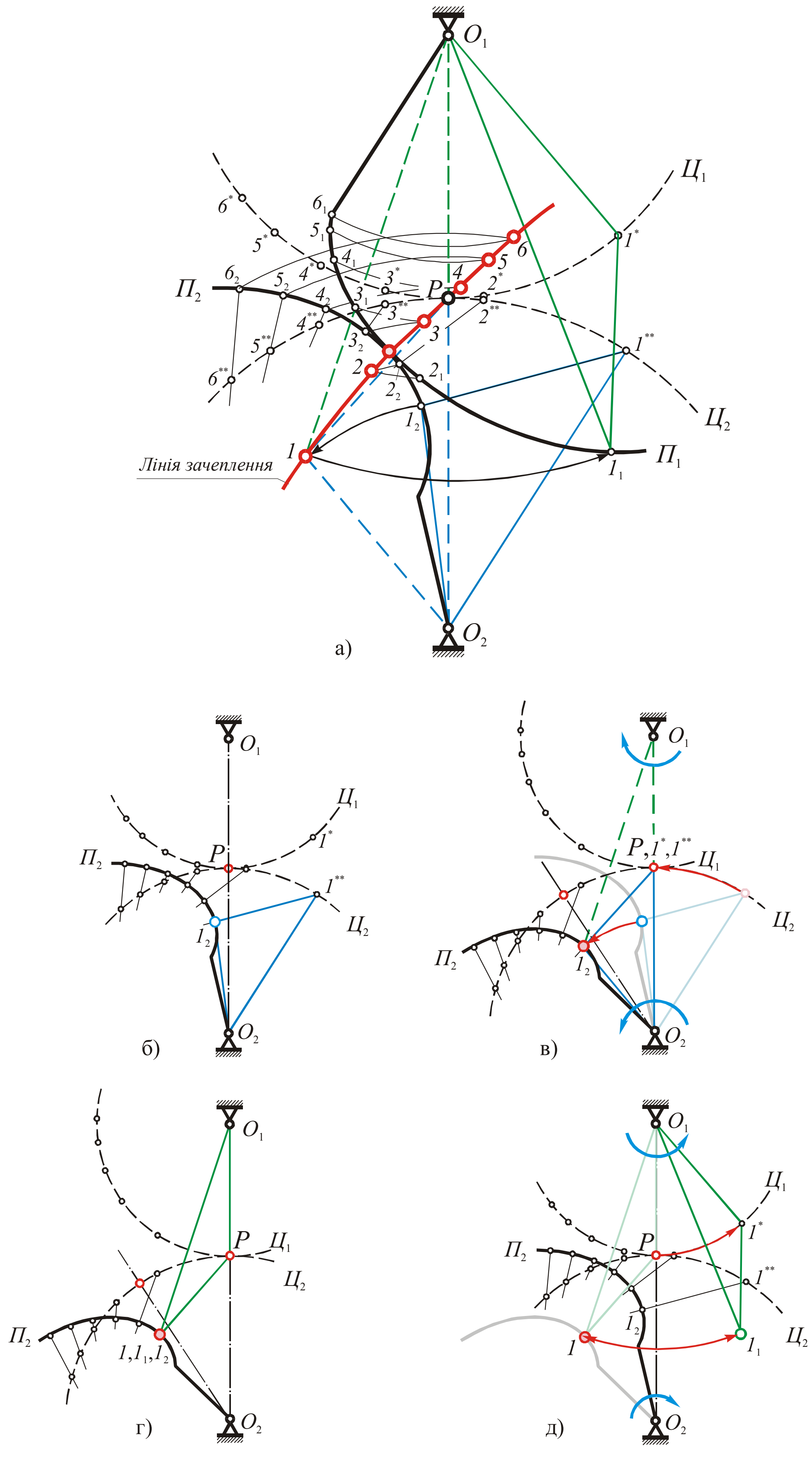


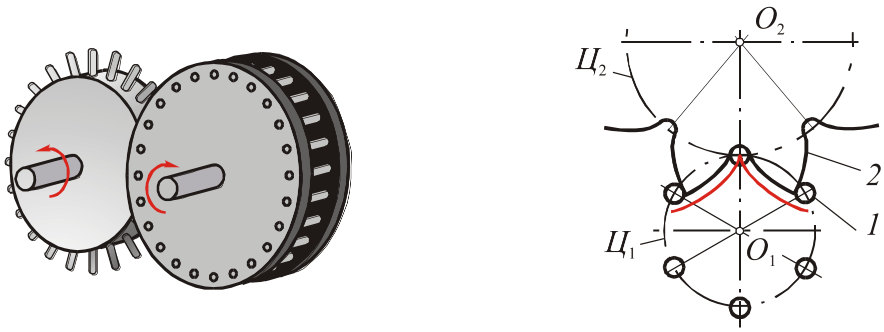
Рис. 8.7 Синтез спряжених профілів за методом Рело: реалізація методу (а); стадії синтезу (б, в, г, д)

Розділ 9. ЗУБЧАСТЕ ЗАЧЕПЛЕННЯ

Історія зубчастих передач сягає часів древнього Єгипту, коли використали перші примітивні зубчасті колеса (рис. 9.1 а), які лише віддалено нагадують сьогоднішні. Їх прямими „нащадками” можна вважати *цівкові передачі*, які відносяться до *циклоїдних*.

На рис. 9.1 б зображена схема цівкової передачі. *Цівкою* називають ролик 1, який взаємодіє з зубцем колеса 2. Профіль зубця виконаний по циклоїді, еквідистантній до циклоїди, яку описує деяка точка кола, на якому розташовані центри цівок, при перекочуванні його по центроїді колеса 2. Зміщення циклоїди для утворення профілю зубця, як видно з рисунка, визначається діаметром цівки.

Головним недоліком цівкової передачі є підвищений знос цівок. Широкого застосування ці передачі не мають.



а) б)

Рис. 9.1 Схема цівкової передачі: а – античний прототип; б – сучасна цівкова передача

Промислова революція, яка розпочалася у XVIII столітті, спонукала до пошуку ефективних засобів передачі руху. Найширше застосування тут знайшли саме зубчасті передачі, які мають цілий ряд переваг: компактність за високої вантажопідйомності, високий коефіцієнт корисної дії, точність відтворення заданого закону руху, сталість кінематичних характеристик і т.п.

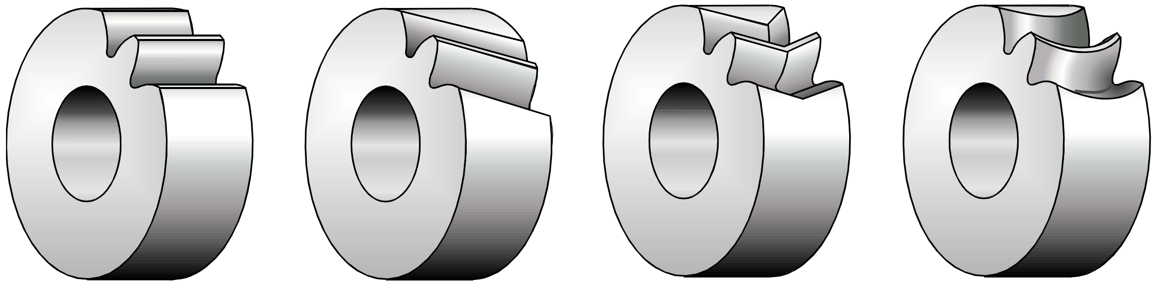
Справжня революція в машинобудуванні відбулась у середині XIX століття., коли був винайдений зубофрезерний верстат. Цей винахід, як втілення передової наукової думки, дозволив поставити виробництво високоякісних машин на потік, значно прискоривши процеси індустріалізації суспільства.

Тема 9.1. КЛАСИФІКАЦІЯ ЗУБЧАСТИХ ПЕРЕДАЧ

На сьогодні існують найрізноманітніші типи зубчастих передач. Вони відрізняються конструкцією, формою елементів вищої кінематичної пари, характером виконуваних рухів. Велика різноманітність передач вимагає їх класифікації за певними ознаками. Наведемо основні з них.

I. За типом передачі:

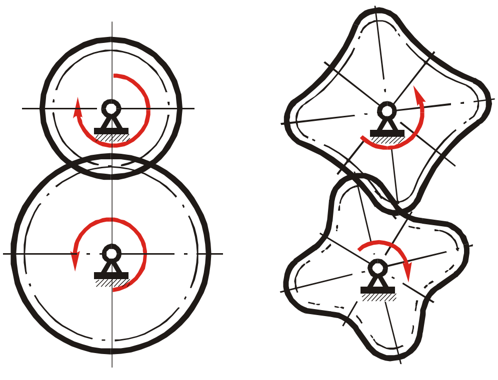
II. За формою зубця:



а) б) в) г)

Рис. 9.2 Типи зубчастих коліс: а – прямозубі; б – косо зубі; в – шевронні; г -- кругові

III. За формою коліс:



а) б)

Рис. 9.3 Типи зубчастих коліс: а – круглі; б – некруглі

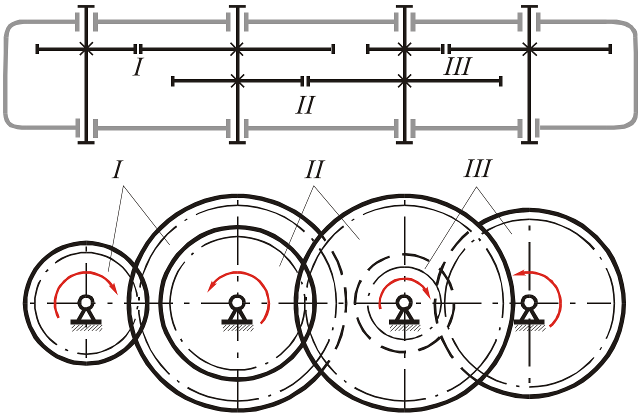


Рис. 9.4 Багатоступінчаста зубчаста передача

IV. За кількістю ступенів:

V. За розташуванням осей (див. лекцію №14, п. 8.2.1):

Тема 9.2. ЕВОЛЬВЕНТНА ЦИЛІНДРИЧНА ПЕРЕДАЧА

Л. Ейлер в якості спряжених профілів зубців запропонував використовувати евольвенту.

В зачепленні передатне відношення u_{12} може бути як постійним, так і змінним. Найчастіше на практиці застосовуються передачі з постійним передатним відношенням. Евольвентне зачеплення як раз і забезпечує постійність цього відношення.

9.2.1. Загальні відомості

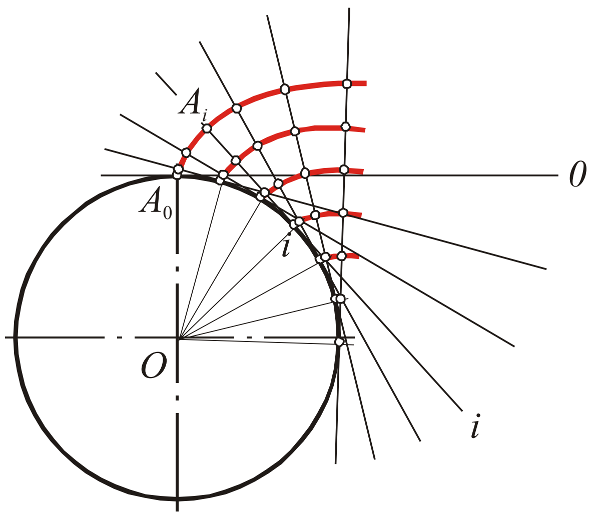


Рис. 9.5 Формування евольвенти

Пряма, яка описує евольвенту, є дотичною до кола і одночасно являється нормаллю до профілю евольвенти. Точки дотику прямої до кола є центрами кривин евольвенти в даній точці. Отже, коло є геометричним місцем центрів кривин, тобто *еволютою* евольвенти.

Покажемо, що евольвентні профілі спряжені.

Сумістимо центри еволют з центрами обертання коліс (O_1O_2 – міжосьова відстань). Спільна нормаль в точці дотику евольвентних профілів є одночасно спільною дотичною до еволют (рис. 9.6).

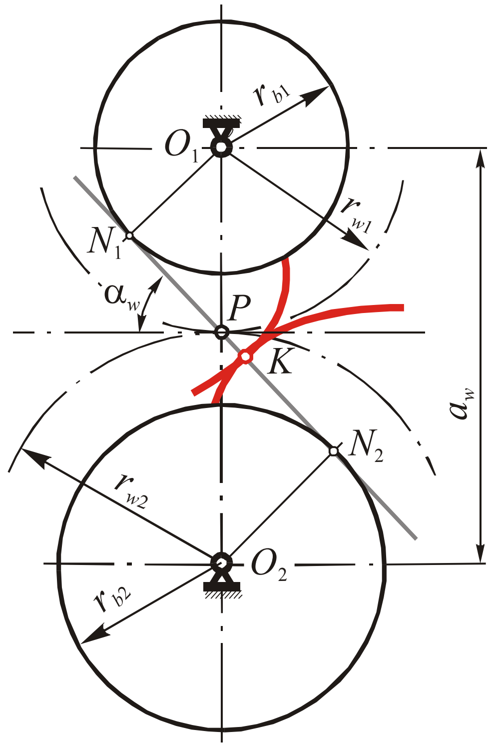


Рис. 9.6 Евольвентні профілі

Покажемо, що точка P є полюсом зачеплення, тобто

$$\frac{O_2P}{O_1P} = \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

Проведемо через полюс центроїди радіусами r_{w1} і r_{w2}. В полюсі швидкості точок центроїд однакові, оскільки ковзання відсутнє: $V_1 = V_2$ або $\omega_1 r_{w1} = \omega_2 r_{w2}$.

Звідси

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{w_2}}{r_{w_1}} = \frac{O_2P}{O_1P}. \qquad (9.1)$$

Таким чином евольвентні профілі відповідають основній теоремі плоского зачеплення, тобто спряжені, а точка P, відповідно, є полюсом зачеплення.

Евольвентне зачеплення має одну дуже важливу для їх практичного застосування властивість – сталість передатного відношення. Звернемось до рис. 9.6. В процесі зачеплення точка контакту профілів зубців K лежить на прямій N_1N_2, яка є спільною дотичною до еволют коліс. На який би кут не повертались зубчасті колеса, лінія N_1N_2 положення свого не змінює, оскільки центри еволют нерухомі. Отже і полюс P положення на лінії центрів O_1O_2 не змінює. Значить

$$\frac{O_2P}{O_1P}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=u_{12}=Const\,.$$

Введемо деякі означення:

- лінія N_1N_2 називається *теоретичною лінією зачеплення*;
- кут між лінією зачеплення N_1N_2 і нормаллю до лінії центрів O_1O_2 ($\angle\alpha_w$ на рис. 9.6) називається *кутом зачеплення*;
- кола радіусів r_{b1} і r_{b2} – еволюти евольвент – називаються *основними колами*;
- кола радіусів r_{w1} і r_{w2}, які є центроїдами, що дотикаються в полюсі P, називаються *початковими колами.*

З подібності трикутників O_1PN_1 і $O_2P\,N_2$ випливає, що

$$\frac{O_1P}{O_2P}=\frac{O_1N_1}{O_2N_2}\ \text{або}\ \frac{r_{w1}}{r_{w2}}=\frac{r_{b1}}{r_{b2}}=u_{12}\,,$$

тобто передатне відношення однозначно визначається відношенням радіусів основних кіл. Це означає, що при зміні міжосьової відстані a_w, а отже і радіусів початкових кіл r_{w1} і r_{w2}, та кута зачеплення α_w, передатне відношення u_{12} залишається незмінним.

9.2.2. Геометрія евольвентного зачеплення

В зубчастих колесах однойменні профілі зубців розташовані на відстані кроку вздовж основного кола p_b (рис. 9.7) і, виходячи з основних властивостей евольвенти, еквідистантні (див. рис. 9.5).

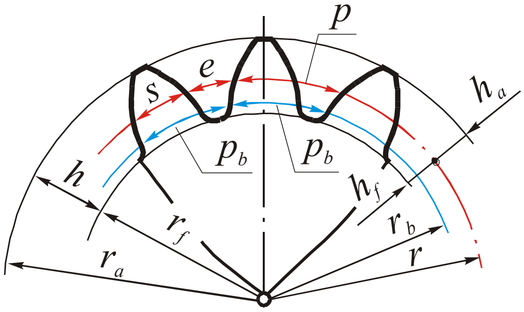


Рис. 10.7 Геометрія зубчастого колеса

Якщо кількість зубців z, то крок вздовж основного кола

$$p_b=\frac{2\pi r_b}{z}\,. \tag{9.2}$$

Згідно з (9.2) крок вздовж дуги кола довільного радіуса $p = \frac{2\pi r}{z}$. Звідси

$$r = \frac{p}{2\pi} z \,. \qquad (9.3)$$

У загальному випадку r – число ірраціональне, що значно ускладнює вимірювання і контроль цього розміру. Позначимо

$$\frac{p}{\pi} = m \qquad (9.4)$$

Тут m — *модуль зачеплення* і приймають його числом раціональним. Модуль вимірюється в міліметрах і вибирається зі стандартного ряду згідно з ГОСТ 9563-60 (СТ СЕВ 310.76).

На рис. 9.7 h_a – висота головки зубця, а h_f – висота ніжки. Тут також позначені: s—*товщина зубця по ділильному колу*, або *ділильна товщина зубця*; e – *ділильна ширина западини.*

Ділильні кола коліс , що знаходяться в зачепленні, в окремих випадках можуть проходити через полюс, тобто збігатися з початковими. Проте слід враховувати, що вони належать конкретним колесам, а початкові кола з’являються лише в зачепленні.

Коло радіуса r_f (рис. 9.7) називається *колом западин*, а радіуса r_a – колом вершин.