

Лекція №5

4.3.3. Методика побудови планів швидкостей і прискорень для різних типів груп Ассура

а) Плани швидкостей і прискорень двоповідкової групи з трьома шарнірами.

Методика побудови планів для таких груп полягає у складанні векторних рівнянь руху для кожної ланки і спільному їх розв'язанні.

Розглянемо структурну групу, яка складається з ланок 1 і 2 (рис. 4.10 а).

Рис. 4.10 Двоповідкова група з трьома шарнірами: а – схема групи; б – план швидкостей; в – план прискорень

Оскільки відносний поступальний рух ланок в шарнірі B відсутній, то справедлива умова $\bar{V}_{B1} = \bar{V}_{B2}$. Ланки здійснюють складний рух, отже можна записати:

$$\begin{cases} \bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA} \\ \bar{V}_B = \bar{V}_C + \bar{V}_{BC} \end{cases} \quad (4.21)$$

Оскільки відносний рух ланок обертальний, то напрямки відносних швидкостей $\bar{V}_{BA} \perp BA$ і $\bar{V}_{BC} \perp BC$.

Тут відомі вектори \bar{V}_A і \bar{V}_C . Вектори \bar{V}_B , \bar{V}_{BA} і \bar{V}_{BC} потрібно визначити.

Будуємо план швидкостей. Вибираємо полюс p . З нього відкладаємо вектори \overline{pa} і \overline{pc} , які в масштабі відповідають заданим векторам швидкостей \overline{V}_A і \overline{V}_C . Масштабний коефіцієнт плану швидкостей:

$$\mu_v = \frac{V_A}{pa} = \frac{V_C}{pc}, \frac{\text{м} \cdot \text{с}^{-1}}{\text{мм}}.$$

Розв'язуємо спільно рівняння системи (4.21) у векторній формі. Для цього з кінця вектора \overline{pa} проводимо напрямок вектора $\overline{ba} \perp AB$, а з кінця вектора \overline{pc} – напрямок вектора $\overline{bc} \perp BC$. Точка перетину є розв'язком системи (4.31). Точка b – це кінець вектора \overline{pb} . Отже, знаючи масштабний коефіцієнт μ_v , знаходимо всі шукані вектори (рис. 4.10 б)

Визначаємо прискорення. Згідно з теоремою про складний рух

$$\begin{cases} \overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^n + \overline{a}_{BA}^\tau \\ \overline{a}_B = \overline{a}_C + \overline{a}_{BC}^n + \overline{a}_{BC}^\tau \end{cases} \quad (4.22)$$

Тут \overline{a}_A і \overline{a}_C – задані прискорення точок A і B структурної групи. Нормальні прискорення обчислюємо за формулами

$$a_{BA}^n = \frac{V_{BA}^2}{l_{AB}} = \frac{(ba \cdot \mu_v)^2}{l_{AB}}; \quad a_{BC}^n = \frac{V_{BC}^2}{l_{BC}} = \frac{(bc \cdot \mu_v)^2}{l_{BC}},$$

де ba і bc – відрізки плану швидкостей (рис. 4.10 б). Відомі також напрямки цих прискорень: $\overline{a}_{BA}^n \perp BA$ і спрямоване до точки A (центр обертання у відносному русі ланки 1); $\overline{a}_{BC}^n \perp BC$ і спрямоване до точки C (центр обертання у відносному русі ланки 2).

Величину тангенціальних прискорень \overline{a}_{BA}^τ і \overline{a}_{BC}^τ визначити не можемо, бо невідомі кутові прискорення ланок в обертальному русі. Відомі тільки їх напрямки: $\overline{a}_{BA}^\tau \perp BA$, а $\overline{a}_{BC}^\tau \perp BC$.

Розв'язок системи (3.22) відносно невідомих векторів \overline{a}_B , \overline{a}_{BA}^τ , \overline{a}_{BC}^τ знайдемо з допомогою плану прискорень, який побудуємо в масштабі

$$\mu_a = \frac{a_A}{pa} = \frac{a_C}{pc}, \frac{\text{м} \cdot \text{с}^{-2}}{\text{мм}}.$$

З вибраного полюса плану прискорень π відкладаємо вектори $\overline{\pi a}$ і $\overline{\pi c}$ (рис. 4.10 в), які в масштабі μ_a суть задані вектори прискорень точок A і C . Далі з

кінців цих векторів проводимо вектори $\overline{an_1}$ в напрямку від точки B до точки A на схемі (рис. 4.10 а) і $\overline{cn_2}$ у напрямку від точки B до точки C . Тут

$$an_1 = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a}; \quad cn_2 = \frac{a_{BC}^n}{\mu_a}$$

Точка перетину напрямків тангенціальних прискорень на плані є точка b – кінець шуканого вектора $\overline{\pi b}$. Величину повного прискорення точки B знайдемо як

$$\overline{a_B} = \pi b \cdot \mu_a.$$

Таким чином, швидкість і прискорення точки B даної структурної групи можна знайти, якщо відомі величини і напрямки швидкостей кінцевих шарнірів ланок, які її утворюють (точки A і B).

б) Плани швидкостей та прискорень двоповідкових груп, в яких кінцеві пари оберտальна та поступальна

На рис. 4.11 зображена така група. Вона утворює поступальну пару з ланкою 4, при цьому переносний рух цієї ланки – обертальний.

Рис. 4.11 Двopовідкова група з кінцевою поступальною парою: а – схема групи; б – план швидкостей; в – план прискорень; в – схема Жуковського

Вважаємо заданими швидкості і прискорення точки B ланки 2 і точки D_4 ланки 4. Відома також кутова швидкість ланки 4.

Визначимо швидкість точки C . Як і в попередньому прикладі, через відсутність поступального руху між ланками 2 і 3, справедлива умова $\bar{V}_{C_2} = \bar{V}_{C_3} = \bar{V}_C$. Запишемо, згідно з теоремою про складний рух, систему векторних рівнянь

$$\begin{cases} \bar{V}_{C_2} = \bar{V}_B + \bar{V}_{CB} \\ \bar{V}_{C_3} = \bar{V}_{D_4} + \bar{V}_{CD_4} \end{cases} \quad (4.23)$$

Тут $\bar{V}_{CB} \perp CB$ оскільки відносний рух ланки 2 обертальний. Напрямок відносної швидкості \bar{V}_{CD_4} паралельний ланці 4, оскільки рух ланки 3 відносно ланки 4 поступальний.

Розв'язуючи спільно цю систему рівнянь з допомогою плану швидкостей (рис. 4.11 б), знаходимо шукані вектори \bar{V}_C , \bar{V}_{CD_4} , \bar{V}_{CB} :

$$V_C = pc \cdot \mu_v; \quad V_{CD_4} = cd_4 \cdot \mu_v; \quad V_{CB} = cb \cdot \mu_v.$$

Методика побудови плану швидкостей така сама, як і в попередньому прикладі.

Визначимо прискорення точки C .

$$\begin{cases} \bar{a}_{C_2} = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^r \\ \bar{a}_{C_3} = \bar{a}_{D_4} + \bar{a}_{CD_4}^r + \bar{a}_{CD_4}^k \end{cases} \quad (3.24)$$

Як і для швидкостей, для прискорень справедлива умова $\bar{a}_{C_2} = \bar{a}_{C_3} = \bar{a}_C$.

Друга ланка здійснює плоско-паралельний рух. Нормальне прискорення в обертальному русі цієї ланки відносно точки B

$$a_{CB}^n = \frac{V_{CB}^2}{l_{CB}} = \frac{(\mu_v \cdot cb)^2}{l_{CB}}.$$

На плані прискорень відкладаємо вектор $\overline{bn_2}$ в напрямку від точки C до точки B на схемі (рис 4.11 а). Модуль цього вектора

$$bn_2 = \frac{a_{CB}^n}{\mu_a}.$$

Напрямок тангенціального прискорення $\bar{a}_{CB}^{\tau} \perp CB$ на плані прискорень проводимо з точки n_2 .

Ланки 3 і 4 здійснюють відносний поступальний рух, який характеризується, з одного боку, релятивним прискоренням $\bar{a}_{CD_4}^r$, а з іншого боку – прискоренням Коріоліса, оскільки ланка 4 здійснює переносний обертальний рух.

$$\bar{a}_{CD_4}^k = 2\bar{\omega}_4 \times \bar{V}_{CD_4}.$$

Його модуль

$$a_{CD_4}^k = 2\omega_4 \cdot V_{CD_4}.$$

Напрямок прискорення Коріоліса знаходять за методом Жуковського (рис. 4.11 г). Щоб визначити напрямок прискорення $\bar{a}_{CD_4}^k$, потрібно вектор відносної швидкості поступального руху \bar{V}_{CD_4} (знаходимо з плану швидкостей: його напрямок – від другого індексу d_4 до першого c) повернути на 90° в напрямку кутової швидкості переносного руху ω_4 .

Таким чином, на плані прискорень з точки d_4 відкладаємо у напрямку коріолісового прискорення вектор $\overline{d_4 k}$. Його модуль

$$d_4 k = \frac{a_{CD_4}^k}{\mu_a}.$$

З точки k проводимо напрямок релятивного прискорення паралельно ланці 4. На перетині цього напрямку з напрямком тангенціального прискорення ланки 2 знаходимо точку C . Сполучаємо її з полюсом плану прискорень і знаходимо прискорення \bar{a}_C , $\bar{a}_{CD_4}^r$, \bar{a}_{CB}^{τ} :

$$a_C = \pi c \cdot \mu_a; \quad a_{CD_4}^r = kc \cdot \mu_a; \quad a_{CB}^{\tau} = n_2 c \cdot \mu_a.$$

в) Плани швидкостей та прискорень для триповідкових груп з обертальними парами

Розглянемо структурну групу III-го класу 3-го порядку (рис. 4.12).

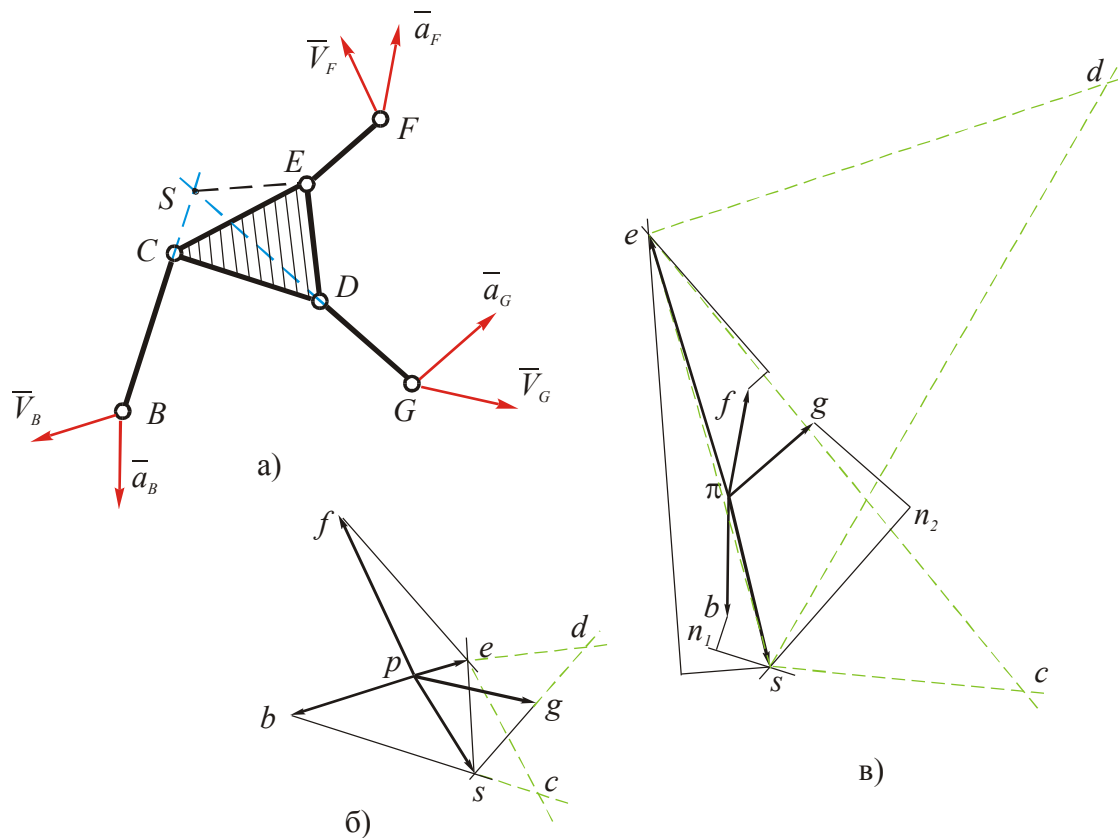


Рис. 4.12 Триповідкова група з обертальними парами: а – схема групи; б – план швидкостей; в – план прискорень

Для такої групи при побудові планів швидкостей та прискорень застосовують так звані *точки Ассура*, які знаходяться на перетині будь-яких двох повідків і вважаються такими, що належать базисній ланці.

Припустимо, що нам відомі швидкості $\vec{V}_B, \vec{V}_F, \vec{V}_G$. Визначимо вектор швидкості точки Ассура S за рівняннями:

$$\begin{cases} \vec{V}_S = \vec{V}_C + \vec{V}_{SC} = \vec{V}_B + \underbrace{\vec{V}_{CB} + \vec{V}_{SC}}_{\perp SB} \\ \vec{V}_S = \vec{V}_D + \vec{V}_{SD} = \vec{V}_G + \underbrace{\vec{V}_{DG} + \vec{V}_{SD}}_{\perp SG} \end{cases} \quad (4.25)$$

Розв'язуємо цю систему з допомогою плану швидкостей (рис. 4.12 б).

Щоб встановити закон руху базисної ланки, треба знати закон руху ще однієї точки, окрім S . Наприклад E .

$$\begin{cases} \vec{V}_E = \vec{V}_F + \vec{V}_{EF}^{(\perp EF)} \\ \vec{V}_E = \vec{V}_S + \vec{V}_{ES}^{(\perp SE)} \end{cases} \quad (4.26)$$

Швидкості інших точок ланки, наприклад C або D , визначаються за теоремою про подібність для планів швидкостей.

Аналогічно будується план прискорень. Якщо задані прискорення точок B , G , F , то для точки Ассура

$$\begin{cases} \bar{a}_S = \bar{a}_C + \bar{a}_{SC}^n + \bar{a}_{SC}^\tau = \bar{a}_B + \underbrace{\bar{a}_{SC}^n + \bar{a}_{CB}^n}_{\square SB} + \underbrace{\bar{a}_{SC}^\tau + \bar{a}_{CB}^\tau}_{\perp SB} \\ \bar{a}_S = \bar{a}_G + \underbrace{\bar{a}_{DG}^n + \bar{a}_{SD}^n}_{\square SG} + \underbrace{\bar{a}_{DG}^\tau + \bar{a}_{SD}^\tau}_{\perp SG} \end{cases} \quad (4.27)$$

Для спрощення запису позначимо $\bar{a}_{SC}^n + \bar{a}_{CB}^n = \overline{a_{SC}^n + a_{CB}^n} = \bar{a}_{SB}^n$; $\bar{a}_{SC}^\tau + \bar{a}_{CB}^\tau = \overline{a_{SC}^\tau + a_{CB}^\tau} = \bar{a}_{SB}^\tau$; $\bar{a}_{DG}^n + \bar{a}_{SD}^n = \overline{a_{DG}^n + a_{SD}^n} = \bar{a}_{SG}^n$ і $\bar{a}_{DG}^\tau + \bar{a}_{SD}^\tau = \overline{a_{DG}^\tau + a_{SD}^\tau} = \bar{a}_{SG}^\tau$.
Тоді

$$\begin{cases} \bar{a}_S = \bar{a}_B + \bar{a}_{SB}^n + \bar{a}_{SB}^\tau \\ \bar{a}_S = \bar{a}_G + \bar{a}_{SG}^n + \bar{a}_{SG}^\tau \end{cases} \quad (4.28)$$

Величини нормальних прискорень знаходимо з рівнянь:

$$a_{CB}^n = \frac{V_{CB}^2}{l_{CB}}, \quad a_{SC}^n = \frac{V_{SC}^2}{l_{SC}}, \quad a_{DG}^n = \frac{V_{DG}^2}{l_{DG}}, \quad a_{SD}^n = \frac{V_{SD}^2}{l_{SD}}.$$

Прискорення точки E :

$$\begin{cases} \bar{a}_E = \bar{a}_S + \bar{a}_{ES}^n + \bar{a}_{ES}^\tau \\ \bar{a}_E = \bar{a}_F + \bar{a}_{EF}^n + \bar{a}_{EF}^\tau \end{cases} \quad (4.29)$$

План прискорень зображений на рис 4.12 в).

Прискорення інших точок базисної ланки визначаються за теоремою про подібність для планів прискорень.

Тема 4.4. КІНЕМАТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗУБЧАСТИХ МЕХАНІЗМІВ

4.4.1. Визначення передатних відношень в багатоланкових зубчастих механізмах

а) Кратний зубчастий механізм.

Схема кратного зубчастого механізму показана на рис. 4.13.

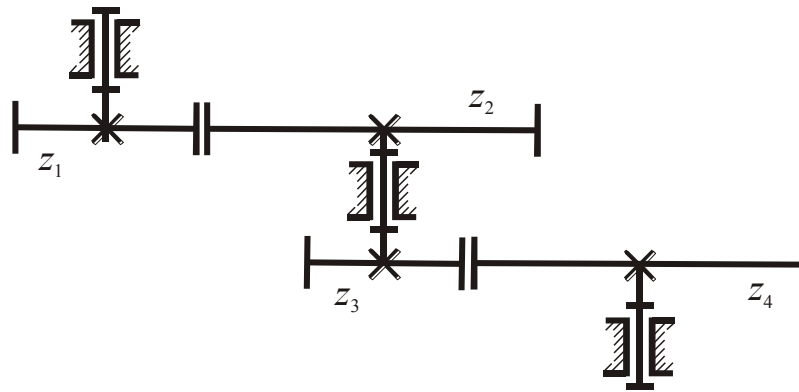


Рис. 4.19 Кінематична схема кратного зубчастого механізму

Передатне відношення між вхідною та вихідною ланками

$$u_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4}. \quad (4.30)$$

Або

$$u_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_4} = u_{12} \cdot u_{34}. \quad (4.31)$$

Тут, згідно зі схемою, $\omega_2 = \omega_3$.

Для зубчастих передач передатні відношення визначаються як відношення чисел зубців, тобто:

$$u_{12} = -\frac{z_2}{z_1}, \quad u_{34} = -\frac{z_4}{z_3}.$$

Знак «-» ставиться при зовнішньому зачепленні.

Отже

$$u_{14} = u_{12} \cdot u_{34} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3}; \quad (4.32)$$



$$u_{1n} = u_{12} \cdot u_{34} \cdot \dots \cdot u_{(n-1)n} = (-1)^m \frac{z_2 \cdot z_4 \cdot \dots \cdot z_n}{z_1 \cdot z_3 \cdot \dots \cdot z_{(n-1)}}, \quad (4.33)$$

де n – кількість зубчастих коліс; m – кількість зовнішніх зачеплень.

б) Диференціальний зубчастий механізм.

Це механізм, ступінь рухливості якого більша від одиниці.

На рис. 4.14 зображений планетарний механізм, тобто механізм, який містить колеса з рухомими осями, що називаються *сателітами*.

Він, згідно зі схемою, має чотири рухомі ланки (*центральні колеса 1 і 2, блок сателітів 3, водило H*), чотири нижчі кінематичні пари, і дві вищі. Його ступінь рухливості $w = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 = 2$.

Визначимо співвідношення між кутовими швидкостями коліс та водила ($\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_H$). Застосуємо метод інверсії – оберненості руху. Для цього всій системі задамо кутову швидкість ($-\omega_H$). Тоді водило зупиняється і механізм перетворюється в кратний зубчастий механізм. При цьому кутові швидкості коліс

$$\omega_1^{(H)} = \omega_1 - \omega_H ;$$

$$\omega_2^{(H)} = \omega_3^{(H)} = \omega_2 - \omega_H ;$$

$$\omega_4^{(H)} = \omega_4 - \omega_H .$$

Верхній індекс вказує, що водило H зупинене умовно.

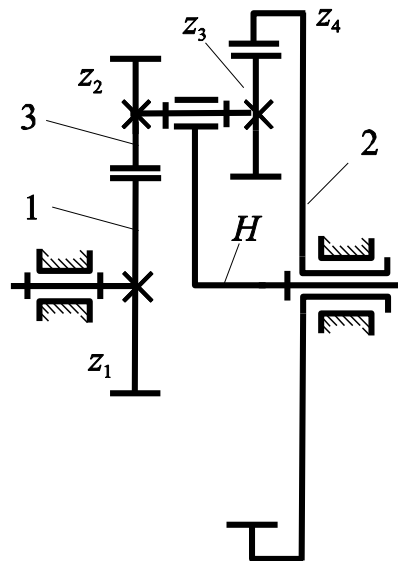


Рис. 4.20 Диференціальний зубчастий механізм

Даний підхід для аналізу планетарних механізмів вперше запропонував Р. Вілліс.

Передатне відношення оберненого механізму (кратного зубчастого):

$$u_{14}^{(H)} = \frac{\omega_1^{(H)}}{\omega_4^{(H)}} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_4 - \omega_H} = -\frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3} . \quad (4.34)$$

В передатному відношенні стоїть знак “-”, оскільки має місце одне зовнішнє зачеплення (див. рис. 4.14). Дійсно

$$u_{12} = \frac{\omega_1^{(H)}}{\omega_2^{(H)}}; \quad u_{34} = -\frac{\omega_3^{(H)}}{\omega_4^{(H)}}. \quad (4.35)$$

Вираз (4.34) дозволяє визначити будь-яку з трьох кутових швидкостей – ω_1 , ω_H або ω_4 , якщо відомі дві інші швидкості та числа зубців коліс.

в) Планетарний зубчастий механізм

На рис. 4.15 зображена схема планетарного механізму. Центральне колесо 4 тут нерухоме. Легко переконатися, що його ступінь рухливості $w = 1$.

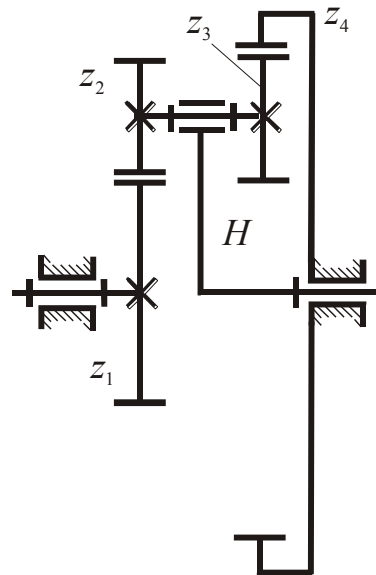


Рис. 4.15 Планетарний зубчастий механізм

Співвідношення між швидкостями вхідної та вихідної ланок планетарного механізму легко знайти за формулою (4.34). Оскільки в даному випадку $\omega_4 = 0$, то

$$u_{14}^{(H)} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{-\omega_H} = 1 - \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - u_{1H}^{(4)}.$$

Звідси

$$u_{1H}^{(4)} = 1 - u_{14}^{(H)}. \quad (4.36)$$

Або

$$u_{1H}^{(4)} = 1 + \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} = \frac{\omega_1}{\omega_H}. \quad (4.37)$$

Формула (4.37) дозволяє визначити кутову швидкість першого колеса (вхідної ланки) або водила (вихідної ланки), якщо відомі одна з цих швидкостей і кількість зубців коліс.

4.4.2. Графіки розподілу швидкостей обертальних ланок

Розглянемо ланку, яка здійснює обертальний рух (рис. 4.16 а).

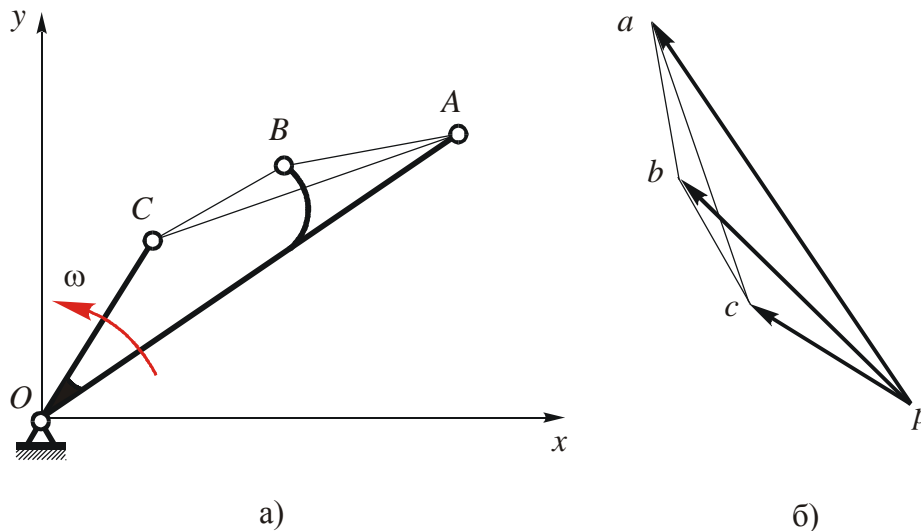


Рис. 4.16 Обертальна ланка (а) та її план швидкості (б)

План швидкостей зображений на (рис. 4.16 б). Тут

$$V_A = \omega_1 \cdot l_{OA}; \quad V_B = \omega_1 \cdot l_{OB}; \quad V_C = \omega_1 \cdot l_{OC}.$$

Закон розподілу лінійних швидкостей точок цієї ланки можна подати у вигляді *трикутника швидкостей* (рис. 4.17).

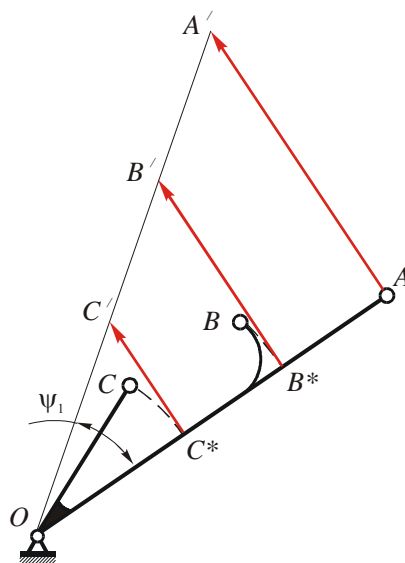


Рис. 4.17 Трикутник швидкостей обертальної ланки

На цьому трикутнику вектори, виставлені в точках C^* і B^* перпендикулярно до прямої OA , визначаються як:

$$\overline{AA'} = \frac{\bar{V}_A}{\mu_V}; \quad \overline{B^*B'} = \frac{\bar{V}_{B^*}}{\mu_V}; \quad \overline{C^*C'} = \frac{\bar{V}_{C^*}}{\mu_V}.$$

Пряму, яка з'єднує кінці векторів швидкостей A', B', C' , називають *графіком розподілу швидкостей* точок лінії AO . Кут, утворений лінією розподілу OA' і лінії ланки OA , визначається зі співвідношення

$$\operatorname{tg}\psi_1 = \frac{AA'}{OA} = \frac{\mu_l \cdot V_A}{\mu_V \cdot l_{OA}} = \frac{\mu_l}{\mu_V} \omega_1 \quad (4.38)$$

Швидкість будь-якої точки ланки, яка не належить прямій OA , легко знайти, якщо цю точку циркулем, встановленим в т. O , перенести на лінію OA та з одержаної точки провести пряму, перпендикулярну до OA , до перетину з лінією розподілу швидкостей. Якщо трикутник швидкості і план швидкостей побудовані в одному масштабі μ_V , то відрізки $\overline{C^*C'} = \overline{pc}$, оскільки $|\bar{V}_C| = |\bar{V}_{C^*}|$

4.4.3. Дослідження багатоланкових зубчастих механізмів з застосуванням графіків розподілу швидкостей

Трикутники швидкостей широко використовуються для аналізу зубчастих механізмів, особливо багаторозрядних планетарних передач і диференціалів.

Розглянемо планетарну передачу (рис. 4.18 а), в якій обертальний рух від вала 1 передається на вали центрального колеса 6 і водила H за допомогою блока-шестерні (сателіта).

На рис. 4.18 б) пряма 1 є лінією розподілу швидкостей колеса 1. Швидкості точок A колеса 1 і колеса 2, що належить сателіту, однакові. Швидкість точки C дорівнює 0, оскільки вона належить нерухомому колесу 4 (точка C – миттєвий центр обертання сателіта, який здійснює складний рух: обертається навколо осі B і, разом з водилом H , навколо осі OO).

Лінія 2 – лінія розподілу швидкостей сателіта. Відрізок BB' на трикутнику швидкостей характеризує швидкість точки B . Тоді лінія H – графік розподілу швидкостей водила.

На лінії 2 знаходимо точку D' . Відрізок DD' характеризує швидкість точки D сателіта і колеса 6. Тоді пряма 6 – лінія розподілу швидкостей колеса 6.

Для визначення кутових швидкостей коліс вибираємо точку O (рис. 4.18 в) і проводимо з неї пучок прямих, паралельних лініям розподілу швидкостей (рис. 4.18 б). Якщо перетнути цей пучок прямою, перпендикулярною до лінії відліку лінійних швидкостей $O-O$, то легко показати, що отримані відрізки $OH, O2, O1, O6$ пропорційні кутовим швидкостям відповідних коліс:

$$\omega_1 = \frac{V_A}{r_{w1}} = \frac{AA' \cdot \mu_V}{OA \cdot \mu_l} = \frac{\mu_V}{\mu_l} \operatorname{tg}\psi_1 = \frac{\mu_V}{\mu_l} \frac{O1}{OO} = O1 \cdot \mu_\omega, \quad \text{тобто } O1 = \frac{\omega_1}{\mu_\omega}.$$

Рис. 4.18 Планетарний механізм (а) та графіки розподілу швидкостей його ланок (б), (в)

Масштаб кутової швидкості $\mu_\omega = \frac{\mu_v}{\mu_l \cdot OO}, \frac{\text{рад} \cdot \text{с}^{-1}}{\text{мм}}$.

Аналогічно $OH = \frac{\omega_H}{\mu_\omega}$ і т. д.

Передатні відношення визначаються зі співвідношень:

$$u_{61} = \frac{\omega_6}{\omega_1} = \frac{\text{tg}\psi_6}{\text{tg}\psi_1} = \frac{O6}{O1}; \quad u_{H1} = \frac{\omega_H}{\omega_1} = \frac{OH}{O1} \text{ і т.д.}$$