

Лекція №6

Розділ 5. ДИНАМІЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ РУХУ МАШИННОГО АГРЕГАТУ

В динамічному дослідженні механізмів розв'язуються дві основні задачі:
пряма і обернена.

Тема 5.1. КЛАСИФІКАЦІЯ СИЛ, ЯКІ ДАЮТЬ НА МЕХАНІЗМ, ТА МЕТОДИ ЇХ ВИЗНАЧЕННЯ

Розглянемо основні групи сил, які враховуються при динамічному аналізі механізмів і машин.

5.1.1. Рушійні сили і моменти

5.1.2. Сили і моменти опору

Вони в свою чергу діляться на *сили і моменти корисного опору* і *сили і моменти опору середовища*.

Сили корисного опору виконують роботу, для виконання якої машина створювалась. Вони прикладаються до ведених ланок.

Сили опору середовища – це сили, пов'язані з непродуктивними втратами потужності. Часто вони малі і в задачах динаміки ними нехтують.

5.1.3. Сили ваги

Прикладаються в центрах мас ланок.

$$G_i = m_i g . \quad (5.1)$$

Робота цих сил за цикл дорівнює нулю. На певному відрізку часу вони можуть виконувати як додатну, так і від'ємну роботу.

5.1.4. Сили інерції

Виникають у разі прискореного руху ланок і їх можна розглядати як реакції маси на зміну швидкості.

У загальному випадку плоско-паралельного руху розподілені по об'єму тіла сили інерції можуть бути зведені до головного вектора і головному моменту сил інерції, які прикладають в центрі ваги ланки.

$$\bar{F}_{a_i} = -m_i \bar{a}_{S_i}; \quad (5.2)$$

$$\bar{M}_{a_i} = -J_{S_i} \bar{\epsilon}_i, \quad (5.3)$$

де a_s – прискорення центру мас S ланки; J_{S_i} – момент інерції маси ланки відносно осі, яка проходить через центр ваги ланки перпендикулярно до площини її руху; ϵ_i – кутове прискорення ланки.

Розглянемо приклади визначення сил інерції для різних випадків руху ланок.

Ланка рухається поступально. В цьому випадку прискорення всіх точок ланки однакові. Отже

$$a_s = a_A = a_B; \quad \epsilon = 0.$$

Тоді

$$\bar{F}_a = -m \cdot \bar{a}_S; \quad M_a = 0.$$

Тобто, коли ланка рухається поступально, сили інерції зводяться лише до головного вектора, який прикладений у центрі мас ланки (рис. 5.1).

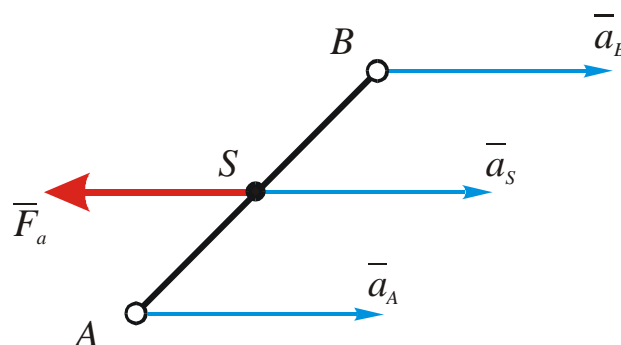


Рис. 5.1 Поступально рухома ланка

Ланка здійснює обертальний рух відносно центру мас. В цьому випадку центр мас S ланки нерухомий, тобто $a_s = 0$. Проте $\omega \neq 0$, $\varepsilon \neq 0$. Отже

$$F_a = 0; \quad \bar{M}_a = -J_s \cdot \bar{\varepsilon}.$$

Таким чином, коли ланка обертається навколо нерухомого центра мас, сили інерції, які на неї діють, зводяться лише до головного моменту (рис. 5.2)

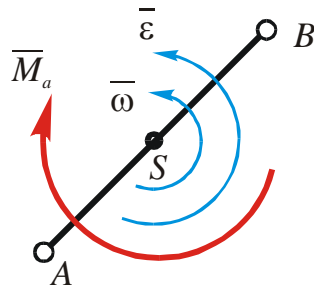


Рис. 5.2 Обертальна ланка (центр обертання збігається з центром мас)

Ланка здійснює обертальний рух відносно точки, яка не збігається з центром мас. Приклад ланки, яка здійснює такий рух, показаний на рис. 5.3.

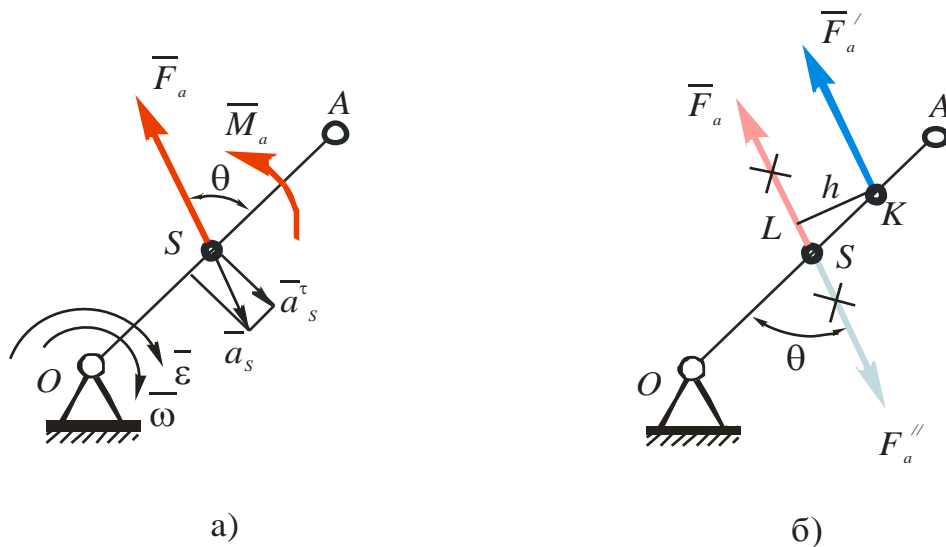


Рис. 5.3 Обертальна ланка (центр обертання не збігається з центром мас)

Як видно зі схеми, тут діє і головний вектор \bar{F}_a , і головний момент \bar{M}_a сил інерції.

Момент інерції \bar{M}_a подамо у вигляді системи паралельних сил $F'_a = F''_a = F_a$ (рис. 4.3б), прикладених на відстані h . Оскільки $F_a = F''_a$, то прикладеною до

ланки залишається тільки одна сила, яка за напрямком і величиною дорівнює силі інерції, але прикладена на деякій відстані від центра мас S — в точці K , яка називається *центром коливання*.

Визначимо відстань SK , спираючись на рис. 5.3 б.

$$h = \frac{M_a}{F_a} = \frac{I_S \cdot \varepsilon}{m \cdot a_S} = \frac{m\rho^2}{ma_S} \cdot \frac{a_S^t}{l_{OS}}$$

З $\triangle SKL$ $h = l_{SK} \cdot \sin \theta$. Тангенціальне прискорення $a_S^t = a_S \cdot \sin \theta$. Тоді

$$l_{SK} \sin \theta = \frac{m\rho^2 \cdot a_S \sin \theta}{ma_S \cdot l_{OS}}$$

Звідси $l_{SK} = \frac{\rho^2}{l_{OS}}$.

Отже, відстань від центра обертання ланки до центру коливання:

$$l_{OK} = l_{OS} + \frac{\rho^2}{l_{OS}} \quad (5.4)$$

На практиці центр коливання ланки K знаходять за методом, показаним на рис.4.4, де $\rho = \sqrt{J_S/m}$. Для прямих стержнів довжиною l радіус інерції можна визначити як $\rho = l/\sqrt{12}$.

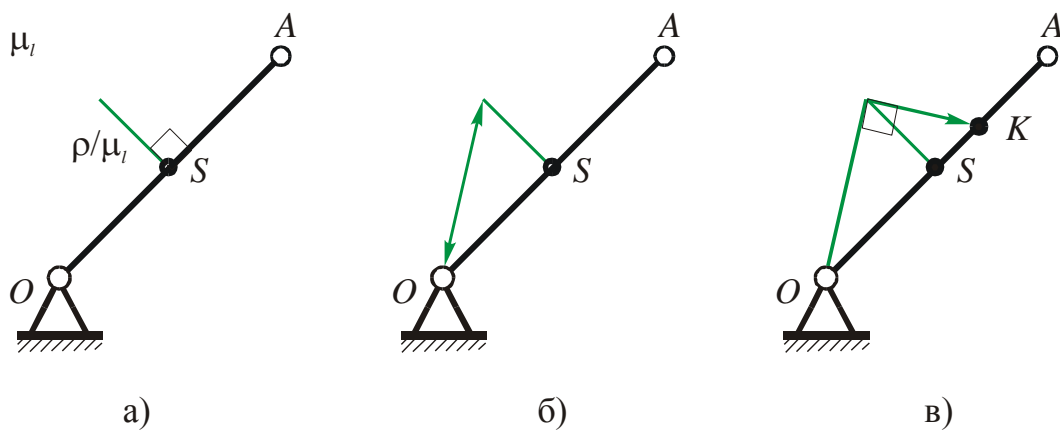


Рис. 5.4 Схема визначення центру коливань ланки

Ланка здійснює плоско-паралельний рух. На рис. 5.5 показана ланка (а) та її план прискорень (б).

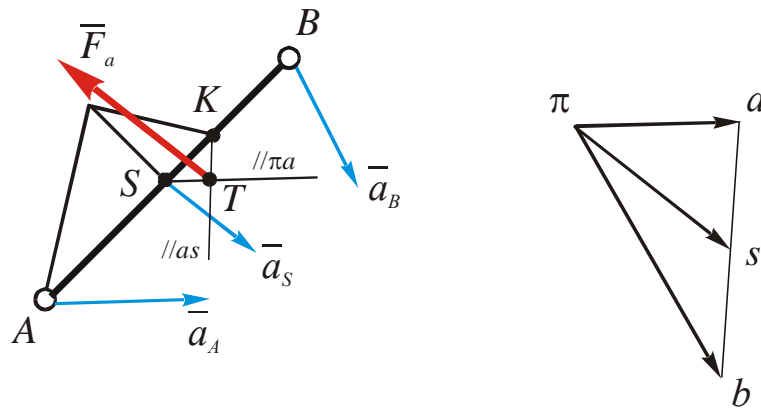


Рис. 5.5 Ланки, що здійснює плоско-паралельний рух

Згідно з теоремою про складний рух

$$\bar{a}_S = \bar{a}_A + \bar{a}_{SA}. \quad (5.5)$$

Сила інерції ланки

$$\bar{F}_a = -m \cdot \bar{a}_S.$$

Або, згідно з (5.5)

$$\bar{F}_a = -m \cdot (\bar{a}_A + \bar{a}_{SA}) = -m \cdot \bar{a}_A - m \cdot \bar{a}_{SA}. \quad (5.6)$$

Перший вектор – це сила інерції в поступальному русі ланки разом з точкою A ; прийнятою за полюс; другий вектор – сила інерції в обертальному русі ланки відносно точки A . Перша сила прикладена в центрі ваги, друга – в центрі коливальності K . Лінії дії цих сил перетинаються в точці T , яка називається *полюсом інерції*. Через полюс проходить і лінія дії сили інерції ланки \bar{F}_a як результуючого вектора суми векторів (5.6).

Отже, у випадку плоско-паралельного руху ланки сили інерції зводяться лише до головного вектора \bar{F}_a , який прикладений в полюсі інерції ланки T .

Зрозуміло, що полюс інерції є миттєвим і визначається положенням ланки.

5.1.5. Сили і моменти, прикладені до стояка ззовні

Це сила ваги корпусу машини, реакція на корпус з боку основи. Оскільки корпус нерухомий, то ці сили роботи не здійснюють.

5.1.6. Реакції (тиски) в кінематичних парах

Це внутрішні сили, які є реакціями на дію активних (зовнішніх) сил, до яких відносяться сили перших чотирьох груп.

Ці сили розкладаються на нормальну і дотичну складові. Як правило визначають тільки нормальні складові цих реакцій.

Нормальні складові реакцій називають *тисками* в кінематичних парах.

Поступальна пара. Епюра нормальних тисків тут лінійна. (рис. 5.6).

Тут відомий напрямок рівнодійної сил тиску, але невідомі величина і точка її прикладення. Якщо довжина повзуна мала порівняно з розмірами решти ланок, то розподіл тисків приймають постійним. Рівнодійна тисків прикладається в центрі ваги повзуна.

Обертальна пара. В цій парі (рис. 5.7) відома точка прикладення рівнодійної (проходить через центр шарніра), але не відомі її величина та напрямок.

Вища пара. В цій парі (рис.5.8) відома точка прикладення та напрямок тиску (вздовж спільної нормалі). Невідома його величина.

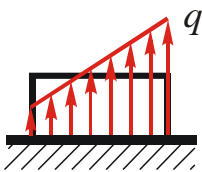


Рис. 5.6 Поступальна пара

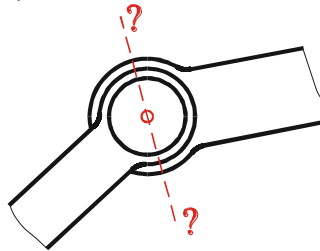


Рис. 5.7 Обертальна пара

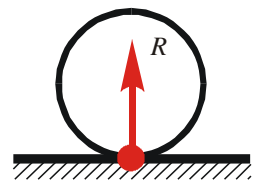


Рис. 5.8 Вища пара

Тангенціальні складові в кінематичних парах суть сили тертя. Нормальні складові роботи не виконують, бо вони перпендикулярні до напрямків переміщень. Сили тертя завжди виконують від'ємну роботу.

Тема 5.2. РІВНЯННЯ РУХУ МЕХАНІЗМІВ

5.2.1 Механічні характеристики машин

Найбільший вплив на закон руху механізму справляють рушійні сили та сили опору. Їх фізична природа, величина і характер дії визначається тими процесами, які протікають в даній машині під час її роботи.

В більшості випадків ці сили змінюють свою величину залежно від положення ланок механізму та їх швидкості. Залежності, які відбивають цей зв'язок, називаються *механічними характеристиками машин* і подаються зазвичай у вигляді діаграм чи масивів чисел.

При розв'язанні задач динаміки механічні характеристики машин вважаються заданими.

В подальшому силу і момент вважатимемо додатними, якщо на заданому переміщенні вони виконують додатну роботу.

а) Характеристики сил, що залежать від швидкості.

На рис. 5.9 наведені механічні характеристики машин-двигунів: а – асинхронного електричного двигуна; б – двигуна постійного струму. Для них характерним є зменшення рушійного моменту із зростанням кількості обертів ротора.

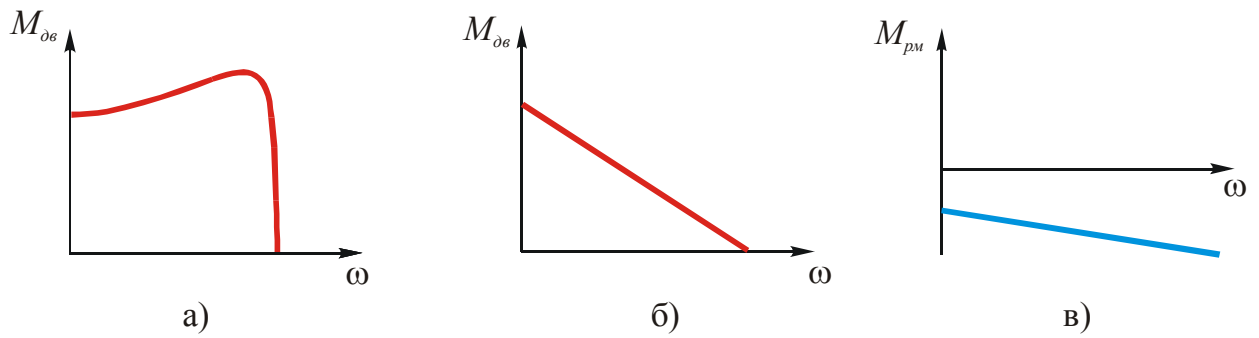


Рис. 5.9 Механічні характеристики машин, коли сили залежать від швидкості: а – для асинхронного двигуна; б—для двигуна постійного струму; в – для роторної машини

Навпаки для роторних машин (генераторів, насосів, вентиляторів і т. ін.) характерним є зростання моменту при зростанні швидкості обертання (рис. 5.9 в). Таке поєднання дуже корисне, оскільки сприяє сталості режиму роботи агрегату «електродвигун – роторна машина». Тобто має місце саморегуляція швидкості руху.

б) Характеристики сил, що залежать від переміщення.

На рис. 5.10 зображена механічна характеристика двотактного двигуна внутрішнього згорання.

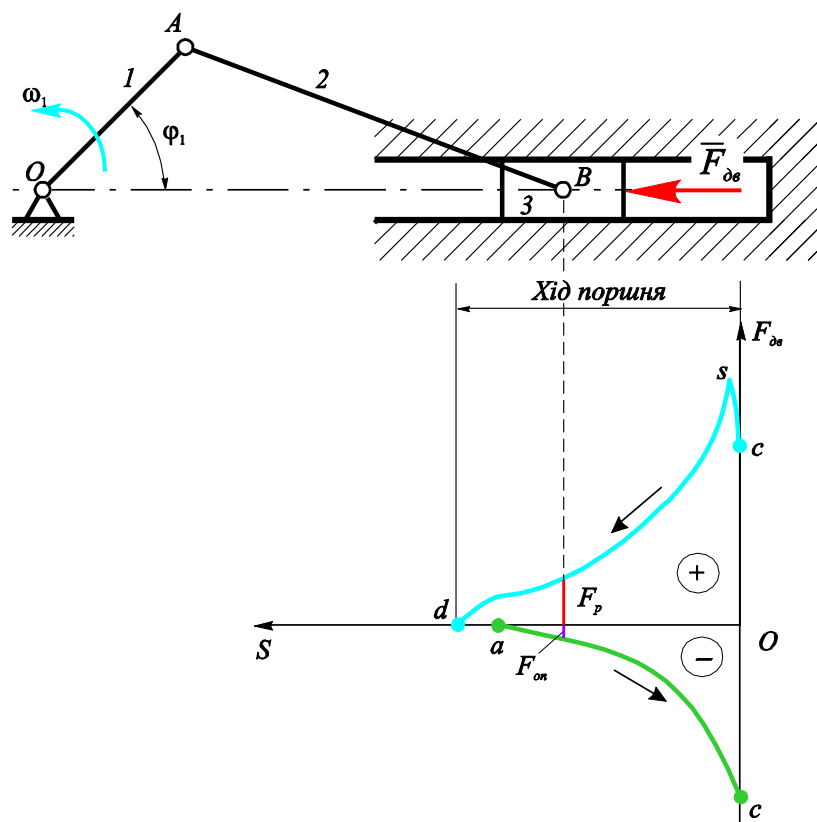


Рис. 5.10 Механічна характеристика двотактного двигуна внутрішнього згорання

Сила F_g на ділянці csd здійснює додатну роботу. Ця ділянка відповідає розширенню робочої суміші. Ділянка db відповідає поверненню поршня і вихлопу відпрацьованої суміші. Тут робота від'ємна оскільки сила F_g спрямована проти напрямку переміщення.

Робота дорівнює площі під кривою. Із рис. 5.10 видно, що сумарна робота — додатна (додатна площа більша від від'ємної). Отже F_g — рушійна сила.

На рис. 5.11 наведені механічні характеристики електричних двигунів (а) і роторних машин (б). Як видно, моменти не залежать від положення ротора, тобто від його кута повороту.

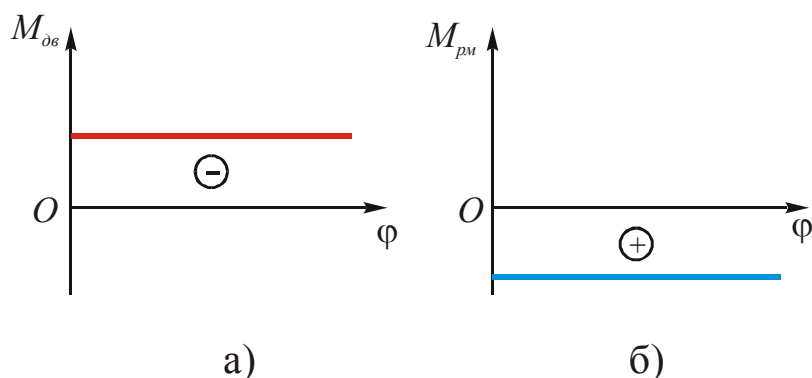


Рис. 5.11 Механічні характеристики машин, коли сили залежать від положення: а – для електричного двигуна; б – для роторної машини

5.2.2. Динамічна модель машинного агрегату

Розглянемо найпростіший машинний агрегат: двигун внутрішнього згорання – роторна машина з проміжною зубчастою передачею (рис. 5.12).

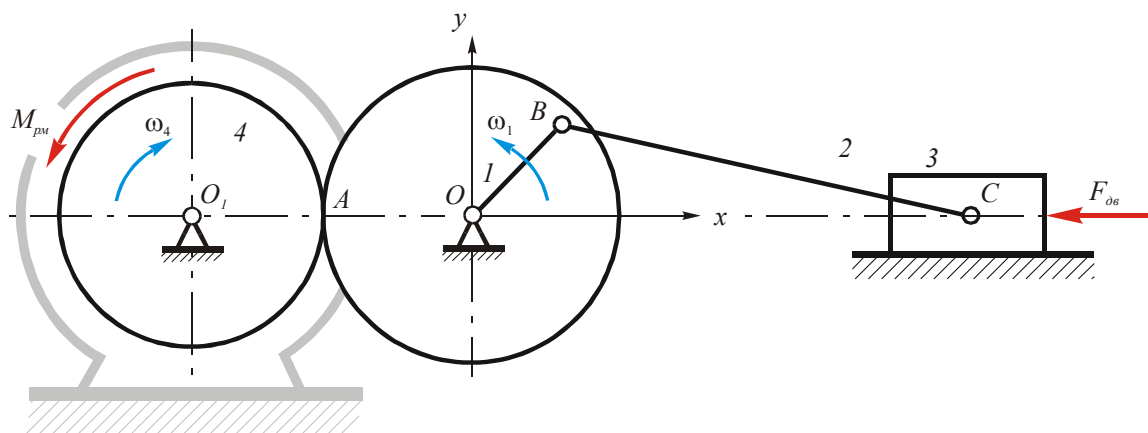


Рис. 5.12 Схема машинного агрегату

Його ступінь рухливості $w = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 - 1 = 1$.

При кінематичному дослідженні достатньо було знати закон руху якої-небудь ланки (зазвичай кривошипа OB), щоб дослідити весь механізм в цілому. Цю ланку приймають за початкову.

При динамічному аналізі використовується такий самий підхід: весь механізм замінюється найпростішою моделлю, наприклад обертальною ланкою з моментом інерції J_{Σ}^{36} , до якої прикладений момент M_{Σ}^{36} , причому ці моменти такі, що закони руху умовної ланки моделі і початкової ланки реального механізму збігаються:

$$\omega_1 = \omega_M \quad (5.7)$$

Таким чином, при побудові динамічної моделі всі сили, що діють на механізм, зводяться до одної ланки і замінюються деякою узагальненою силою, названою *сумарним зведеним моментом* (або *силою*). При цьому ланка зведення має таку *зведену масу*, що її інерційність еквівалентна інерційності всього механізму.

5.2.3. Побудова динамічної моделі: зведення сил

Як впливає з рівняння Лагранжа II-го роду, для виконання умови (5.7), необхідно, щоб при зведенні сил дотримувалась умова рівності елементарних робіт.



$$P_{36} = \sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n (F_i V_i \cos \alpha_i + M_i \omega_i). \quad (5.8)$$

Тут P_{36} — потужність, яка розвивається зведеною силою; α_i — кут між вектором сили F_i і вектором швидкості V_i точки прикладення цієї сили; M_i — момент сили на i -й ланці, яка обертається зі швидкістю ω_i .

За обертальної ланки (рис. 5.13 а)

$$P_{36} = M_{36} \cdot \omega_1. \quad (5.9)$$

За поступально рухомої ланки (рис. 5.13 б)

$$P_{36} = F_{36} \cdot V_1. \quad (5.10)$$

Тут ω_1 і V_1 — відповідно кутова або лінійна швидкість ланки зведення.

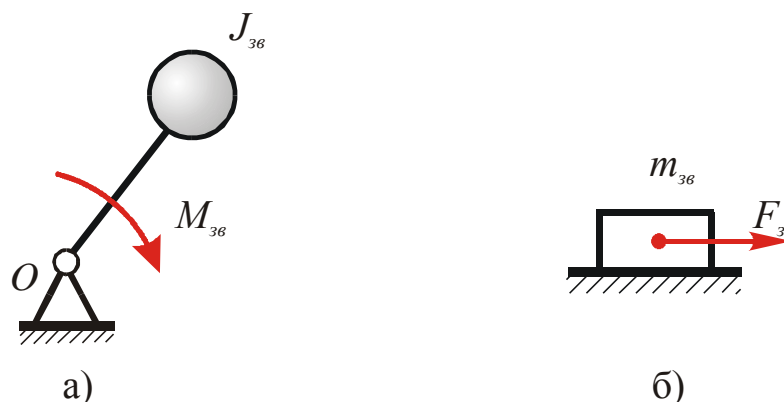


Рис. 5.13 Динамічні моделі механізму: а – з обертальною ланкою зведення; б – з поступально рухомою ланкою зведення

Отже, на ланку зведення буде діяти *зведений момент*

$$M_{36} = \sum_{i=1}^n \left(F_i \cdot \frac{V_i}{\omega_1} \cos \alpha_i + M_i \frac{\omega_i}{\omega_1} \right) \quad (5.11)$$

або *зведена сила*

$$F_{np} = \sum_{i=1}^n \left(F_i \cdot \frac{V_i}{V_1} \cos \alpha_i + M_i \frac{\omega_i}{V_1} \right). \quad (5.12)$$

5.2.4. Жорсткий важіль Жуковського

Згідно з принципом можливих переміщень в механічній системі з незвільнюваними в'язями сума елементарних робіт всіх сил, включаючи сили інерції, на можливих переміщеннях дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^n F_i \delta p_i = 0 \quad (5.13)$$

Якщо розглядати механізм як механічну систему, в'язі в якій не залежать від часу, то внаслідок того, що, при заданому русі початкових ланок інші виконують цілком визначені рухи, можливі переміщення тут містять в собі дійсні. Тобто

$$\sum_{i=1}^n F_i dp_i = 0. \quad (5.14)$$

Або

$$F_1 dp_1 + F_2 dp_2 + \dots + F_n dp_n = 0 \quad (5.15)$$

Тут dp_1, dp_2, \dots, dp_n – проекції дійсних переміщень на напрямки прикладених сил.

Розглянемо ланку AB , до якої в точці S прикладена сила F_i (рис. 5.14а). Дійсно, елементарне переміщення точки S ds_i має напрямок швидкості V_S .

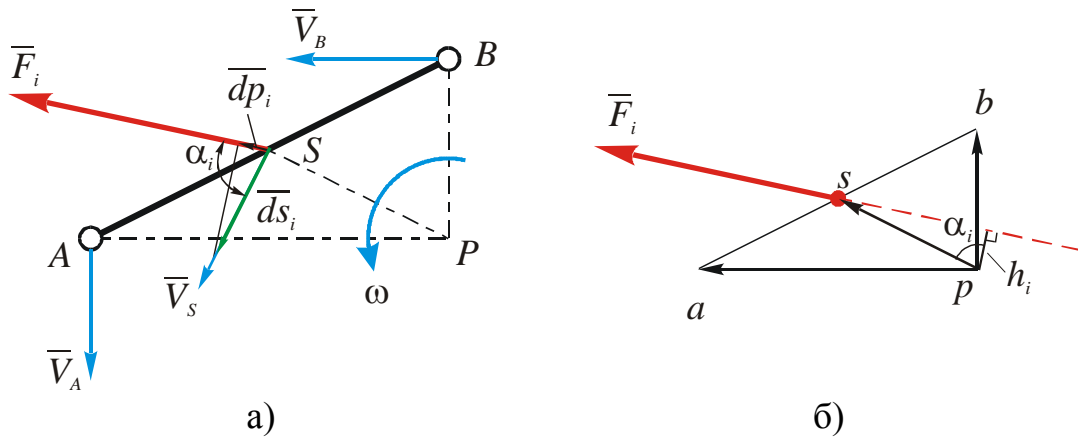


Рис. 5.14 Жорсткий важіль Жуковського: а – схема ланки; б – повернутий план швидкостей

Елементарна робота сили F_i

$$dA_i = F_i dp_i = F_i ds_i \cdot \cos \alpha_i.$$

Оскільки $V_S = \frac{ds_i}{dt}$,

$$dA_i = F_i V_S \cdot \cos \alpha_i dt \quad (5.16)$$

Швидкість V_S визначають із плану швидкостей. Для цього будують повернутий на 90° план (рис. 5.14 б) в масштабі

$$\mu_V = \frac{V_A}{pa} = \frac{V_S}{pb}, \quad \left(\frac{\text{м} \cdot \text{с}^{-1}}{\text{мм}} \right).$$

Із плану $V_S = ps \cdot \mu_V$. Тоді

$$dA_i = F_i \mu_v \cdot ps \cdot \cos \alpha_i \cdot dt . \quad (5.17)$$

Перенесемо силу F_i паралельно самій собі на повернутий план в точку S . Кут між відрізком ps і перпендикуляром h_i , встановленим з полюса плану на лінію дії сили F_i , дорівнює α_i . Тобто

$$h_i = ps \cdot \cos \alpha_i . \quad (5.18)$$

Тоді (5.17) перепишемо у вигляді:

$$dA_i = F_i h_i \mu_v dt . \quad (5.19)$$

У правій частині цього рівняння ми маємо вираз для моменту сили F_i відносно полюса плану швидкостей, якщо його розглядати як жорсткий важіль.



$$dA_i = M_p (F_i) \mu_v dt . \quad (5.20)$$

Оскільки спільний множник $\mu_v dt \neq 0$, рівняння (5.13) можна переписати у вигляді:

$$\sum_{i=1}^n M_p (F_i) = 0 . \quad (5.21)$$

Якщо крім сили F_i до механізму прикладені також моменти M_i , то їх краще всього замінити силами, прикладеними в яких-небудь точках ланки.

Приклад 5.1. Визначимо зведений момент, який діє на ланку 1 кривошипно-коромислового механізму (рис. 5.15).

Згідно з означенням, зведений момент, прикладений до ланки 1, що обертається,

$$M_{зв} = \sum_{i=1}^n M_{зв} (F_i) \quad (5.22)$$

Будуємо план швидкостей механізму, повертаючи відразу його на 90° .

$$V_A = \omega_1 \cdot l_{OA}; \quad pa = \frac{V_A}{\mu_V}.$$

Рис. 5.15 До прикладу 5.1

Рівняння (5.11) і (5.12) не складно розв'язати й аналітично, якщо відомі характеристики сил, які діють на ланки механізму, а також відомі аналоги

швидкостей ланок і передатні відношення ($\frac{V_i}{\omega_1}$ – аналог швидкості i -тої ланки, а

$\frac{\omega_i}{\omega_1}$ – передатне відношення між i -тою та першою ланками).