

# Лекція №7

## 5.2.5. Побудова динамічної моделі: зведення мас

$$T_{зв} = \sum T_i. \quad (5.23)$$

Для обертальної ланки кінетична енергія визначається за формулою

$$T = \frac{1}{2} J_S \omega^2; \quad (5.24)$$

для поступально рухомої –

$$T = \frac{1}{2} m V^2. \quad (5.25)$$

Тоді, якщо ланка зведення виконує обертальний рух, отримаємо:

$$\frac{1}{2} m_{зв} V_1^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} [m_i V_i^2 + J_{Sj} \omega_j^2].$$

Звідси зведена маса

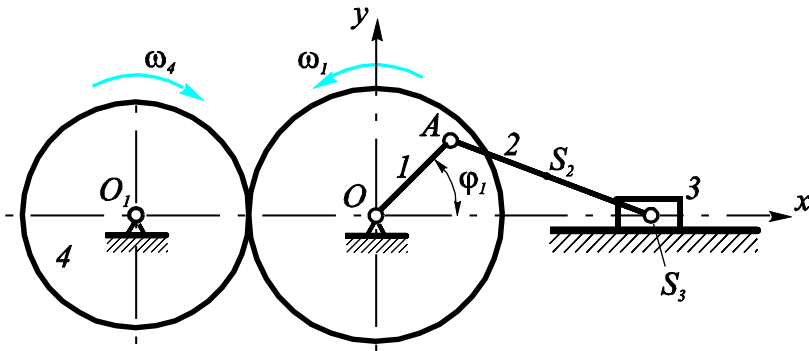
$$m_{зв} = \sum_{i,j} \left[ m_i \left( \frac{V_i}{V_1} \right)^2 + J_{Sj} \left( \frac{\omega_j}{V_1} \right)^2 \right]. \quad (5.26)$$

Для ланки зведення, яка виконує обертальний рух, зведений момент інерції

$$J_{Sзв} = \sum_{i,j} \left[ m_i \left( \frac{V_i}{\omega_1} \right)^2 + J_{Sj} \left( \frac{\omega_j}{\omega_1} \right)^2 \right]. \quad (5.27)$$

Тут  $i$  – кількість ланок, які рухаються поступально, включно з переносним та відносним поступальним рухом ланок при складному їх русі;  $j$  – кількість ланок, які здійснюють обертальні рухи, включно з переносним та відносним обертальним рухом при складному їх русі.

**Приклад 5.2.** Визначити зведений момент інерції ланки 1 зубчато-важільного механізму з одним ступенем рухливості (рис. 5.16).

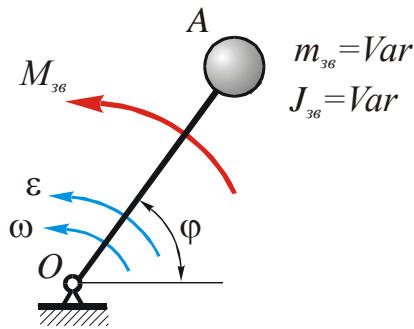


**Рис. 5.16** До прикладу 5.2

Слід відзначити, що, оскільки дійсні швидкості в механізмі збігаються з можливими, то і в методі Жуковського при визначенні зведеної сили, і при визначенні зведеної маси або моменту інерції знати закон руху ланки зведення немає потреби. Тобто, маючи схему механізму, можна побудувати його динамічну модель, виконавши зведення сил і мас, а після цього вже знайти закон його руху.

### 5.2.6. Рівняння руху в інтегральній та диференціальній формі

Розглянемо динамічну модель механізму з одним ступенем рухливості (рис. 5.17).



**Рис. 5.17** Динамічна модель механізму з одним ступенем рухливості

Згідно з теоремою про зміну енергії, можна записати:

$$T - T_0 = \sum A. \quad (5.28)$$

Тут  $T$  – кінетична енергія механізму в даний момент часу;  $T_0$  – початкова кінетична енергія;  $\sum A$  – сумарна робота, яку виконують всі активні сили і сили тертя в кінематичних парах.

#### а) Рівняння руху в інтегральній формі.

Для моделі (рис.5.17)

$$\sum A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{36} d\varphi; \quad (5.29)$$

$$\Delta T = \frac{J_{36} \omega^2}{2} - \frac{J_{360} \omega_0^2}{2}. \quad (5.30)$$

Таким чином

$$\frac{J_{36} \omega^2}{2} - \frac{J_{360} \omega_0^2}{2} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{36} d\varphi. \quad (5.31)$$

Верхня границя  $\varphi$  – в загальному випадку змінна. Якщо навантаження залежить тільки від положення механізму, то  $M_{36}$  є функцією лише узагальненої координати  $\varphi$ . Розв'язуючи це рівняння відносно  $\omega$ , отримаємо:

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{36}(\varphi) d\varphi}{J_{36}} + \frac{J_{360}}{J_{36}} \omega_0^2}. \quad (5.32)$$

$M_{36}(\varphi)$  потрібно брати з урахуванням знаку.

### б) Рівняння руху в диференціальній формі.

Диференціюємо рівняння (5.31)

$$\frac{d}{d\varphi} \left( \frac{J_{36} \omega^2}{2} \right) = M_{36}; \quad (5.33)$$

$$\frac{d}{d\varphi} \left( \frac{J_{36} \omega^2}{2} \right) = \frac{dJ_{36}}{d\varphi} \frac{\omega^2}{2} + \omega J_{36} \frac{d\omega}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = J_{36} \frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{2} \frac{dJ_{36}}{d\varphi} \omega^2.$$

Таким чином,

$$J_{36} \frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{2} \frac{dJ_{36}}{d\varphi} \omega^2 = M_{36}. \quad (5.34)$$

Це і є рівняння руху в диференціальній формі, оскільки шукана змінна  $\omega$  стоїть під знаком похідної.

В цьому рівнянні  $M_{36}$  і  $J_{36}$  слід брати з урахуванням знаку.

Для механізмів, у яких  $J_{36} = Const$ , наприклад фрикційні або зубчасті механізми з круглими колесами, рівняння (5.34) спрощується:

$$J_{36} \frac{d\omega}{dt} = M_{36}. \quad (5.35)$$

Розв'язавши рівняння (5.34) відносно  $\omega$ , можна знайти і кутове прискорення ланки зведення

$$\varepsilon = \frac{M_{36}}{J_{36}} - \frac{\omega^2}{2J_{36}} \frac{dJ_{36}}{d\varphi}. \quad (5.36)$$

## Тема 5.3. ДИНАМІКА МЕХАНІЗМІВ ЗА НЕУСТАЛЕНОГО РЕЖИМУ РОБОТИ

### 5.3.1. Поняття про неусталений режим роботи

Процес руху машинного агрегату в загальному випадку складається з трьох фаз: *розбігу, усталеного режиму і вибігу*.

Розбіг і вибіг відносяться до *неусталеного режиму*, який характеризується неперіодичними змінами швидкості головного вала агрегату (початкової ланки). В усталеному режимі ці коливання або періодичні, або зовсім відсутні.

Для визначення закону руху машинного агрегату в неусталеному режимі мають бути відомими:

-
-
-
-

Прикладів визначення законів руху механізмів в неусталеному режимі розглянути самостійно за курсом лекцій.

## Тема 5.4. ДИНАМІКА МЕХАНІЗМІВ ЗА УСТАЛЕНОГО РЕЖИМУ РОБОТИ. РЕГУЛЮВАННЯ РУХУ МАШИНИ

### 5.4.1. Нерівномірність руху механізму за усталеного режиму роботи

Як і для неусталеного режиму, будемо розглядати механізми з одним ступенем рухливості ( $w=1$ ).

Усталений рух характеризується такими ознаками:

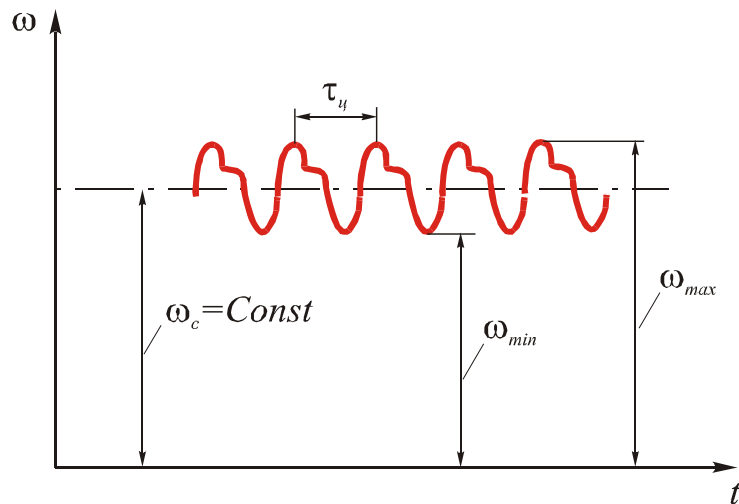
- швидкість початкової ланки – періодична функція часу (рис. 5.18);
- періодично змінюються сили, прикладені до механізму, і масові характеристики;
- сума робіт всіх сил за цикл дорівнює нулю:

$$\sum A_u = 0. \quad (5.37)$$

або

$$A_p^u = \left| A_{on}^u \right|. \quad (5.38)$$

За цикл приросту кінетичної енергії не відбувається ( $T_0 = T_k$ ).



**Рис. 5.18 Закон руху початкової ланки за усталеного режиму**

Отже і кутова швидкість ланки на початку та в кінці циклу однакова. Зміна  $\omega$  відбувається в середині циклу.

Нерівномірність обертання оцінюється коефіцієнтом нерівномірності руху:

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_c} \quad (5.39)$$

Тут  $\omega_c$  – середня швидкість в циклі:

$$\omega_c \cong \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2} \quad (5.40)$$

Чим менша величина  $\delta$ , тим менше коливання швидкості.

В усталеному режимі працює більшість технологічних машин, генератори електричної енергії, компресори, насоси і т.д.

Колівання швидкості пов'язані з прискореннями ланок. Вони призводять до виникнення динамічних навантажень, що знижує довговічність машин, знижує їх кінематичну точність і т.д. Тому величину  $\delta$  потрібно обмежувати.

$$\delta \leq [\delta] \quad (5.41)$$

Для металорізальних верстатів  $[\delta] = \frac{1}{25} - \frac{1}{50}$ , дизельних приводів електрогенераторів  $\frac{1}{100} - \frac{1}{200}$ .

#### **5.4.2. Визначення коефіцієнту нерівномірності руху механізму**

Для машинного агрегату приведемо маси всіх ланок до головного валу механізму і розіб'ємо зведені маси на дві групи:

I група — маси з постійним моментом інерції  $J = Const = J_I$ ;

II група — маси зі змінним моментом інерції  $J = Var = J_{II}$ .

$$J_{3\epsilon} = J_I + J_{II}. \quad (5.42)$$

Нерівномірність руху механізму має місце через наявність у його складі мас другої групи. Кінетична енергія мас першої групи:

$$T_I = \frac{1}{2} J_I \omega^2. \quad (5.43)$$

Оскільки  $\omega$  коливається в інтервалі  $\omega_{\max} \leftrightarrow \omega_{\min}$ , коливається і кінетична енергія  $T_I$ :

$$(T_I)_{\max} = \frac{1}{2} J_I \omega_{\max}^2; (T_I)_{\min} = \frac{1}{2} J_I \omega_{\min}^2.$$

Найбільший перепад кінетичної енергії

$$\Delta T_{In\delta} = \frac{J_I \omega_{\max}^2}{2} - \frac{J_I \omega_{\min}^2}{2} = \frac{J_I}{2} (\omega_{\max} + \omega_{\min}) (\omega_{\max} - \omega_{\min}) \frac{\omega_c}{\omega_c} = J_I \delta \omega_c^2.$$

Звідси:

$$\delta = \frac{\Delta T_{In\delta}}{\omega_c^2 J_I} \leq [\delta]. \quad (5.44)$$

### 5.4.3. Шляхи мінімізації коефіцієнта нерівномірності руху

Згідно з рівнянням (5.44) існує три напрямки мінімізації коефіцієнта нерівномірності руху агрегату:

- збільшення інерційності мас першої групи (збільшення  $J_I$ );
- збільшення середньої швидкості руху  $\omega_c$ ;
- зменшення коливань кінетичної енергії механізму за рахунок зближення в кожний момент часу роботи сил рушійних  $A_p$  і сил опору  $A_{on}$ .

#### 5.4.3.1. Динамічний синтез маховика за методом Мерцалова

Використовуючи рівняння (5.44), визначимо момент інерції мас першої групи  $J_I$  (з постійним моментом інерції), необхідний для забезпечення заданого значення  $[\delta]$ :

$$J_I = \frac{\Delta T_{In\delta}}{\omega_c^2 [\delta]}. \quad (5.45)$$

Це і є рівняння динамічного синтезу за усталеного режиму. Регулювання  $J_I$  досягається постановкою на головний вал машини маховика. Кінетична енергія всього механізму, по аналогії з (5.42),

$$T = T_I + T_{II}.$$

Звідси

$$T_I = T - T_{II}. \quad (5.46)$$

Кінетичну енергію  $T$  виразимо з рівняння

$$T - T_0 = \sum A,$$

або

$$T = \sum A + T_0. \quad (5.47)$$

Звідси

$$T_I = \sum A + T_0 - T_{II}. \quad (5.48)$$

Для повного циклу будують графік  $T_I(\varphi)$  і за ним знаходять  $\Delta T_{In\delta}$ .

Проілюструємо даний метод на прикладі. За відомою вже нам з неусталеного режиму методикою будують графік роботи зведених сил  $\sum A = A_p + A_{on}$  (рис. 5.19 а).

Другий доданок в рівнянні (5.48) можна і не враховувати, оскільки при визначенні  $\Delta T_{In\delta}$  він скорочується.

Далі будують діаграму кінетичної енергії мас другої групи (зі змінним моментом інерції)  $T_{II} - \varphi$  (рис. 5.19 б) за даними, отриманими з рівняння:

$$T_{II}(\varphi) \approx \frac{1}{2} J_{II}(\varphi) \cdot \omega_c^2. \quad (5.49)$$

Тут  $J_{II}$  – зведений момент інерції мас другої групи.

Віднявши, згідно з рівнянням (5.48), від діаграми  $\sum A - \varphi$  (рис. 5.19 а) діаграму  $T_{II} - \varphi$  (рис. 5.19 б), отримаємо діаграму зміни кінетичної енергії мас першої групи (рис. 5.19 в), а звідси і  $\Delta T_{In\delta}$ .

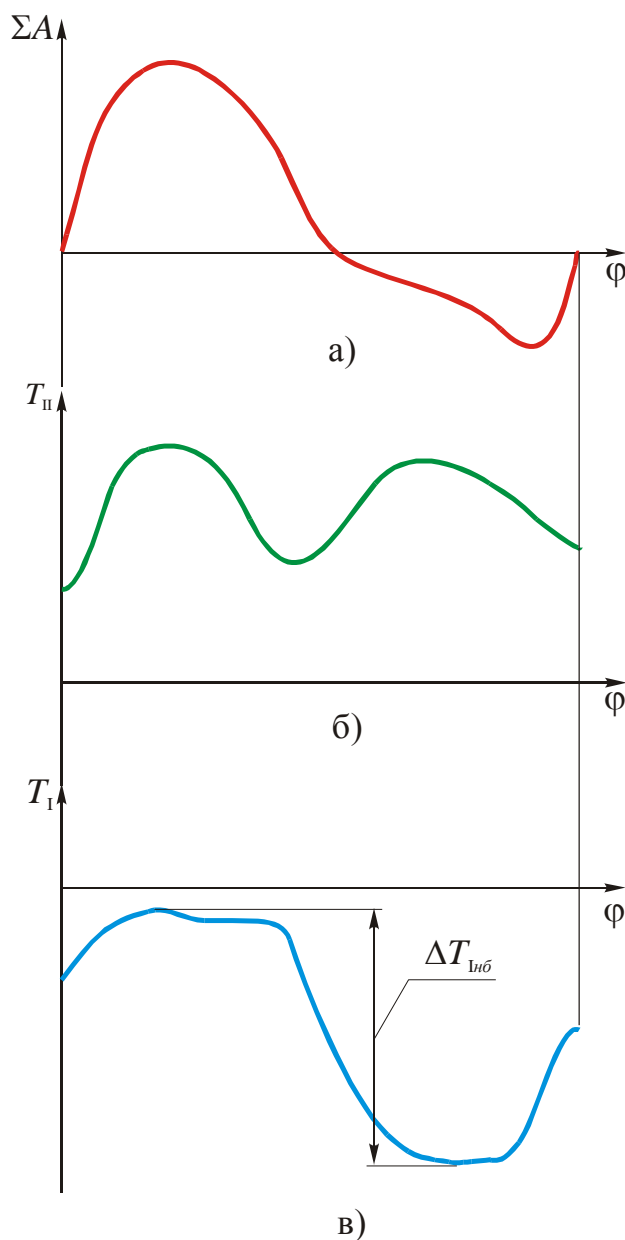
Далі за рівнянням (5.45) визначаємо  $J_I$ . Слід зауважити, що потрібний момент інерції мас з постійним моментом інерції  $J_I$  набагато більший від



зведеного моменту  $J_I^*$  ланок, що входять до складу механізму. Тому можна вважати, що знайдений момент інерції  $i$  є насправді моментом інерції маховика

$$J_I \cong J_M.$$

де  $J_M$  – момент інерції маховика.

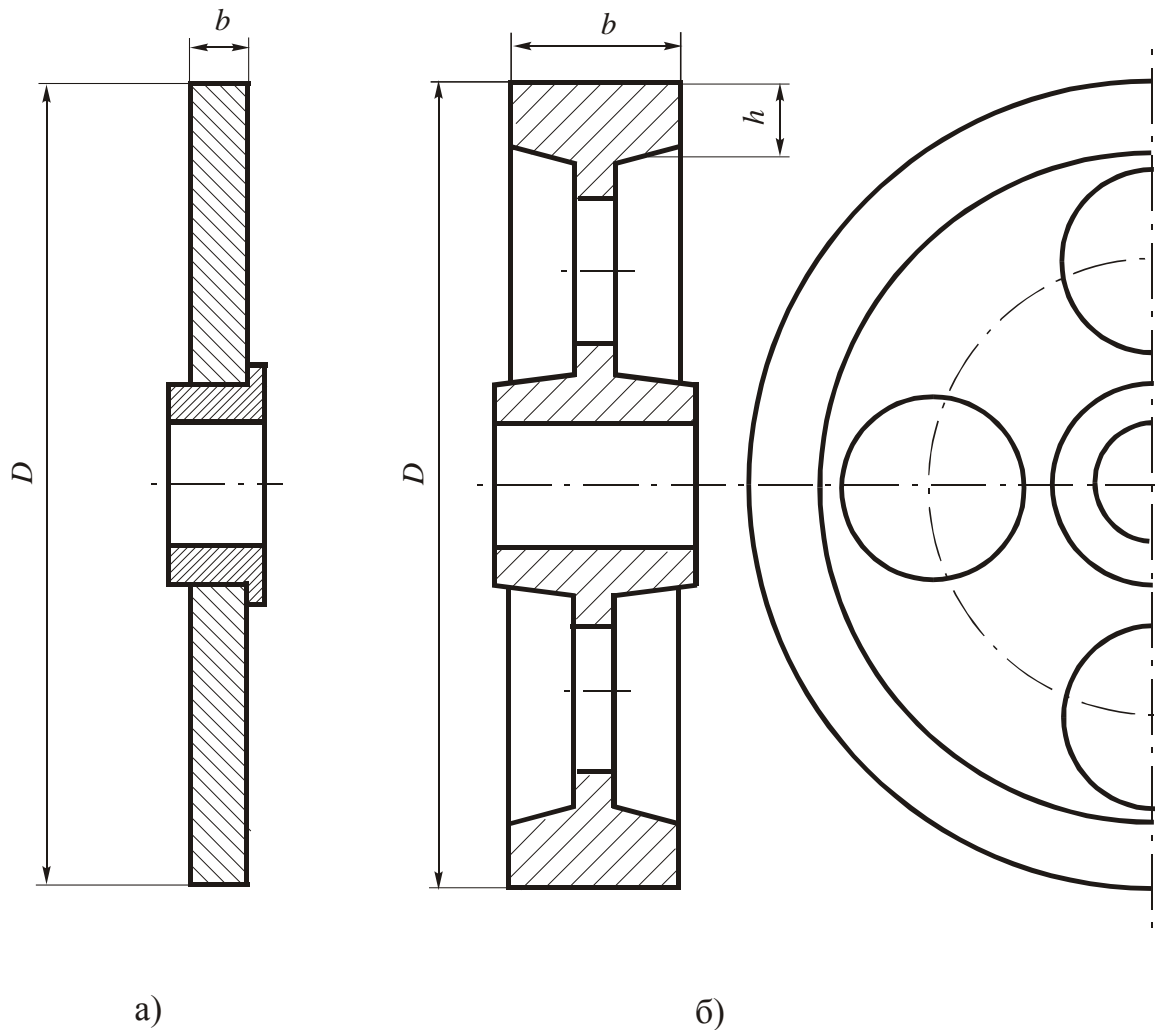


**Рис. 5.19** До синтезу маховика за методом Мерцалова:  
**а** – діаграма роботи зведеної сили; **б** – графік зміни кінетичної енергії мас другої групи;  
**в** – графік зміни кінетичної енергії мас першої групи

Яку ж роль виконує маховик у складі машинного агрегату? Розглянемо її на прикладі агрегату, що містить двигун внутрішнього згорання і генератор. При

згоранні газів двигуном виробляється енергії більше, ніж споживає генератор, і ця енергія накопичується маховиком. При вихлопі ДВЗ сам поглинає енергію, оскільки на цій стадії сила  $F_p$  виконує від'ємну роботу. Енергія  $T_l$  зменшується, тобто зменшується енергія, в першу чергу, маховика. Отже, маховик то накопичує енергію, коли є надлишок роботи двигуна, то віддає частину її. Чим вище  $J_M$ , тим менше  $\delta$ .

Конструктивно маховик виконують у вигляді диска (рис. 5.20 а) або кільця зі шпицями (рис. 5.20 б). Виготовлюють його зі сталі або чавуну.



**Рис. 5.20 Конструкція маховика: а – у вигляді диска;  
б – у вигляді кільця зі шпицями**

Для дискових маховиків

$$J_M = \frac{mD^2}{8}. \quad (5.50)$$

Звідси

$$D = \sqrt[4]{\frac{32I_M}{\pi b \rho}}, \quad (5.51)$$

де  $\rho$  – густина матеріалу.

Для маховика у вигляді кільця зі шпицями

$$J_M = \frac{mD^2}{4} = \frac{\pi b h \rho D^3}{4}. \quad (5.52)$$

Позначаючи  $\lambda_b = \frac{b}{D}$  і  $\lambda_h = \frac{h}{D}$ , отримаємо

$$D = \sqrt[5]{\frac{4J_M}{\pi \lambda_b \lambda_h}}. \quad (5.53)$$

При однакових діаметрах маса дискового маховика вдвічі більша від маси маховика зі шпицями.

Принциповим питанням при проектуванні агрегатів з маховиком є вибір місця його розташування. Оскільки момент інерції маховика обернено пропорційний квадрату кутової швидкості  $\omega_c$ , (5.45), то ставити його найраціональніше на швидкісному валу – тоді маса маховика буде найменшою. Однак це в ряді випадків, наприклад за недостатньої жорсткості ланок, може призвести до значних коливань в механізмах.

#### 5.4.3.2. Збільшення середньої швидкості руху

Дуже ефективним способом підвищення сталості заданої швидкості обертання при роботі механізму є збільшення її середнього рівня. Оскільки це положення зрозуміле, більш детально розглядати його не станемо.

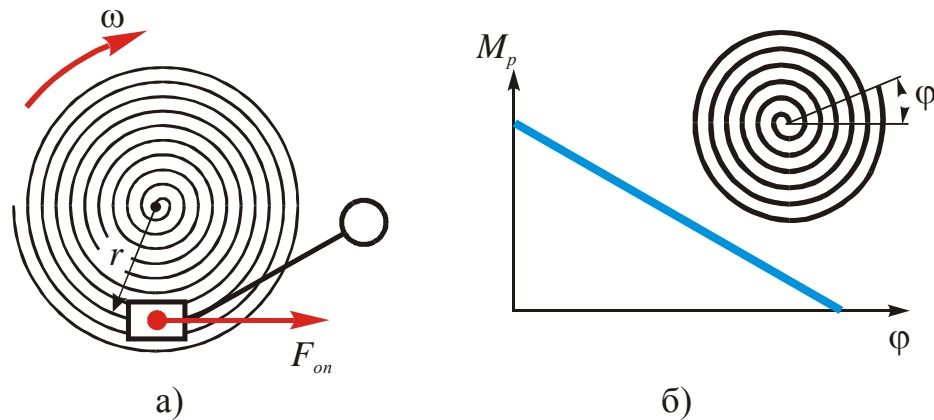
#### 5.4.3.3. Регулювання руху зближенням роботи рушійних сил і сил опору

Класичним прикладом такого регулювання є принцип, реалізований у звичайному, нинішньому поколінню вже майже незнайомому, патефоні. Найважливішою умовою якісного відтворення звуку є постійна швидкість обертання диска патефона з розміщеною на ньому платівкою. Звукова доріжка на платівці виконана у вигляді спіралі (рис. 5.21 а).

На головку з голкою, що рухається вздовж звукової доріжки, діє сила опору, момент якої залежить від положення голки відносно платівки, тобто від радіуса  $r$ . Маємо лінійну функцію моменту сил опору.

Рушійний момент створюється спіральною пружиною, яка підкручується вручну за допомогою спеціальної рукоятки. Так от, характеристика пружини,

теж лінійна (рис. 5.21 б), і дібрана таким чином, щоб в кожний момент часу момент сил опору урівноважувався рушійним моментом пружини.



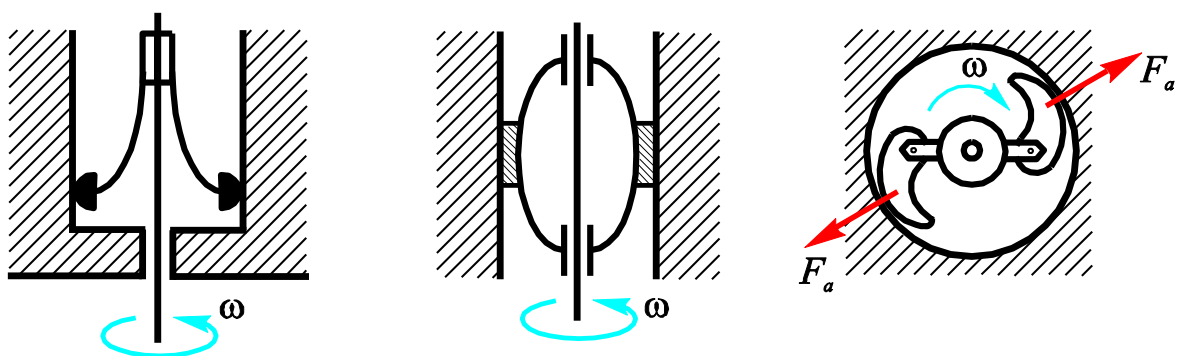
**Рис. 5.21** Регулювання швидкості обертання у приводі патефона: а – схема навантаження платівки; б – характеристика пружини

На практиці найчастіше регулюють або величину моменту сил опору, залежно від величини діючого рушійного моменту, або величину рушійного моменту, залежно від величини моменту сил опору.

Якщо підтримання сталої швидкості руху відбувається за рахунок регулювання моменту сил опору  $M_{on}$ , то пристрій, який забезпечує таке регулювання, називається *регулятором*, якщо ж за рахунок регулювання рушійного моменту  $M_p$ , то пристрій називається *модератором*.

Розглянемо схеми регуляторів.

1. Гальмівні регулятори (рис. 5.22).



**Рис. 5.22** Схеми гальмівних регуляторів

2. За рахунок тертя об повітря (рис. 5.23).
3. Відцентровий регулятор (рис. 5.24).

У відцентровому регуляторі зі збільшенням кутової швидкості рухомі маси 1 розходяться, траверса 2 намагається зміститися вгору, збільшуючи силу тиску  $N$  на фрикційний диск 3. Момент опору зростає – оберти падають.

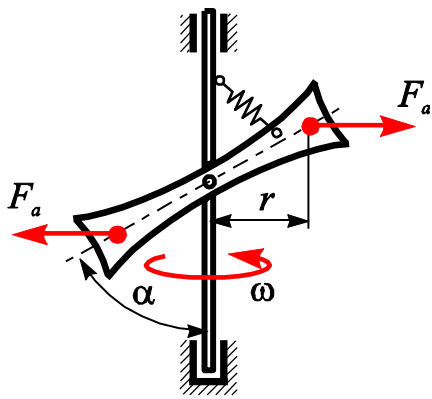


Рис. 5.23 Схема регулятора з використанням сили опору повітря

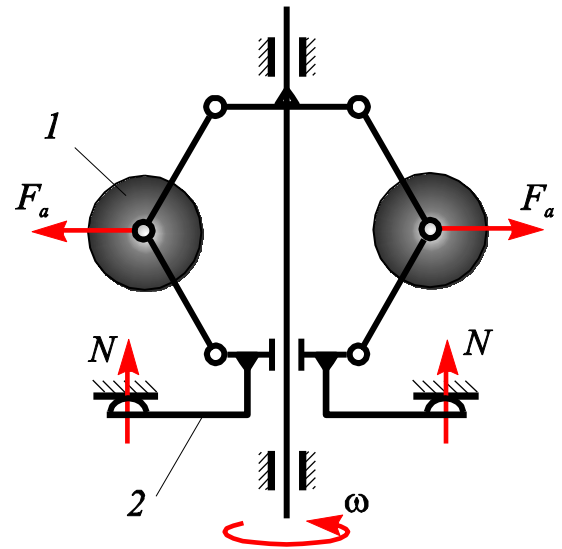


Рис. 5.24 Схема відцентрового регулятора

Схема відцентрового модератора показана на рис. 5.25.

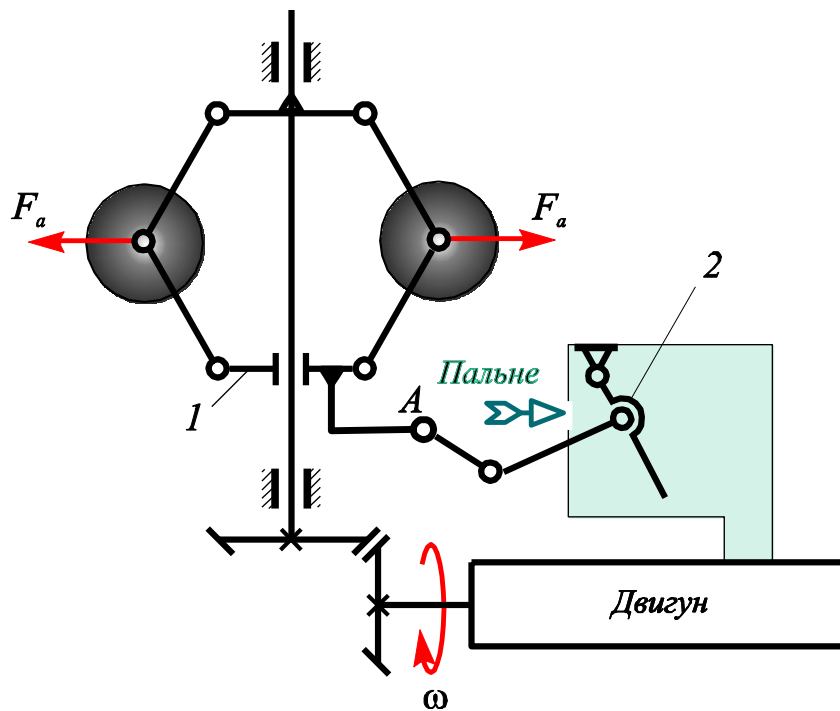


Рис. 5.25 Схема відцентрового модератора

Тут модератор працює у складі двигуна внутрішнього згорання. Чим вища швидкість обертання, тим вище розташована точка  $A$  рухомої траверси 1. Заслінка 2 зачиняється; подача пальної суміші зменшується і двигун скидає оберти.

В автомобілі роль модератора належить водієві: падають оберти внаслідок зростання опору з будь-якої причини – натискається педаль газу, і потрібна швидкість відновлюється.