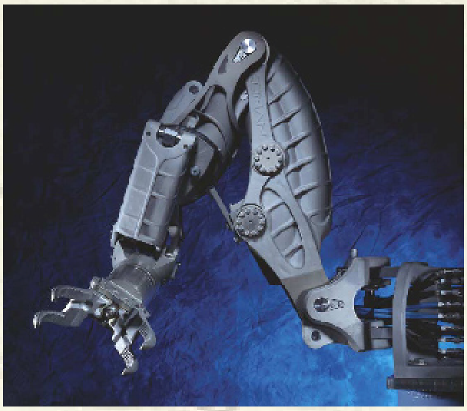


О.П.Заховайко

Доцент кафедри динаміки і міцності машин та опору матеріалів (Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут”)

Теорія механізмів і машин

Курс лекцій для студентів спеціальності „Динаміка і міцність машин”

Київ-НТУУ “КПІ”-2010

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

ТЕОРІЯ МЕХАНІЗМІВ І МАШИН

КУРС ЛЕКЦІЙ ДЛЯ СТУДЕНТІВ СПЕЦІАЛЬНОСТІ
„ДИНАМІКА І МІЦНІСТЬ МАШИН”

Затверджено Методичною радою НТУУ “КПІ”

КИЇВ-НТУУ «КПІ»-2010

Теорія механізмів і машин. Курс лекцій для студентів спеціальності „Динаміка і міцність машин”/ Автор: к.т.н., доц. О.П. Заховайко. – К.: НТУУ "КПІ", 2010. – 243 с.

Гриф надано Методичною радою НТУУ "КПІ
(Протокол №___ від _____.2010 р.)"

Навчальне електронне видання

Теорія механізмів і машин
Курс лекцій для студентів спеціальності „Динаміка і міцність машин”

Автор: *Заховайко Олександр Панасович* канд. техн. наук, доц.

Відповідальний редактор *М.І. Бобир*, д-р техн. наук, проф.

Рецензенти: *В.П. Ламашевський*, ст. наук. співробітник Інституту проблем міцності НАНУ, к.т.н.

Є.В. Штефан, Завідувач кафедри матеріалознавства та технології машинобудування Національного університету харчових технологій, к.т.н., доцент

За редакцією автора

ЗМІСТ

Лекція №1

Розділ І. ВСТУП

Як навчальній дисципліні теорії механізмів і машин належить одне з найважливіших місць серед фундаментальних загальноінженерних дисциплін , які лежать в основі фахової підготовки майбутніх інженерів-механіків. Вона базується на механіко-математичній підготовці, що забезпечується попередніми курсами: "Вища математика", "Фізика", "Нарисна геометрія та інженерна графіка", "Теоретична механіка", "Інформатика".

***Під теорією механізмів і машин розуміють науку про загальні методи дослідження властивостей механізмів і машин та проектування їх схем* [3].**

Являючись основою або будучи тісно пов`язаною з такими загальноінженерними та спеціальними дисциплінами як "Деталі машин", "Теорія коливань і стійкість руху", "Основи робототехніки", теорія механізмів і машин ставить перед майбутніми інженерами такі завдання:

- ***знати*** основні закони кінематики та динаміки механізмів та їх систем; принципи реалізації руху за допомогою механізмів, взаємодії механізмів у машині, які обумовлюють кінематичні та динамічні властивості механічної системи; загальні методи аналізу та синтезу різних типів механізмів;
- ***вміти*** на практиці реалізувати системні підходи до проектування машин і механізмів; знаходити кінематичні та динамічні характеристики механізмів за допомогою сучасних аналітичних та графоаналітичних методів; визначати оптимальні параметри механізмів за заданими умовами роботи;
- ***набути навичок*** використання вимірювальної апаратури та приладдя для визначення кінематичних та динамічних параметрів машин і механізмів; розробки алгоритмів програм розрахунків параметрів на ЕОМ, виконання конкретних розрахунків

Історична довідка. Розвиток людського суспільства тісно пов'язаний з використанням та удосконаленням механізмів: від простого важеля на зорі цивілізації до надскладних механічних систем сьогодення.

Найпростіші механізми (важільні, зубчасті) широко використовувались уже в древньому Єгипті та інших цивілізаціях античності.

Епоха Відродження в Європі ознаменувалась не тільки надзвичайними досягненнями в медицині, літературі, мистецтві, але й в технічній сфері. Варто згадати Леонардо да Вінчі, який залишив нащадкам креслення складних механізмів ткацьких та деревообробних верстатів, літальних апаратів і т. ін. На півстоліття пізніше творив знаменитий італійський лікар і математик Д. Кардан, який досліджував роботу механізмів годинників та млинів.

У XVIII сторіччі почало формуватись машинобудування як галузь промисловості. Його подальший розвиток був неможливим без розробки наукових основ створення досконалих механізмів і машин. Значний внесок у розвиток механіки у XVIII сторіччі зробили французькі вчені Г. Амонтон і Ш. Кулон, які вивчали закони тертя. Видатний швейцарський математик і механік Л.Ейлер розв'язав ряд задач кінематики і динаміки, вивчав коливання пружних тіл. Він же запропонував евольвентний профіль для зубчастих коліс

Теорія механізмів і машин як наука почала формуватись на початку XIX сторіччя. Її подальші успіхи були пов'язані з іменами таких вчених як Ф. Грасгоф і Ф. Рело (Німеччина), С. Робертс і Р. Вілліс (Англія), Т. Олів'є (Франція), П.Л. Чебишев, М. Петров, В. Горячкін, М. Жуковський, В. Ассур, І. Артоболевський (Росія).

У XX столітті темпи науково-технічного прогресу були надзвичайно високими. Бурхливо розвивалось машинобудування. На зміну мануфактурам XIX століття прийшли автоматизовані виробництва, оснащені високоточними машинами-автоматами. З'явились повністю автоматизовані підприємства. Настала ера робототехніки, високорентабельних комп'ютеризованих виробництв. Зросли, з одного боку, вимоги до якості створюваних машин і механізмів, а з іншого – з'явились величезні можливості для розв'язання найскладніших задач синтезу і аналізу, які постають перед проектувальниками. Причому задач, які до впровадження потужних ЕОМ не могли бути розв'язаними. Удосконалювались методи розв'язку цих задач. Накопичувались нові знання в галузі теорії машин і механізмів.

Значний вклад в розвиток теорії механізмів і машин в XX столітті внесли українські вчені. Потужні школи механіків виникли в Києві, Харкові, Одесі, Дніпропетровську. Відомі далеко за межами нашої держави імена таких українських вчених в цій галузі, як С.Н. Кожевников, К.І. Заблонський, Б.І. Костецький, Ф.К. Іванченко та ін.

Основні проблеми і завдання. Досягнення теорії механізмів і машин є беззаперечними. Проте слід відзначити, що на сьогодні набагато більш розвиненою є теорія механізмів, на відміну від теорії машин.

В теорії механізмів вивчають такі методи дослідження властивостей механізмів та проектування схем (аналіз і синтез), які є загальними для всіх або для певних груп механізмів, незалежно від конкретного призначення машин, приладів, апаратів. Наприклад, один і той самий механізм, виконаний у вигляді пасової або зубчастої передачі, можна зустріти в автомобілях, верстатах, точних приладах.

Якість створюваних машин і механізмів багато в чому залежить від повноти розробки та застосування загальних методів проектування. Чим повніше будуть враховані вже на стадії проектування критерії продуктивності, надійності, точності, економічності, тим досконалішими будуть створені конструкції.

Вміння застосовувати методи кінематичного і динамічного дослідження механізмів і машин абсолютно необхідне і при складанні розрахункових схем та моделюванні умов навантаження конструкцій і їх елементів для подальших розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість, а також для коректної постановки експерименту.

Розділ 2. СТРУКТУРА МЕХАНІЗМУ

Механізм є основою будь-якої машини. Коротко можна означити так:

Механізм - це пристрій для перетворення механічного руху твердих тіл.

Людство за свою історію створило безліч різноманітних механізмів. Тому, як і в будь-якій іншій природничій науці, в теорії механізмів і машин розроблені свої принципи (системи) класифікації. Їх на сьогодні існує кілька:

- за структурною ознакою;
- за способом передачі руху;
- за функціональною ознакою;
- за характером рухів ланок механізму;
- за конструктивною ознакою або типом механізму.

Тема 2.1 . ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ ТА ОЗНАЧЕННЯ

2.1.1. Ланка, деталь

Ланка — тверде тіло, що входить до складу механізму.

На рис.2.1 показане умовне зображення кривошипно-повзункового механізму. Більш загальне означення для таких механізмів – кривошипно-шатунні. Ланками його являються кривошип 1 – ланка, яка здійснює повний оберт за цикл руху механізму; шатун 2 – ланка, яка виконує плоско-паралельний рух; повзун або поршень 3 і стояк як нерухома ланка.

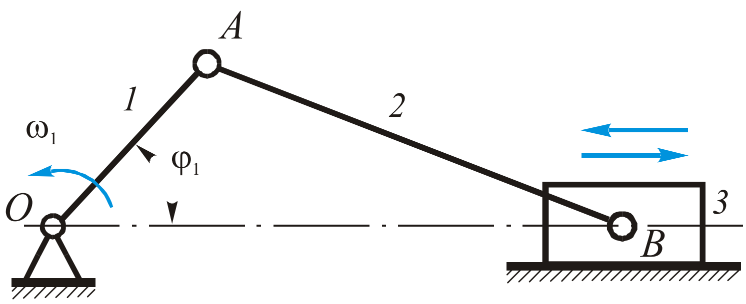


Рис.2.1 Кривошипно-повзунковий механізм

Деталь – тверде тіло, що входить до складу ланки.

Між деталями у ланці немає відносних рухів.

На рис. 2.2 зображений шатун (ланка 2 на рис. 1.1). Тут 1, 2, 3, 4 – деталі ланки.

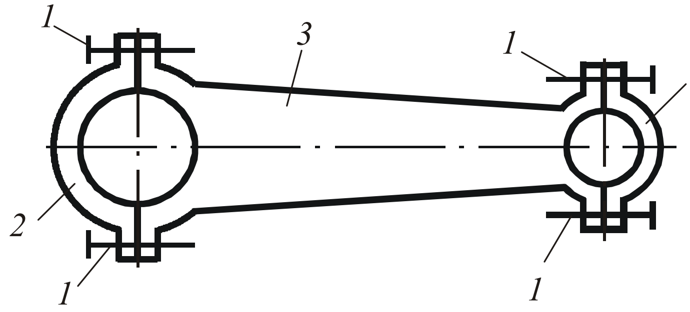


Рис. 2.2 Ланка та її деталі

2.1.2. Кінематична пара

Кінематична пара - це рухоме з'єднання двох ланок, що обмежує їх певні відносні рухи.

На рис. 2.1 літерами *О, А* і *В* позначені кінематичні пари.

Розрізняють такі види кінематичних пар:

1) плоскі та просторові;
2) обертальні (рис. 2.3 а) та поступальні (рис. 2.3 б) пари;
3) нижчі (рис. 2.3)та вищі (рис. 2.4).

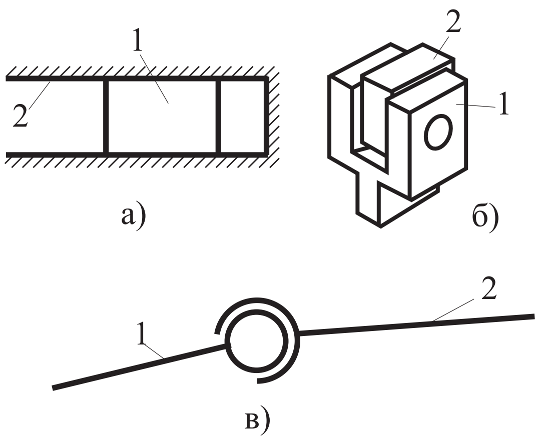


Рис. 2.3 Нижчі пари: а – поступальна пара; б – обертальна пара; 3 – сферичний шарнір

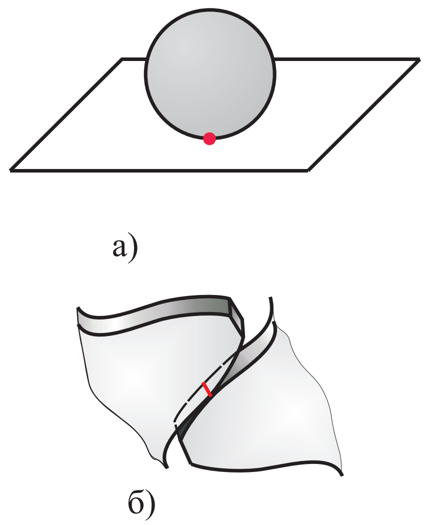


Рис. 2.4 Вищі пари: а – контакт у точці; б – контакт по лінії

У нижчих парах контакт між ланками відбувається по поверхні; а у вищих – по лінії або в точці.

Вищі пари мають ряд особливостей:

- вони вимагають примусового замикання: силового (рис. 2.5 а) або геометричного (рис. 2.5 б);

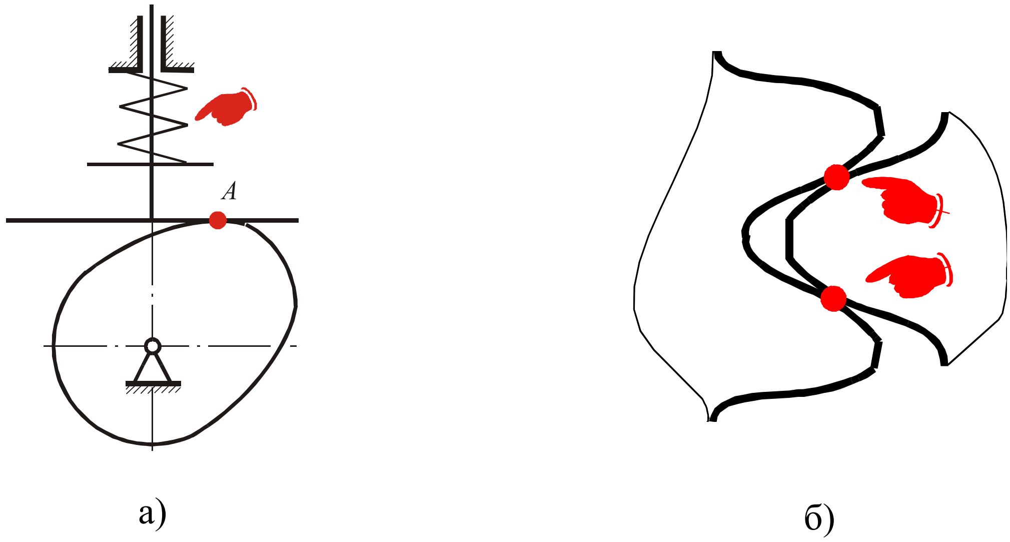


Рис. 2.5 Способи примусового замикання вищих кінематичних пар: а – силове замикання; б – геометричне замикання

- питомий тиск у зоні контакту в них вищий, ніж в нижчих кінематичних парах
- вони, на відміну від нижчих кінематичних пар, не мають властивості оберненості, що проявляється у залежності закону відносного руху ланок від вибору системи координат.

На рис. 2.6 показана нижча кінематична пара. З рисунка видно, що, незалежно від того, з якою з ланок зв'язати систему координат, точки цих ланок у відносному русі переміщуватимуться по однакових траєкторіях. У вищій же парі , яку утворюють коло і пряма (рис. 2.7 а) і б)), при перекочуванні кола по прямій (система координат пов'язана з прямою) кожна точка кола описує циклоїду (рис. 2.7 а). А якщо систему координат зв'язати з колом, тобто перекочувати пряму по колу, її точки описуватимуть евольвенти (рис. 2.7 б).

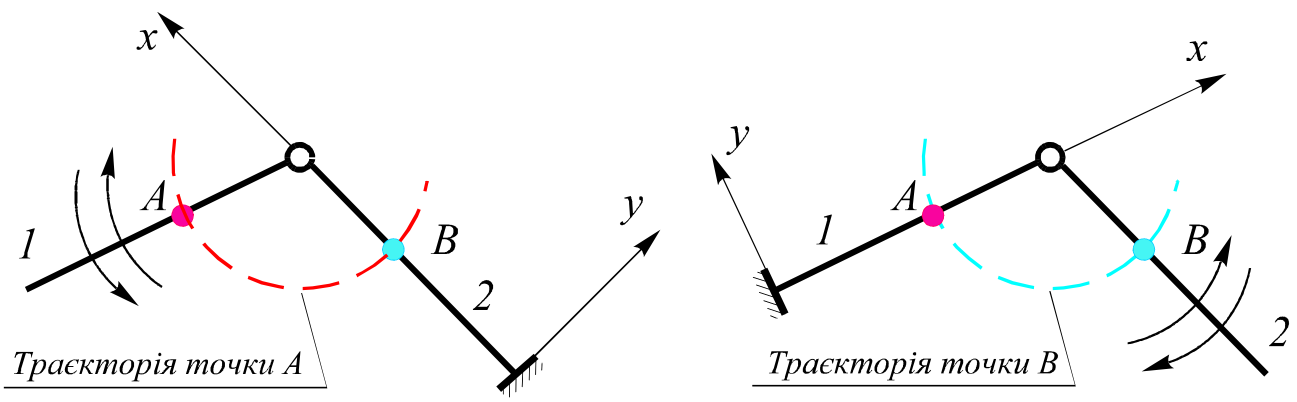


Рис. 2.6 Реалізація принципу оберненості руху в нижчій кінематичній парі

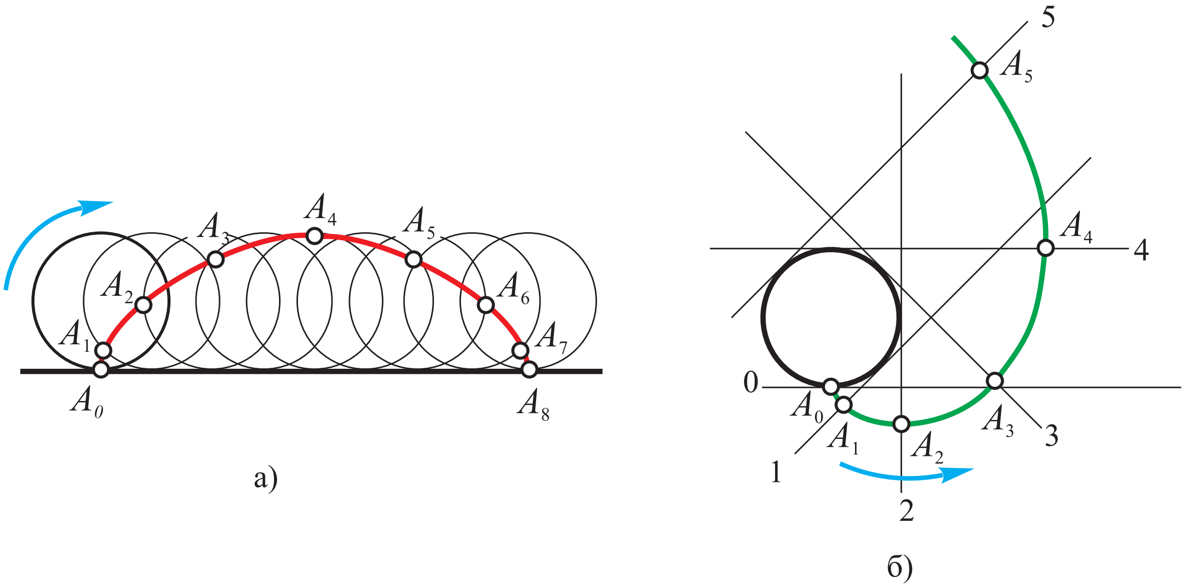


Рис. 2.7 Циклоїда (а) та евольвента (б)

Кінематичні пари класифікуються за числом в'язей, які накладаються їх елементами на відносний рух ланок (рис. 2.8).

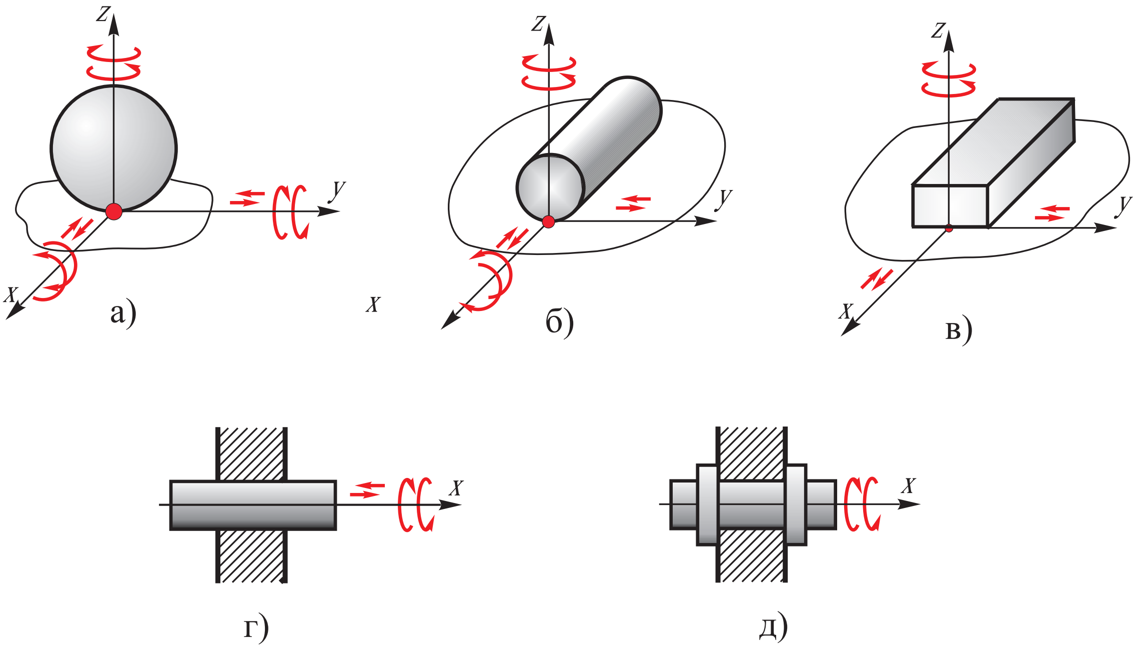


Рис. 2.8 Приклади кінематичних пар: а – 1-го класу; б – 2-го класу; в – 3-го класу; г – 4-го класу; д – 5-го класу

Під *в'язями* в механіці розуміють обмеження, що накладаються на положення і швидкості точок механічної системи, які виконуються за будь-яких діючих на систему сил.

Координати точок механічної системи і їх швидкості задовольняють рівнянням в'язей.

Розрізняють в’язі геометричні, диференціальні, голономні та неголономні. У теорії механізмів розглядаються *геометричні ідеальні в’язі*. Під *ідеальними* розуміють такі в’язі, для яких сума робіт всіх реакцій на можливих переміщеннях системи дорівнює нулю.

Клас кінематичної пари визначається кількістю обмежень (в’язей), які пара накладає на відносний рух ланок.

На рис. 2.8 наведені приклади пар різних класів. Тут стрілочками показані можливі рухи, що допускаються парою.

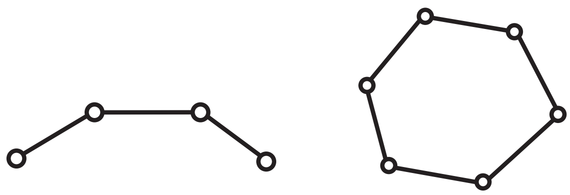
2.1.3. Кінематичний ланцюг

Кінематичний ланцюг – це система ланок, які утворюють між собою кінематичні пари.

Розрізняють кінематичні ланцюги:

1) відкриті (рис. 2.9 а) та замкнені (рис. 2.9 б)
2) прості (рис. 2.9) та складні (рис. 2.10), які містять базисні ланки, тобто ланки, що утворюють більш ніж дві кінематичні пари;
3) просторові та плоскі.

У плоскому ланцюзі ланки рухаються в паралельних площинах.



а) б)

Рис. 2.9 Прості кінематичні ланцюги: а – відкритий; б – замкнений

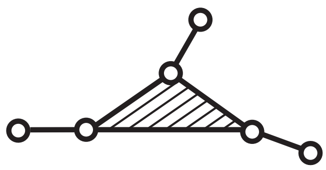


Рис. 2.10 Складний кінематичний ланцюг

Механізм теж є кінематичним ланцюгом. Можна сформулювати таке означення.

Механізм – це замкнений кінематичний ланцюг, який містить нерухому ланку (стояк), і в якому при заданому русі однієї або кількох ланок решта виконує цілком визначені рухи.

Вхідною називається ланка якій задають рухи, що перетворюються механізмом. В механізмі їх може бути декілька.

Вихідна – це ланка (або декілька ланок), що здійснює рухи, для виконання яких і створювався механізм.

2.1.4. Рухливість кінематичного ланцюга

Узагальнені координати. Як відомо, положення тіла в просторі визначається шістьма незалежними координатами: три координати точки початку рухомої системи осей, пов’язаної з тілом, відносно нерухомих осей і три кути Ейлера, які визначають поворот цієї системи відносно нерухомої.

Координати, які повністю визначають положення механічної системи в просторі, називаються *узагальненими координатами*.

Для кривошипно-шатунного механізму (див. рис. 2.1) як узагальнену координату можна розглядати кут повороту кривошипа. Тобто тут усього одна узагальнена координата.

Початкові ланки. Це ланки, з яких починають визначати положення всього механізму.

Ланка, якій присвоюється узагальнена координата, називається початковою ланкою механізму.

Початкові та вхідні ланки не обов’язково збігаються. В принципі початковою може бути будь-яка ланка механізму, в тому числі і вихідна, і проміжна, якщо це спрощує аналіз механізму. Тобто вибирають початкову ланку, керуючись доцільністю.

Кількість початкових ланок механізму дорівнює кількості узагальнених координат.

Число ступенів свободи механізму. Кожна ланка поза кінематичним ланцюгом має шість ступенів свободи. Якщо ми маємо m ланок, то загальний ступінь свободи дорівнює $6m$, а значить і $6m$ узагальнених координат.

Якщо ми говоримо про кінематичний ланцюг, то, оскільки в’язі в кінематичних парах геометричні, тобто накладають обмеження лише на переміщення точок ланок, число ступенів свободи ланцюга збігається з числом узагальнених координат .

Якщо нерухому систему координат пов’язати з однією з ланок, то говорять про *ступінь рухливості кінематичного ланцюга* відносно цієї ланки. Оскільки у механізмі є нерухома ланка – стояк, то саме з ним пов’язують систему координат і кажуть про *ступінь рухливості механізму відносно стояка*.

При геометричних в’язях ступінь рухливості можна визначити за різницею між загальним числом узагальнених координат рухомих ланок та числом рівнянь в’язей, якщо ці рівняння незалежні, тобто жодне з них не можна отримати як наслідок інших.

Позначимо $5p_5$ – кількість обмежень, що накладаються на ланки механізму парами 5-го класу (p_5 – число пар 5 класу); $4p_4$ – число обмежень, накладених парами 4 класу (p_4 – число пар 4-го класу) і т.д.

Можлива кількість узагальнених координат – $6n$, де $n = m - 1$ – кількість рухомих ланок механізму.

Тоді ступінь рухливості механізму можна знайти за формулою:

$$w = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1. \tag{2.1}$$

Це формула Сомова-Малишева для просторового механізму.

Для плоского механізму, де площина автоматично накладає три обмеження на можливі рухи ланок, а значить можливі лише два типи кінематичних пар – 5-го (нижчі) і 4-го (вищі) класів, Формула (1.1) набуде вигляду

$$w = 3n - 2p_5 - p_4 . \tag{2.2}$$

Рівняння (1.1), (1.2) називаються структурними рівняннями механізмів.

Лекція №2

2.1.5. Кінематична схема механізму

<u>Кінематичною схемою механізму</u> називається умовне зображення механізму в масштабі μ_l $\left(\frac{\text{м}}{\text{мм}}\right)$, у якому дотримані лише ті розміри ланок, які впливають на кінематику механізму.

На кінематичних схемах шарнірно-важільних механізмів використовують умовні позначення, основні з яких наведені на рис. 2.11.

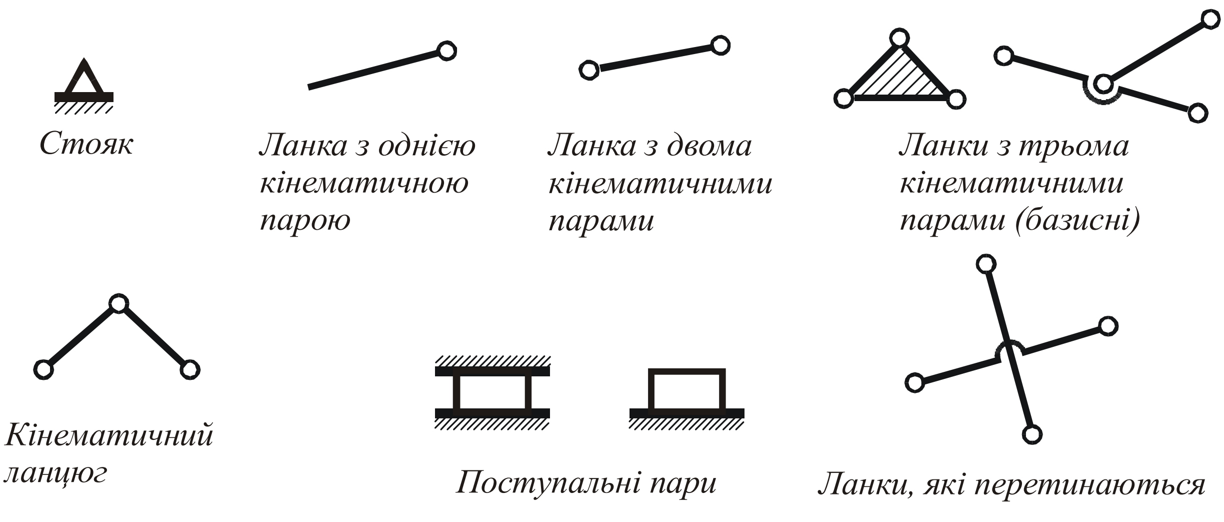


Рис. 2.11 Умовні позначення на кінематичних схемах механізмів

2.1.6. Пасивні (надлишкові) в’язі та ланки

При виводі структурних формул механізму (2.1) і (2.2) усі рівняння в’язей вважалися незалежними. Однак, на практиці при накладанні в’язей можуть бути використані додаткові в’язі, які не впливають на ступінь рухливості кінематичних ланцюгів, але вони перетворюють ці ланцюги в статично невизначні. При наявності таких в'язей рівняння (1.1) стає невизначним:

$$w = 6n - (5p_5 + 4p_4 + 3p_3 + 2p_2 + p_1 - q), \tag{2.3}$$

де q — кількість зайвих в'язей.

В цьому рівнянні w і q невідомі. Розв'язок таких рівнянь дуже складний. На практиці для більшості плоских механізмів ступінь рухомості є очевидною. Тобто w можна визначити на основі геометричного аналізу і розв'язати рівняння (2.3) відносно q. При аналізі важливим є правильно визначити, які в'язі надлишкові і їх вилучити. Наприклад, на рис. 2.12 наведена схема двокривошипного механізму ($l_{OA}=l_{BC}$) спарника паровоза.

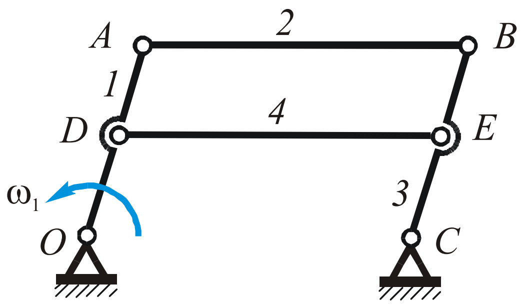


Рис. 2.12 Двокривошипний механізм

Його ступінь рухливості обчислюється за формулою (2.2):

$$w = 3n - 2p_5 = 0.$$

Згідно зі структурною формулою маємо нерухому раму. Однак очевидно, що це механізм з однією узагальненою координатою φ_1, тобто $w = 1$. Тут ланка 4 є пасивною. Її вилучення ніяк не вплине на кінематику механізму.

Ланки та в'язі, що входять до складу механізму, але не впливають на його кінематику, називаються пасивними або надлишковими.

З якою ж метою до складу механізму вводяться пасивні в'язі та ланки?

По-перше, щоб збільшити жорсткості його конструкції.

По-друге, щоб усунути невизначеність руху механізму в деяких його положеннях.

Положення механізму, в яких при заданому русі вхідних ланок положення вихідних є невизначеними, називаються мертвими положеннями.

Приклад такого положення для шарнірно-важільного коромислового механізму показаний на рис. 2.13.

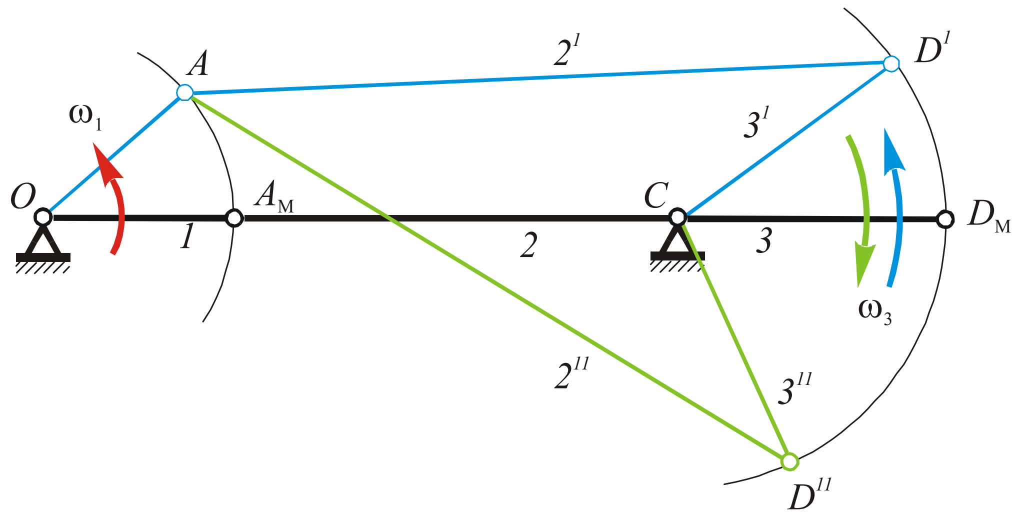


Рис. 2.13 Кривошипно-коромисловий механізм

По-третє, пасивні ланки можуть також вводитись з метою заміни тертя ковзання в кінематичних парах тертям кочення.

За структурною формулою для кулачкового механізму (рис. 2.14) отримаємо:

$$w = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 1 = 2 .$$

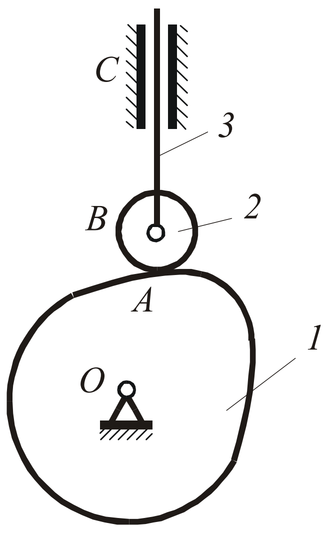


Рис. 2.14 Кулачковий механізм

Виходить, що тут має бути заданим закон руху двох ланок. Але очевидним є те, що вхідна ланка тут лише одна – кулачок 1. Ролик 2 – пасивна ланка. Якщо його видалити, то матимемо:

$$w = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 1 .$$

Тема 2.2. СТРУКТУРНИЙ СИНТЕЗ МЕХАНІЗМУ

2.2.1. Поняття про групу Ассура

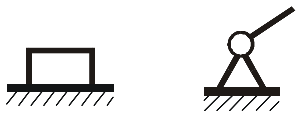
Структурним синтезом механізму називається проектування його структурної схеми.

Структурна схема* – *це умовне зображення механізму, що містить стояк, рухомі ланки та кінематичні пари, на якому вказується їх взаємне розташування без дотримання співвідношення розмірів ланок.

В основі структурного синтезу лежить метод, запропонований В. Ассуром. Він запропонував розглядати кожен механізм, як ланцюг, утворений шляхом нашарування *структурних груп – груп Ассура*, приєднаний до *найпростішого початкового механізму*.

Найпростіший початковий механізм* – *це такий механізм, подальше розчленування якого на складові неможливе без порушення його основної функції – передачі руху.

Приклади таких механізмів показані на рис.2.15.



а) б)

Рис. 2.15 Початкові механізм: а – з поступально рухомою ланкою; б – з обертальною ланкою

Ступінь рухливості цих механізмів $w = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1$.

Розглянемо синтез на прикладі шестиланкового механізму зі ступенем рухливості $w = 1$. Початковий механізм – обертальна ланка зі стояком (рис. 2.16 а).

Щоб ступінь рухливості не змінювався (залишалась тільки одна вхідна ланка), приєднані структурні групи відносно своїх зовнішніх пар повинні мати ступінь рухливості $w = 0$. Тобто

$$w = 3n - 2p_5 = 0 \tag{2.4}$$

Вищі пари до структурних груп не входять.

Структурною групою або групою Ассура* називається *відкритий кінематичний ланцюг, ступінь свободи якого відносно елементів зовнішніх кінематичних пар дорівнює нулю. При цьому група не повинна розпадатися на простіші, які відповідали б цій умові.

Найпростіший ланцюг включає, згідно з умовою (2.4), дві рухомі ланки і три шарніри (рис. 2.16 б). Першу групу приєднуємо до початкового механізму і стояка (рис. 2.16 в). Другу групу можна приєднати до будь-якої з рухомих ланок і до стояка. На рис. 2.16 г) ця група приєднана до ланки 2, яка в даному випадку є базисною.

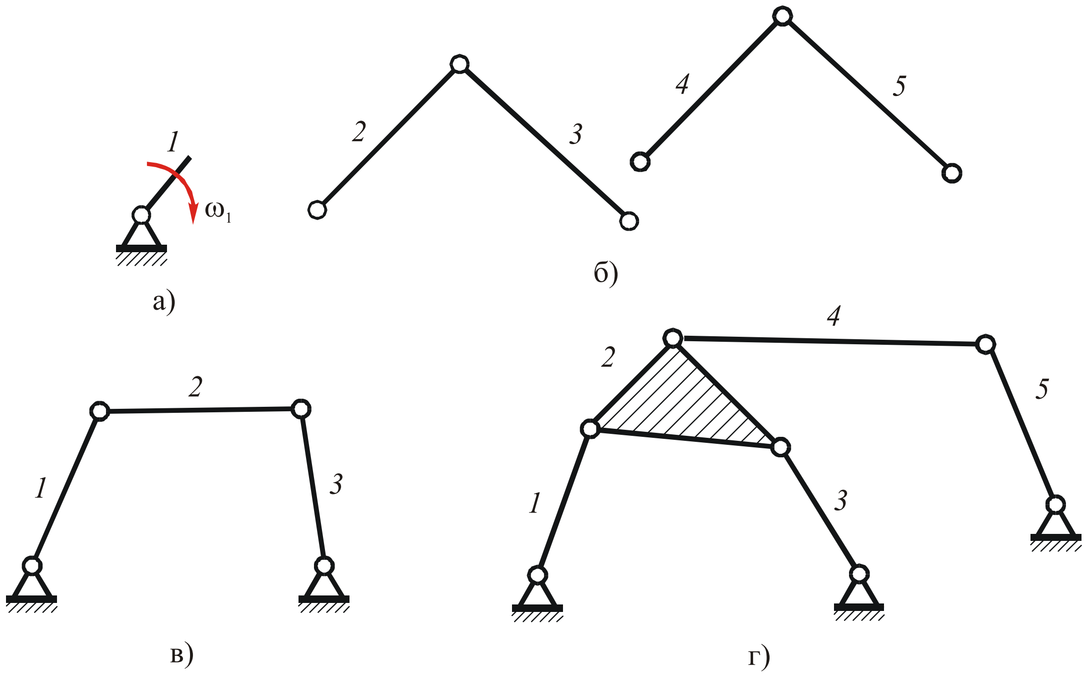


Рис. 2.16 Синтез шестиланкового шарнірно-важільного механізму: а – початковий механізм; б – структурні групи; в – чотириланковий механізм; г – шестиланковий механізм;

Легко переконатися, що синтезовані механізми відповідають поставленій умові – це шестиланкові механізми з $w=1$.

2.2.2. Класифікація груп Ассура

Найтиповіші для сучасних механізмів структурні групи наведені в табл. 2.1. В. Ассур запропонував поділити всі групи на класи і порядки.

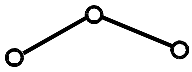
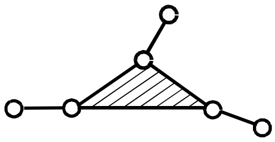
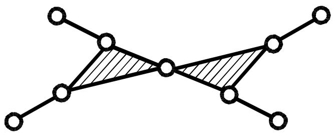
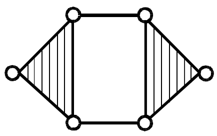
Класифікація за Ассуром. До груп І-го і ІІ-го класів відносяться такі, які не містять змінних контурів, і відрізняються тим, що групи ІІ-го класу включають базисні ланки, які з’єднані тільки з іншими базисними ланками (рис. 2.17). групи ІІІ-го класу містять один змінний контур; групи IV-го класу – два змінних контури і т.д.

Порядок групи визначається числом повідків (див. табл.. 2.1 і рис. 2.17)

Класифікація за Артоболевським. На сьогодні користуються переважно цією системою структурної класифікації:

- клас групи визначається кількістю шарнірів в найскладнішому замкненому контурі;
- порядок групи визначається кількістю шарнірів, якими група приєднується до механізму.

Таблиця 1.1 ***Найтиповіші групи Ассура та їх класифікація***

Вид групи	Класифікація	
	За Ассуром	**За Артоболевським**
	І-й клас 2-й порядок	ІІ-й клас 2-й порядок
	І-й клас 3-й порядок	ІІІ-й клас 3-й порядок
	І-й клас 4-й порядок	ІІІ-й клас 4-й порядок
	ІІІ-й клас 0-й порядок	ІV-й клас 2-й порядок

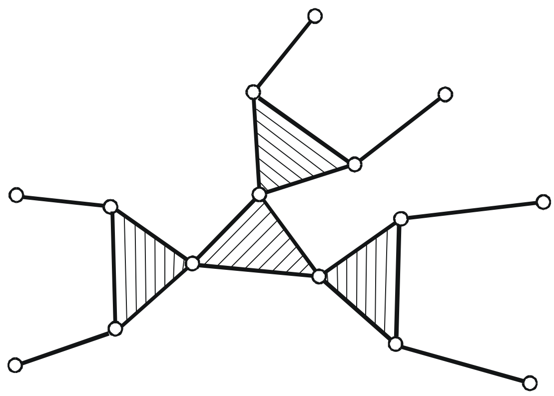


Рис. 2.17 Структурна група ІІ-го класу 6-го порядку за Ассуром

Групи ІІ-го класу 2-го порядку І.І.Артоболевський запропонував поділити на п’ять видів, схеми яких показані на рис. 2.18.

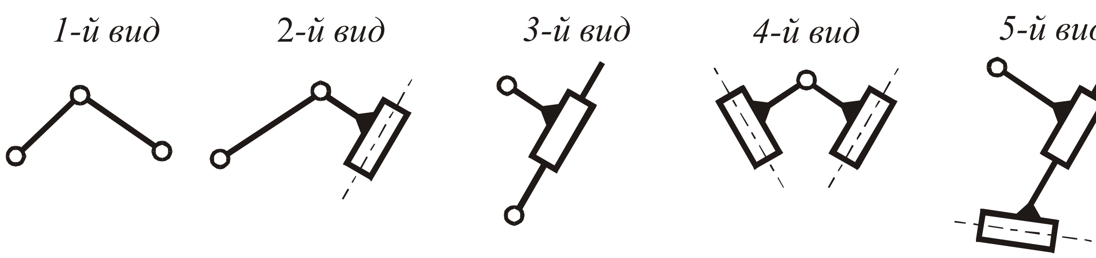


Рис. 2.18 Структурні групи ІІ-го класу 2-го порядку за Артоболевським

Розділ 3. КЛАСИФІКАЦІЯ МЕХАНІЗМІВ І МАШИН

Тема 3.1. СТРУКТУРНИЙ АНАЛІЗ ТА СТРУКТУРНА КЛАСИФІКАЦІЯ МЕХАНІЗМІВ

Основною задачею *структурного аналізу механізмів* є визначення його класу і порядку.

Клас і порядок механізму визначається класом і порядком найскладнішої групи Ассура, яка входить до його складу.

Структурний аналіз проводиться в порядку, оберненому до синтезу:
- для заданого механізму потрібно побудувати структурну схему;
- виділити початковий механізм;
- розчленувати ланцюг, що залишився, на структурні групи Ассура.

Побудова структурної схеми. Структурна схема будується за заданою кінематичною схемою в такій послідовності:
- Виявляються пасивні ланки і в'язі, які видаляються зі схеми механізму.
- Усі вищі пар заміняються нижчими. Для цього в центрі кривини елементів вищих кінематичних пар у точці їх дотику поміщають шарніри A і B (рис. 3.1). З'єднують їх ланкою AB, вісь якої збігається зі спільною нормаллю в точці дотику C. Їх також з'єднують з шарнірами O і O_1 ланками OA і O_1B. Отриманий механізм є *кінематично еквівалентним* до вихідного з вищою парою. Швидкості та прискорення його точок і відповідних точок вихідного механізму однакові, що нескладно показати (див. [1]). Отриманий кінематично еквівалентний до вихідного механізм називається *замінним механізмом*.

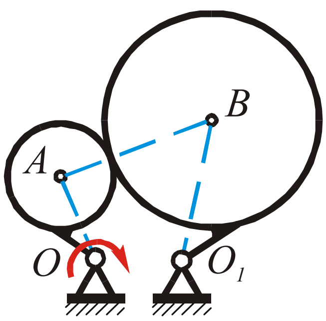


Рис. 3.1 Кінематично еквівалентні механізми

- Усі поступальні пари замінюються на обертальні. При цьому поступальний рух повзуна розглядають як миттєвий обертальний відносно точки, що знаходиться на нескінченності, а сам повзун розглядають як поводок нескінченної довжини (рис. 3.2).

- Ланки, які утворюють три і більше кінематичні пари, зображають у вигляді многогранників з кількістю вершин, що дорівнює кількості шарнірів. За цим самим принципом зображають і стояк.

Рис. 3.2 Заміна поступальної пари на обертальну

Зауваження: *на структурній схемі ланки не повинні перетинатися.*

Приклад 3.1. Визначити клас і порядок *прямилі Ліпкінна-Посельє* (рис.3.3).

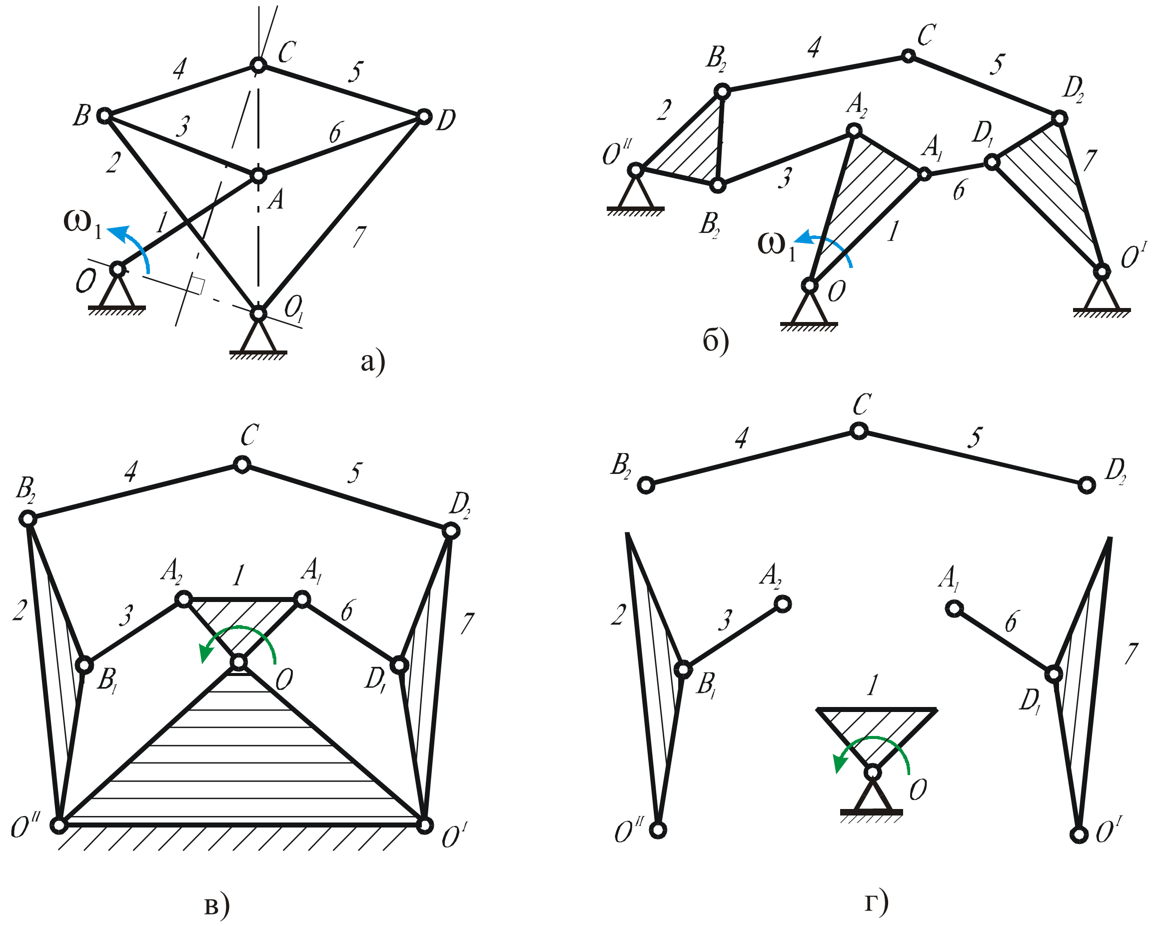


Рис. 3.3 Прямиля Ліпкіна-Посельє: а – кінематична схема; б – замінний механізм; в – структурна схема; г – групи Ассура

Запишемо структурну формулу механізму. Маємо рухомих ланок $n = 7$ і нижчих кінематичних пар $p_5 = 10$. В шарнірах *A, B, D і* O_1 маємо по дві кінематичні пари. Вищі кінематичні пари в механізмі відсутні. Отже ступінь рухливості механізму $w = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 10 - 0 = 1$.

Побудуємо замінний механізм, зобразивши базисні ланки, в якості яких ми обираємо ланки 1, 2 і 7, у вигляді трикутників (рис. 3.3 б). А далі, об'єднавши кінематичні пари, які належать стояку, у один многокутник, розмістивши їх у вершинах, будуємо структурну схему (рис.3.3 в).

Виділяємо початковий механізм, який включає стояк і ланку 1. Далі приєднаний кінематичний ланцюг розкладаємо на групи Ассура (рис. 3.3 г), керуючись деякими правилами:

1. Одну й ту ж ланку не можна включати до різних груп Ассура.
2. Стояк не може входити як ланка до групи Ассура.
3. Починати аналіз слід з останньої, по відношенню до початкового механізму, приєднаної групи Ассура.

Як видно з проведеного аналізу (рис. 3.3 г), розглянутий механізм є механізмом ІІ-го класу 2-го порядку.

Приклад 3.2. Визначити клас і порядок механізму приводу стола стругального верстата (рис.3.4).

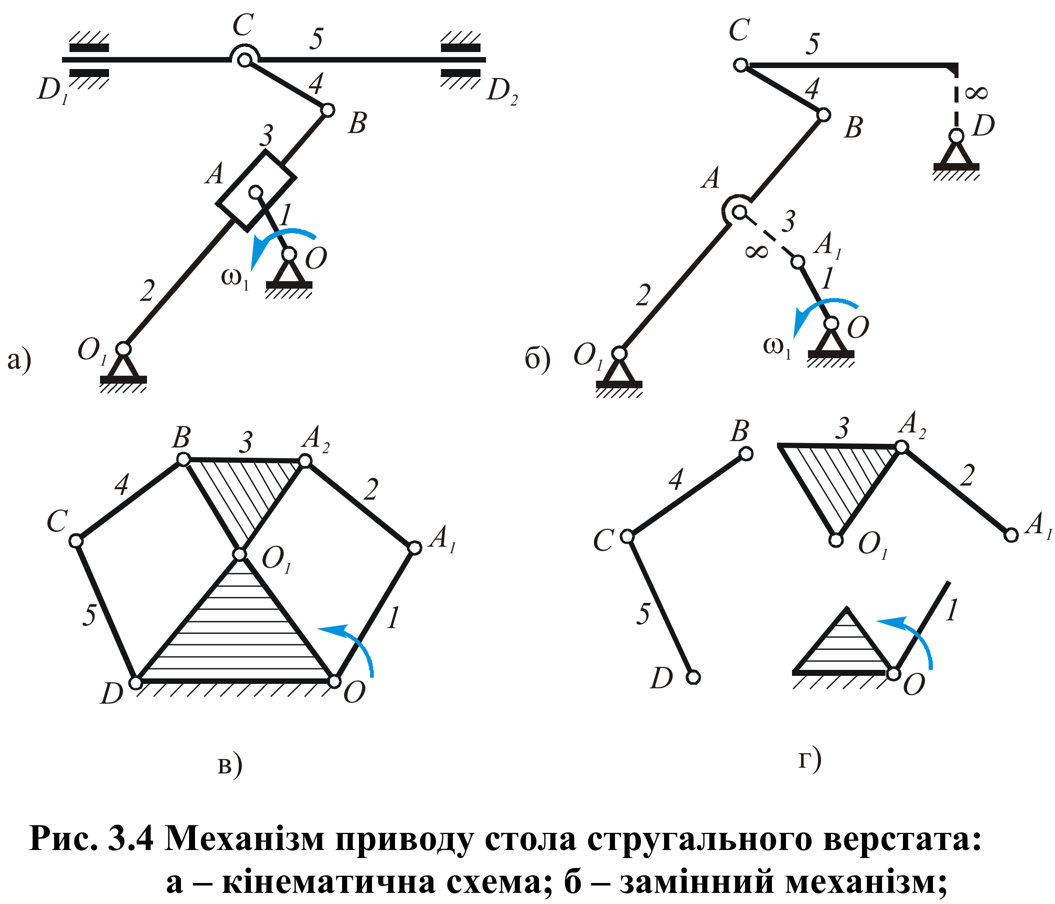


Рис. 3.4 Механізм приводу стола стругального верстата:
а – кінематична схема; б – замінний механізм;
в – структурна схема; г – групи Ассура

Обчислимо ступінь рухливості механізму. Маємо, згідно зі схемою, кількість рухомих ланок $n=5$, нижчих кінематичних пар $p_5=8$, вищих пар немає. Тоді $w=3\cdot5-2\cdot8=-1$, тобто виходить, що це жорстка статично невизначна конструкція. Але очевидним є те, що це механізм, у якого одна вхідна ланка – кривошип 1. Отже, в схемі є пасивна в'язь. Це пара D_1 або D_2. Їх слід вважати однією парою, адже вони утворені одними й тими ж ланка: стояком і повзуном 5.

Таким чином нижчих кінематичних пар маємо $p_5=7$. Тоді $w=3\cdot5-2\cdot7=1$.

Замінюючи поступальні пари між каменем 2 та кулісою 3 і між повзуном (столом) 5 і стояком обертальними, а також зображаючи базову ланку 3 у вигляді трикутника, будуємо схему замінного механізму (рис. 3.4 б). Потім будуємо структурну схему (рис. 3.4 в) і проводимо структурний аналіз (рис. 3.4 г).

Як бачимо, наш механізм є механізмом II-го класу 2-го порядку.

Приклад 3.3. Визначити клас і порядок кулачково-важільного механізму (рис.3.5).

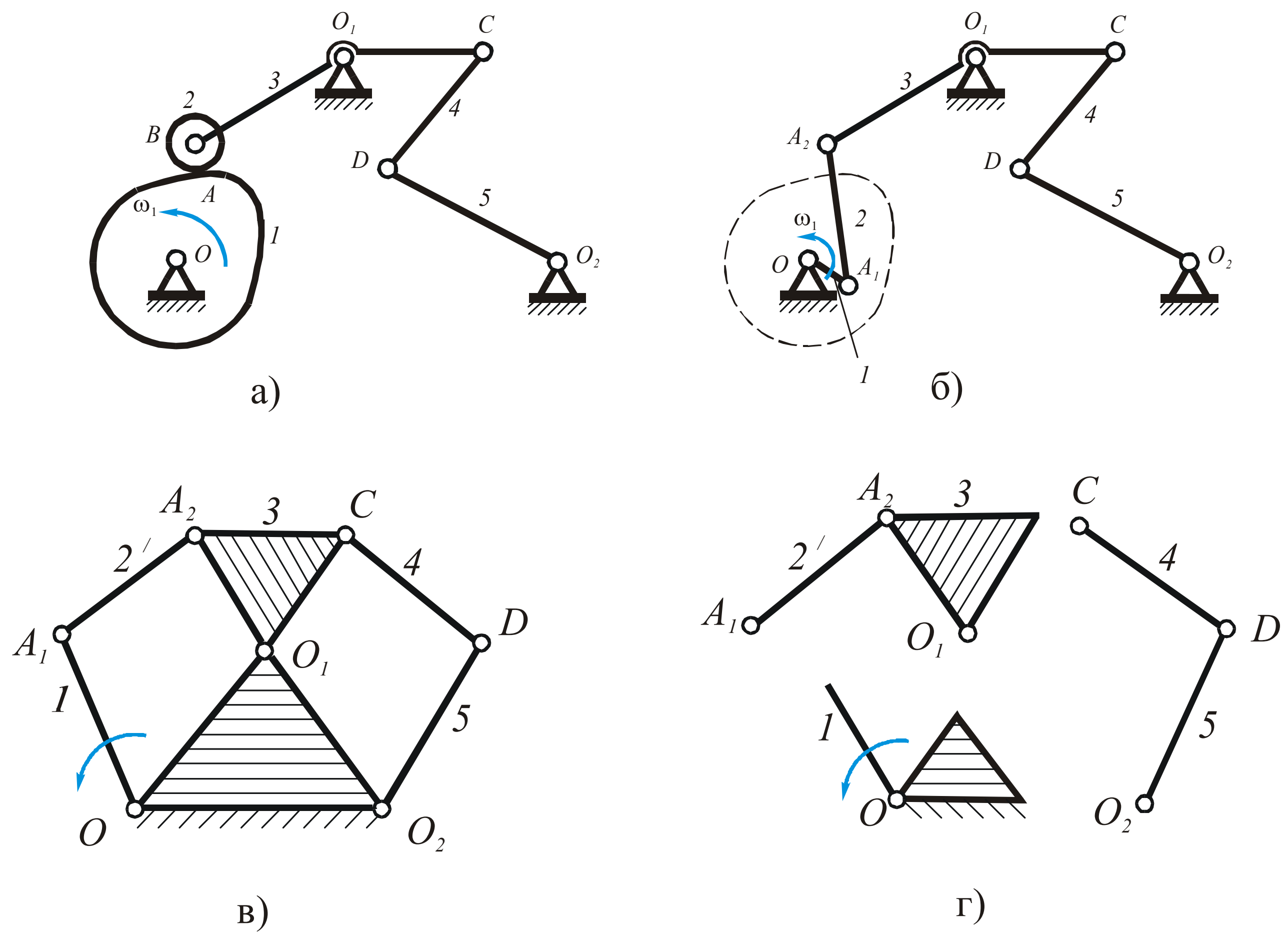


Рис. 3.5 Кулачково-важільний механізм: а – кінематична схема; б – замінний механізм; в – структурна схема; г – групи Ассура

Аналізуючи схему механізму, виявляємо в ній пасивну ланку – ролик 2. Видаляємо його і знаходимо, що кількість рухомих ланок $n=4$, нижчих кінематичних пар $p_5=5$, вищих кінематичних пар $p_4=1$. Ступінь рухливості $w=3\cdot4-2\cdot5-1=1$.

Будуємо схему замінного механізму (рис. 3.5 б). Для цього вищу пару A між кулачком 1 і коромислом 3 замінюємо двома нижчими парами A_1 і A_2 та додатковою ланкою 2'. Ланка 3 – базисна. Зображаємо її у вигляді трикутника.

Стояку належать три кінематичні пари. Зображуємо його у вигляді трикутника і будуємо структурну схему (рис. 3.5 в). Структурний аналіз (рис. 3.5 г) показує, що ми маємо механізм II-го класу 2-го порядку.

З наведених прикладів можна зробити висновок про те, що розглянуті механізми, зовсім різні за конструкцією та функціональним призначенням, належать до одного класу і порядку. А механізм приводу стола стругального верстата (рис. 3.4) та кулачково-важільного механізму (рис. 3.5) мають навіть однакові структурні схеми.

Таким чином класифікація за структурною ознакою дозволяє:

1. Об'єднати різні за функціональною та конструктивною ознаками механізми і використати для них однакові методи аналізу і синтезу.
2. Вибирати методи аналізу в залежності від того, яка ланка обирається як початкова. Справа в тому, що клас механізму можна змінювати в залежності від того, яка ланка входитиме до складу початкового механізму. Так, якщо в синтезованому нами шестиланковому механізмі (рис. 2.16 г) початковою ланкою буде ланка 1, то матимемо механізм II-го класу 2-го порядку. А якщо це буде ланка 5, – то отримаємо механізм III-го класу 3-го порядку.

Більшість існуючих механізмів відноситься до II-го, III-го і IV-го класів за Артоболевським.

Лекція №3

Тема 3.2. КЛАСИФІКАЦІЯ МЕХАНІЗМІВ ЗА ФУНКЦІОНАЛЬНОЮ ОЗНАКОЮ

Сучасне господарство насичене найрізноманітнішими механізмами. Згідно з функціями, які механізми виконують на різних ділянках виробництва, всі їх можна згрупувати в такі класи:

- механізми двигунів;
- механізми передач та виконавчі механізми;
- механізми регулювання, керування та контролю;

- механізми живлення, подачі та транспортування;
- механізми сортування, пакування, маркування;
- обчислювально-розв’язувальні механізми;
- графобудівні механізми (приклади таких механізмів наведені на рис. 3.6 і 3.7.

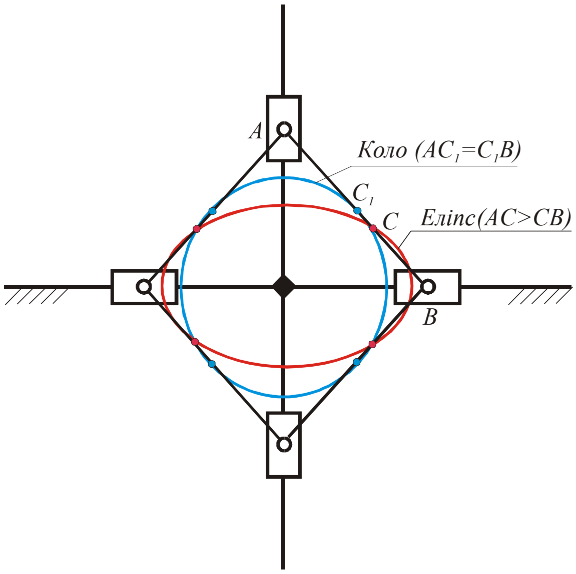


Рис. 3.6. Еліпсограф

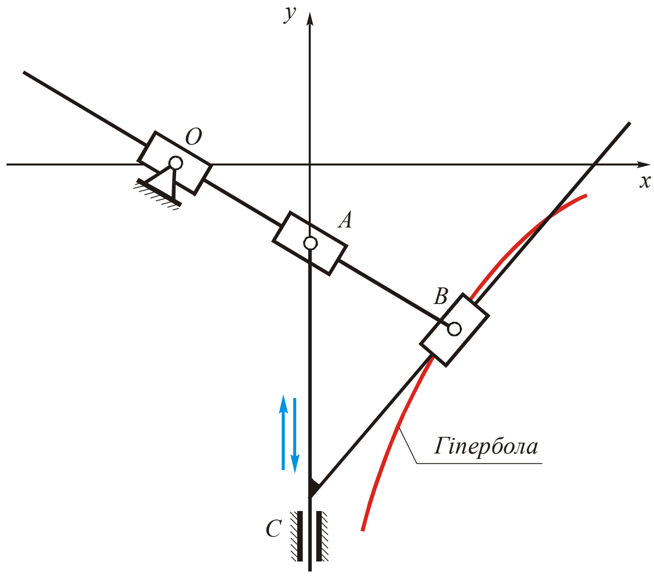


Рис. 3.7. Гіперболограф

Тема 3.3. КЛАСИФІКАЦІЯ МЕХАНІЗМІВ ЗА СПОСОБОМ ПЕРЕДАЧІ РУХУ

В механізмах передача руху від вхідних до вихідних ланок може здійснюватись такими способами:
- механічним – за допомогою твердих тіл;
- гідравлічним – за допомогою рідини;
- пневматичним – за допомогою газу;
- електромагнітним – за допомогою електромагнітного поля.

Тема 3.4. КЛАСИФІКАЦІЯ МЕХАНІЗМІВ ЗА ХАРАКТЕРОМ РУХУ ЛАНОК

За цією ознакою механізми розрізняють за тими рухами, які здійснюють ланки, що входять до його складу. Механізми бувають:
- з поступально рухомими ланками;
- з обертальними ланками;
- з ланками, які здійснюють плоско-паралельні рухи;
- з ланками, які здійснюють просторові рухи.

Тема 3.5. КЛАСИФІКАЦІЯ МЕХАНІЗМІВ ЗА КОНСТРУКТИВНОЮ ОЗНАКОЮ (ЗА ТИПОМ МЕХАНІЗМУ)

Це мабуть найбільш вживана в інженерній практиці система класифікації механізмів.

Розрізняють такі основні типи механізмів:

- шарнірно-важільні;
- фрикційні;
- кулачкові;
- зачепленням (зубчасті, черв’ячні, гіперболоїдні та ін.);
- з гнучкою в’яззю (пасові, канатні, ланцюгові);
- гвинт-гайка;
- клинові (рис. 3.8);
- з переривчастим рухом вихідних ланок (мальтійські (рис. 3.9), храпові (рис. 3.10)

та інші.

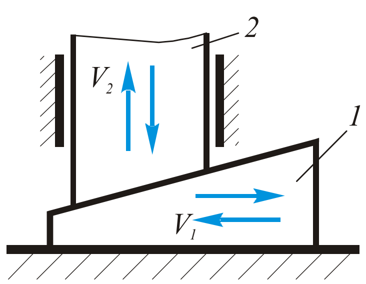


Рис. 3.8. Клиновий механізм

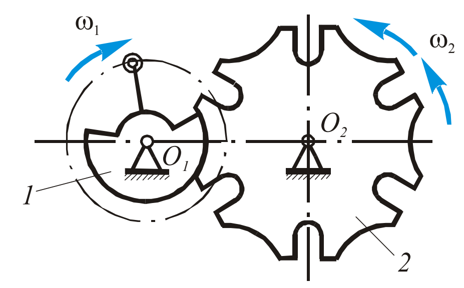


Рис. 3.9 Мальтійський механізм

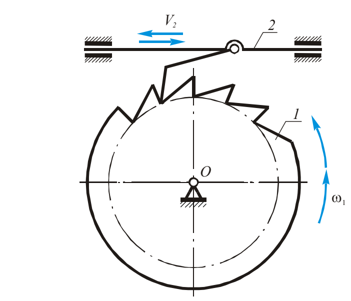


Рис. 3.10. Храповий механізм

Тема 3.6. МАШИНА. АГРЕГАТ

***Машина – це пристрій, який виконує механічні рухи для перетворення енергії, матеріалів і інформації з метою заміни або полегшення фізичної та розумової праці людини* [3].**

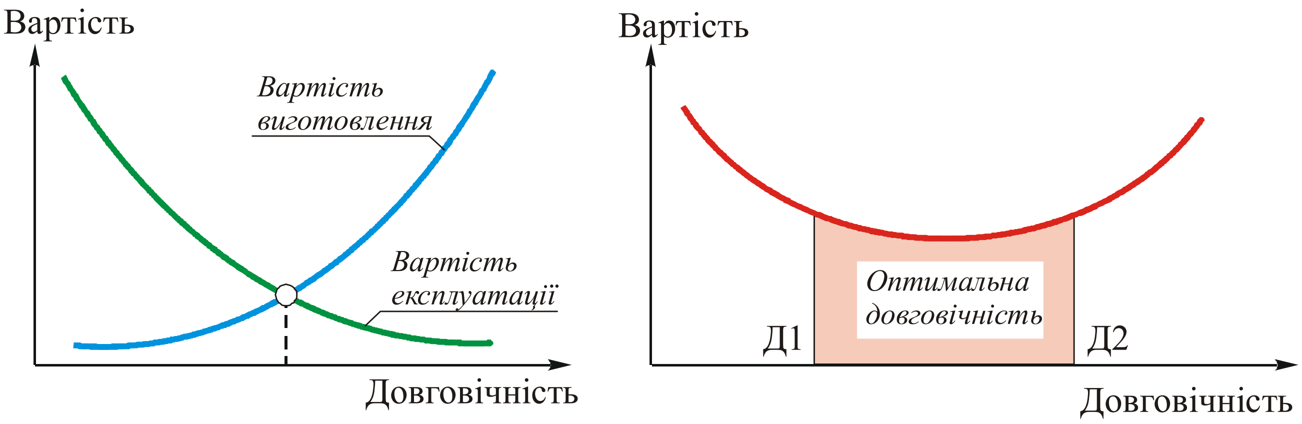
Розрізняють:

- машини *енергетичні,* призначені для перетворення будь-якого виду енергії в механічну і навпаки;
- машини *технологічні* (верстати, преси, молоти, прокатні стани та ін.);
- машини *транспортні* (автомобілі, транспортери, крани, літаки, ескалатори та ін.);
- *інформаційно-обчислювальні* машини (механічні і електронні калькулятори, ЕОМ)

Поєднання енергетичної машини (двигуна) з виконавчою машиною (технологічною, транспортною і т. ін.) називається машинним агрегатом.

Вимоги, які ставляться до сучасних машин. Щоб сучасні машини відповідали світовим стандартам якості, вони повинні мати такі властивості:

1. Висока продуктивність. Наприклад, проектують машини, які працюють за неперервним принципом. Візьмемо для прикладу роторний екскаватор. Його використання замість ковшового за певних умов є набагато ефективнішим.
2. Підвищення надійності при заданій довговічності. На рис 3.11 показані криві витрат на проектування та експлуатаційні витрати (рис. 3.11 а) залежно від довговічності машини. З графіка (рис. 3.11 б) для сумарної вартості чітко видно, що є деяка оптимальна довговічність, за якої машина буде найбільш економічною. Довговічність будь-якої машини має ув'язуватись з терміном її морального старіння.



а) б)

Рис. 3.11 Діаграми витрат: а – витрати на проектування та експлуатаційні витрати; б – діаграма сумарної вартості

3. Висока якість і точність.
4. Економічність.
5. Екологічна чистота.

Залежно від галузі застосування, цей перелік може бути продовженим.

Розділ 4. КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІЗМІВ

***Кінематика* — це розділ механіки, де вивчаються закони руху матеріальних точок і твердих тіл без врахування причин, що викликають цей рух.**

В кінематиці розв'язуються дві основні задачі: *аналізу і синтезу* механізму.

При аналізі розглядається існуючий механізм і вивчаються його *кінематичні характеристики*.

Задача синтезу зводиться до створення механізмів з наперед заданими кінематичними характеристиками.

На сьогодні найбільш розробленими є методи аналізу, тобто, дослідження уже існуючого механізму. Методи синтезу розроблені глибоко лише для кулачкових і зубчастих механізмів.

В наш час користуються переважно трьома основними методами дослідження – аналітичним, методом планів, методом кінематичних діаграм.

Тема 4.1. АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ КІНЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

4.1.1. Основні кінематичні характеристики механізму

До кінематичних характеристик або параметрів механізму належать: координати та траєкторії руху точок; узагальнені координати ланок; переміщення точок і ланок, їх швидкості і прискорення, а також *функції положення* і *передатні функції механізму.*

4.1.2. Передатні функції та передатні відношення

Функція положення механізму. На практиці дослідження кінематичних характеристик зручно проводити не в функції часу, а в функції узагальнених координат початкових ланок. Тобто, коли відоме положення механізму, обчислюють ці характеристики незалежно від закону зміни узагальнених координат в часі, який нам може бути і невідомим. Іншими словами, кінематичні характеристики механізму в цьому випадку залежать лише від кінематичної схеми і не залежать від часу.

***Функцією положення механізму* називають залежність координати вихідної ланки від узагальнених координат механізму.**

Наприклад:

$$\varphi_n = \varphi_n(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_s). \tag{4.1}$$

Тут n – індекс вихідної ланки; $\varphi_1, ..., \varphi_s$ – узагальнені координати механізму.

Розглянемо механізм з двома ступенями рухливості w=2 (рис. 4.1), ланка n якого виконує обертальний рух з кутовою швидкістю ω_n.

Функція положення ланки *n*:

$$\varphi_n = \varphi_n(\varphi_1, \varphi_2)\ . \qquad (4.2)$$

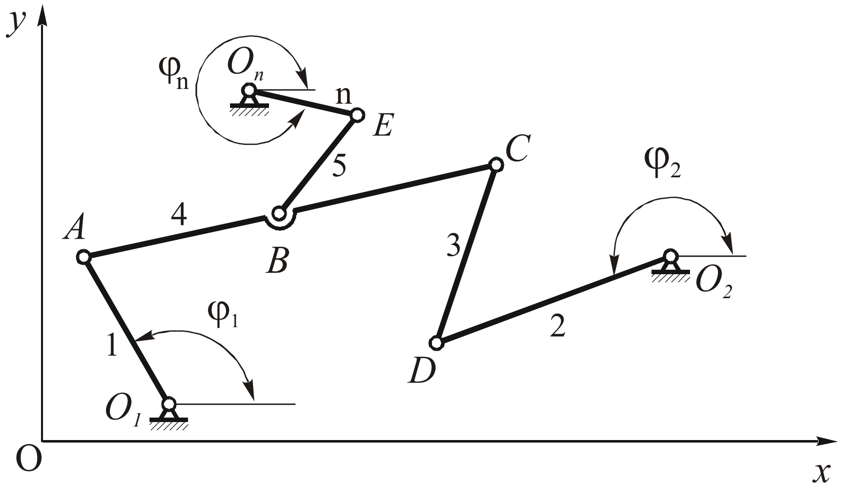


Рис. 4.1 Шарнірно-важільний механізм з *w*=2

Передатні функції механізму. Знайдемо кутову швидкість ланки *n* (рис. 4.1).

$$\omega_n = \frac{d\varphi_n}{dt} = \frac{\partial\varphi_n}{\partial\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\partial\varphi_n}{\partial\varphi_2}\frac{d\varphi_2}{dt}\ , \qquad (4.3)$$

або

$$\omega_n = u_{n1}^{(2)} \cdot \omega_1 + u_{n2}^{(1)} \cdot \omega_2\ . \qquad (4.4)$$

Тут $u_{n1}^{(2)} = \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial\varphi_1}$; $u_{n2}^{(1)} = \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial\varphi_2}$ — *частинні передатні відношення.*

Для механізму зі ступенем рухливості *w*=1 (ω_2=0)

$$\omega_n = \frac{d\varphi_n}{d\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{dt} = u_{n1} \cdot \omega_1\ , \qquad (4.5)$$

де $u_{n1}^{(2)} = \dfrac{d\varphi_n}{d\varphi_1} = \dfrac{\omega_n}{\omega_1} = i_{n1}$ – відношення кутових швидкостей ланок, яке називається *передатним відношенням.*

Фізичний зміст частинних передатних відношень такий: $u_{n1}^{(2)}$ – це передатне відношення між ланками *n* і 1 за нерухомої ланки 2 (рис. 4.1); $u_{n2}^{(1)}$ – передатне відношення між ланками *n* і 2 за нерухомої ланки 1.

Частинне передатне відношення називають також *аналогом кутової швидкості*. Дійсно, якщо в рівнянні (3.4) $\omega_2 = 0$, а $\omega_1 = 1$ с$^{-1}$, то $\omega_n = u_{n1}^{(2)}$.

Визначимо швидкість точки *E* (рис. 4.1), положення якої визначається радіус – вектором $\overrightarrow{r_E} = \overrightarrow{r_E}(\varphi_1, \varphi_2)$.

$$\overrightarrow{V_E} = \frac{d\overrightarrow{r_E}}{dt} = \frac{\partial \overrightarrow{r_E}}{\partial \varphi_1}\frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\partial \overrightarrow{r_E}}{\partial \varphi_2}\frac{d\varphi_2}{dt}. \tag{4.6}$$

Або

$$\overrightarrow{V_E} = \frac{\partial \overrightarrow{r_E}}{\partial \varphi_1}\omega_1 + \frac{\partial \overrightarrow{r_E}}{\partial \varphi_2}\omega_2, \tag{4.7}$$

де $\dfrac{\partial \overrightarrow{r_E}}{\partial \varphi_1}$ і $\dfrac{\partial \overrightarrow{r_E}}{\partial \varphi_2}$ – *аналоги швидкостей точки E.*

Для механізму зі ступенем рухливості w=1 (ω_2=0) маємо

$$\overrightarrow{V_E} = \frac{d\overrightarrow{r_E}}{d\varphi_1}\omega_1. \tag{4.8}$$

Визначимо кутове прискорення ланки *n*. Обмежимось випадком, коли ступінь рухливості механізму w=1 (ω_2=0)

$$\varepsilon_n = \frac{d^2\varphi_n}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi_n}{d\varphi_1}\omega_1\right) = \frac{d^2\varphi_n}{d\varphi_1^2}\frac{d\varphi_1}{dt}\omega_1 + \frac{d\varphi_n}{d\varphi_1}\frac{d\omega_1}{dt}, \tag{4.9}$$

або

$$\varepsilon_n = \frac{d^2\varphi_n}{d\varphi_1^2}\omega_1^2 + \frac{d\varphi_n}{d\varphi_1}\varepsilon_1, \tag{4.10}$$

де $\dfrac{d^2\varphi_n}{d\varphi_1^2} = u'_{n1}$ – *аналог кутового прискорення.*

Визначимо тангенціальне прискорення т. *E*, взявши похідну по часу від швидкості (4.8). Після простих перетворень отримаємо вираз:

$$\overrightarrow{a_E^\tau} = \frac{d^2\overrightarrow{r_E}}{d\varphi_1^2}\omega_1^2 + \frac{d\overrightarrow{r_E}}{d\varphi_1}\varepsilon_1. \tag{4.11}$$

Тут $\dfrac{d^2\overrightarrow{r_E}}{d\varphi_1^2}$ – *аналог тангенціального прискорення точки E.*

Аналоги швидкостей і прискорень називають передатними функціями механізму.

4.1.3. Приклади дослідження деяких типових механізмів

Приклад 3.1. Визначити швидкість і прискорення точки *B* кривошипно-повзункового механізму, кінематична схема якого в масштабі μ_l зображена на рис. 4.2, якщо ω_1=Const. Визначити передатне відношення шатуна і кривошипа, а також кутове прискорення шатуна.

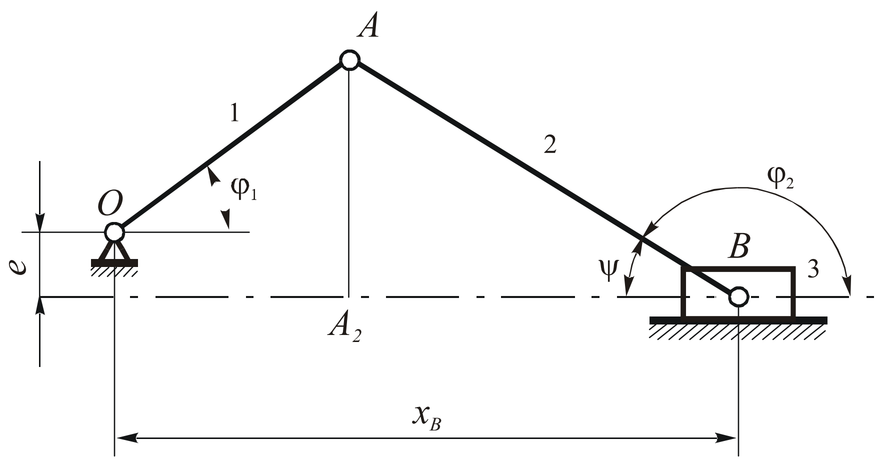


Рис. 4.2 Кривошипно-повзунковий механізм

Визначимо функцію положення точки *B*:

$$x_B = x_B(\varphi_1);$$

$$x_B = l_{OA}\cdot\cos\varphi_1 + l_{AB}\cdot\cos\psi\,. \qquad (1)$$

З ΔABA_1 знаходимо:

$$\sin\psi = \frac{l_{OA}\sin\varphi_1 + e}{l_{AB}} = \sin(\pi - \varphi_2)\,.$$

Тоді

$$\cos\psi = \sqrt{1-\sin^2\psi} = \sqrt{1-\left(\frac{l_{OA}\sin\varphi_1 + e}{l_{AB}}\right)^2}\,.$$

Підставляючи знайдений вираз в (1), отримаємо

$$x_B = l_{OA}\cos\varphi_1 + \sqrt{l_{AB}^2 - (e + l_{OA}\sin\varphi_1)^2}\ . \tag{2}$$

Швидкість точки *B*

$$V_B = \frac{dx_B}{dt} = \frac{dx_B}{d\varphi_1}\omega_1 . \tag{3}$$

Аналог швидкості точки В знайдемо, взявши похідну від її функції положення (2)

$$\frac{dx_B}{d\varphi_1} = -l_{OA}\sin\varphi_1 + \frac{-2(e + l_{OA}\sin\varphi_1)l_{OA}\cos\varphi_1}{2\sqrt{l_{AB}^2 - (e + l_{OA}\sin\varphi_1)^2}} \tag{4}$$

Враховуючи, що при ω_1=Const кутове прискорення кривошипа ε_1=0, прискорення точки *B*, згідно з (4.11)

$$a_B = \frac{d^2x_B}{dt^2} = \frac{d^2x_B}{d\varphi_1^2}\cdot\omega_1^2 . \tag{5}$$

Тут аналог прискорення

$$\frac{d^2x_B}{d\varphi_1^2} = -l_{OA}\cos\varphi_1 - \frac{l_{AB}^2 l_{OA}^2\cos^2\varphi_1 - l_{AB}^2 l_{OA}\left(e + l_{OA}\sin\varphi_1\right)\sin\varphi_1 + l_{OA}\left(e + l_{OA}\sin\varphi_1\right)^3\sin\varphi_1}{\left[l_{AB}^2 - \left(e + l_{OA}\sin\varphi_1\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} . \tag{6}$$

Визначимо передатне відношення шатуна і кривошипа:

$$u_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{d}{d\varphi_1}\left(\arcsin\frac{l_{OA}\sin\varphi_1 + e}{l_{AB}}\right) = \frac{l_{OA}\cos\varphi_1}{l_{AB}\sqrt{1 - \left(\dfrac{l_{OA}\sin\varphi_1 + e}{l_{AB}}\right)^2}} = -\frac{l_{OA}}{l_{AB}}\cdot\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} . \tag{7}$$

Тут $\sqrt{1 - \left(\dfrac{l_{OA}\sin\varphi_1 + e}{l_{AB}}\right)^2} = \cos\left(\pi - \varphi_2\right) = -\cos\varphi_2 .$

Визначимо передатну функцію кутового прискорення шатуна.

$$\frac{d^2\varphi_2}{d\varphi_1^2}=\frac{d}{d\varphi_1}(u_{21})=\frac{d}{d\varphi_1}\left(-\frac{l_{OA}\cos\varphi_1}{l_{AB}\cos\varphi_2}\right)=\frac{l_{OA}}{l_{AB}}\cdot\left(\frac{\cos\varphi_2\cdot\sin\varphi_1-u_{21}\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2}{\cos^2\varphi_2}\right). \quad (8)$$

Кутове прискорення шатуна

$$\varepsilon_2=\omega_1^2\cdot\frac{l_{OA}}{l_{AB}}\cdot\left(\frac{\cos\varphi_2\cdot\sin\varphi_1-u_{21}\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2}{\cos^2\varphi_2}\right). \quad (9)$$

Лекція №4

Приклад 4.2. Визначити функції положення та передатні функції для шарнірного чотириланкового механізму (рис. 4.3).

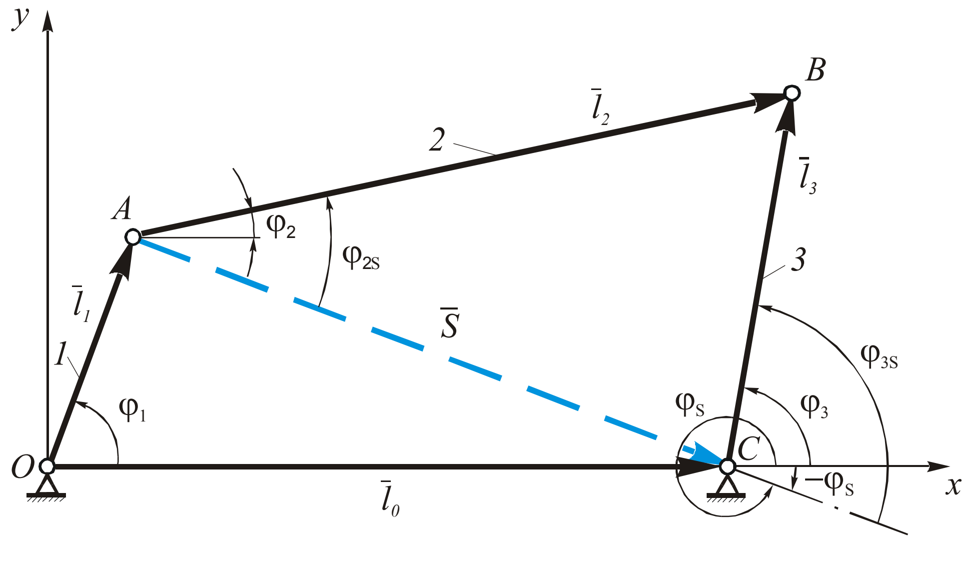


Рис. 4.3 Кривошипно-коромисловий механізм

Легко переконатися, що математичні співвідношення для цього типу механізмів вийдуть досить громіздкими, якщо скористатися підходом, застосованим у прикладі 4.1. Тому дослідження проведемо *методом замкнених векторних контурів*.

При визначенні функції положення зручно замкнений контур *OABC* розбити на два: *OAC* і *ABC*. В цих контурах осі ланок подаються у вигляді векторів

$\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3, \vec{l}_0$. Тут $\vec{S}$ – змінний за модулем вектор, який визначає взаємне розташування точок *A* і *C*.

Тоді для трикутних контурів справедливі такі векторні співвідношення:

– для контуру *OAC*

$$\vec{l}_1 + \vec{S} - \vec{l}_0 = 0\,; \tag{1}$$

– для контуру ABC

$$\vec{l}_2 - \vec{S} - \vec{l}_3 = 0\,. \tag{2}$$

Проектуємо вектори на осі і отримуємо співвідношення

$$\begin{cases} l_1 \cos\varphi_1 + S\cos\varphi_S - l_0 = 0 \\ l_1 \sin\varphi_1 + S\sin\varphi_S = 0 \end{cases}. \tag{3}$$

Звідси

$$\mathrm{tg}\varphi_S = \frac{-l_1 \sin\varphi_1}{l_0 - l_1\cos\varphi_1}. \tag{4}$$

Далі, з другого рівняння системи (3)

$$S = -\frac{l_1 \sin\varphi_1}{\sin\varphi_S}. \tag{5}$$

Розглянемо контур *ABC*. Позначимо кути нахилу векторів $\vec{l}_2$ і $\vec{l}_3$ до $\vec{S}$ відповідно φ_{2S} і φ_{3S}. Скориставшись теоремою косинусів, отримаємо такі рівняння:

$$l_2^2 = l_3^2 + S^2 - 2l_3S\cos\left(\pi - \varphi_{3S}\right) = l_3^2 + S^2 + 2l_3S\cos\varphi_{3S}\,; \tag{6}$$

$$l_3^2 = l_2^2 + S^2 - 2l_2S\cos\varphi_{2S}\,. \tag{7}$$

Тоді

$$\varphi_{3S} = \arccos\frac{l_2^2 - l_3^2 - S^2}{2l_3S}\,; \tag{8}$$

$$\varphi_{2S} = \arccos\frac{l_2^2 + S^2 - l_3^2}{2l_2S}\,. \tag{9}$$

Далі запишемо умови

$$\begin{cases} \varphi_{3S} - \varphi_3 = -\varphi_S \\ \varphi_{2S} - \varphi_2 = -\varphi_S \end{cases} \tag{10}$$

Звідси

$$\varphi_3 = \varphi_S + \varphi_{3S}; \tag{11}$$

$$\varphi_2 = \varphi_S + \varphi_{2S}. \tag{12}$$

В рівнянні (11) і (12) кут φ_S визначається через φ_1 за рівнянням (4), а φ_{2S} та φ_{3S} – через задані розміри ланок за рівняннями (8) і (9).

За теоремою косинусів (контур *OAC*) запишемо

$$S = \sqrt{l_1^2 + l_0^2 - 2l_1 l_0 \cos\varphi_1}\,. \tag{13}$$

Отримаємо функцію положення ланки 3:

$$\varphi_3 = \operatorname{arctg}\frac{-l_1\sin\varphi_1}{l_0 - l_1\cos\varphi_1} + \arccos\frac{l_2^2 - l_3^2 - l_0^2 - l_1^2 + 2l_0 l_1\cos\varphi_1}{2l_3\sqrt{l_1^2 + l_0^2 - 2l_1 l_0\cos\varphi_1}}. \tag{14}$$

Аналогічно отримаємо функцію положення ланки 2.

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{-l_1\sin\varphi_1}{l_0 - l_1\cos\varphi_1} + \arccos\frac{l_2^2 - l_3^2 + l_1^2 + l_0^2 - 2l_1 l_0\cos\varphi_1}{2l_2\sqrt{l_1^2 + l_0^2 - 2l_1 l_0\cos\varphi_1}}. \tag{15}$$

Визначимо передатні функції механізму (аналоги кутових швидкостей і прискорень ланок).

Для цього розглянемо замкнений векторний контур *OABC* (рис. 4.4).

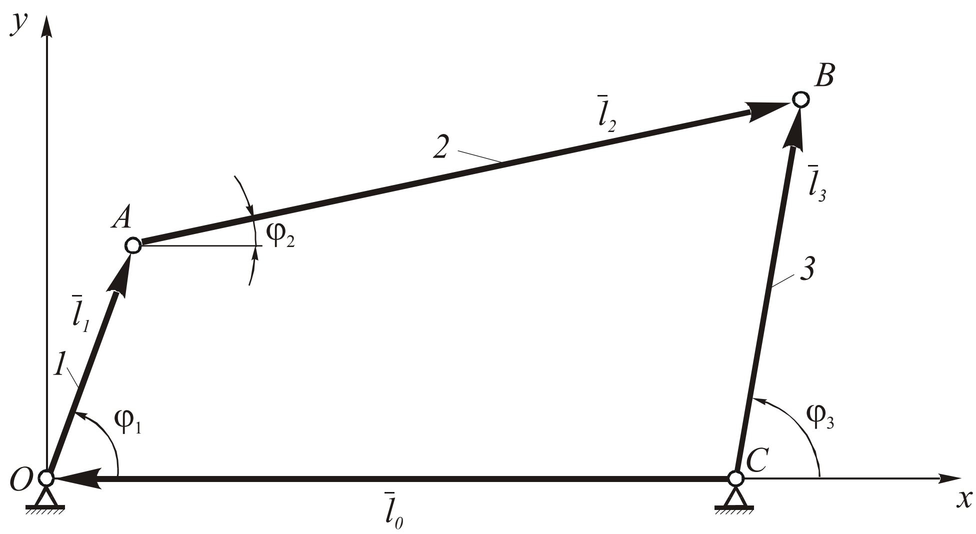


Рис. 4.4 Чотириланковий механізм як замкнений векторний контур

Умова його замкненості

$$\vec{l_0} + \vec{l_1} + \vec{l_2} = \vec{l_3}\,. \tag{16}$$

В проекції на вісь x отримаємо:

$$l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2 - l_3 \cos\varphi_3 = l_0\,. \tag{17}$$

Диференціюємо це рівняння по φ_1.

$$-l_1 \sin\varphi_1 - l_2 \sin\varphi_2 \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} + l_3 \sin\varphi_3 \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} = 0 \tag{18}$$

Тут $\dfrac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = u_{21}$; $\dfrac{d\varphi_3}{d\varphi_1} = u_{31}$ – передатні відношення або аналоги кутових швидкостей ланок 2 і 3 відповідно.

Перепишемо рівняння (18) у вигляді:

$$l_1 \sin\varphi_1 + l_2 u_{21} \sin\varphi_2 = l_3 u_{31} \sin\varphi_3\,. \tag{19}$$

Тепер повернемо осі x і y на кут φ_2. Віднявши цей кут у виразі (19), отримаємо:

$$l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = l_3 u_{31} \sin(\varphi_3 - \varphi_2)\,.$$

Звідси передатне відношення між першою і третьою ланкою

$$u_{31} = \frac{l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{l_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}. \tag{20}$$

За аналогією

$$u_{21} = -\frac{l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3)}{l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}. \tag{21}$$

Для визначення аналогів кутових прискорень ланок 2 і 3 диференціюємо рівняння (19) по узагальненій координаті φ_1. Отримаємо такий вираз:

$$l_1 \cos\varphi_1 + l_2 u_{21}^2 \cos\varphi_2 + l_2 u_{21}' \sin\varphi_2 = l_3 u_{31}^2 \cos\varphi_3 + l_3 u_{31}' \sin\varphi_3\,. \tag{22}$$

Тут $u_{21}' = \dfrac{d^2\varphi_2}{d\varphi_1^2}$; $u_{31}' = \dfrac{d^2\varphi_3}{d\varphi_1^2}$ – аналоги кутових прискорень ланок 2 і 3 відповідно.

Повертаючи осі x і y почергово на кути φ_2 і φ_3, отримаємо:

$$u_{31}^{'} = \frac{l_1 \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) - l_2 u_{21}^2 + l_3 u_{31}^2 \cos(\varphi_3 - \varphi_2)}{l_3 \sin\left(\varphi_3 - \varphi_2\right)}; \tag{23}$$

$$u_{21}^{'} = -\frac{l_1 \cos\left(\varphi_1 - \varphi_3\right) - l_3 u_{31}^2 + l_2 u_{21}^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3)}{l_2 \sin\left(\varphi_2 - \varphi_3\right)}; \tag{23}$$

Якщо задані кутова швидкість ω_1 і кутове прискорення ε_1 вхідної ланки, можна визначити кутові швидкості і прискорення інших ланок механізму:

$$\omega_2 = u_{21} \cdot \omega_1;\ \omega_3 = u_{31} \cdot \omega_1; \tag{24}$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \cdot u_{21} + \omega_1^2 \cdot u_{21}^{'};\ \varepsilon_3 = \varepsilon_1 \cdot u_{31} + \omega_1^2 \cdot u_{31}^{'}. \tag{25}$$

4.1.2 Метод перетворення координат

У випадку дослідження плоских механізмів цей метод, у порівнянні, наприклад, з методом замкнених векторних контурів, більш складний. Проте при дослідженні просторових механізмів метод перетворення координат є дуже ефективним.

Застосовуючи матричну форму запису рівнянь, даний метод спрощує застосування ЕОМ.

Формули перетворення прямокутної системи координат x_j, y_j, z_j в осі x_i, y_i, z_i мають вигляд:

$$\begin{cases} x_i = a_{11}x_j + a_{12}y_j + a_{13}z_j \\ y_i = a_{21}x_j + a_{22}y_j + a_{23}z_j \\ z_i = a_{31}x_j + a_{32}y_j + a_{33}z_j \end{cases}. \tag{4.12}$$

Тут $a_{11} = \cos\widehat{x_i x_j}$, $a_{12} = \cos\widehat{x_i y_j}$ і т.д.

Коефіцієнти в рівнянні (4.12) можна подати у вигляді матриці, вимірність якої (3×3):

$$T_{ij} = \begin{Vmatrix} \cos\widehat{x_i x_j} & \cos\widehat{x_i y_j} & \cos\widehat{x_i z_j} \\ \cos\widehat{y_i x_j} & \cos\widehat{y_i y_j} & \cos\widehat{y_i z_j} \\ \cos\widehat{z_i x_j} & \cos\widehat{z_i y_j} & \cos\widehat{z_i z_j} \end{Vmatrix}. \tag{4.13}$$

Для просторової системи матриці, які визначають поворот осей відносно відповідної осі, мають вигляд:

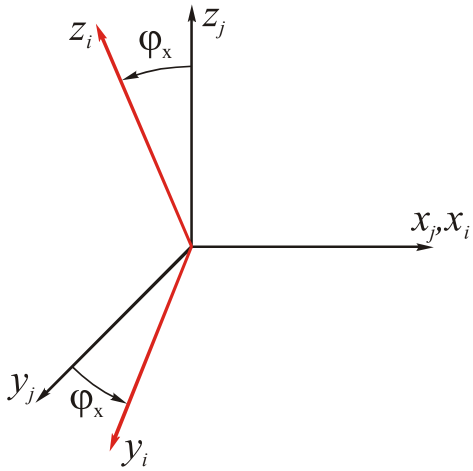


Рис. 4.5 Поворот навколо осі *x*

$$T_x = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_x & -\sin\varphi_x \\ 0 & \sin\varphi_x & \cos\varphi_x \end{Vmatrix}. \quad (4.14)$$

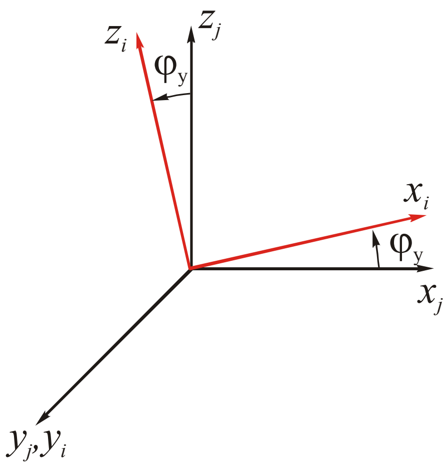


Рис. 4.6 Поворот навколо осі *y*

$$T_y = \begin{Vmatrix} \cos\varphi_y & 0 & \sin\varphi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi_y & 0 & \cos\varphi_y \end{Vmatrix}. \quad (4.15)$$

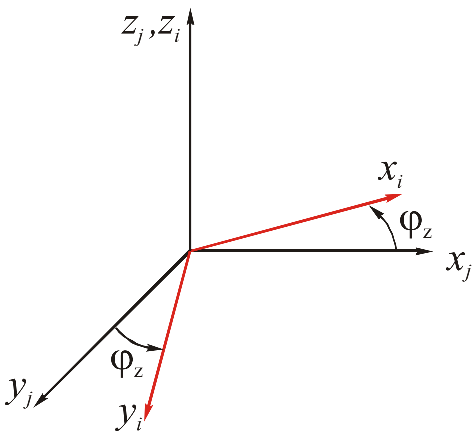


Рис. 4.7 Поворот навколо осі *z*

$$T_z = \begin{Vmatrix} \cos\varphi_z & -\sin\varphi_z & 0 \\ \sin\varphi_z & \cos\varphi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \quad (4.16)$$

Приклад 4.3. Визначити функцію положення точки D незамкненого плоского кінематичного ланцюга руки маніпулятора (рис. 4.8) [6]

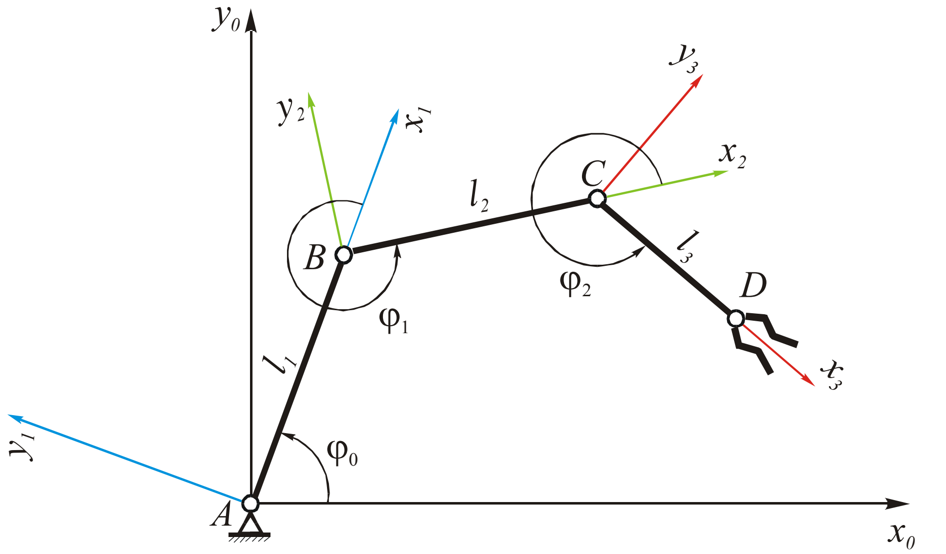


Рис. 4.8 Кінематична схема руки маніпулятора

Ступінь рухливості ланцюга $w = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 3$. Тобто, маємо три узагальнені координати φ_0, φ_1', φ_2' в системі координат x_0-y_0.

Зв'яжемо спочатку систему координат з третьою ланкою (x_3-y_3). В цій системі координат $x_{D3} = l_3$; $y_{D3} = 0$.

Перейдемо до системи координат x_2-y_2, яка пов'язана з другою ланкою. В цих осях координати точки D визначаються співвідношеннями:

$$\begin{cases} x_{D2} = l_2 + x_{D3}\cos\varphi_2 - y_{D3}\sin\varphi_2 \\ y_{D2} = x_{D3}\sin\varphi_2 + y_{D3}\cos\varphi_2 \end{cases}. \qquad (4.17)$$

Пов'язуючи систему координат з першою ланкою (x_1-y_1), отримаємо:

$$\begin{cases} x_{D1} = l_1 + x_{D2}\cos\varphi_1 - y_{D2}\sin\varphi_1 \\ y_{D1} = x_{D2}\sin\varphi_1 + y_{D2}\cos\varphi_1 \end{cases}. \qquad (4.18)$$

Для заданої системи координат x_0-y_0, пов'язаної зі стояком:

$$\begin{cases} x_{D0} = x_{D1}\cos\varphi_0 - y_{D1}\sin\varphi_0 \\ y_{D0} = x_{D1}\sin\varphi_0 + y_{D1}\cos\varphi_0 \end{cases}. \qquad (4.19)$$

Приєднуючи до отриманих систем рівнянь тотожності 1≡1, отримаємо квадратні матриці типу (4.13):

$$T_{32} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ 0 & \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{Vmatrix}; \quad T_{21} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ 0 & \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{Vmatrix}; \quad T_{10} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_0 & -\sin\varphi_0 \\ 0 & \sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 \end{Vmatrix}.$$

Ліві частини рівнянь (4.17) – (4.19), з урахуванням тотожності 1≡1, являють собою стовпці

$$r_{D3} = \begin{Vmatrix} 1 \\ x_{D3} \\ y_{D3} \end{Vmatrix}; \; r_{D2} = \begin{Vmatrix} 1 \\ x_{D2} \\ y_{D2} \end{Vmatrix}; \; r_{D1} = \begin{Vmatrix} 1 \\ x_{D1} \\ y_{D1} \end{Vmatrix}; \; r_{D0} = \begin{Vmatrix} 1 \\ x_{D0} \\ y_{D0} \end{Vmatrix}.$$

Вказані рівняння можна подати у вигляді

$$r_{D2} = T_{32} \cdot r_{D3}; \qquad r_{D1} = T_{21} \cdot r_{D2}; \qquad r_{D0} = T_{10} \cdot r_{D1}.$$

Остаточно отримаємо:

$$r_{D0} = T_{32} \cdot T_{21} \cdot T_{10} \cdot r_{D3}. \tag{4.20}$$

В розгорнутому вигляді після деяких перетворень це рівняння матиме вигляд:

$$\begin{Vmatrix} 1 \\ x_{D0} \\ y_{D0} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ l_1\cos\varphi_0 + l_2\cos(\varphi_0+\varphi_1) + l_3\cos(\varphi_0+\varphi_1+\varphi_2) \\ l_1\sin\varphi_0 + l_2\sin(\varphi_0+\varphi_1) + l_3\sin(\varphi_0+\varphi_1+\varphi_2) \end{Vmatrix}. \tag{4.21}$$

Тема 4.2. КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІЗМІВ МЕТОДОМ ДІАГРАМ

4.2.1. Діаграми руху точок та ланок механізмів

***Кінематична діаграма** являє собою графічне зображення закону зміни одного з кінематичних параметрів механізму у функції часу або узагальненої координати.*

Побудуємо кінематичну діаграму функції положення кривошипно-повзункового механізму $S_B = S_B(\varphi_1)$ (рис. 4.9).

Покладемо $\omega_1 = Const$.

Побудову зручно вести від крайнього лівого або крайнього правого положення повзуна, що відповідає *крайнім положенням механізму*. Траєкторію точки A розбивається на n рівних частин (8-12). Наприклад, визначають переміщення S_B через кожних 30° кута повороту кривошипа.

Діаграма будується в масштабі по осях S_B і φ_1

$$\mu_{S_B} = \frac{S_{B_i} \cdot \mu_l}{0S_i}, \; \frac{\text{мм}}{\text{мм}}; \qquad \mu_{\varphi_1} = \frac{\varphi_1}{0i}, \; \frac{\text{рад}}{\text{мм}}.$$

Щоб отримати діаграми аналогів швидкостей точки B, необхідно диференціювати отриману залежність. Для цього на практиці користуються методом графічного диференціювання та інтегрування.

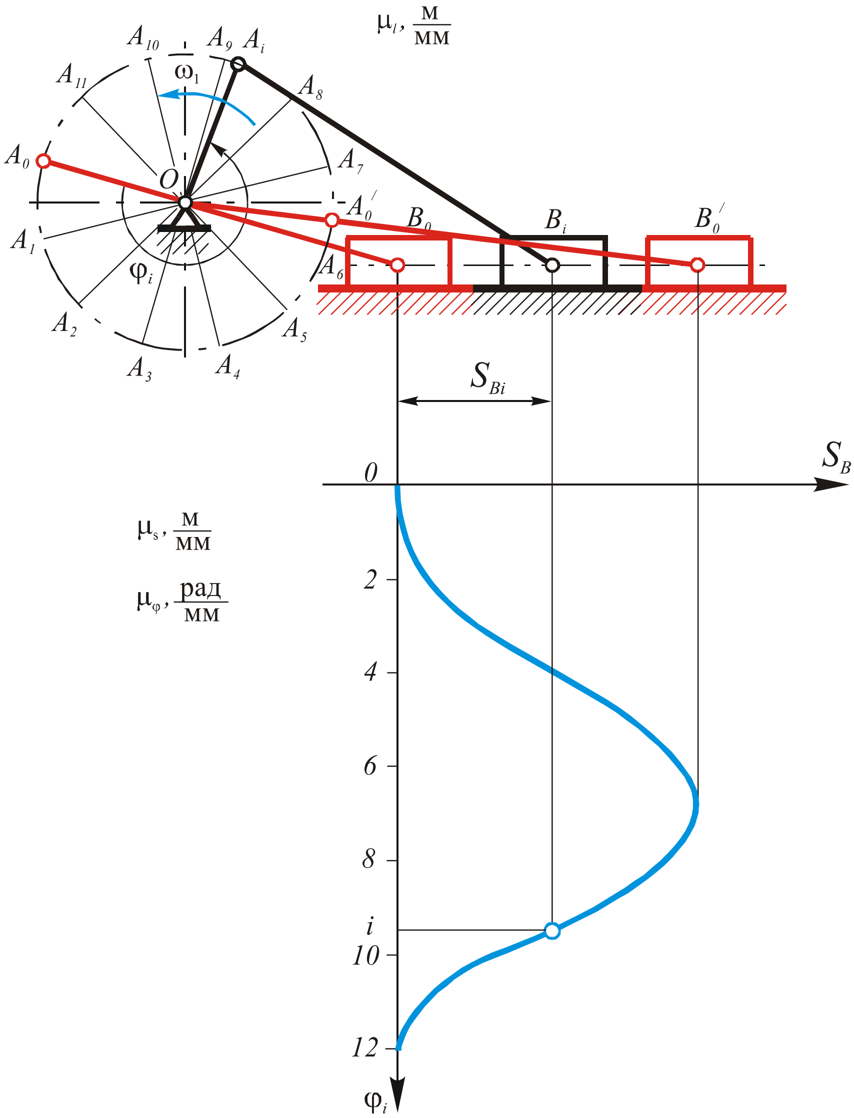


Рис. 4.9 Діаграма переміщень точки *B* кривошипно-повзункового механізму (графік функції положення точки *B*)

Лекція №5

4.2.2. Графічне диференціювання

На рис. 4.10 а зображений графік функції $S = S(\varphi_1)$.

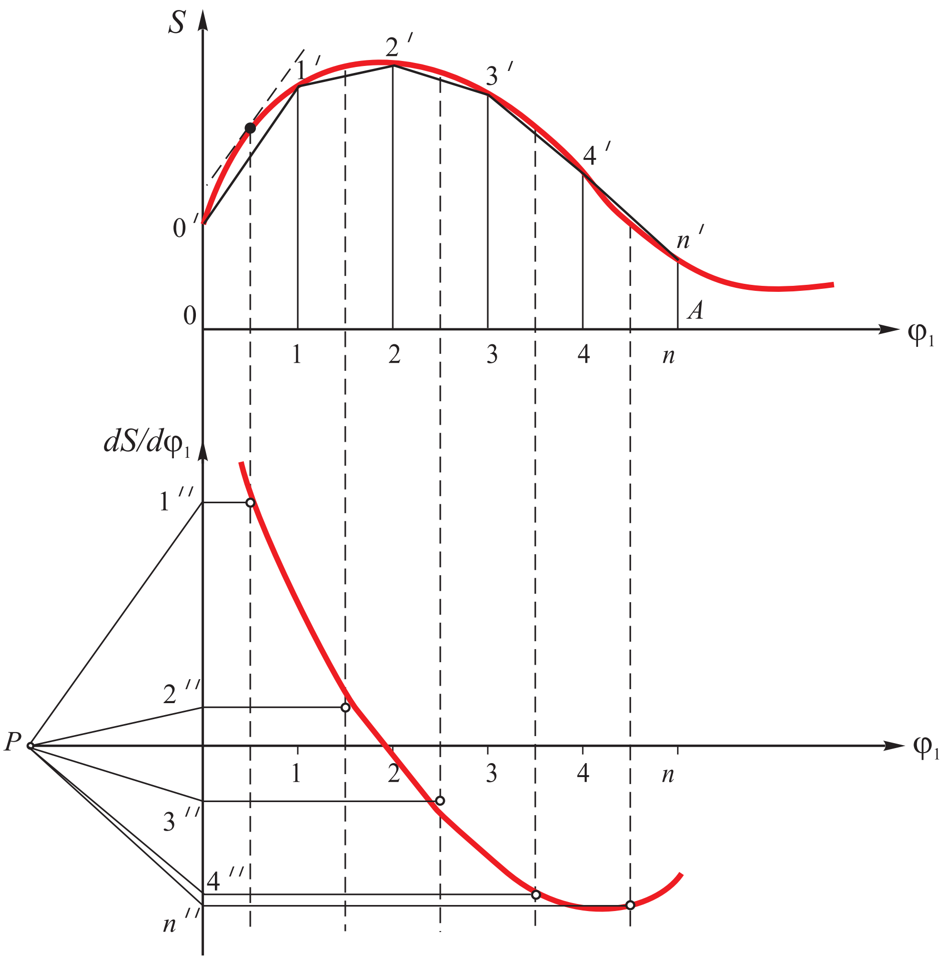


Рис. 4.10 Графічне диференціювання (метод хорд)

Побудуємо графік похідної $\frac{dS}{d\varphi_1} = \frac{dS}{d\varphi_1}(\varphi_1)$ в інтервалі *O-A*. Для цього:

1. Розбиваємо відрізок ОА на *n* рівних частин.
2. В кожному інтервалі 0-1, 1-2, ...4-*n* визначаємо величину похідної функції $S = S(\varphi_1)$, яка приблизно дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до кривої посередині ділянки. Чим менший інтервал – тим точніші знайдені значення похідної. На практиці застосовують метод хорд. Для цього з’єднують точки O' і $1'$; $1'$ і $2'$ і т.д. відрізками-хордами. В першому наближенні їх можна вважати паралельними до дотичних посередині інтервалу.

3. З довільно вибраного полюса P (рис.4.10) проводять прямі, паралельні хордам (це промені $P1''; P2''$ і т.д.) до перетину з вертикальною віссю.
4. Із т.$1''$; $2''$ і т.д. проводять прямі, паралельні горизонтальній осі до перетину з вертикальними прямими, проведеними через середину інтервалу розбиття.
5. Через отримані точки перетину проводять криву, яка є графіком похідної функції $S = S(\varphi_1)$, побудованому в масштабі $\mu_{dS/d\varphi_1}$.

Знайдемо масштаб побудови графіка похідної. Для цього розглянемо фрагмент AB графіка функції $S = S(\varphi_1)$ (рис. 4.11).

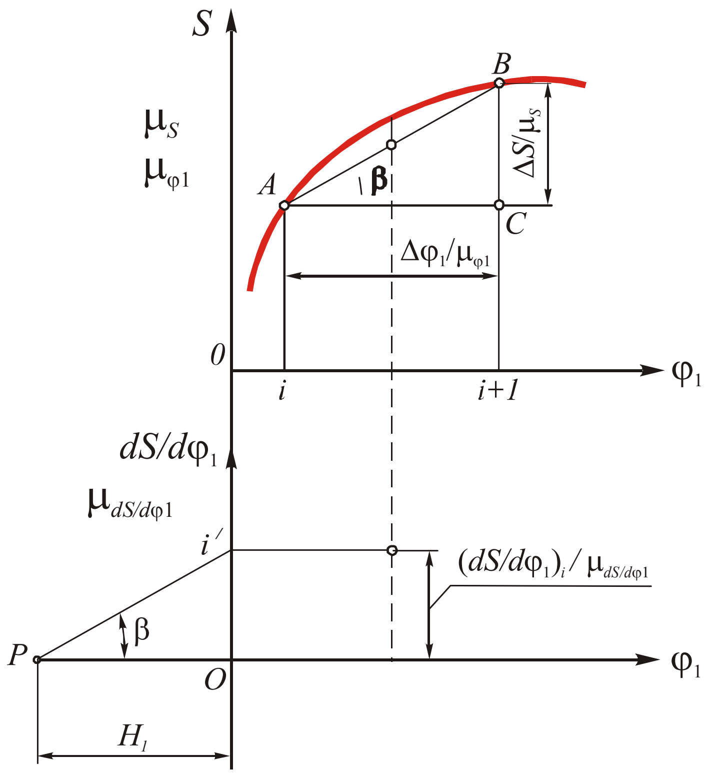


Рис. 4.11 Визначення масштабу за графічного диференціювання

У трикутнику ABC, гіпотенузою якого є хорда AB, катети знаходяться як

$$BC = \frac{\Delta S}{\mu_S}; \quad AC = \frac{\Delta\varphi_1}{\mu_{\varphi_1}}.$$

Похідна функції посередині інтервалу *i-i+1*:

$$\left(\frac{dS}{d\varphi_1}\right)_i = \frac{\Delta S}{\Delta\varphi_1} = \frac{BC}{AC}\frac{\mu_S}{\mu_{\varphi_1}} = \frac{\mu_S}{\mu_{\varphi_1}}\mathrm{tg}\beta.$$

З іншого боку:

$$\left(\frac{dS}{d\varphi_1}\right)_i = Oi' \cdot \mu_{\frac{dS}{d\varphi_1}} = \mu_{\frac{dS}{d\varphi_1}} H_1 \mathrm{tg}\beta .$$

Зіставляючи ці два вирази, отримаємо,

$$\mu_{\frac{dS}{d\varphi_1}} = \frac{\mu_S}{\mu_{\varphi_1} \cdot H_1} \tag{4.22}$$

4.2.3. Графічне інтегрування

На практиці часто потрібно визначити інтеграл якої-небудь функції, заданої графічно. Наприклад

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^{t_i} \omega dt \tag{4.23}$$

На рис.4.12 зображено графік кутової швидкості $\omega(t)$ з урахуванням числових значень масштабів μ_ω і μ_t .

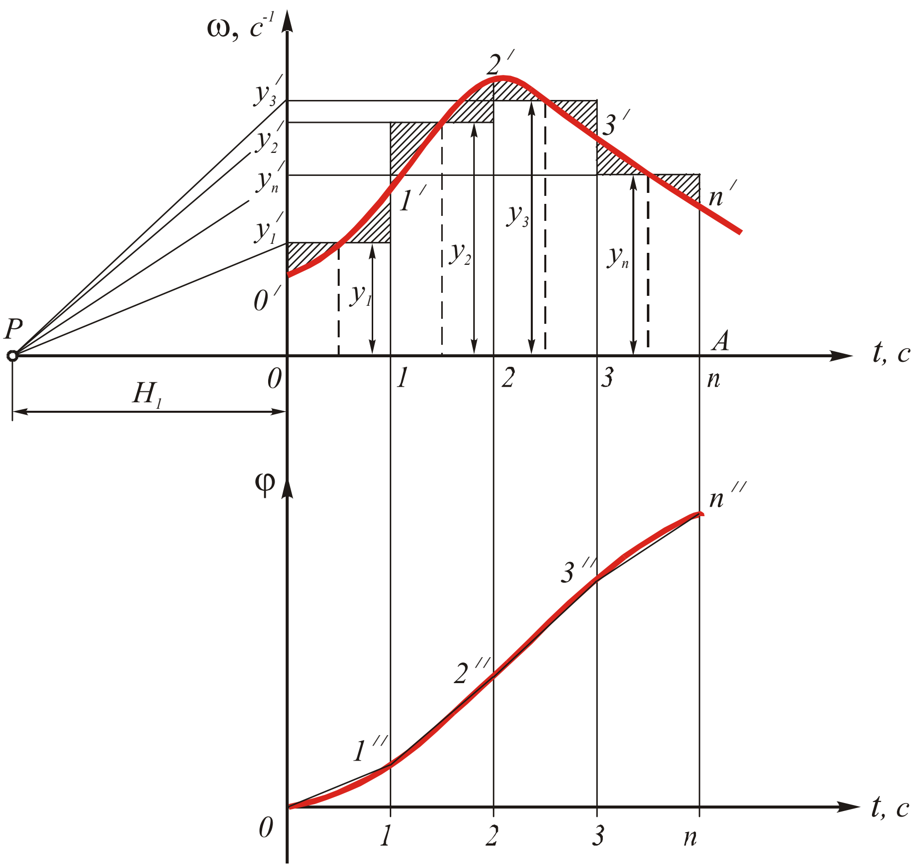


Рис. 4.12 Визначення масштабу за графічного інтегрування

Інтегрування проводимо у порядку, оберненому до порядку графічного диференціювання:

1. Розбиваємо інтервал *OA* на *n* рівних частин таким чином, щоб рух в границях обраного інтервалу можна було розглядати як рівномірний.
2. Заміняємо криволінійні трапеції $00'1'1$, $11'2'2$ і т.д. рівновеликими за площею прямокутниками зі сторонам О-1 і y_1; 1-2 і y_2 і т.д.
3. Кінці середніх ординат y_1, y_2 і т.д. проектують на вісь ω та отримують точки y_1', y_2' і т.д.
4. Сполучають їх з довільно вибраним полюсом Р променями Py_1', Py_2' і т.д.
5. На шуканому графіку $\varphi(t)$ проводять лінії $01''$;$1''2''$ і т.д., паралельні променям Py_1', Py_2' і т.д. Перший відрізок проводять з початку координат до перетину з вертикальною прямою, що обмежує справа інтервал 0-1. Другий відрізок проводять з отриманої точки перетину з границею першого інтервалу до перетину з границею другого інтервалу 1-2 і т.д.
6. Замінюють отриману кусочно-ломану лінію плавною кривою, яка і є шуканим графіком інтегральної функції $\varphi(t)$ При цьому легко показати, що масштаб осі ω обчислюється за формулою

$$\mu_\varphi = \mu_\omega \mu_t H_1 . \qquad (4.24)$$

Метод графічного диференціювання та інтегрування не досить точний. Тому його застосовують для наближеного визначення кінематичних параметрів механізму.

4.2.4. Перевірка правильності виконаних побудов

На рис. 4.13 показані діаграми переміщень, аналогів швидкостей та прискорень точки *B* кривошипно-повзункового механізму (рис 4.9), отримані методом графічного диференціювання кривої $S_B = S_B(\varphi_1)$.

Перевірка правильності виконаних побудов проводиться за такими ознаками:

1. Екстремальні значення інтегральної кривої відповідають нульовим значенням диференціальної кривої.
2. Точкам перегину інтегральної кривої відповідають екстремальні значення диференціальної кривої.
3. Ділянкам, де інтегральна крива зростає, відповідають додатні ділянки диференціальної кривої.
4. Спадаючим ділянкам інтегральної кривої відповідають від'ємні ділянки диференціальної кривої.
5. Дотичні, проведені до кривої в початковій і кінцевій точках (початок і кінець циклу руху механізму) повинні бути однаково спрямовані.
6. Якщо потрібно уточнити графіки кривих в деякому інтервалі, проводять додаткове розбиття інтервалу.

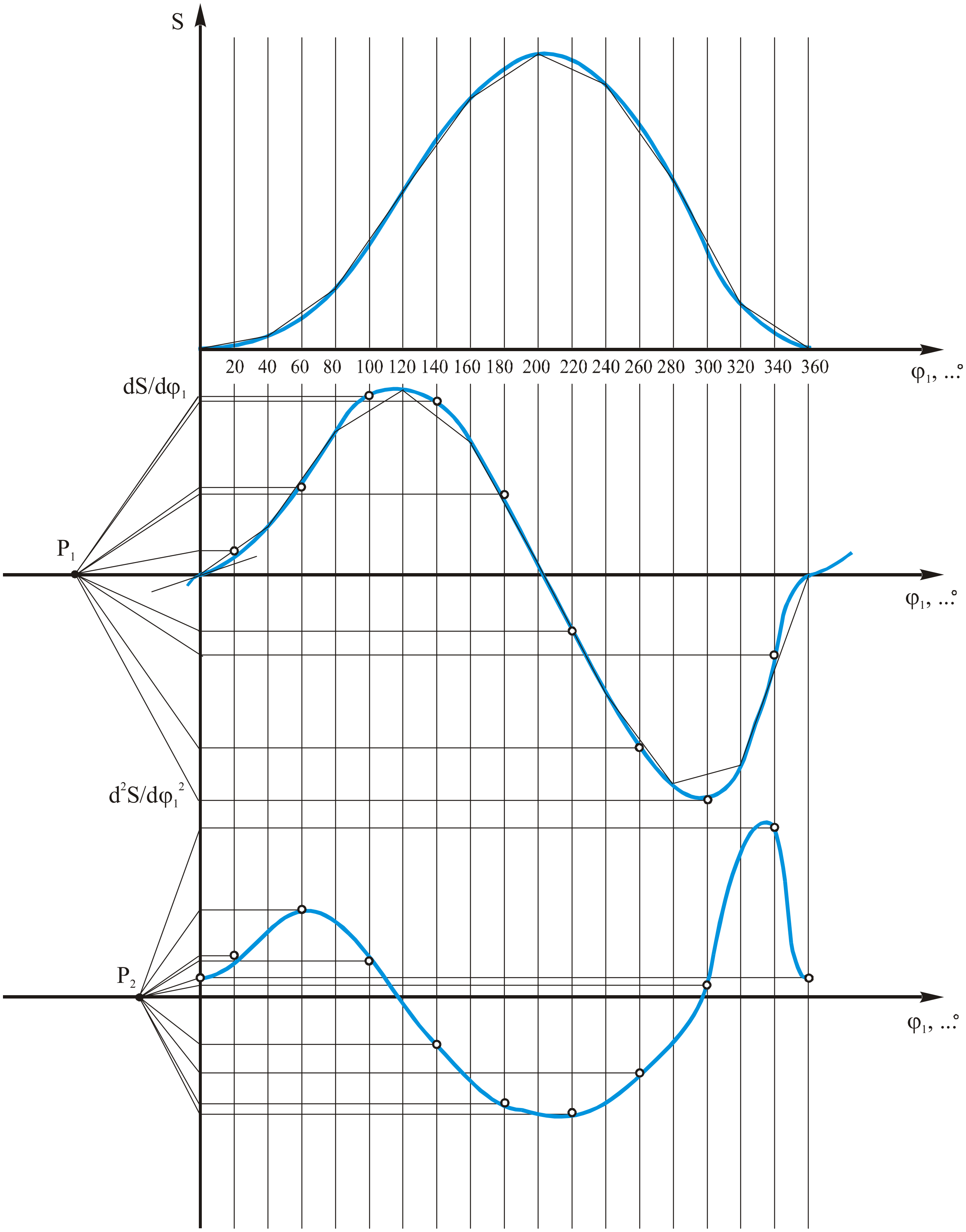


Рис. 4.13 Перевірка виконаних побудов за графічного диференціювання

Тема 4.3. МЕТОД ПЛАНІВ У КІНЕМАТИЧНОМУ ДОСЛІДЖЕННІ МЕХАНІЗМІВ

4.3.1. Плани механізму

Зображення кінематичної схеми механізму у вибраному масштабі, яке відповідає заданому положенню початкової ланки, називається планом механізму.

На рис.4.9 показані плани кривошипно-повзункового механізму в масштабі μ_l.

Таким чином, плани механізму будують під час проведення кінематичного аналізу, наприклад методом діаграм.

4.3.2. Плани швидкостей і прискорень

Планом швидкостей механізму називається креслення, на якому зображені у вигляді відрізків вектори, однакові за модулем і напрямком зі швидкостями різних точок ланок механізму в даний момент часу.

План швидкостей для механізму є сукупністю кількох планів швидкостей для окремих його ланок, у яких полюси планів p є загальною точкою – *полюсом плану швидкостей механізму*.

Креслення, на якому зображені у вигляді відрізків вектори, однакові за модулем і напрямком з прискореннями різних точок ланок механізму в даний момент часу, називається планом прискорення механізму.

В методі планів швидкостей і прискорень використовуються теореми про складний рух твердого тіла (ланки), який можна представити як суму переносного і відносного рухів.

Хай тіло, показане на рис. 4.14, виконує плоско-паралельний рух. Як відомо, його рух можна задати, задаючи закон руху двох його точок, наприклад A і B.

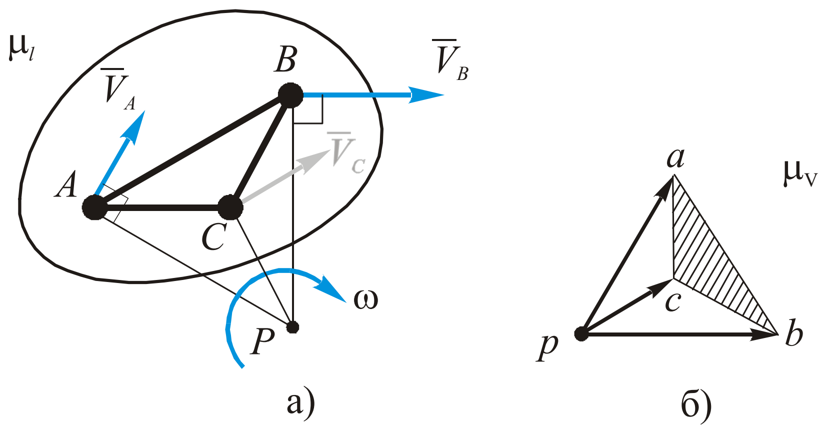


Рис. 4.14 План швидкостей твердого тіла: а – тверде тіла; б – план швидкостей

В будь-який момент часу можна знайти точку, жорстко зв'язану з тілом, швидкість якої дорівнює нулю. Це миттєвий центр обертання (МЦО) тіла *P*. Якщо тіло рухається поступально, то МЦО лежить на нескінченності. Відносно цієї точки в даний момент часу тіло робить обертальний рух зі швидкістю ω. В інший момент часу ця швидкість може бути іншою.

Перенесемо вектори абсолютних швидкостей $\overline{V}_A$ і $\overline{V}_B$ в точку *p* (полюс плану швидкостей). Отримаємо план швидкості відрізка *AB* (рис. 4.14 б) в масштабі

$$\mu_V = \frac{V_A}{pa} = \frac{V_B}{pb}, \qquad \frac{\text{м} \cdot \text{с}^{-1}}{\text{мм}}$$

Швидкість точки С, згідно з теоремою про складний рух,

$$\overline{V}_C = \overline{V}_B + \overline{V}_{CB} \tag{4.25}$$

або

$$\overline{V}_C = \overline{V}_A + \overline{V}_{CA}. \tag{4.26}$$

Припустимо, ця швидкість нам теж відома. Тоді відрізок на плані

$$p_C = \frac{V_C}{\mu_C}. \tag{4.27}$$

З іншого боку

$$V_A = \omega \cdot PA; \qquad V_B = \omega \cdot PB; \qquad V_C = \omega \cdot PC \qquad . \tag{4.28}$$

Тоді

$$\mu_V = \frac{\omega \cdot PA}{pa} = \frac{\omega \cdot PB}{pb} = \frac{\omega \cdot PC}{pc}$$

або

$$\frac{PA}{pa} = \frac{PB}{pb} = \frac{PC}{pc}. \tag{4.29}$$

Це запис *теореми про подібність для планів швидкостей*:

Кінці векторів абсолютних швидкостей, з'єднані між собою, утворюють фігуру, подібну до ланки, споріднено з нею розташовану і повернуту на 90°.

У споріднено розташованих фігурах напрямки обходу по індексах збігаються.

Властивості планів швидкостей:

1. Вектори, які виходять з полюса, являють собою абсолютні швидкості.
2. Напрямок вектора — завжди від полюса.
3. В кінці вектора завжди точка, що відповідає точці ланки або кінематичній парі.
4. Вектори на планах швидкостей, що не проходять через полюс, являють собою відносні швидкості.
5. Напрямок відносних швидкостей на плані завжди від другого індексу у позначеннях цих швидкостей до першого.

Розглянемо тіло (рис. 4.15), рух якого заданий рухом точок *A* і *B*. П – миттєвий центр прискорень (МЦП).

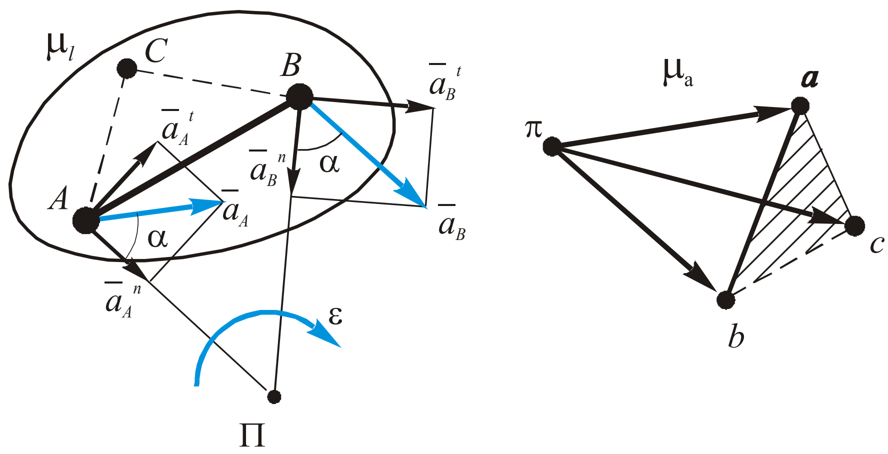


Рис. 4.15 План прискорень твердого тіла

Прискорення точки *A*

$$a_A = \sqrt{\left(a_A^n\right)^2 + \left(a_A^\tau\right)^2}$$

Тут $a_A^n = \omega^2 \cdot \Pi A$ – нормальне прискорення; $a_A^\tau = \varepsilon \cdot \Pi A$ – тангенціальне прискорення. Тоді

$$a_A = \Pi A \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}\ .$$

Аналогічно можна записати для точки *B*:

$$a_B = \Pi B \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}\ .$$

Згідно з рис. 4.15

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a_A^\tau}{a_A^n} = \frac{a_B^\tau}{a_B^n} = \frac{\varepsilon \cdot \Pi A}{\omega^2 \cdot \Pi A} = \frac{\varepsilon \cdot \Pi B}{\omega^2 \cdot \Pi B}.$$

Остаточно отримаємо

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \tag{4.30}$$

Будуємо план прискорень, переносячи в спільний полюс плану π початки векторів повних прискорень (рис. 4.15 б). Масштабний коефіцієнт плану прискорень:

$$\mu_a = \frac{a_A}{\pi a} = \frac{a_B}{\pi b}, \qquad \frac{\text{м} \cdot \text{с}^{-2}}{\text{мм}}.$$

Сформулюємо *теорему про подібність для планів прискорень*:

Кінці векторів повних прискорень, з'єднані між собою, утворюють фігуру, подібну до ланки, споріднено з нею розташовану і повернуту на $\angle\left(180^\circ - \alpha\right)$***, де*** $\alpha = \mathrm{arctg}\, \varepsilon / \omega^2$.

Прискорення точки C можна знайти за теоремою про подібність, згідно з якою $\triangle ABC \sim \triangle abc$ (рис.3. 15).

Властивості планів прискорень:

Властивості планів прискорень аналогічні до властивостей планів швидкостей.

Лекція №6

4.3.3. Методика побудови планів швидкостей і прискорень для різних типів груп Ассура

а) Плани швидкостей і прискорень двоповідкової групи з трьома шарнірами.

Методика побудови планів для таких груп полягає у складанні векторних рівнянь руху для кожної ланки і спільному їх розв'язанні.

Розглянемо структурну групу, яка складається з ланок 1 і 2 (рис. 4.16 а).

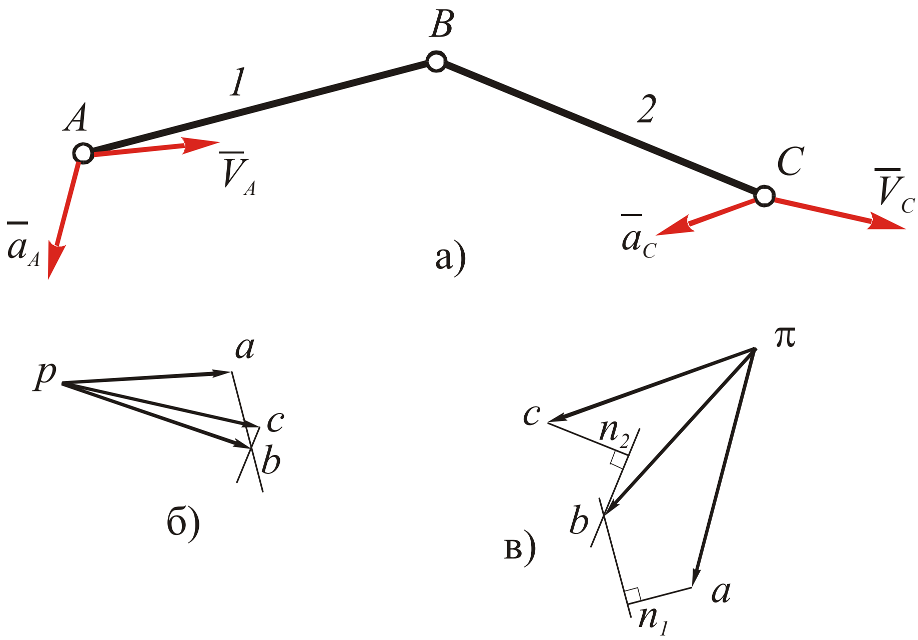


Рис. 4.16 Двоповідкова група з трьома шарнірами: а – схема групи; б – план швидкостей; в – план прискорень

Оскільки відносний поступальний рух ланок в шарнірі B відсутній, то справедлива умова $\overline{V}_{B1} = \overline{V}_{B2}$. Ланки здійснюють складний рух, отже можна записати:

$$\begin{cases} \overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA} \\ \overline{V}_B = \overline{V}_C + \overline{V}_{BC} \end{cases}. \tag{4.31}$$

Оскільки відносний рух ланок обертальний, то напрямки відносних швидкостей $\overline{V}_{BA} \perp BA$ і $\overline{V}_{BC} \perp BC$.

Тут відомі вектори $\overline{V}_A$ і $\overline{V}_C$. Вектори $\overline{V}_B$,, $\overline{V}_{BA}$ і $\overline{V}_{BC}$ потрібно визначити.

Будуємо план швидкостей. Вибираємо полюс p. З нього відкладаємо вектори $\overline{pa}$ і $\overline{pc}$, які в масштабі відповідають заданим векторам швидкостей $\overline{V}_A$ і $\overline{V}_C$. Масштабний коефіцієнт плану швидкостей:

$$\mu_V = \frac{V_A}{pa} = \frac{V_C}{pc}, \ \frac{\text{м} \cdot \text{с}^{-1}}{\text{мм}}.$$

Розв'язуємо спільно рівняння системи (4.31) у векторній формі. Для цього з кінця вектора $\overline{pa}$ проводимо напрямок вектора $\overline{ba} \perp AB$, а з кінця вектора $\overline{pc}$ – напрямок вектора $\overline{bc} \perp BC$. Точка перетину є розв'язком системи (4.31). Точка b – це кінець вектора $\overline{pb}$. Отже, знаючи масштабний коефіцієнт μ_V, знаходимо всі шукані вектори (рис. 4.16 б)

Визначаємо прискорення. Згідно з теоремою про складний рух

$$\begin{cases} \overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^n + \overline{a}_{BA}^\tau \\ \overline{a}_B = \overline{a}_C + \overline{a}_{BC}^n + \overline{a}_{BC}^\tau \end{cases}. \tag{4.32}$$

Тут $\overline{a}_A$ і $\overline{a}_C$ – задані прискорення точок A і B структурної групи. Нормальні прискорення обчислюємо за формулами

$$a_{BA}^n = \frac{V_{BA}^2}{l_{AB}} = \frac{(ba \cdot \mu_V)^2}{l_{AB}};\ a_{BC}^n = \frac{V_{BC}^2}{l_{BC}} = \frac{(bc \cdot \mu_V)^2}{l_{BC}},$$

де ba і bc – відрізки плану швидкостей (рис. 4.16 б). Відомі також напрямки цих прискорень: $\overline{a}_{BA}^n \parallel BA$ і спрямоване до точки A (центр обертання у відносному русі ланки 1); $\overline{a}_{BC}^n \parallel BC$ і спрямоване до точки C (центр обертання у відносному русі ланки 2).

Величину тангенціальних прискорень $\overline{a}_{BA}^\tau$ і $\overline{a}_{BC}^\tau$ визначити не можемо, бо невідомі кутові прискорення ланок в обертальному русі. Відомі тільки їх напрямки: $\overline{a}_{BA}^\tau \perp BA$, а $\overline{a}_{BC}^\tau \perp BC$.

Розв'язок системи (3.32) відносно невідомих векторів $\overline{a}_B, \overline{a}_{BA}^\tau, \overline{a}_{BC}^\tau$ знайдемо з допомогою плану прискорень, який побудуємо в масштабі

$$\mu_a = \frac{a_A}{\pi a} = \frac{a_C}{\pi c},\ \frac{\text{м} \cdot \text{с}^{-2}}{\text{мм}}.$$

З вибраного полюса плану прискорень π відкладаємо вектори $\overline{\pi a}$ і $\overline{\pi c}$ (рис. 4.16 в), які в масштабі μ_a суть задані вектори прискорень точок A і C. Далі з кінців цих векторів проводимо вектори $\overline{an_1}$ в напрямку від точки B до точки A на схемі (рис. 4.16 а) і $\overline{cn_2}$ у напрямку від точки B до точки C. Тут

$$an_1 = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a};\quad cn_2 = \frac{a_{BC}^n}{\mu_a}$$

Точка перетину напрямків тангенціальних прискорень на плані є точка b – кінець шуканого вектора $\overline{\pi b}$. Величину повного прискорення точки B знайдемо як

$$\overline{a}_B = \pi b \cdot \mu_a.$$

Таким чином, швидкість і прискорення точки В даної структурної групи можна знайти, якщо відомі величини і напрямки швидкостей кінцевих шарнірів ланок, які її утворюють (точки А і В).

б) Плани швидкостей та прискорень двоповідкових груп, в яких кінцеві пари обертальна та поступальна

На рис. 4.17 зображена така група. Вона утворює поступальну пару з ланкою 4, при цьому переносний рух цієї ланки – обертальний.

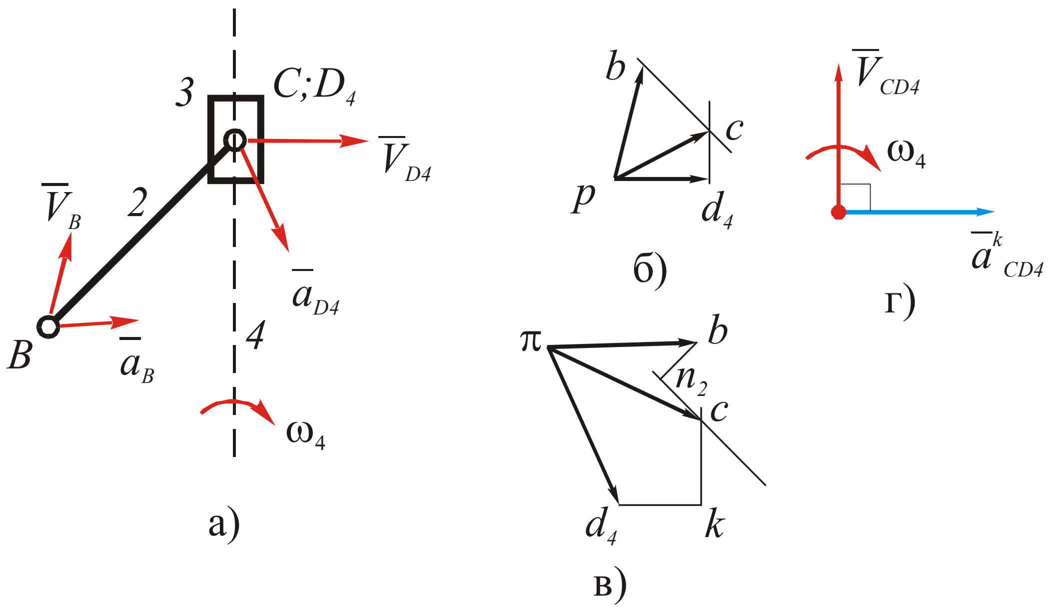


Рис. 4.17 Двоповідкова група з кінцевою поступальною парою: а – схема групи; б – план швидкостей; в – план прискорень; в – схема Жуковського

Вважаємо заданими швидкості і прискорення точки B ланки 2 і точки D_4 ланки 4. Відома також кутова швидкість ланки 4.

Визначимо швидкість точки C. Як і в попередньому прикладі, через відсутність поступального руху між ланками 2 і 3, справедлива умова $\overline{V}_{C2} = \overline{V}_{C3} = \overline{V}_C$. Запишемо, згідно з теоремою про складний рух, систему векторних рівнянь

$$\begin{cases} \overline{V}_{C_2} = \overline{V}_B + \overline{V}_{CB} \\ \overline{V}_{C_3} = \overline{V}_{D_4} + \overline{V}_{CD_4} \end{cases}. \tag{4.33}$$

Тут $\overline{V}_{CB} \perp CB$ оскільки відносний рух ланки 2 обертальний. Напрямок відносної швидкості $\overline{V}_{CD_4}$ паралельний ланці 4, оскільки рух ланки3 відносно ланки 4 поступальний.

Розв'язуючи спільно цю систему рівнянь з допомогою плану швидкостей (рис. 4.17 б), знаходимо шукані вектори $\overline{V}_C$, $\overline{V}_{CD_4}$, $\overline{V}_{CB}$:

$$V_C = pc \cdot \mu_v; \; V_{CD_4} = cd_4 \cdot \mu_V; \quad V_{CB} = cb \cdot \mu_V.$$

Методика побудови плану швидкостей така сама, як і в попередньому прикладі.

Визначимо прискорення точки *C*.

$$\begin{cases} \overline{a}_{C_2} = \overline{a}_B + \overline{a}^n_{CB} + \overline{a}^\tau_{CB} \\ \overline{a}_{C_3} = \overline{a}_{D_4} + \overline{a}^r_{CD_4} + \overline{a}^k_{CD_4} \end{cases} \tag{3.34}$$

Як і для швидкостей, для прискорень справедлива умова $\overline{a}_{C_2} = \overline{a}_{C_3} = \overline{a}_C$.

Друга ланка здійснює плоско-паралельний рух. Нормальне прискорення в обертальному русі цієї ланки відносно точки *B*

$$a^n_{CB} = \frac{V^2_{CB}}{l_{CB}} = \frac{(\mu_V \cdot cb)^2}{l_{CB}}.$$

На плані прискорень відкладаємо вектор $\overline{bn_2}$ в напрямку від точки *C* до точки *B* на схемі (рис 4.17 а). Модуль цього вектора

$$bn_2 = \frac{a^n_{CB}}{\mu_a}.$$

Напрямок тангенціального прискорення $\overline{a}^\tau_{CB} \perp CB$ на плані прискорень проводимо з точки n_2.

Ланки 3 і 4 здійснюють відносний поступальний рух, який характеризується, з одного боку, релятивним прискоренням $\overline{a}^r_{CD_4}$, а з іншого боку – прискоренням Коріоліса, оскільки ланка 4 здійснює переносний обертальний рух.

$$\overline{a}^k_{CD_4} = 2\overline{\omega}_4 \times \overline{V}_{CD_4}.$$

Його модуль

$$a^k_{CD_4} = 2\omega_4 \cdot V_{CD_4}.$$

Напрямок прискорення Коріоліса знаходять за методом Жуковського (рис. 4.17 г). Щоб визначити напрямок прискорення $\overline{a}^k_{CD_4}$, потрібно вектор відносної швидкості поступального руху $\overline{V}_{CD_4}$ (знаходимо з плану швидкостей: його напрямок – від другого індексу d_4 до першого c) повернути на 90° в напрямку кутової швидкості переносного руху ω_4.

Таким чином, на плані прискорень з точки d_4 відкладаємо у напрямку коріолісового прискорення вектор $\overline{d_4k}$. Його модуль

$$d_4k = \frac{a^k_{CD_4}}{\mu_a}.$$

З точки k проводимо напрямок релятивного прискорення паралельно ланці 4. На перетині цього напрямку з напрямком тангенціального прискорення ланки 2 знаходимо точку C. Сполучаємо її з полюсом плану прискорень і знаходимо прискорення $\bar{a}_C$, $\bar{a}^r_{CD_4}$, $\bar{a}^\tau_{CB}$:

$$a_C = \pi c \cdot \mu_a; \qquad a^r_{CD_4} = kc \cdot \mu_a; \qquad a^\tau_{CB} = n_2c \cdot \mu_a.$$

в) Плани швидкостей та прискорень для триповідкових груп з обертальними парами

Розглянемо структурну групу III-го класу 3-го порядку (рис. 4.18).

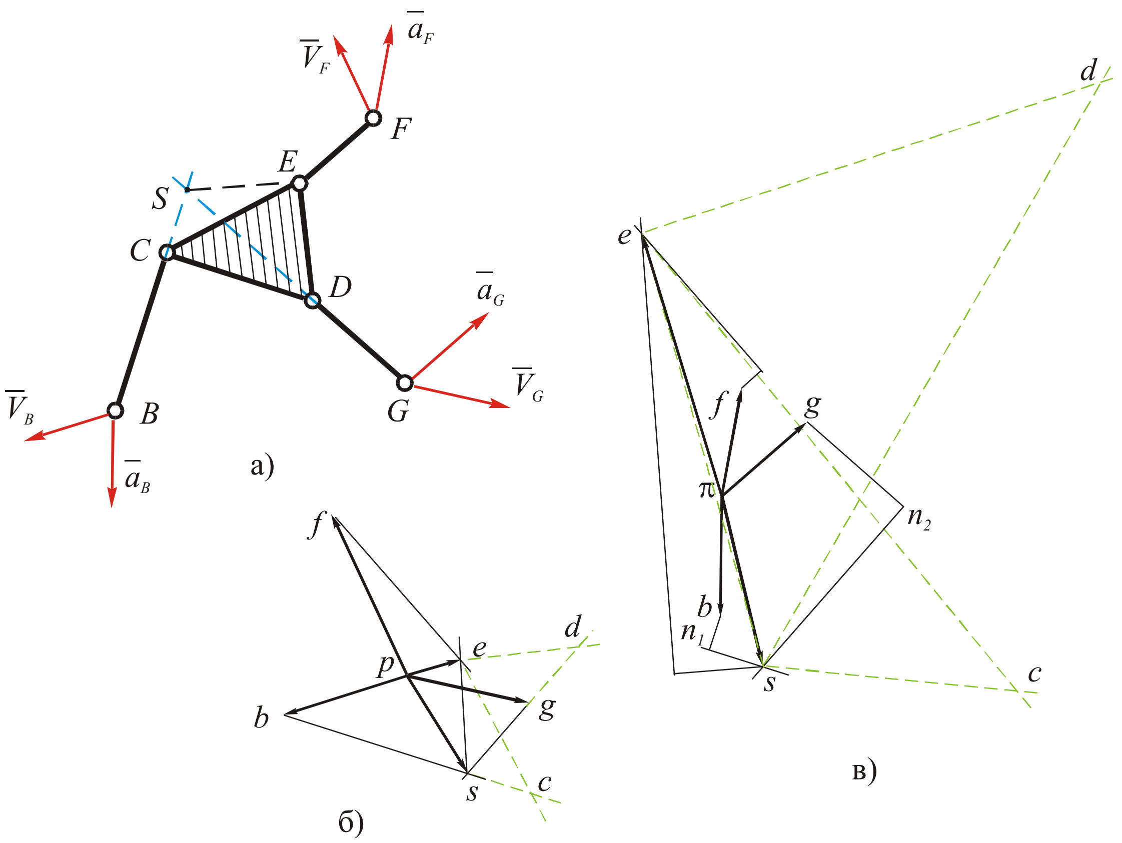


Рис. 4.18 Триповідкова група з обертальними парами: а – схема групи; б – план швидкостей; в – план прискорень

Для такої групи при побудові планів швидкостей та прискорень застосовують так звані *точки Ассура*, які знаходяться на перетині будь-яких двох повідків і вважаються такими, що належать базисній ланці.

Припустимо, що нам відомі швидкості $\overline{V}_B$, $\overline{V}_F$, $\overline{V}_G$. Визначимо вектор швидкості точки Ассура S за рівняннями:

$$\begin{cases} \overline{V}_S = \overline{V}_C + \overline{V}_{SC} = \overline{V}_B + \underbrace{\overline{V}_{CB} + \overline{V}_{SC}}_{\perp SB} \\ \overline{V}_S = \overline{V}_D + \overline{V}_{SD} = \overline{V}_G + \underbrace{\overline{V}_{DG} + \overline{V}_{SD}}_{\perp SG} \end{cases} \tag{4.35}$$

Розв'язуємо цю систему з допомогою плану швидкостей (рис. 4.18 б).

Щоб встановити закон руху базисної ланки, треба знати закон руху ще однієї точки, окрім S. Наприклад E.

$$\begin{cases} \overline{V}_E = \overline{V}_F + \overline{V}_{EF}^{\,(\perp EF)} \\ \overline{V}_E = \overline{V}_S + \overline{V}_{ES}^{\,(\perp SE)} \end{cases} \tag{4.36}$$

Швидкості інших точок ланки, наприклад C або D, визначаються за теоремою про подібність для планів швидкостей.

Аналогічно будується план прискорень. Якщо задані прискорення точок B, G, F, то для точки Ассура

$$\begin{cases} \overline{a}_S = \overline{a}_C + \overline{a}_{SC}^n + \overline{a}_{SC}^\tau = \overline{a}_B + \underbrace{\overline{a}_{SC}^n + \overline{a}_{CB}^n}_{\parallel SB} + \underbrace{\overline{a}_{SC}^\tau + \overline{a}_{CB}^\tau}_{\perp SB} \\ \overline{a}_S = \overline{a}_G + \underbrace{\overline{a}_{DG}^n + \overline{a}_{SD}^n}_{\parallel SG} + \underbrace{\overline{a}_{DG}^\tau + \overline{a}_{SD}^\tau}_{\perp SG} \end{cases} \tag{4.37}$$

Для спрощення запису позначимо $\overline{a}_{SC}^n + \overline{a}_{CB}^n = \overline{a_{SC}^n + a_{CB}^n} = \overline{a}_{SB}^n$; $\overline{a}_{SC}^\tau + \overline{a}_{CB}^\tau = \overline{a_{SC}^\tau + a_{CB}^\tau} = \overline{a}_{SB}^\tau$; $\overline{a}_{DG}^n + \overline{a}_{SD}^n = \overline{a_{DG}^n + a_{SD}^n} = \overline{a}_{SG}^n$ і $\overline{a}_{DG}^\tau + \overline{a}_{SD}^\tau = \overline{a_{DG}^\tau + a_{SD}^\tau} = \overline{a}_{SG}^\tau$. Тоді

$$\begin{cases} \overline{a}_S = \overline{a}_B + \overline{a}_{SB}^n + \overline{a}_{SB}^\tau \\ \overline{a}_S = \overline{a}_G + \overline{a}_{SG}^n + \overline{a}_{SG}^\tau \end{cases}. \tag{4.38}$$

Величини нормальних прискорень знаходимо з рівнянь:

$$a_{CB}^{n} = \frac{V_{CB}^{2}}{l_{CB}}, \qquad a_{SC}^{n} = \frac{V_{SC}^{2}}{l_{SC}}, \qquad a_{DG}^{n} = \frac{V_{DG}^{2}}{l_{DG}}, \qquad a_{SD}^{n} = \frac{V_{SD}^{2}}{l_{SD}}.$$

Прискорення точки *E*:

$$\begin{cases} \overline{a}_E = \overline{a}_S + \overline{a}_{ES}^{n} + \overline{a}_{ES}^{\tau} \\ \overline{a}_E = \overline{a}_F + \overline{a}_{EF}^{n} + \overline{a}_{EF}^{\tau} \end{cases} \qquad (4.39)$$

План прискорень зображений на рис 4.18 в).

Прискорення інших точок базисної ланки визначаються за теоремою про подібність для планів прискорень.

Лекція №7

Тема 4.4. КІНЕМАТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗУБЧАСТИХ МЕХАНІЗМІВ

4.4.1. Визначення передатних відношень в багатоланкових зубчастих механізмах

а) Кратний зубчастий механізм.

Схема кратного зубчастого механізму показана на рис. 4.19.

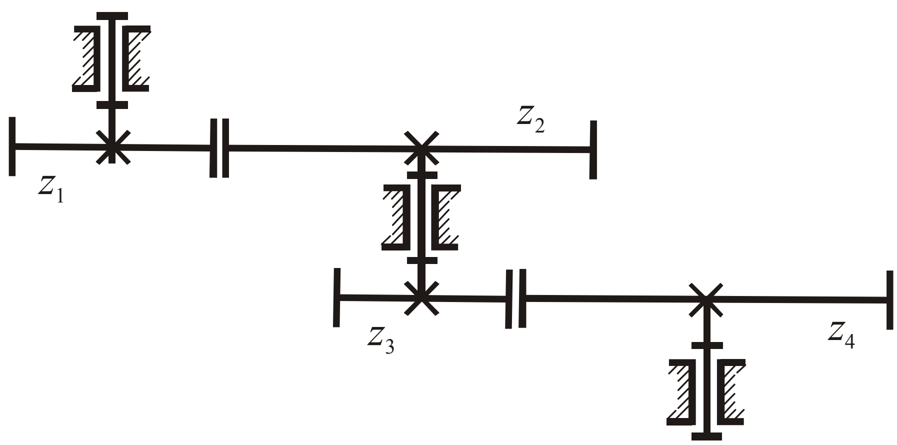


Рис. 4.19 Кінематична схема кратного зубчастого механізму

Передатне відношення між вхідною та вихідною ланками

$$u_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4}. \tag{4.40}$$

Або

$$u_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_4} = u_{12} \cdot u_{34}. \tag{4.41}$$

Тут, згідно зі схемою, $\omega_2 = \omega_3$.

Для зубчастих передач передатні відношення визначаються як відношення чисел зубців, тобто:

$$u_{12} = -\frac{z_2}{z_1}, \; u_{34} = -\frac{z_4}{z_3}.$$

Знак «–» ставиться при зовнішньому зачепленні.

Отже

$$u_{14} = u_{12} \cdot u_{34} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3}; \tag{4.42}$$

Передатне відношення кратного зубчастого механізму дорівнює добутку окремих передатних відношень або відношення добутку чисел зубців ведених коліс до добутку чисел зубців ведучих коліс.

$$u_{1n} = u_{12} \cdot u_{34} \cdot \ldots \cdot u_{(n-1)n} = \left(-1\right)^m \frac{z_2 \cdot z_4 \cdot \ldots \cdot z_n}{z_1 \cdot z_3 \cdot \ldots \cdot z_{(n-1)}}, \tag{4.43}$$

де n – кількість зубчастих коліс; m – кількість зовнішніх зачеплень.

б) Диференціальний зубчастий механізм.

Це механізм, ступінь рухливості якого більша від одиниці.

На рис. 4.20 зображений планетарний механізм, тобто механізм, який містить колеса з рухомими осями, що називаються *сателітами*.

Він, згідно зі схемою, має чотири рухомі ланки (*центральні колеса* 1 і 2, блок сателітів 3, *водило Н),* чотири нижчі кінематичні пари, і дві вищі. Його ступінь рухливості $w = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 = 2$.

Визначимо співвідношення між кутовими швидкостями коліс та водила $(\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_H)$. Застосуємо метод інверсії – оберненості руху. Для цього всій системі задамо кутову швидкість $(-\omega_H)$. Тоді водило зупиняється і механізм перетворюється в кратний зубчастий механізм. При цьому кутові швидкості коліс

$$\omega_1^{(H)} = \omega_1 - \omega_H ;$$

$$\omega_2^{(H)} = \omega_3^{(H)} = \omega_2 - \omega_H ;$$

$$\omega_4^{(H)} = \omega_4 - \omega_H .$$

Верхній індекс вказує, що водило *H* зупинене умовно.

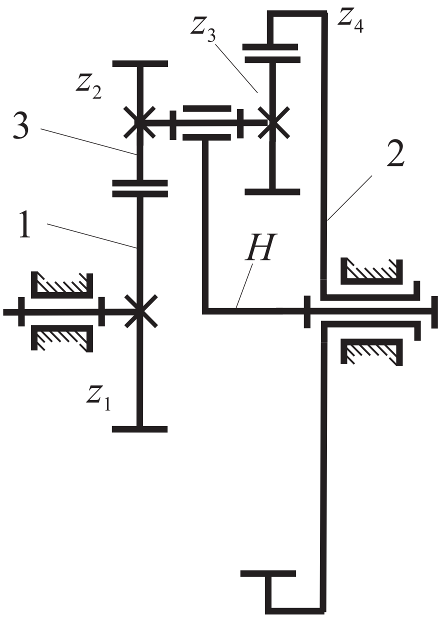


Рис. 4.20 Диференціальний зубчастий механізм

Даний підхід для аналізу планетарних механізмів вперше запропонував Р. Вілліс.

Передатне відношення оберненого механізму (кратного зубчастого):

$$u_{14}^{(H)} = \frac{\omega_1^{(H)}}{\omega_4^{(H)}} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_4 - \omega_H} = -\frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3} . \tag{4.44}$$

В передатному відношенні стоїть знак “–”, оскільки має місце одне зовнішнє зачеплення (див. рис. 4.20). Дійсно

$$u_{12} = \frac{\omega_1^{(H)}}{\omega_2^{(H)}} ; \quad u_{34} = -\frac{\omega_3^{(H)}}{\omega_4^{(H)}} . \tag{4.45}$$

Вираз (4.44) дозволяє визначити будь-яку з трьох кутових швидкостей – ω_1, ω_H або ω_4, якщо відомі дві інші швидкості та числа зубців коліс.

в) Планетарний зубчастий механізм

На рис. 4.21 зображена схема планетарного механізму. Центральне колесо 4 тут нерухоме. Легко переконатися, що його ступінь рухливості $w = 1$.

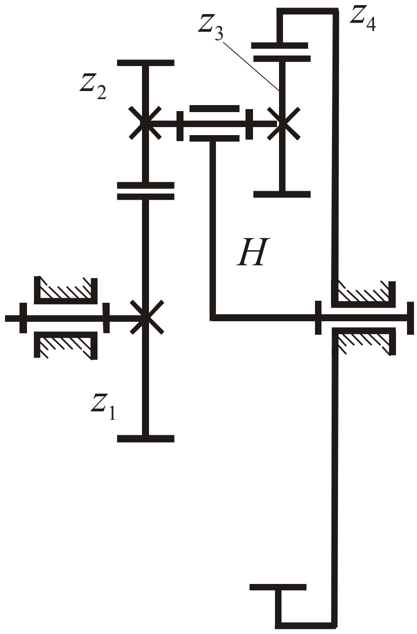


Рис. 4.21 Планетарний зубчастий механізм

Співвідношення між швидкостями вхідної та вихідної ланок планетарного механізму легко знайти за формулою (4.44). Оскільки в даному випадку $\omega_4 = 0$, то

$$u_{14}^{(H)} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{-\omega_H} = 1 - \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - u_{1H}^{(4)}.$$

Звідси

$$u_{1H}^{(4)} = 1 - u_{14}^{(H)}. \qquad (4.46)$$

Або

$$u_{1H}^{(4)} = 1 + \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} = \frac{\omega_1}{\omega_H}. \qquad (4.47)$$

Формула (4.47) дозволяє визначити кутову швидкість першого колеса (вхідної ланки) або водила (вихідної ланки), якщо відомі одна з цих швидкостей і кількість зубців коліс.

4.4.2. Графіки розподілу швидкостей обертальних ланок

Розглянемо ланку, яка здійснює обертальний рух (рис. 4.22 а).

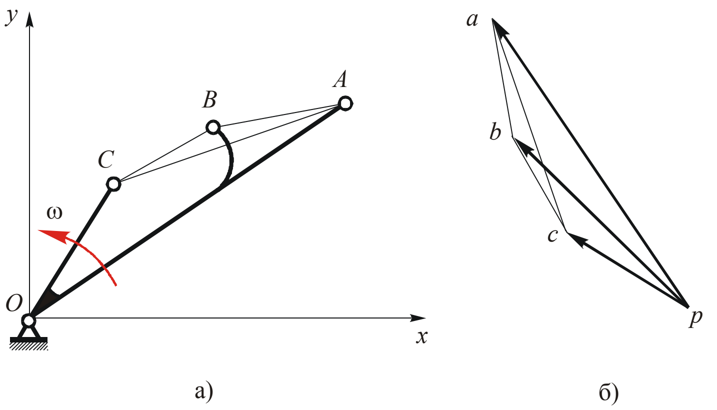


Рис. 4.22 Обертальна ланка (а) та її план швидкості (б)

План швидкостей зображений на (рис. 4.22 б). Тут

$$V_A = \omega_1 \cdot l_{OA}; \qquad V_B = \omega_1 \cdot l_{OB}; \qquad V_C = \omega_1 \cdot l_{OC}.$$

Закон розподілу лінійних швидкостей точок цієї ланки можна подати у вигляді *трикутника швидкостей* (рис. 4.23).

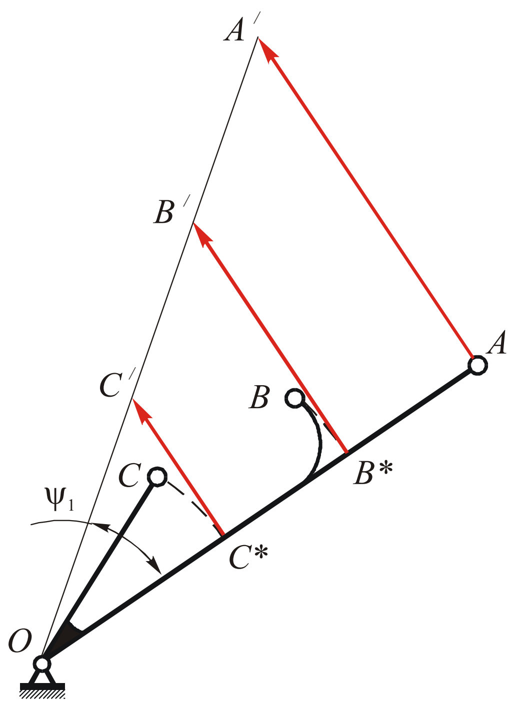


Рис. 4.23 Трикутник швидкостей обертальної ланки

На цьому трикутнику вектори, виставлені в точках C^* і B^* перпендикулярно до прямої OA, визначаються як:

$$\overline{AA'} = \frac{\overline{V}_A}{\mu_V}; \qquad \overline{B^*B'} = \frac{\overline{V}_{B^*}}{\mu_V}; \qquad \overline{C^*C'} = \frac{\overline{V}_{C^*}}{\mu_V}.$$

Пряму, яка з'єднує кінці векторів швидкостей A', B', C', називають *графіком розподілу швидкостей* точок лінії AO. Кут, утворений лінією розподілу OA' і лінії ланки OA, визначається зі співвідношення

$$\mathrm{tg}\psi_1 = \frac{AA'}{OA} = \frac{\mu_l \cdot V_A}{\mu_V \cdot l_{OA}} = \frac{\mu_l}{\mu_V}\omega_1 \tag{4.48}$$

Швидкість будь-якої точки ланки, яка не належить прямій OA, легко знайти, якщо цю точку циркулем, встановленим в т. O, перенести на лінію OA та з одержаної точки, наприклад C^*, провести пряму, перпендикулярну до OA, до перетину з лінією розподілу швидкостей. Якщо трикутник швидкості і план швидкостей побудовані в одному масштабі μ_V, то відрізки $\overline{C^*C'} = \overline{pc}$, оскільки $\left|\overline{V}_C\right| = \left|\overline{V}_{C^*}\right|$

4.4.3. Дослідження багатоланкових зубчастих механізмів з застосуванням графіків розподілу швидкостей

Трикутники швидкостей широко використовуються для аналізу зубчастих механізмів, особливо багаторозрядних планетарних передач і диференціалів.

Розглянемо планетарну передачу (рис. 4.24. а), в якій обертальний рух від вала 1 передається на вали центрального колеса 6 і водила *H* за допомогою блока-шестерні (сателіта).

На рис. 4.24 б) пряма 1 є лінією розподілу швидкостей колеса 1. Швидкості точок *A* колеса 1 і колеса 2, що належить сателіту, однакові. Швидкість точки *C* дорівнює 0, оскільки вона належить нерухомому колесу 4 (точка *C* – миттєвий центр обертання сателіта, який здійснює складний рух: обертається навколо осі *B* і, разом з водилом *H*, навколо осі *OO*).

Лінія 2 – лінія розподілу швидкостей сателіта. Відрізок BB' на трикутнику швидкостей характеризує швидкість точки *B*. Тоді лінія *H* – графік розподілу швидкостей водила.

На лінії 2 знаходимо точку D'. Відрізок DD' характеризує швидкість точки *D* сателіта і колеса 6. Тоді пряма 6 – лінія розподілу швидкостей колеса 6.

Для визначення кутових швидкостей коліс вибираємо точку *O* (рис. 4.14 в) і проводимо з неї пучок прямих, паралельних лініям розподілу швидкостей (рис. 4.14 б). Якщо перетнути цей пучок прямою, перпендикулярною до лінії відліку лінійних швидкостей *O-O*, то легко показати, що отримані відрізки *OH*, *O*2, *O*1, *O*6 пропорційні кутовим швидкостям відповідних коліс:

$$\omega_1 = \frac{V_A}{r_{w1}} = \frac{AA' \cdot \mu_V}{OA \cdot \mu_l} = \frac{\mu_V}{\mu_l} tg\psi_1 = \frac{\mu_V}{\mu_l}\frac{O1}{OO} = O1 \cdot \mu_\omega.$$

Тобто

$$O1 = \frac{\omega_1}{\mu_\omega}.$$

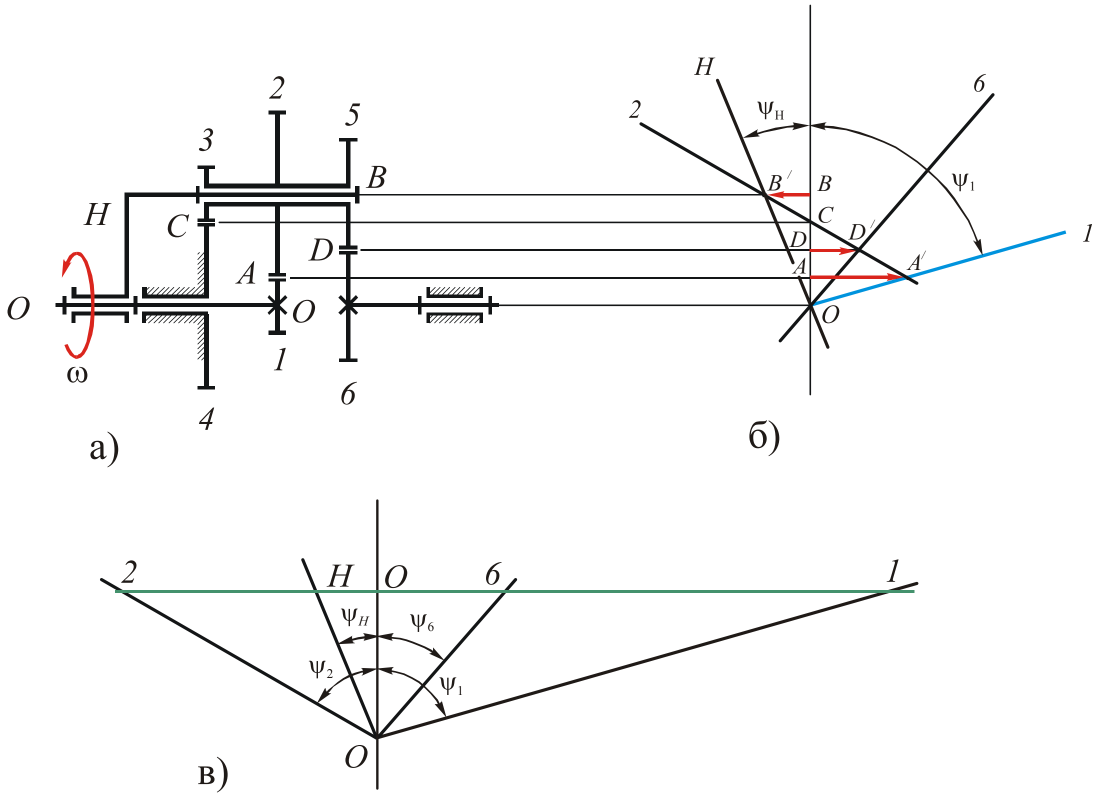


Рис. 4.24 Планетарний механізм (а) та графіки розподілу швидкостей його ланок (б), (в)

Масштаб кутової швидкості $\mu_\omega = \dfrac{\mu_V}{\mu_l \cdot OO}, \quad \dfrac{\text{рад} \cdot \text{c}^{-1}}{\text{мм}}.$

Аналогічно $OH = \dfrac{\omega_H}{\mu_\omega}$ і т. д.

Передатні відношення визначаються зі співвідношень:

$$u_{61} = \frac{\omega_6}{\omega_1} = \frac{\text{tg}\psi_6}{\text{tg}\psi_1} = \frac{O6}{O1}; \qquad u_{H1} = \frac{\omega_H}{\omega_1} = \frac{OH}{O1} \text{ і т.д.}$$

Розділ 5. ДИНАМІЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ РУХУ МАШИННОГО АГРЕГАТУ

В динамічному дослідженні механізмів розв'язуються дві основні задачі: *пряма* і *обернена.*

В прямій задачі за заданим навантаженням, масами ланок, їх розмірами та моментами інерції визначають кінематичні характеристики механізму.

В оберненій задачі за відомими кінематичними характеристиками необхідно знайти маси, моменти інерції, а, відповідно, і розміри ланок, за яких механізм, навантажений даними силами, рухається в заданому режимі.

Тема 5.1. КЛАСИФІКАЦІЯ СИЛ, ЯКІ ДАЮТЬ НА МЕХАНІЗМ, ТА МЕТОДИ ЇХ ВИЗНАЧЕННЯ

Розглянемо основні групи сил, які враховуються при динамічному аналізі механізмів і машин.

5.1.1. Рушійні сили і моменти

Це сили, які виконують додатну роботу за час дії або цикл роботи механізму. Вони прикладаються до вхідної ланки, яка в цьому випадку називають *ведучою*.

5.1.2. Сили і моменти опору

Ці сили виконують від'ємну роботу за час дії або цикл роботи механізму.

Вони в свою чергу діляться на *сили і моменти корисного опору* і *сили і моменти опору середовища*.

Сили корисного опору виконують роботу, для виконання якої машина створювалась. Вони прикладаються до ведених ланок.

Сили опору середовища – це сили, пов'язані з непродуктивними втратами потужності. Часто вони малі і в задачах динаміки ними нехтують.

5.1.3. Сили ваги

Прикладаються в центрах мас ланок.

$$G_i = m_i g \,. \tag{5.1}$$

Робота цих сил за цикл дорівнює нулю. На певному відрізку часу вони можуть виконувати як додатну, так і від'ємну роботу.

5.1.4. Сили інерції

Виникають у разі прискореного руху ланок і їх можна розглядати як реакції маси на зміну швидкості.

У загальному випадку плоско-паралельного руху розподілені по об'єму тіла сили інерції можуть бути зведені до головного вектора і головному моменту сил інерції, які прикладають в центрі ваги ланки.

$$\overline{F}_{a_i} = -m_i \overline{a}_{S_i}\,; \tag{5.2}$$

$$\overline{M}_{a_i} = -J_{S_i} \overline{\varepsilon}_i\,, \tag{5.3}$$

де a_s – прискорення центру мас S ланки; J_{S_i} – момент інерції маси ланки відносно осі, яка проходить через центр ваги ланки перпендикулярно до площини її руху; ε_i – кутове прискорення ланки.

Розглянемо приклади визначення сил інерції для різних випадків руху ланок.

Ланка рухається поступально. В цьому випадку прискорення всіх точок ланки однакові. Отже

$$a_S = a_A = a_B\,; \quad \varepsilon = 0\,.$$

Тоді

$$\overline{F}_a = -m \cdot \overline{a}_S\,; \;\; M_a = 0\,.$$

Тобто, коли ланка рухається поступально, сили інерції зводяться лише до головного вектора, який прикладений у центрі мас ланки (рис. 5.1).

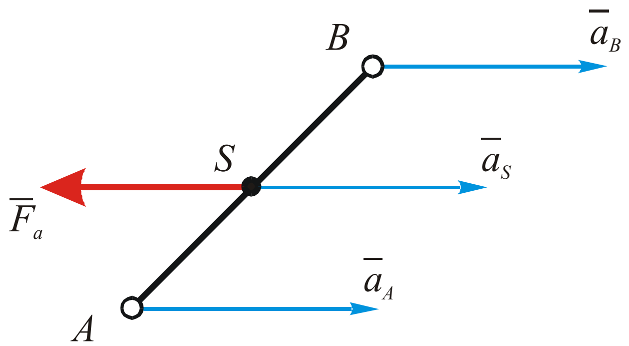


Рис. 5.1 Поступально рухома ланка

Ланка здійснює обертальний рух відносно центру мас. В цьому випадку центр мас S ланки нерухомий, тобто $a_S = 0$. Проте $\omega \neq 0$, $\varepsilon \neq 0$. Отже

$$F_a = 0; \qquad \overline{M}_a = -J_S \cdot \overline{\varepsilon}.$$

Таким чином, коли ланка обертається навколо нерухомого центра мас, сили інерції, які на неї діють, зводяться лише до головного моменту (рис. 5.2)

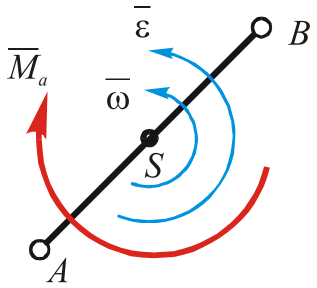


Рис. 5.2 Обертальна ланка (центр обертання збігається з центром мас)

Лекція №8

Ланка здійснює обертальний рух відносно точки, яка не збігається з центром мас. Приклад ланки, яка здійснює такий рух, показаний на рис. 5.3.

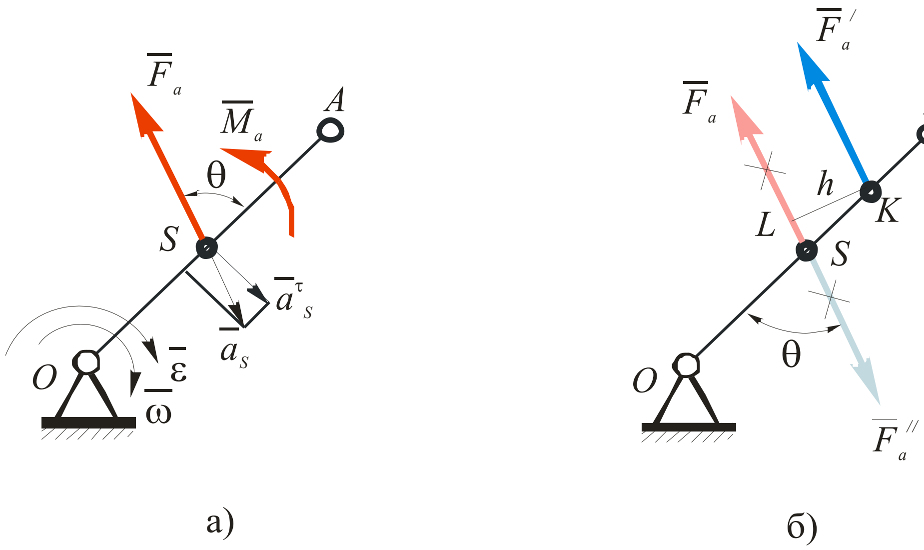


Рис. 5.3 Обертальна ланка (центр обертання не збігається з центром мас)

Як видно зі схеми, тут діє і головний вектор $\overline{F}_a$, і головний момент $\overline{M}_a$ сил інерції.

Момент інерції $\bar{M}_a$ подамо у вигляді системи паралельних сил $F'_a = F''_a = F_a$ (рис. 4.3б), прикладених на відстані h. Оскільки $F_a = F''_a$, то прикладеною до ланки залишається тільки одна сила, яка за напрямком і величиною дорівнює силі інерції, але прикладена на деякій відстані від центра мас S — в точці К, яка називається *центром коливання*.

Визначимо відстань SK, спираючись на рис. 5.3 б.

$$h = \frac{M_a}{F_a} = \frac{I_S \cdot \varepsilon}{m \cdot a_S} = \frac{m\rho^2}{ma_S} \cdot \frac{a_S^t}{l_{OC}}$$

З ΔSKL $h = l_{SK} \cdot \sin\theta$. Тангенціальне прискорення $a_S^t = a_S \cdot \sin\theta$. Тоді $l_{SK}\sin\theta = \dfrac{m\rho^2 \cdot a_S \sin\theta}{ma_S \cdot l_{OS}}$

Звідси

$$l_{SK} = \frac{\rho^2}{l_{OS}}.$$

Отже, відстань від центра обертання ланки до центру коливання:

$$l_{OK} = l_{OS} + \frac{\rho^2}{l_{OS}} \tag{5.4}$$

На практиці центр коливання ланки K знаходять за методом, показаним на рис.4.4, де $\rho = \sqrt{J_S/m}$. Для прямих стержнів довжиною l радіус інерції можна визначити як $\rho = l/\sqrt{12}$.

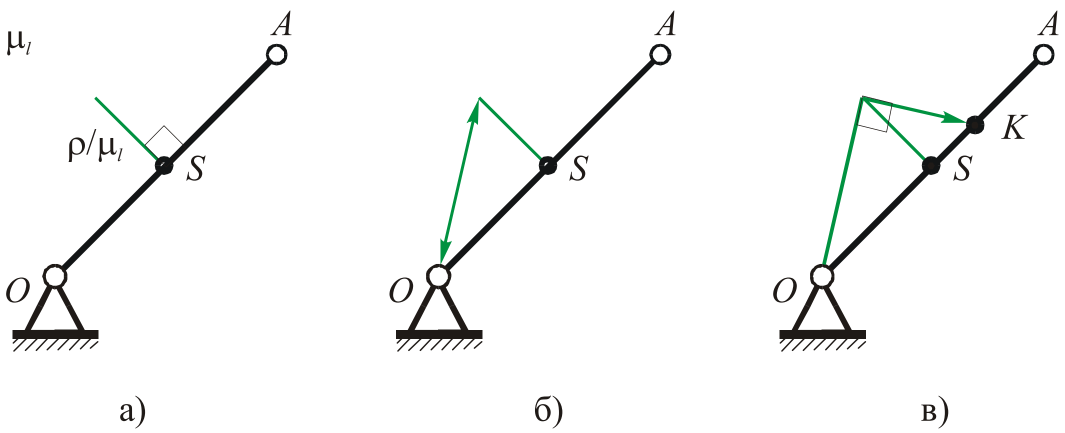


Рис. 5.4 Схема визначення центру коливань ланки

Ланка здійснює плоско-паралельний рух. На рис. 5.5 показана ланка (а) та її план прискорень (б).

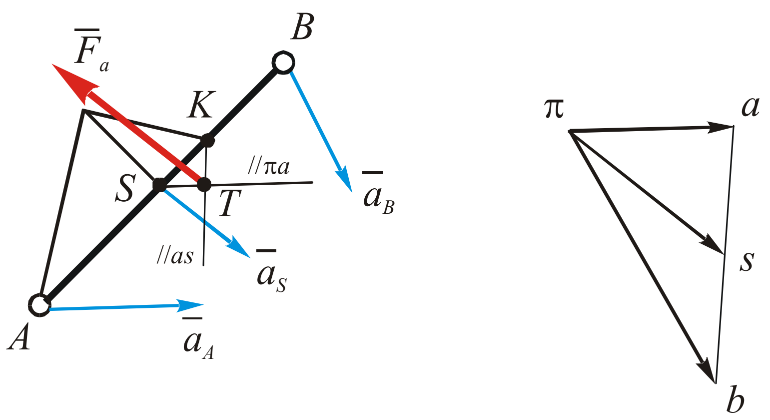


Рис. 5.5 Ланки, що здійснює плоско-паралельний рух

Згідно з теоремою про складний рух

$$\overline{a}_S = \overline{a}_A + \overline{a}_{SA} . \tag{5.5}$$

Сила інерції ланки

$$\overline{F}_a = -m \cdot \overline{a_S} .$$

Або, згідно з (5.5)

$$\overline{F}_a = -m \cdot \left(\overline{a_A} + \overline{a_{SA}} \right) = -m \cdot \overline{a_A} - m \cdot \overline{a_{SA}} . \tag{5.6}$$

Перший вектор – це сила інерції в поступальному русі ланки разом з точкою A; прийнятою за полюс; другий вектор – сила інерції в обертальному русі ланки відносно точки A. Перша сила прикладена в центрі ваги, друга – в центрі коливань K. Лінії дії цих сил перетинаються в точці T, яка називається *полюсом інерції*. Через полюс проходить і лінія дії сили інерції ланки $\overline{F}_a$ як результуючого вектора суми векторів (5.6).

Отже, у випадку плоско-паралельного руху ланки сили інерції зводяться лише до головного вектора $\overline{F}_a$, який прикладений в полюсі інерції ланки T.

Зрозуміло, що полюс інерції є миттєвим і визначається положенням ланки.

5.1.5. Сили і моменти, прикладені до стояка ззовні

Це сила ваги корпуса машини, реакція на корпус з боку основи. Оскільки корпус нерухомий, то ці сили роботи не здійснюють.

5.1.6. Реакції (тиски) в кінематичних парах

Це внутрішні сили, які є реакціями на дію активних (зовнішніх) сил, до яких відносяться сили перших чотирьох груп.

Ці сили розкладуються на нормальну і дотичну складові. Як правило визначають тільки нормальні складові цих реакцій.

Нормальні складові реакцій називають *тисками* в кінематичних парах.

Поступальна пара. Епюра нормальних тисків тут лінійна. (рис. 5.6).

Тут відомий напрямок рівнодійної сил тиску, але невідомі величина і точка її прикладення. Якщо довжина повзуна мала порівняно з розмірами решти ланок, то розподіл тисків приймають постійним. Рівнодійна тисків прикладається в центрі ваги повзуна.

Обертальна пара. В цій парі (рис. 5.7) відома точка прикладення рівнодійної (проходить через центр шарніра), але не відомі її величина та напрямок.

Вища пара. В цій парі (рис.5.8) відома точка прикладення та напрямок тиску (вздовж спільної нормалі). Невідома його величина.

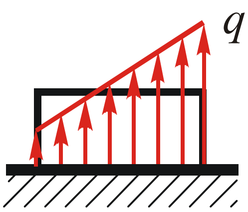


Рис. 5.6 Поступальна пара

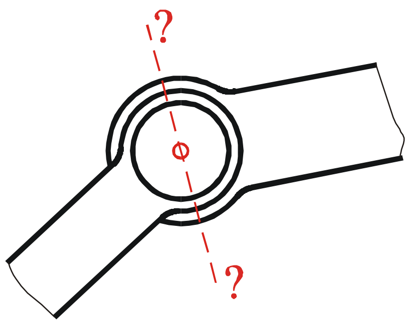


Рис. 5.7 Обертальна пара

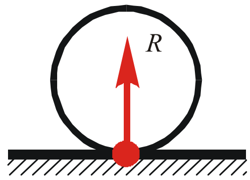


Рис. 5.8 Вища пара

Тангенціальні складові в кінематичних парах суть сили тертя. Нормальні складові роботи не виконують, бо вони перпендикулярні до напрямків переміщень. Сили тертя завжди виконують від'ємну роботу.

Тема 5.2. РІВНЯННЯ РУХУ МЕХАНІЗМІВ

5.2.1 Механічні характеристики машин

Найбільший вплив на закон руху механізму справляють рушійні сили та сили опору. Їх фізична природа, величина і характер дії визначається тими процесами, які протікають в даній машині під час її роботи.

В більшості випадків ці сили змінюють свою величину залежно від положення ланок механізму та їх швидкості. Залежності, які відбивають цей зв'язок, називаються *механічними характеристиками машин* і подаються зазвичай у вигляді діаграм чи масивів чисел.

При розв'язанні задач динаміки механічні характеристики машин вважаються заданими.

В подальшому силу і момент вважатимемо додатними, якщо на заданому переміщенні вони виконують додатну роботу.

а) Характеристики сил, що залежать від швидкості.

На рис. 5.9 наведені механічні характеристики машин-двигунів: а – асинхронного електричного двигуна; б – двигуна постійного струму. Для них характерним є зменшення рушійного моменту із зростанням кількості обертів ротора.

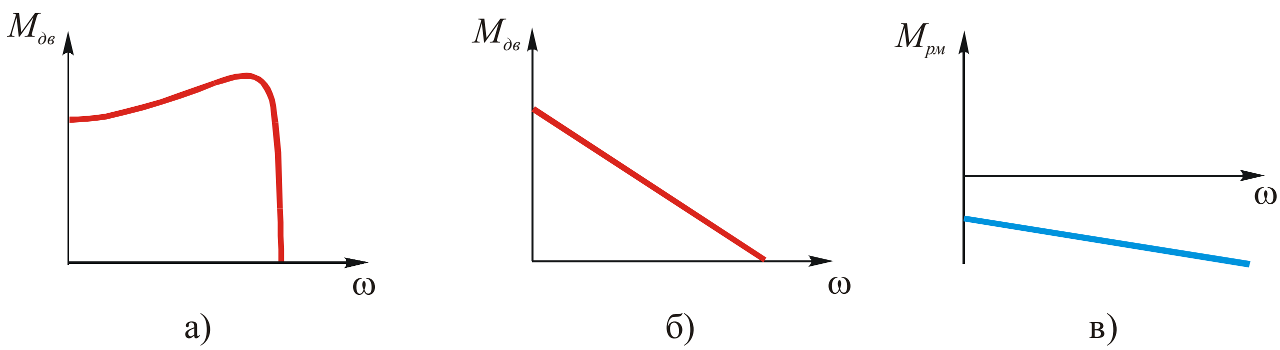


Рис. 5.9 Механічні характеристики машин, коли сили залежать від швидкості: а – для асинхронного двигуна; б—для двигуна постійного струму; в – для роторної машини

Навпаки для роторних машин (генераторів, насосів, вентиляторів і т. ін.) характерним є зростання моменту при зростанні швидкості обертання (рис. 5.9 в). Таке поєднання дуже корисне, оскільки сприяє сталості режиму роботи агрегату «електродвигун – роторна машина». Тобто має місце саморегуляція швидкості руху.

б) Характеристики сил, що залежать від переміщення.

На рис. 5.10 зображена механічна характеристика двотактного двигуна внутрішнього згорання.

Сила F_g на ділянці csd здійснює додатну роботу. Ця ділянка відповідає розширенню робочої суміші. Ділянка db відповідає поверненню поршня і вихлопу відпрацьованої суміші. Тут робота від'ємна оскільки сила F_g спрямована проти напрямку переміщення.

Робота дорівнює площі під кривою. Із рис. 5.10 видно, що сумарна робота — додатна (додатна площа більша від від'ємної). Отже F_g — рушійна сила.

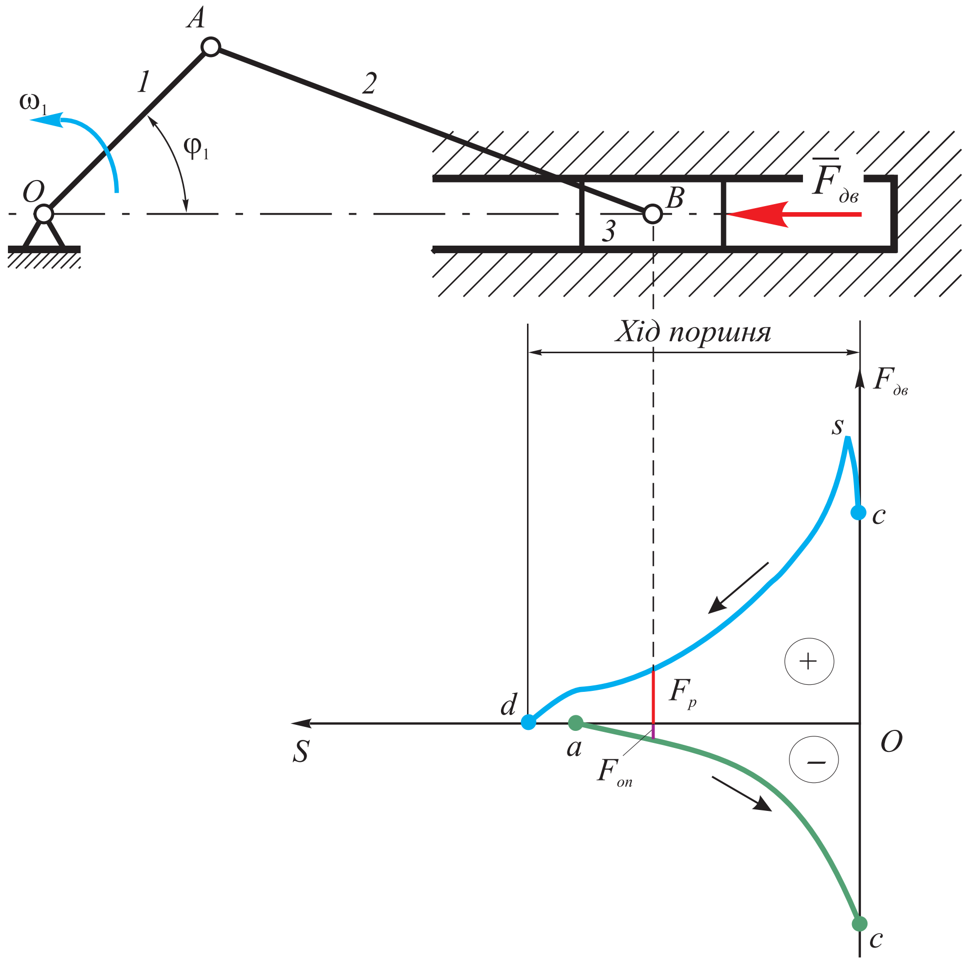


Рис. 5.10 Механічна характеристика однотактного двигуна внутрішнього згорання

На рис. 5.11 наведені механічні характеристики електричних двигунів (а) і роторних машин (б). Як видно, моменти не залежать від положення ротора, тобто від його кута повороту.

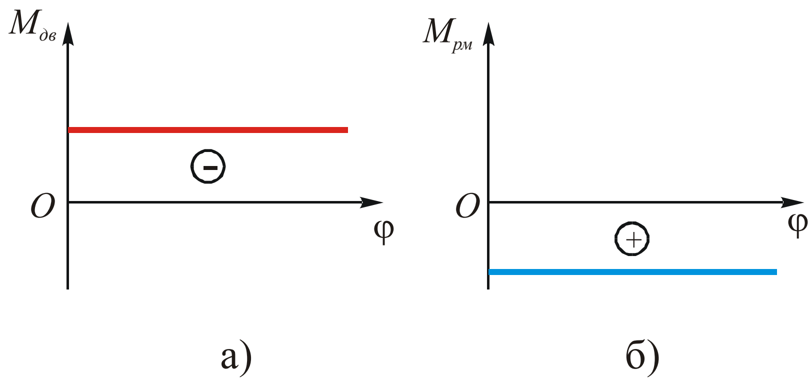


Рис. 5.11 Механічні характеристики машин, коли сили залежать від положення: а – для електричного двигуна; б – для роторної машини

5.2.2. Динамічна модель машинного агрегату

Розглянемо найпростіший машинний агрегат: двигун внутрішнього згорання – роторна машина з проміжною зубчастою передачею (рис. 5.12).

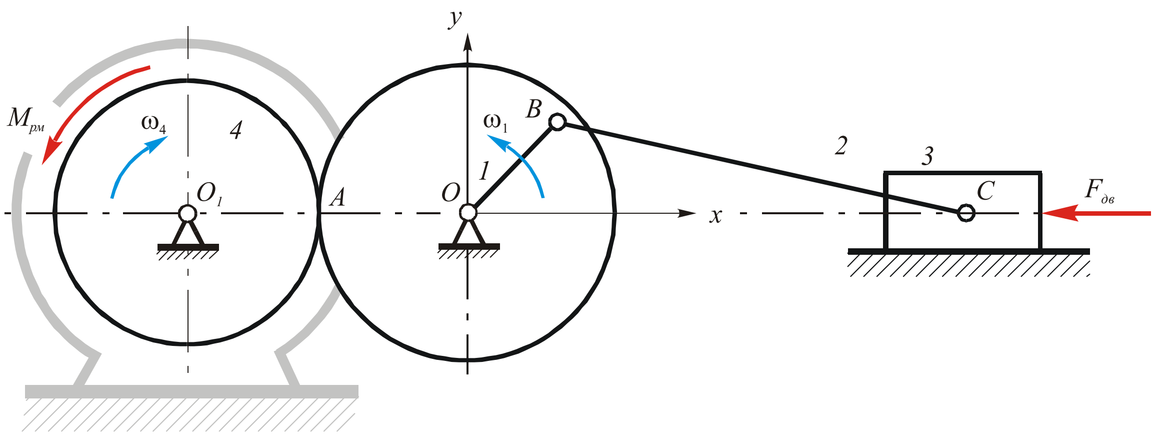


Рис. 5.12 Схема машинного агрегату

Його ступінь рухливості $w = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 - 1 = 1$.

При кінематичному дослідженні достатньо було знати закон руху якої-небудь ланки (зазвичай кривошипа *OB*), щоб дослідити весь механізм в цілому. Цю ланку приймають за початкову.

При динамічному аналізі використовується такий самий підхід: весь механізм заміняється найпростішою моделлю, наприклад обертальною ланкою з моментом інерції $J_{\Sigma}^{зв}$, до якої прикладений момент $M_{\Sigma}^{зв}$, причому ці моменти такі, що закони руху умовної ланки моделі і початкової ланки реального механізму збігаються:

$$\omega_1 = \omega_M \tag{5.7}$$

Таким чином, при побудові динамічної моделі всі сили, що діють на механізм, зводяться до однієї ланки і замінюються деякою узагальненою силою, названою *сумарним зведеним моментом* (або *силою*). При цьому ланка зведення має таку *зведену масу*, що її інерційність еквівалентна інерційності всього механізму.

5.2.3. Побудова динамічної моделі: зведення сил

Як випливає з рівняння Лагранжа ІІ-го роду, для виконання умови (5.7), необхідно, щоб при зведенні сил дотримувалась умова рівності елементарних робіт.

Сила називається зведеною до даної точки механізму, якщо вона, будучи прикладеною в точці і спрямованою в напрямку руху цієї точки по дотичній до траєкторії її руху, розвиває таку ж потужність, як і всі діючи на механізм сили разом взяті.

$$P_{зв} = \sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{i=1}^{n} \left(F_i V_i \cos\alpha_i + M_i \omega_i \right). \tag{5.8}$$

Тут $P_{зв}$ — потужність, яка розвивається зведеною силою; α_i — кут між вектором сили F_i і вектором швидкості V_i точки прикладення цієї сили; M_i — момент сили на *i*-й ланці, яка обертається зі швидкістю ω_i.

За обертальної ланки (рис. 5.13 а)

$$P_{зв} = M_{зв} \cdot \omega_1. \tag{5.9}$$

За поступально рухомої ланки (рис. 5.13 б)

$$P_{зв} = F_{зв} \cdot V_1. \tag{5.10}$$

Тут ω_1 і V_1 — відповідно кутова або лінійна швидкість ланки зведення.

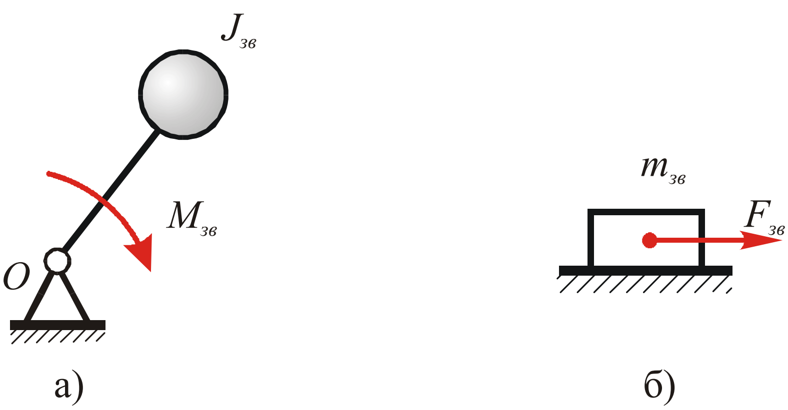


Рис. 5.13 Динамічні моделі механізму: а – з обертальною ланкою зведення; б – з поступально рухомою ланкою зведення

Отже, на ланку зведення буде діяти *зведений момент*

$$M_{зв} = \sum_{i=1}^{n} \left(F_i \cdot \frac{V_i}{\omega_1} \cos\alpha_i + M_i \frac{\omega_i}{\omega_1} \right) \tag{5.11}$$

або *зведена сила*

$$F_{пр} = \sum_{i=1}^{n} \left(F_i \cdot \frac{V_i}{V_1} \cos\alpha_i + M_i \frac{\omega_i}{V_1} \right). \tag{5.12}$$

5.2.4. Жорсткий важіль Жуковського

Згідно з принципом можливих переміщень в механічній системі з незвільнюваними в'язями сума елементарних робіт всіх сил, включаючи сили інерції, на можливих переміщеннях дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i \delta p_i = 0 \tag{5.13}$$

Якщо розглядати механізм як механічну систему, в'язі в якій не залежать від часу, то внаслідок того, що, при заданому русі початкових ланок інші виконують цілком визначені рухи, можливі переміщення тут містять в собі дійсні. Тобто

$$\sum_{i=1}^{n} F_i dp_i = 0 \, . \tag{5.14}$$

Або

$$F_1 dp_1 + F_2 dp_2 + \ldots + F_n dp_n = 0 \tag{5.15}$$

Тут $dp_1, dp_2, \ldots, dp_n$ – проекції дійсних переміщень на напрямки прикладених сил.

Розглянемо ланку AB, до якої в точці S прикладена сила F_i (рис. 5.14а). Дійсно, елементарне переміщення точки S dS_i має напрямок швидкості V_S.

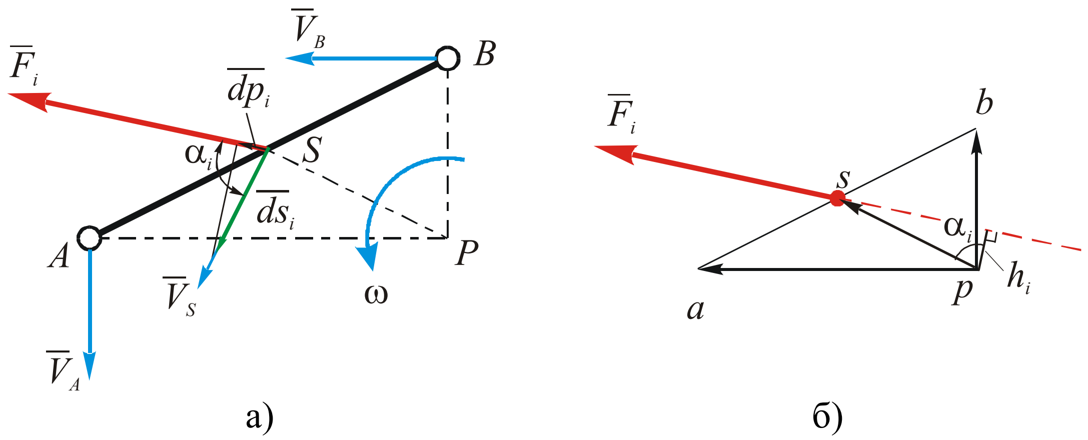


Рис. 5.14 Жорсткий важіль Жуковського: а – схема ланки; б – повернутий план швидкостей

Елементарна робота сили F_i

$$dA_i = F_i dp_i = F_i ds_i \cdot \cos\alpha_i \, .$$

Оскільки $V_S = \dfrac{ds_i}{dt}$,

$$dA_i = F_i V_S \cdot \cos\alpha_i dt \tag{5.16}$$

Швидкість V_S визначають із плану швидкостей. Для цього будують повернутий на 90º план (рис. 5.14 б) в масштабі

$$\mu_V = \frac{V_A}{pa} = \frac{V_S}{pb}, \quad \left(\frac{\text{м} \cdot \text{с}^{-1}}{\text{мм}}\right).$$

Із плану $V_S = ps \cdot \mu_V$. Тоді

$$dA_i = F_i \mu_V \cdot ps \cdot \cos\alpha_i \cdot dt\ . \tag{5.17}$$

Перенесемо силу F_i паралельно самій собі на повернутий план в точку *S*. Кут між відрізком ps і перпендикуляром h_i, встановленим з полюса плану на лінію дії сили F_i, дорівнює α_i. Тобто

$$h_i = ps \cdot \cos\alpha_i\,. \tag{5.18}$$

Тоді (5.17) перепишемо у вигляді:

$$dA_i = F_i h_i \mu_V dt\ . \tag{5.19}$$

У правій частині цього рівняння ми маємо вираз для моменту сили F_i відносно полюса плану швидкостей, якщо його розглядати як жорсткий важіль.

Елементарна робота сили, що діє на ланку механізму, пропорційна моменту відносно полюса плану швидкостей цієї ж сили, перенесеної у відповідну точку плану, повернутого на 90º.

$$dA_i = M_p\left(F_i\right)\mu_V dt\ . \tag{5.20}$$

Оскільки спільний множник $\mu_V dt \neq 0$, рівняння (5.13) можна переписати у вигляді:

$$\sum_{i=1}^{n} M_p\left(F_i\right) = 0\,. \tag{5.21}$$

Якщо крім сили F_i до механізму прикладені також моменти M_i, то їх краще всього замінити силами, прикладеними в яких-небудь точках ланки.

Приклад 5.1. Визначимо зведений момент, який діє на ланку 1 кривошипно-коромислового механізму (рис. 5.15).

Згідно з означенням, зведений момент, прикладений до ланки 1, що обертається,

$$M_{зв} = \sum_{i=1}^{n} M_{зв}\left(F_i\right) \tag{5.22}$$

Будуємо план швидкостей механізму, повертаючи відразу його на 90º.

$$V_A = \omega_1 \cdot l_{OA}; \qquad pa = \frac{V_A}{\mu_V}.$$

Масштаб плану швидкостей $\mu_V \left(\frac{м \times с^{-1}}{мм} \right)$.

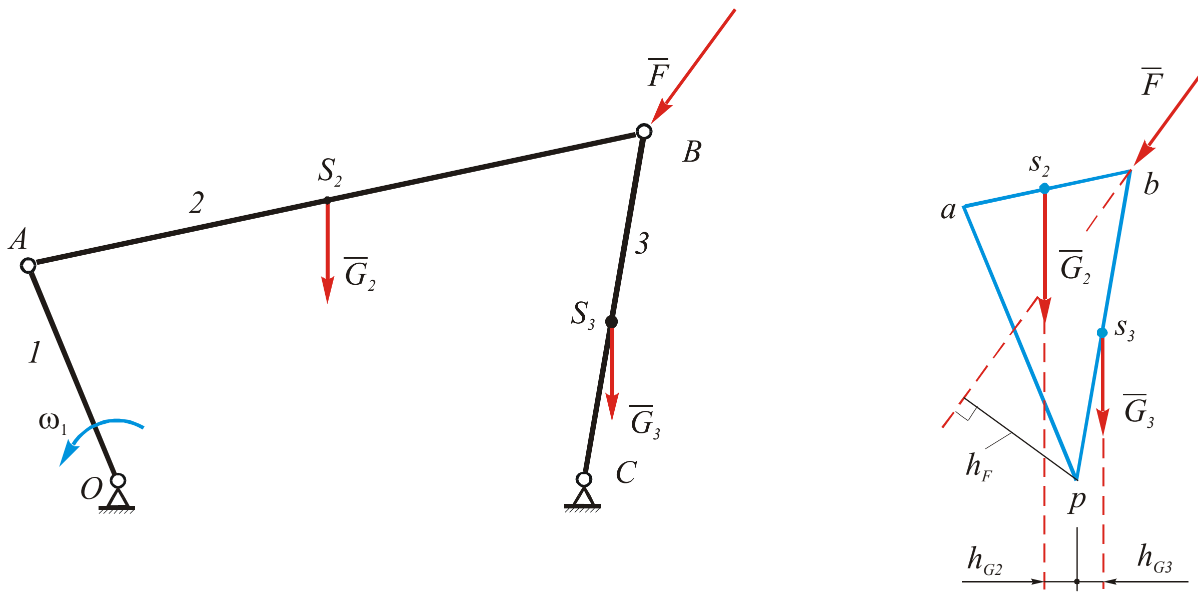


Рис. 5.15 До прикладу 5.1

Переносимо у відповідні точки на плані паралельно самим собі сили, розглядаємо план як жорсткий важіль. Згідно з (5.22)

$$M_{зв р} = F \cdot h_F + G_2 \cdot h_{G_2} - G_3 \cdot h_{G_3}.$$

Зведений момент, прикладений до першої ланки механізму, можна знайти зі співвідношення

$$M_{зв} = k \cdot M_{звр} ,$$

Де k – коефіцієнт узгодження масштабів:

$$k = \frac{l_{OA}}{pa} .$$

Рівняння (5.11) і (5.12) не складно розв'язати й аналітично, якщо відомі характеристики сил, які діють на ланки механізму, а також відомі аналоги швидкостей ланок і передатні відношення ($\frac{V_i}{\omega_1}$ – аналог швидкості i-тої ланки, а $\frac{\omega_i}{\omega_1}$ – передавальне відношення між i-тою та першою ланками).

Лекція №9

5.2.5. Побудова динамічної моделі: зведення мас

Маса називається зведеною до ланки механізму, якщо ланка з цією масою має кінетичну енергію, яка дорівнює сумі кінетичних енергій всіх ланок.

$$T_{зв} = \sum T_i . \qquad (5.23)$$

Для обертальної ланки кінетична енергія визначається за формулою

$$T = \frac{1}{2} J_S \omega^2 ; \qquad (5.24)$$

для поступально рухомої –

$$T = \frac{1}{2} m V^2 . \qquad (5.25)$$

Тоді, якщо ланка зведення виконує обертальний рух, отримаємо:

$$\frac{1}{2} m_{зв} V_1^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left[m_i V_i^2 + J_{S\,j} \omega_j^2 \right] .$$

Звідси *зведена маса*

$$m_{зв}=\sum_{i,j}\left[m_i\left(\frac{V_i}{V_1}\right)^2+J_{S\,j}\left(\frac{\omega_j}{V_1}\right)^2\right]. \qquad (5.26)$$

Для ланки зведення, яка виконує обертальний рух, зведений момент інерції

$$J_{S\,зв}=\sum_{i,j}\left[m_i\left(\frac{V_i}{\omega_1}\right)^2+J_{S\,j}\left(\frac{\omega_j}{\omega_1}\right)^2\right]. \qquad (5.27)$$

Тут i – кількість ланок, які рухаються поступально, включно з переносним та відносним поступальним рухом ланок при складному їх русі; j – кількість ланок, які здійснюють обертальні рухи, включно з переносним та відносним обертальний рухом при складному їх русі.

Приклад 5.2. Визначити зведений момент інерції ланки 1 зубчасто-важільного механізму з одним ступенем рухливості (рис. 5.16).

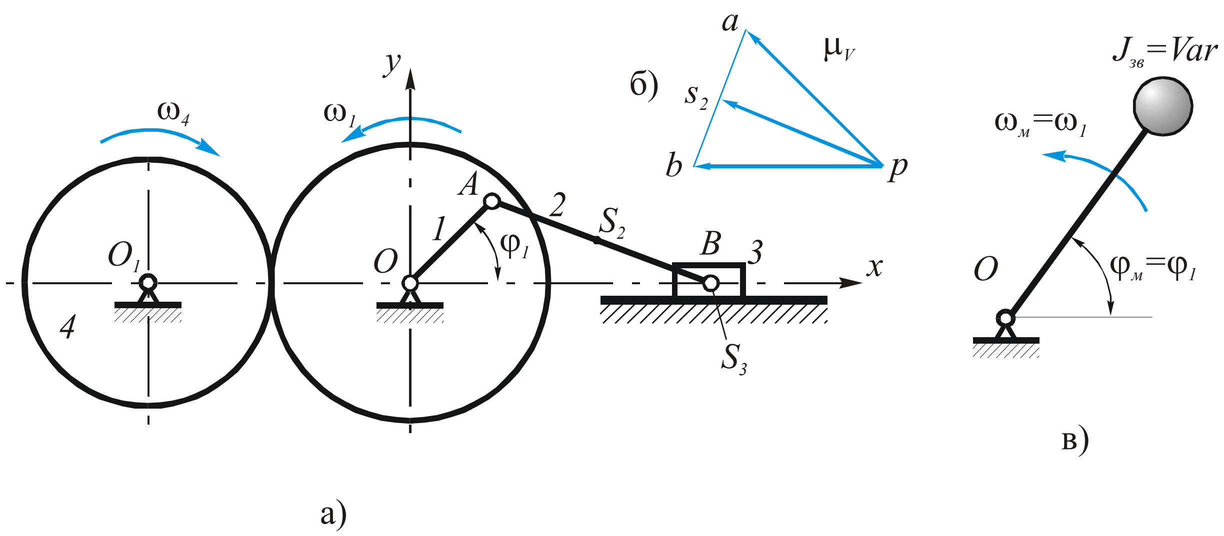


Рис. 5.16 Зубчасто-важільний механізм: а – кінематична схема; б – план швидкостей; в – динамічна модель

План швидкостей механізму зображений на рис. 5.16 б. На рис. 5.16 в зображена динамічна модель цього механізму. Оскільки ланка зведення здійснює обертальний рух, величину зведеного моменту визначимо, скориставшись формулою (5.27):

$$J_{зв}=\left[J_{S_1}\left(\frac{\omega_1}{\omega_1}\right)^2+\left\{m_2\left(\frac{V_{S2}}{\omega_1}\right)^2+J_{S_2}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\right\}+m_3\left(\frac{V_B}{\omega_1}\right)^2+J_{S_4}\left(\frac{\omega_4}{\omega_1}\right)^2\right].$$

Перетворимо цей вираз:

$$J_{зв} = J_{S_1} + \left[m_2 l_{OA}^2 \left(\frac{V_{S_2}}{V_A} \right)^2 + J_{S_2} \left(\frac{l_{OA}}{l_{AB}} \right)^2 \left(\frac{V_{BA}}{V_A} \right)^2 \right] + m_3 l_{OA}^2 \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^2 + J_{S_4} u_{41}^2 .$$

Знаючи розміри ланок і визначаючи швидкості за планом швидкостей, розв'язати це рівняння нескладно.

Слід відзначити, що, оскільки дійсні швидкості в механізмі збігаються з можливими, то і в методі Жуковського при визначенні зведеної сили, і при визначенні зведеної маси або моменту інерції знати закон руху ланки зведення немає потреби. Тобто, маючи схему механізму, можна побудувати його динамічну модель, виконавши зведення сил і мас, а після цього вже знайти закон його руху.

5.2.6. Рівняння руху в інтегральній та диференціальній формі

Розглянемо динамічну модель механізму з одним ступенем рухливості (рис. 5.17).

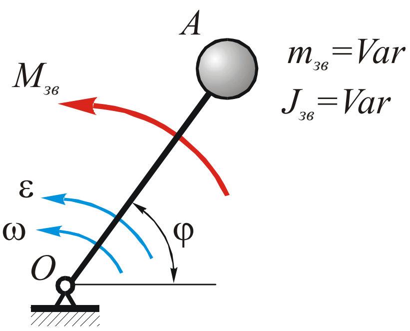


Рис. 5.17 Динамічна модель механізму з одним ступенем рухливості

Згідно з теоремою про зміну енергії, можна записати:

$$T - T_0 = \sum A . \tag{5.28}$$

Тут T – кінетична енергія механізму в даний момент часу; T_0 – початкова кінетична енергія; $\sum A$ – сумарна робот, яку виконують всі активні сили і сили тертя в кінематичних парах.

а) Рівняння руху в інтегральній формі.

Для моделі (рис.5.17)

$$\sum A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{зв} d\varphi ; \tag{5.29}$$

$$\Delta T = \frac{J_{зв}\omega^2}{2} - \frac{J_{зв0}\omega_0^2}{2} . \tag{5.30}$$

Таким чином

$$\frac{J_{зв}\omega^2}{2} - \frac{J_{зв0}\omega_0^2}{2} = \int_{\varphi_o}^{\varphi} M_{зв} d\varphi . \tag{5.31}$$

Верхня границя φ – в загальному випадку змінна. Якщо навантаження залежить тільки від положення механізму, то $M_{зв}$ є функцією лише узагальненої координати φ. Розв'язуючи це рівняння відносно ω, отримаємо:

$$\omega = \sqrt{\frac{2\int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{зв}(\varphi) d\varphi}{J_{зв}} + \frac{J_{зв0}}{J_{зв}}\omega_0^2} . \tag{5.32}$$

$M_{зв}(\varphi)$ потрібно брати з урахуванням знаку.

б) Рівняння руху в диференційній формі.

Диференціюємо рівняння (5.31)

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{J_{зв}\omega^2}{2}\right) = M_{зв} ; \tag{5.33}$$

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{J_{зв}\omega^2}{2}\right) = \frac{dJ_{зв}}{d\varphi}\frac{\omega^2}{2} + \omega J_{зв}\frac{d\omega}{d\varphi}\frac{dt}{dt} = J_{зв}\frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{2}\frac{dJ_{зв}}{d\varphi}\omega^2 .$$

Таким чином,

$$J_{зв}\frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{2}\frac{dJ_{зв}}{d\varphi}\omega^2 = M_{зв} . \tag{5.34}$$

Це і є рівняння руху в диференціальній формі, оскільки шукана змінна ω стоїть під знаком похідної.

В цьому рівнянні $M_{зв}$ і $J_{зв}$ слід брати з урахуванням знаку.

Для механізмів, у яких $J_{зв} = Const$, наприклад фрикційні або зубчасті механізми з круглими колесами, рівняння (5.34) спрощується:

$$J_{зв} \frac{d\omega}{dt} = M_{зв} . \tag{5.35}$$

Розв'язавши рівняння (5.34) відносно ω, можна знайти і кутове прискорення ланки зведення

$$\varepsilon = \frac{M_{зв}}{J_{зв}} - \frac{\omega^2}{2J_{зв}} \frac{dJ_{зв}}{d\varphi} . \tag{5.36}$$

Тема 5.3. ДИНАМІКА МЕХАНІЗМІВ ЗА НЕУСТАЛЕНОГО РЕЖИМУ РОБОТИ

5.3.1. Поняття про неусталений режим роботи

Процес руху машинного агрегату в загальному випадку складається з трьох фаз: *розбігу, усталеного режиму і вибігу.*

Розбіг і вибіг відносяться до *неусталеного режиму*, який характеризується неперіодичними змінами швидкості головного вала агрегату (початкової ланки). В усталеному режимі ці коливання або періодичні, або зовсім відсутні.

Для визначення закону руху машинного агрегату в неусталеному режимі мають бути відомими:

- кінематична схема механізму;
- характеристики геометричних мас рухомих ланок;
- механічні характеристики сил і моментів;
- початкові умови руху.

Далі ми розглянемо кілька типових прикладів визначення законів руху механізмів в неусталеному режимі.

5.3.2. Приклади динамічного дослідження різних типів машинних агрегатів за неусталеного режиму роботи

а) Закон руху механізму, навантаженого силами, які залежать від положення.

Визначимо залежність кутової швидкості початкової ланки від кута повороту при $J_{зв} = Var$. Це типова задача наприклад для бурових установок, дизель компресорів і т. ін.

Для розв'язання задачі зручно скористатися рівнянням руху в інтегральній формі:

$$\omega = \sqrt{\frac{2\sum A}{J_{зв}} + \frac{J_{зв0}}{J_{зв}}\omega_0^2} \qquad (5.37)$$

Послідовність розрахунку можна простежити на тому ж прикладі машинного агрегату „двигун внутрішнього згорання (ДВЗ) – роторна машина (РМ)” (рис. 5.18) [2].

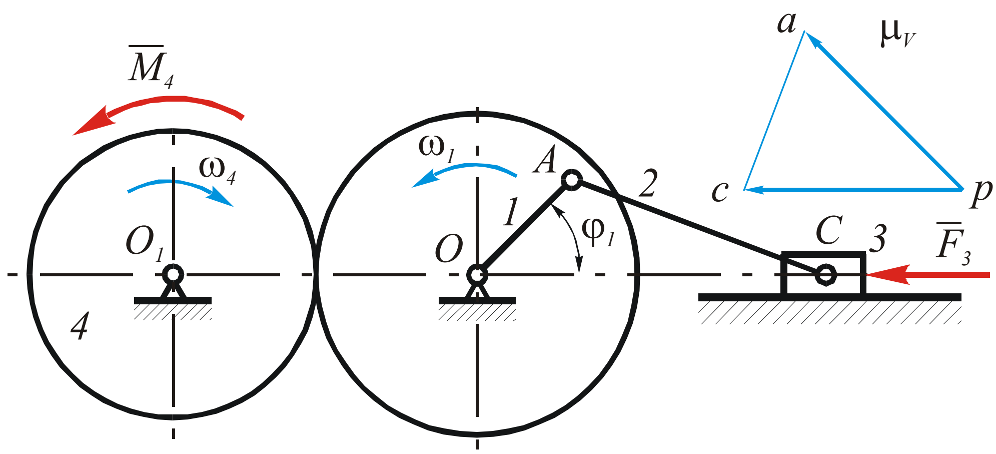


Рис. 5.18 Схема машинного агрегату ДВЗ-РМ

1. Зводимо маси до початкової ланки 1, і розглядаємо динамічну модель з одним ступенем вільності (рис. 5.17). На рис. 5.19 а зображений графік зміни $J_{зв}$ в інтервалі $\varphi_0 - \varphi$. Приймаємо $\varphi_0 = 0$.

2. За механічними характеристиками будуємо діаграми зведеного моменту. Для цього, нехтуючи силами тяжіння, тертя й інерції, припускаємо, що на механізм діє тільки сила $\overline{F}_p = \overline{F}_3$ і $\overline{M}_4 = \overline{M}_{рм}$. (Слід відзначити, що в більшості випадків таке припущення некоректне).

Оскільки ланка 1 обертальна, то маємо зведений рушійний момент $M_{зв}^{p} = M_{зв}^{дв}$:

$$M_{зв}^{дв}(\varphi) = F_3(\varphi)\frac{V_C(\varphi)}{\omega_1} = F_3(\varphi) l_{OA}\frac{V_C(\varphi)}{V_A}.$$

При $\varphi = 0$ і $\varphi = 2\pi$ $V_C = 0$.

Зведений момент сил опору $M_{зв}^{оп} = M_{зв}^{рм}$:

$$M_{зв}^{рм}(\varphi) = M_4^{(\varphi)}\frac{\omega_4}{\omega_1}.$$

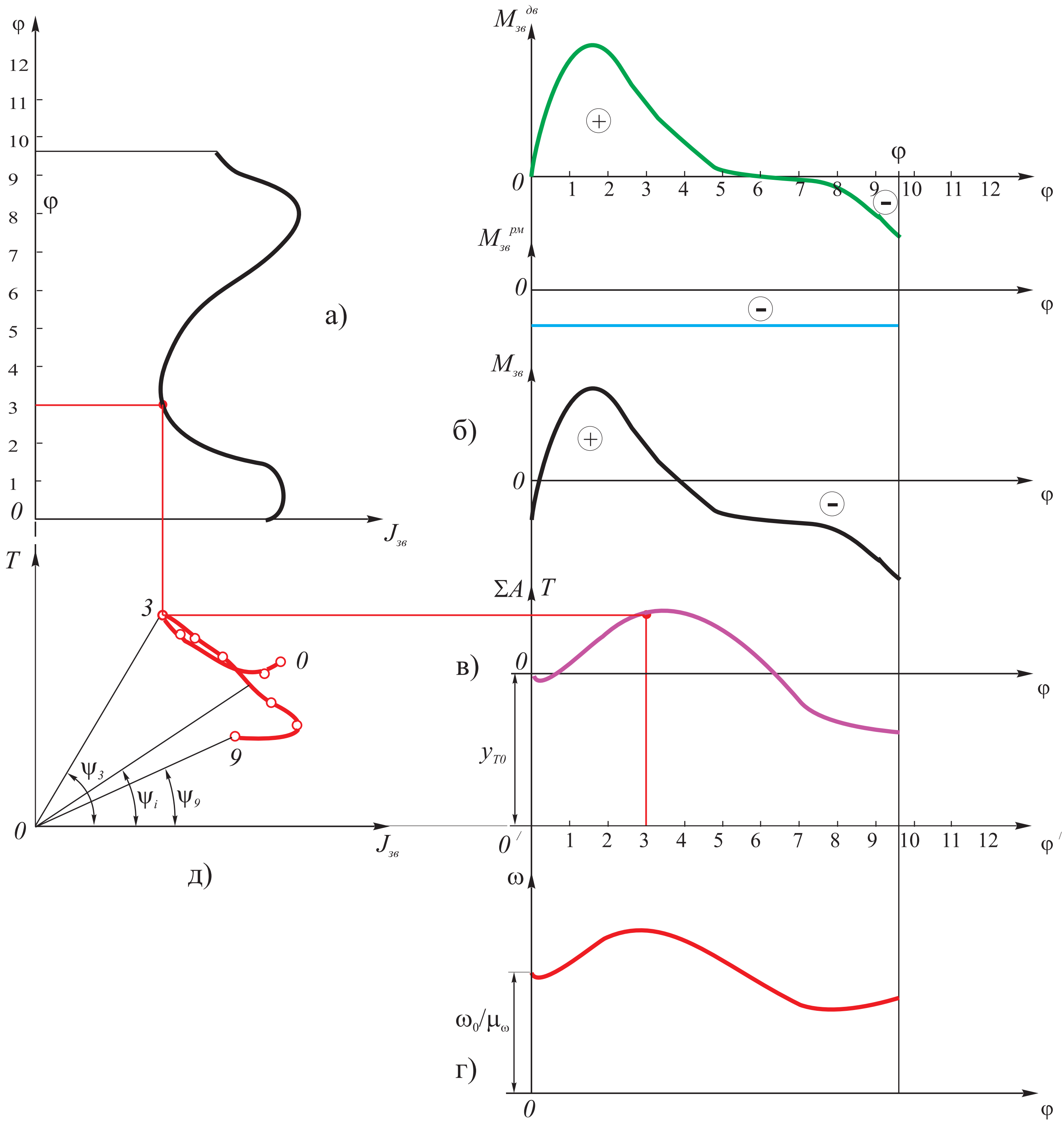


Рис. 5.19 Динамічне дослідження агрегату ДВЗ-РМ: а – діаграма зведеного моменту інерції; б – діаграма сумарного зведеного моменту; в – діаграма сумарної роботи; г – діаграма швидкості; д – крива енергомас

Сумарний зведений момент:

$$M_{зв} = M^{р}_{зв} + M^{оп}_{зв} = M^{дв}_{зв} + M^{рм}_{зв}. \qquad (5.38)$$

Тобто два верхніх графіка на рис. 5.19 б складаються. Перший графік побудований на основі механічної характеристики $F_д$ двигуна внутрішнього згорання, а нижній – на основі механічної характеристики для роторної машини.

3. Графічно інтегруємо отриману криву $M_{зв}-\varphi$ і будуємо діаграму сумарної роботи (рис. 5.19 в) $\sum A(\varphi)$.

4. Змістимо вісь φ на діаграмі $\sum A(\varphi)$ на величину $y_{T0}=\mu_A T_0$ (рис. 5.19 в), де $T_0=J_{зв0}\omega_0^2/2$. Тоді ординати, які відлічуватимемо від нової, зміщеної осі $\varphi^{/}$, зображатимуть поточне значення кінетичної енергії T в різних положеннях механізму (див. рівняння (5.28)).

5. За отриманими значеннями $J_{зв}$ і $M_{зв}$ для відповідних значень φ визначаємо $\omega(\varphi)$ з урахуванням початкових умов. $\sum A$ підставляється в (5.37) зі своїм знаком. Початкова швидкість ω_0 задана і на рис. 5.19 г представлена відрізком вертикальної осі ω_0/μ_ω Величина J_0 є величина $I_{зв}$ при $\varphi=\varphi_0$ (рис. 5.19 а).

Наглядне уявлення про зміну кутової швидкості початкової ланки можна отримати, користуючись *кривою енергомас* (діаграма Віттенбауера). Щоб її отримати, із діаграм $J_{зв}-\varphi$ і $T-\varphi$ виключити параметр φ. Для початкової ланки можна написати:

$$T=\frac{J_{зв}\omega_1^2}{2};$$

$$\omega_1=\sqrt{\frac{2T}{J_{зв}}}. \qquad (5.39)$$

Розглянемо будь-яке положення механізму, наприклад положення 3.

$$T^{(3)}=y_T^{(3)}\cdot\mu_T; \qquad J_{пр}^3=y_I^{(3)}\cdot\mu_J.$$

Тоді

$$\omega_1^{(3)}=\sqrt{\frac{2y_T^{(3)}\mu_T}{y_I^{(3)}\mu_J}}=\sqrt{\frac{2\mu_T}{\mu_J}}\sqrt{\mathrm{tg}\psi_3} \qquad (5.40)$$

Таким чином кутова швидкість ω_1 пропорційна $\mathrm{tg}\psi$, тобто, переходячи від точки до точки по кривій енергомас, можна дослідити зміну кутової швидкості в неусталеному режимі.

Лекція №10

б) Закон руху механізму, навантаженого силами, які залежать від швидкості.

Цей випадок типовий для машинних агрегатів, які включають електродвигуни і роторні машини. На відміну від попереднього прикладу, зведений момент інерції тут є величиною постійною (всі ланки обертальні).

Для аналізу зручно скористатися рівнянням руху в диференціальній формі

$$J_{зв}\frac{d\omega}{dt}=M_{зв}\,. \tag{5.41}$$

Поклавши $t_0=0$, перетворимо рівняння до виду

$$t=J_{зв}\int_{\omega_0}^{\omega}\frac{d\omega}{M_{зв}}\,. \tag{5.42}$$

Як приклад розглянемо машинний агрегат турбогенератора, що розганяється з нерухомого стану $\omega_0=0$. На рис.5.20 приведені механічні характеристики сил турбіни $M_т$ і генератора $M_г$, а також діаграма сумарного зведеного моменту $M_{зв}$.

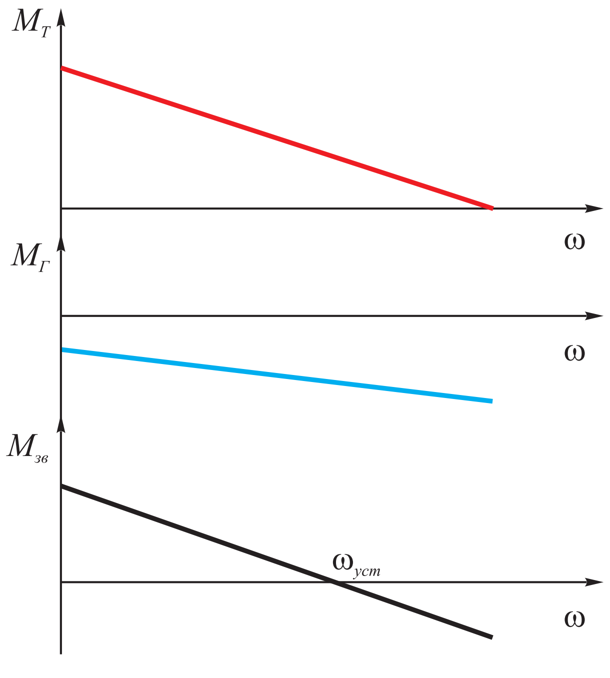


Рис. 5.20 Механічні характеристики сил, прикладених до головного валу машинного агрегату „електродвигун – роторна машина”

Рівняння отриманої прямої запишемо у вигляді:

$$M_{зв} = M_{зв0} - B\omega . \tag{5.43}$$

Тоді

$$t = J_{зв} \int_0^{\omega} \frac{d\omega}{M_{зв0} - B\omega} . \tag{5.44}$$

Розв’язок цього рівняння:

$$\omega = \omega_{уст}(1 - e^{-\frac{t}{T}}) . \tag{5.45}$$

Тут

$$\omega_{уст} = \frac{M_{зв0}}{B} ; \tag{5.46}$$

$$T = \frac{J_{зв}}{B} . \tag{5.47}$$

“T” називається *сталою часу машинного агрегату*.

На рис. 5.21 приведений графік кривої, що описується рівнянням (5.45). Відрізок $ab = T$.

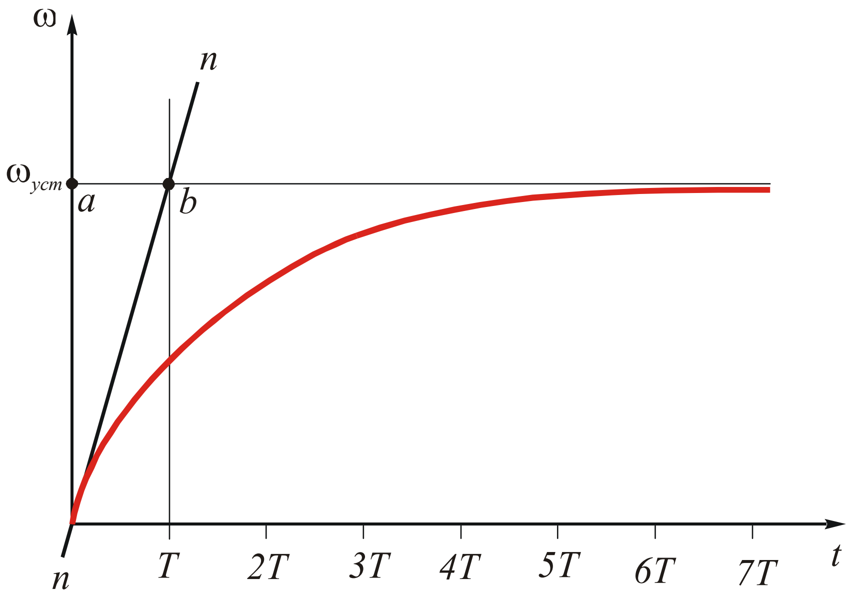


Рис. 5.21 Діаграма залежності швидкості від часу

Якби $M_{зв} = Const$, то при тому, що $J_{зв} = Const$, згідно з рівнянням руху (5.41) мали б, що й $\frac{d\omega}{dt} = Const$. Тобто рух механізму був би рівноприскореним. Для цього випадку можна записати:

$$\omega = \frac{M_{зв}}{J_{зв}} t . \tag{5.48}$$

Це рівняння прямої $n - n$ (рис. 5.21).

Підставляючи (5.46) в (5.47), отримаємо співвідношення:

$$T = \frac{J_{зв}}{B} = \frac{J_{зв}\omega_{уст}}{M_{зв}} .$$

Звідси

$$\frac{M_{зв}}{J_{зв}} = \frac{\omega_{уст}}{T} .$$

Тоді вираз (5.48) набуває вигляду:

$$\omega = \frac{\omega_{уст}}{T} t , \tag{5.49}$$

тобто розгін продовжувався б нескінченно довго, а $\omega_{уст}$ досягнута була б при $t = T$. Проте $M_{зв} \neq Const$, а, згідно з (5.43), зменшується з ростом ω. В реальних турбогенераторах швидкість обертання досягає величини $\omega \approx 0,995\omega_{уст}$ за час $t = 5T$.

Таким чином, стала часу Т дозволяє встановити тривалість розбігу. Чим більша інерційність агрегату, тим, згідно з (5.47), більшою буде Т, а значить довше триватиме розгін.

Це був розв'язок прямої задачі. Можна розв'язати і обернену задачу. Якщо відомий необхідний час спрацювання механізму t^* (час розбігу), можна знайти параметри механізму (моменти інерції ланок та їх розміри).

Якщо до складу агрегату входить асинхронний двигун, то в аналітичному вигляді розв'язати цю задачу складно, оскільки дуже важко апроксимувати криву $M_{зв}(\omega)$. (характеристика асинхронного двигуна – див. рис. 5.9 а). В цьому випадку рівняння (5.44) розв'язують графічно або чисельним інтегруванням за допомогою ЕОМ.

В) Закон руху механізму, навантаженого силами, що залежать як від швидкості, так і від положення.

Такий режим характерний для металорізальних верстатів, ковальських пресів, агрегату „стартер – ДВЗ", приладів з електромагнітним приводом (наприклад реле) і т. ін. На рис.5.22 зображена кінематична схема кривошипно-кулісного механізму стругального верстата з приводом, до складу якого входить асинхронний двигун [2].

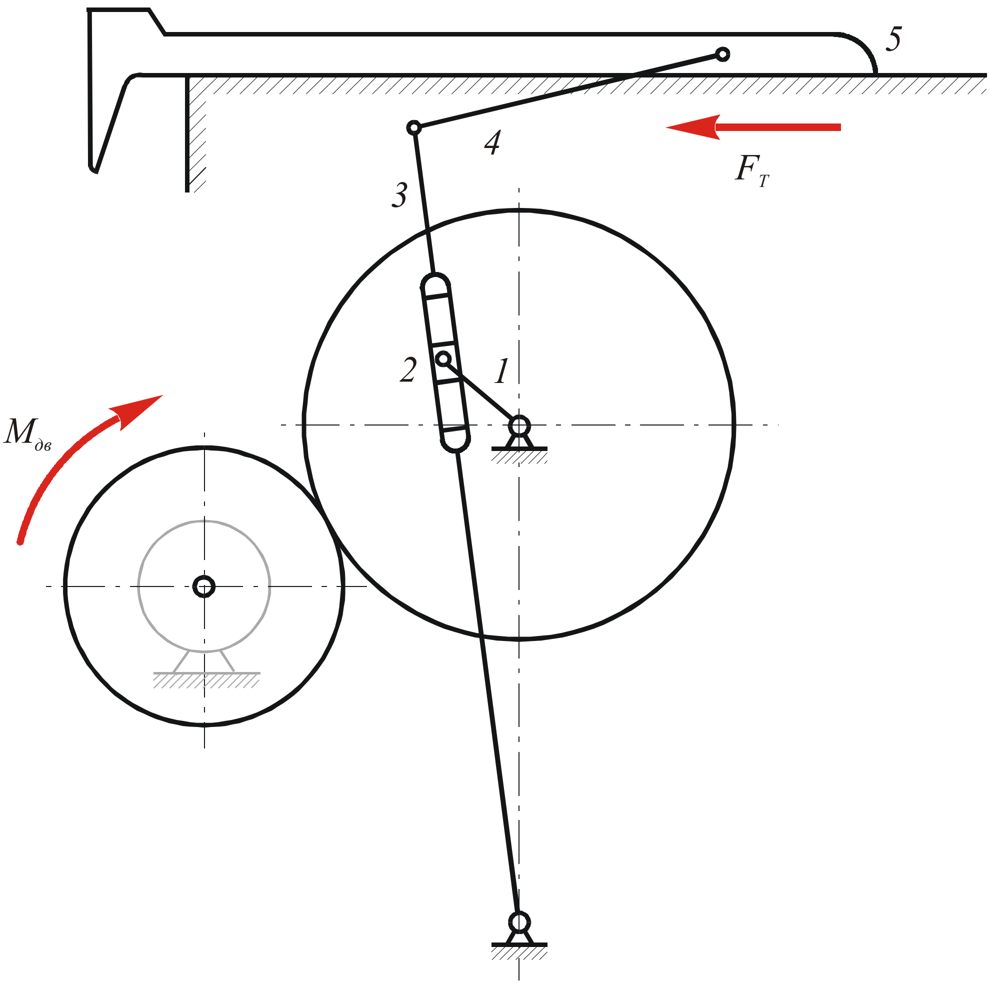


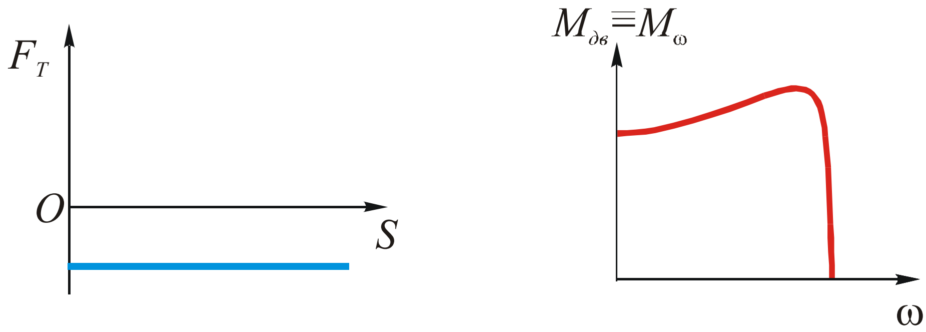
Рис. 5.22 Кінематична схема кривошипно-кулісного механізму стругального верстата з приводом

Розв'язується ця задача з використанням рівняння руху в інтегральній формі.

$$\frac{J_{зв}\omega^2}{2} - \frac{J_{зв0}\omega_0^2}{2} = \sum A \tag{5.50}$$

При розв’язанні цього рівняння робота сил, залежних від положення, відокремлюються від роботи сил, залежних від швидкості. Тому і зведення цих сил виконується окремо.

Запуск (неусталений режим) проходить в режимі холостого ходу. Тобто на механізм діють тільки сили тертя в повзуні 5 і рушійний момент асинхронного двигуна. Їх механічні характеристики показані на рис. 5.23.



а) б)

Рис. 5.23 Механічні характеристики сил тертя (а) і рушійного моменту(б)

За ланку зведення візьмемо ланку 1. Графік зведеного моменту інерції $J_{зв}$ показаний на рис. 5.24. На рис. 5.25 показаний графік зведеного моменту сил тертя M_{φ}.

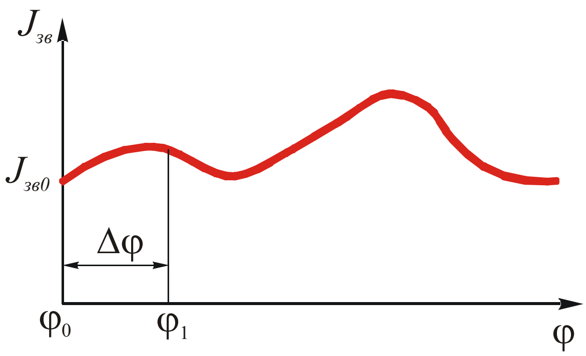


Рис. 5.24 Діаграма зведеного моменту інерції

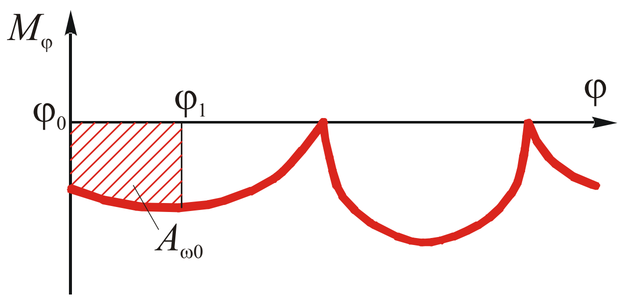


Рис. 5.25 Діаграма зведеного моменту сил тертя

Рівняння руху запишемо у вигляді:

$$\frac{J_{зв}\omega^2}{2} - \frac{J_{зв0}\omega_0^2}{2} = A_{\varphi} + A_{\omega} \tag{5.51}$$

Оскільки при розгоні змінюються і швидкість, і кут повороту, причому невідомо, як, в залежності від кута повороту, змінюється швидкість, розв’язуємо рівняння (5.51), розбиваючи кут повороту φ на малі інтервали. І для кожного інтервалу розв'язуємо це рівняння.

Для нульового положення легко знайти величини $M_{\omega 0}, \omega_0, J_{зв0}$ (див. рис. 5.23 б і 5.24).

Для першого положення $\varphi_1 = \varphi_0 + \Delta\varphi$. Для цього інтервалу рівняння руху:

$$\frac{J_{зв1}\omega_1^2}{2} - \frac{J_{зв0}\omega_0^2}{2} = A_{\varphi_{01}} + A_{\omega_{01}}.$$

Тут $J_{зв1}$ знайдемо з графіка (рис. 5.24); $A_{\varphi 01}$ знайдемо, інтегруючи криву $M_\varphi(\varphi)$ на цій ділянці (рис. 5.25). Значення $A_{\omega 01}$ знайти неможливо, оскільки невідомий закон зміни M_ω і ω від кута повороту. Але через малість інтервалу припускаємо, що на ділянці $\varphi_0 - \varphi_1$ M_ω змінюється за лінійним законом (рис. 4.26).

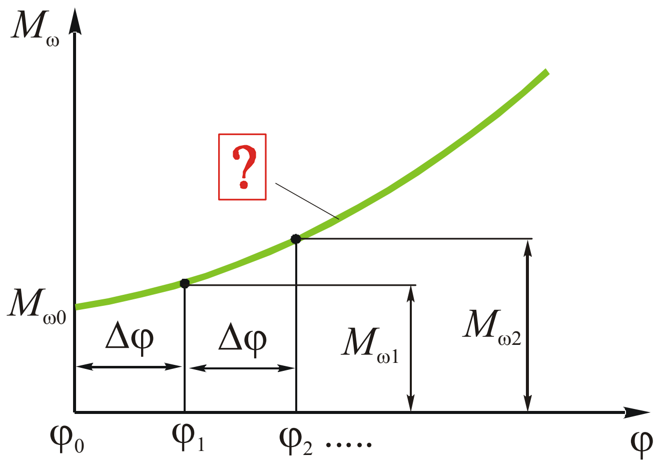


Рис. 5.26 Графік зміни рушійного моменту

Тоді

$$A_{\omega 01} \cong \frac{M_{\omega 0} + M_{\omega 1}}{2}\Delta\varphi. \tag{5.52}$$

Підставимо (5.52) в (5.51):

$$\frac{J_{зв1}\omega_1^2}{2} - T_0 = A_{\varphi 01} + \frac{M_{\omega 0} + M_{\omega 1}}{2}\Delta\varphi.$$

Звідси

$$\frac{J_{зв1}\omega_1^2}{\Delta\varphi} - \left(\frac{2T_0}{\Delta\varphi} + M_{\omega 0} + \frac{2A_{\varphi 01}}{\Delta\varphi} \right) = M_{\omega 1} . \qquad (5.53)$$

Позначимо:

$$\frac{2T_0}{\Delta\varphi} + M_{\omega 0} + \frac{2A_{\varphi 01}}{\Delta\varphi} = B_{01} .$$

$$\frac{J_{зв1}\omega_1^2}{\Delta\varphi} - B_{01} = M_{\omega 1} . \qquad (5.54)$$

В нашому прикладі $A_{\varphi 0} < 0$; $T_0 = 0$, оскільки $\omega_0 = 0$.

В рівнянні (4.54) $M_{\omega 1}$ і ω_1 невідомі, але вони зв'язані залежністю (рис. 5.23 б). Якщо ця залежність дана в аналітичній формі, то отримаємо систему рівнянь відносно $M_{\omega 1}$ і ω_1. Якщо ж заданий графік механічної характеристики $M_{\omega 1}$ (рис.5.21 б), то будуємо графік функції

$$F_{01}(\omega) = \frac{J_{зв1}}{\Delta\varphi}\omega^2 - B_{01} ,$$

наклавши його на механічну характеристику (рис. 5.27).

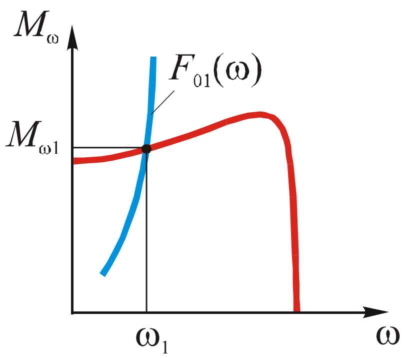


Рис. 5.27 Графічний розв'язок задачі в інтервалі φ_{0-1}

Для другого інтервалу φ_{1-2} розрахункове рівняння матиме вигляд:

$$\frac{J_{зв2}\omega_2^2}{\Delta\varphi} - B_{12} = M_{\omega 2} , \qquad (5.55)$$

де

$$\frac{2T_1}{\Delta\varphi} + M_{\omega 1} + \frac{2A_{\varphi 12}}{\Delta\varphi} = B_{12}. \quad (5.56)$$

Нове рівняння розв'язується відносно ω_2 тим же способом, що й для ω_1.

Так, послідовно пройшовши всіма інтервалами кутів φ, отримаємо графік шуканого закону зміни швидкості $\omega = \omega(\varphi)$.

Тема 5.4. ДИНАМІКА МЕХАНІЗМІВ ЗА УСТАЛЕНОГО РЕЖИМУ РОБОТИ. РЕГУЛЮВАННЯ РУХУ МАШИНИ

5.4.1. Нерівномірність руху механізму за усталеного режиму роботи

Як і для неусталеного режиму, будемо розглядати механізми з одним ступенем рухливості (w=1).

Усталений рух характеризується такими ознаками:

- швидкість початкової ланки – періодична функція часу (рис. 5.26);
- періодично змінюються сили, прикладені до механізму, і масові характеристики;
- сума робіт всіх сил за цикл дорівнює нулю:

$$\sum A_ц = 0. \quad (5.57)$$

або

$$A_p^ц = \left| A_{оп}^ц \right|. \quad (5.58)$$

За цикл приросту кінетичної енергії не відбувається ($T_0 = T_к$).

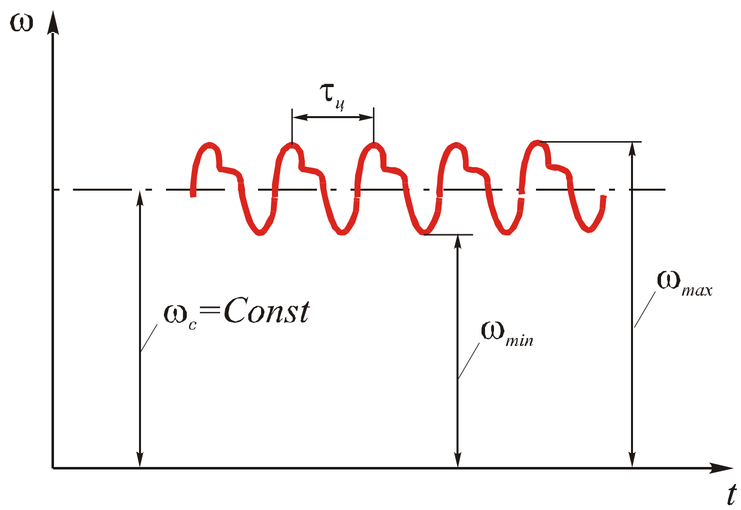


Рис. 5.28 Закон руху початкової ланки за усталеного режиму

Отже і кутова швидкість ланки на початку та в кінці циклу однакова. Зміна ω відбувається в середині циклу.

Нерівномірність обертання оцінюється коефіцієнтом нерівномірності руху:

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_c}. \tag{5.57}$$

Тут ω_c – середня швидкість в циклі:

$$\omega_c \cong \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2}. \tag{5.58}$$

Чим менша величина δ, тим менше коливання швидкості.

В усталеному режимі працює більшість технологічних машин, генератори електричної енергії, компресори, насоси і т.д.

Коливання швидкості пов’язані з прискореннями ланок. Вони призводять до виникнення динамічних навантажень, що знижує довговічність машин, знижує їх кінематичну точність і т.д. Тому величину δ потрібно обмежувати.

$$\delta \le [\delta] \tag{5.59}$$

Для металорізальних верстатів $[\delta] = \frac{1}{25} - \frac{1}{50}$, дизельних приводів електрогенераторів $\frac{1}{100} - \frac{1}{200}$.

5.4.2. Визначення коефіцієнту нерівномірності руху механізму

Для машинного агрегату приведемо маси всіх ланок до головного валу механізму і розіб’ємо зведені маси на дві групи:

I група — маси з постійним моментом інерції $J = Const = J_I$;

II група — маси зі змінним моментом інерції $J = Var = J_{II}$.

$$J_{зв} = J_I + J_{II}. \tag{5.60}$$

Нерівномірність руху механізму має місце через наявність у його складі мас другої групи. Кінетична енергія мас першої групи:

$$T_I = \frac{1}{2} J_I \omega^2. \tag{5.61}$$

Оскільки ω коливається в інтервалі $\omega_{\max} \leftrightarrow \omega_{\min}$, коливається і кінетична енергія T_I:

$$\left(T_I\right)_{\max}=\frac{1}{2}J_I\omega_{\max}^2;\left(T_I\right)_{\min}=\frac{1}{2}J_I\omega_{\min}^2.$$

Найбільший перепад кінетичної енергії

$$\Delta T_{I\text{н}\delta}=\frac{J_I\omega_{\max}^2}{2}-\frac{J_I\omega_{\min}^2}{2}=\frac{J_I}{2}\left(\omega_{\max}+\omega_{\min}\right)\left(\omega_{\max}-\omega_{\min}\right)\frac{\omega_c}{\omega_c}=J_I\delta\omega_c^2.$$

Звідси:

$$\delta=\frac{\Delta T_{I\text{н}\delta}}{\omega_c^2 J_I}\le\left[\delta\right]. \qquad (5.62)$$

Лекція №11

5.4.3. Шляхи мінімізації коефіцієнта нерівномірності руху

Згідно з рівнянням (5.62) існує три напрямки мінімізації коефіцієнта нерівномірності руху агрегату:

- збільшення інерційності мас першої групи (збільшення J_I);
- збільшення середньої швидкості руху ω_c;
- зменшення коливань кінетичної енергії механізму за рахунок зближення в кожний момент часу роботи сил рушійних A_p і сил опору A_{on}.

5.4.3.1. Динамічний синтез маховика за методом Мерцалова

Використовуючи рівняння (5.62), визначимо момент інерції мас першої групи J_I (з постійним моментом інерції), необхідний для забезпечення заданого значення $\left[\delta\right]$:

$$J_I=\frac{\Delta T_{I\text{н}\delta}}{\omega_c^2\left[\delta\right]}. \qquad (5.63)$$

Це і є рівняння динамічного синтезу за усталеного режиму. Регулювання J_I досягається постановкою на головний вал машини маховика. Кінетична енергія всього механізму, по аналогії з (5.60),

$$T=T_I+T_{II}.$$

Звідси

$$T_I = T - T_{II}. \tag{5.64}$$

Кінетичну енергію T виразимо з рівняння

$$T - T_0 = \sum A,$$

або

$$T = \sum A + T_0. \tag{5.65}$$

Звідси

$$T_I = \sum A + T_0 - T_{II}. \tag{5.66}$$

Для повного циклу будують графік $T_I(\varphi)$ і за ним знаходять $\Delta T_{I нб}$.

Проілюструємо даний метод на прикладі. За відомою вже нам з неусталеного режиму методикою будуємо графік роботи зведених сил $\sum A = A_p + A_{on}$ (рис. 5.29 а).

Другий доданок в рівнянні (5.66) можна і не враховувати, оскільки при визначенні $\Delta T_{Iнб}$ він скорочується.

Далі будують діаграму кінетичної енергії мас другої групи (зі змінним моментом інерції) $T_{II} - \varphi$ (рис. 5.29 б) за даними, отриманими з рівняння:

$$T_{II}(\varphi) \approx \frac{1}{2} J_{II}(\varphi) \cdot \omega_c^2. \tag{5.67}$$

Тут J_{II} – зведений момент інерції мас другої групи.

Віднявши, згідно з рівнянням (5.66), від діаграми $\sum A - \varphi$ (рис. 5.29 а) діаграму $T_{II} - \varphi$ (рис. 5.29 б), отримаємо діаграму зміни кінетичної енергії мас першої групи (рис. 5.29 в), а звідси і $\Delta T_{Iнб}$.

Далі за рівнянням (5.63) визначаємо J_I. Слід зауважити, що потрібний момент інерції мас з постійним моментом інерції J_I набагато більший від зведеного моменту J_I^* ланок, що входять до складу механізму. Тому можна вважати, що знайдений момент інерції і є насправді моментом інерції маховика

$$J_I \cong J_M.$$

де J_M – момент інерції маховика.

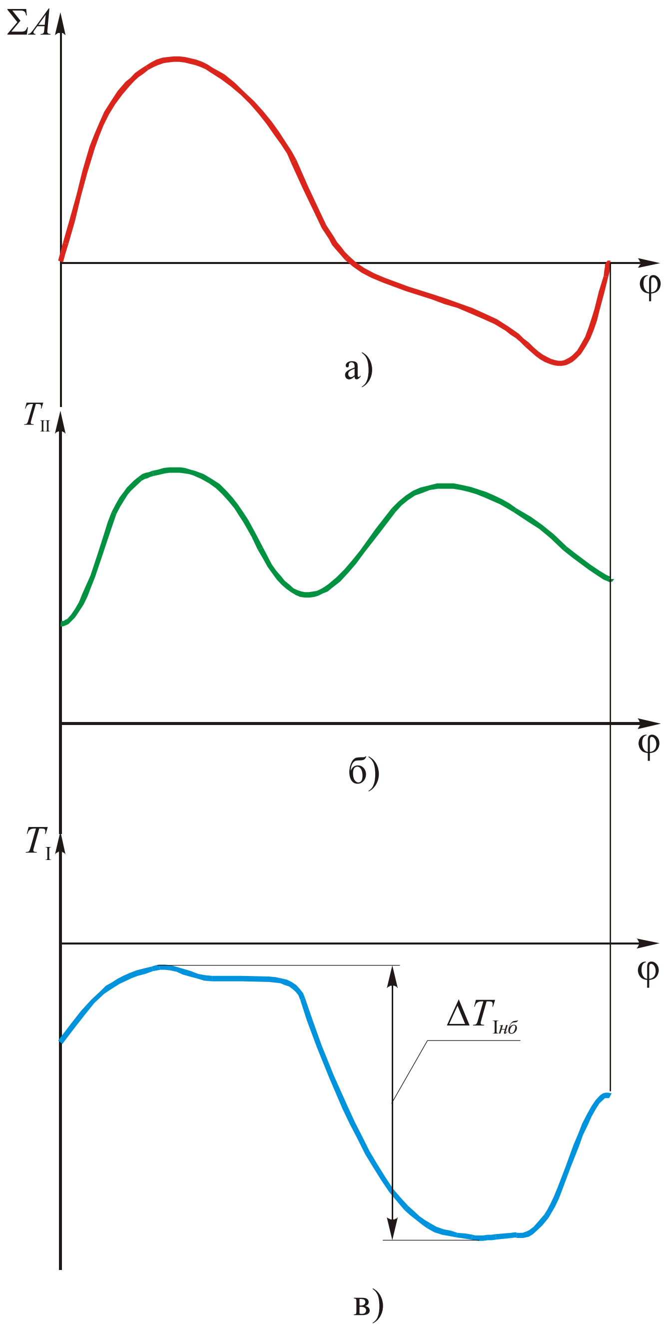


**Рис. 5.29 До синтезу маховика за методом Мерцалова:
а – діаграма роботи зведеної сили; б – графік зміни кінетичної енергії мас другої групи;
в – графік зміни кінетичної енергії мас першої групи**

Яку ж роль виконує маховик у складі машинного агрегату? Розглянемо її на прикладі агрегату, що містить двигун внутрішнього згорання і генератор. При згоранні газів двигуном виробляється енергії більше, ніж споживає генератор, і ця енергія накопичується маховиком. При вихлопі ДВЗ сам поглинає енергію, оскільки на цій стадії сила F_p виконує від'ємну роботу. Енергія T_I зменшується, тобто зменшується енергія, в першу чергу, маховика. Отже, маховик то накопичує енергію, коли є надлишок роботи двигуна, то віддає частину її. Чим вище J_M , тим менше δ.

Конструктивно маховик виконують у вигляді диска (рис. 5.30 а) або кільця зі шпицями (рис. 5.30 б). Виготовлюють його зі сталі або чавуну.

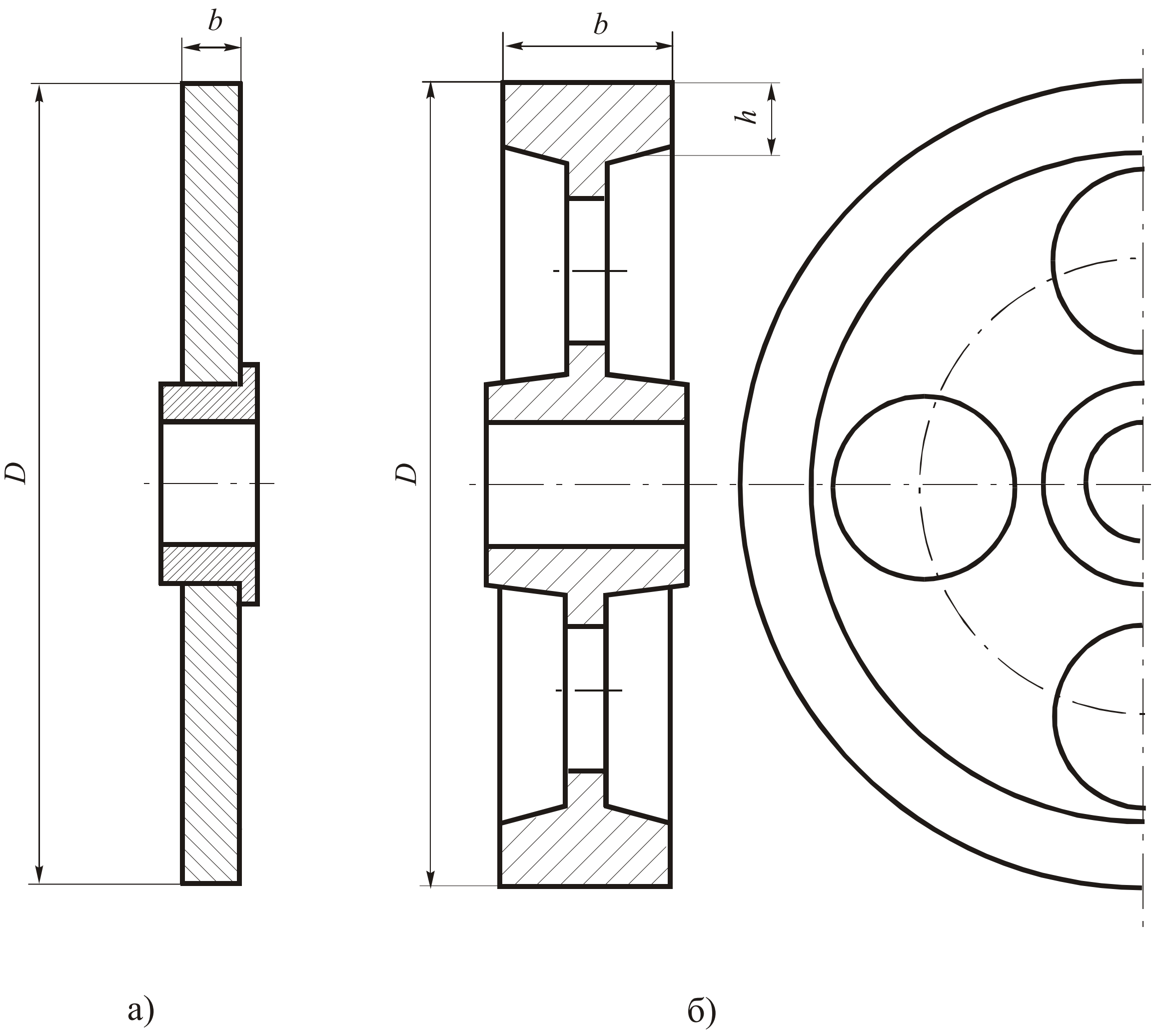


Рис. 5.30 Конструкція маховика: а – у вигляді диска; б – у вигляді кільця зі шпицями

Для дискових маховиків

$$J_M = \frac{mD_2}{8}. \tag{5.68}$$

Звідси

$$D = \sqrt[4]{\frac{32 I_M}{\pi b \rho}}, \tag{5.69}$$

де ρ – густина матеріалу.

Для маховика у вигляді кільця зі шпицями

$$J_M = \frac{mD^2}{4} = \frac{\pi bh\rho D^3}{4}. \tag{5.70}$$

Позначаючи $\lambda_b = \dfrac{b}{D}$ і $\lambda_h = \dfrac{h}{D}$, отримаємо

$$D = \sqrt[5]{\frac{4J_M}{\pi \lambda_b \lambda_h}}. \tag{5.71}$$

При однакових діаметрах маса дискового маховика вдвічі більша від маси маховика зі шпицями.

Принциповим питанням при проектуванні агрегатів з маховиком є вибір місця його розташування. Оскільки момент інерції маховика обернено пропорційний квадрату кутової швидкості ω_c, (5.63), то ставити його найраціональніше на швидкісному валу – тоді маса маховика буде найменшою. Однак це в ряді випадків, наприклад за недостатньої жорсткості ланок, може призвести до значних коливань в механізмах.

5.4.3.2. Збільшення середньої швидкості руху

Дуже ефективним способом підвищення сталості заданої швидкості обертання при роботі механізму є збільшення її середнього рівня. Оскільки це положення зрозуміле, більш детально розглядати його не станемо.

5.4.3.3. Регулювання руху зближенням роботи рушійних сил і сил опору

Класичним прикладом такого регулювання є принцип, реалізований у звичайному, нинішньому поколінню вже майже незнайомому, патефоні. Найважливішою умовою якісного відтворення звуку є постійна швидкість обертання диска патефона з розміщеною на ньому платівкою. Звукова доріжка на платівці виконана у вигляді спіралі (рис. 5.31 а).

На головку з голкою, що рухається вздовж звукової доріжки, діє сила опору, момент якої залежить від положення голки відносно платівки, тобто від радіуса *r*. Маємо лінійну функцію моменту сил опору.

Рушійний момент створюється спіральною пружиною, яка підкручується вручну за допомогою спеціальної рукоятки. Так от, характеристика пружини, теж лінійна (рис. 5.31 б), і дібрана таким чином, щоб в кожний момент часу момент сил опору урівноважувався рушійним моментом пружини.

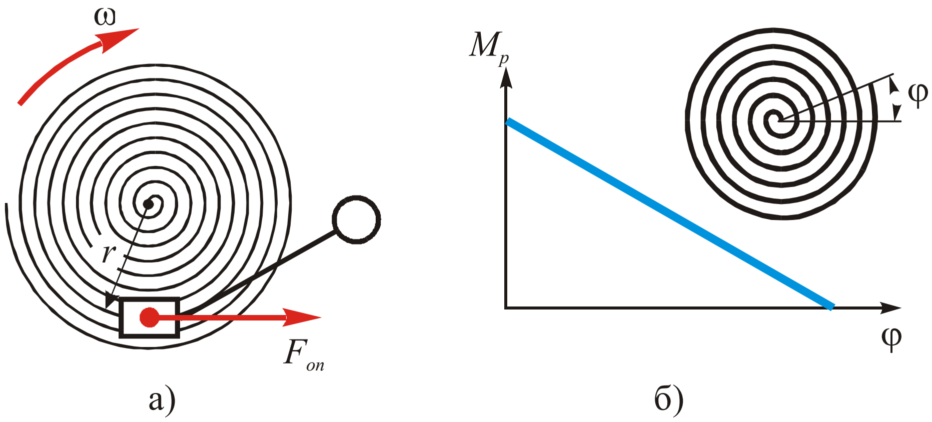


Рис. 5.31 Регулювання швидкості обертання у приводі патефона: а – схема навантаження платівки; б – характеристика пружини

На практиці найчастіше регулюють або величину моменту сил опору, залежно від величини діючого рушійного моменту, або величину рушійного моменту, залежно від величини моменту сил опору.

Якщо підтримання сталої швидкості руху відбувається за рахунок регулювання моменту сил опору $M_{оп}$, то пристрій, який забезпечує таке регулювання, називається *регулятором*, якщо ж за рахунок регулювання рушійного моменту M_p, то пристрій називається *модератором*.

Розглянемо схеми регуляторів.

1. Гальмівні регулятори (рис. 5.32).

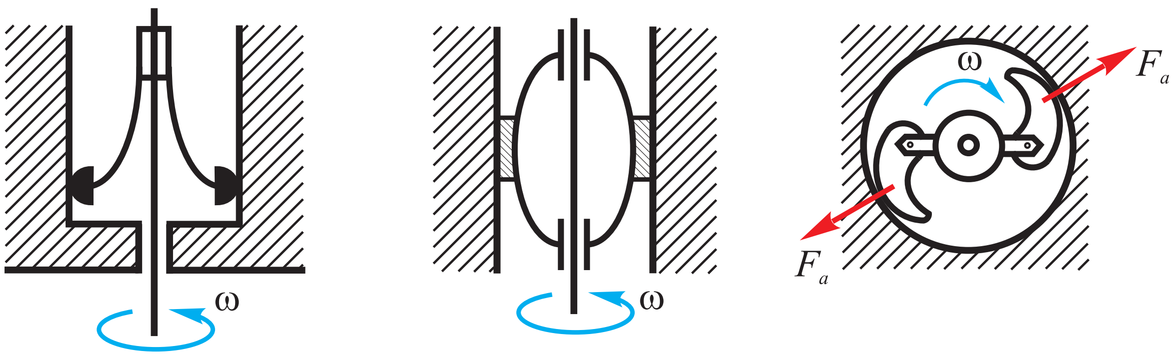


Рис. 5.32 Схеми гальмівних регуляторів

2. За рахунок тертя об повітря (рис. 5.33).
3. Відцентровий регулятор (рис. 5.34).

У відцентровому регуляторі зі збільшенням кутової швидкості рухомі маси 1 розходяться, траверса 2 намагається зміститися вгору, збільшуючи силу тиску N на фрикційний диск 3. Момент опору зростає – оберти падають.

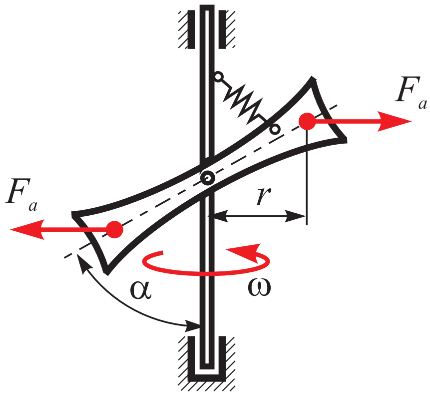


Рис. 5.33 Схема регулятора з використанням сили опору повітря

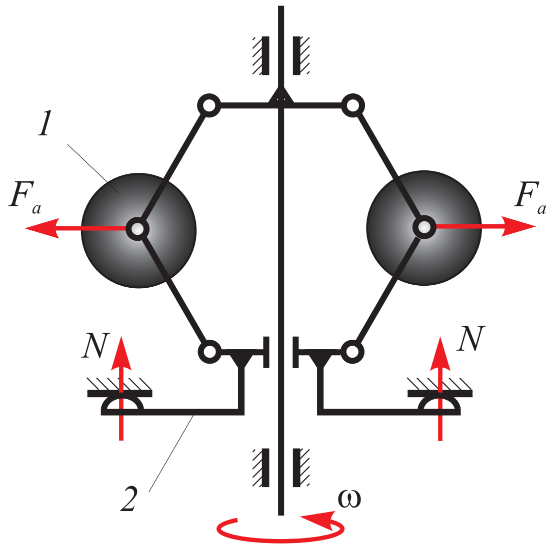


Рис. 5.33 Схема відцентрового регулятора

Схема відцентрового модератора показана на рис. 5.35.

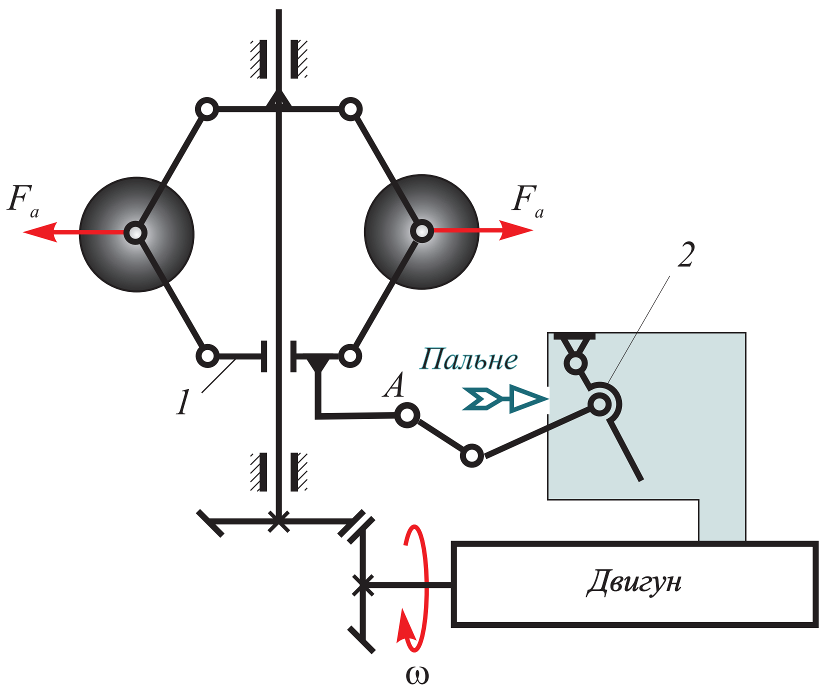


Рис. 5.35 Схема відцентрового модератора

Тут модератор працює у складі двигуна внутрішнього згорання. Чим вища швидкість обертання, тим вище розташована точка *A* рухомої траверси 1. Заслінка 2 зачиняється; подача пальної суміші зменшується і двигун скидає оберти.

В автомобілі роль модератора належить водієві: падають оберти внаслідок зростання опору з будь-якої причини – натискається педаль газу, і потрібна швидкість відновлюється.

Лекція №12

Розділ 6. СИЛОВИЙ РОЗРАХУНОК МЕХАНІЗМІВ

Завданням силового розрахунку механізмів є знаходження тисків в кінематичних парах та знаходження урівноважувальних сил і моментів.

В основі силового розрахунку лежить метод кінетостатики, який базується на принципі Даламбера.

Активні та реактивні сили урівноважуються силами інерції:

$$\sum_i F_i + \sum_j F_{aj} = 0;$$
$$\sum_i M_i + \sum_j M_{aj} = 0. \tag{6.1}$$

Тема 6.1. КІНЕТОСТАТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ГРУП АССУРА

6.1.1. Умова статичної визначності кінематичного ланцюга

Щоб система була визначною, кількість невідомих, які підлягають визначенню, не повинна перевищувати кількості рівнянь. Тому, перш ніж розв’язати задачу про знаходження тисків у кінематичних парах, потрібно з’ясувати, для яких ланцюгів виконується умова рівності між кількістю рівнянь статики (кінетостатики) і кількістю невідомих складових реакцій в кінематичних парах.

Для n ланок, на які діє просторова система сил загального виду, можна скласти $6n$ рівнянь рівноваги. Кількість невідомих реакцій, які належить визначити із цих рівнянь, для кожної кінематичної пари збігається з кількістю в’язей, які вона накладає, оскільки неможливість руху в напрямку в’язі дає реакцію у вигляді сили, а неможливість обертання – у вигляді пари сил.

Отже, умова статичної визначності просторового кінематичного ланцюга має вигляд:

$$6n = 5p_5 + 4p_4 + 3p_3 + 2p_2 + p_1, \tag{6.2}$$

де n – кількість ланок, які входять до кінематичного ланцюга; $p_5,...,p_1$ – кількість кінематичних пар відповідного класу; $5p_5,...,1p_1$ – кількість реакцій в цих парах.

Умова (6.2) збігається з умовою рівності нулю числа ступенів рухливості кінематичного ланцюга.

Для плоских ланцюгів кількість рівнянь статики дорівнює $3n$ Число невідомих реакцій для нижчої пари, згідно з п. 5.1.6., дорівнює двом. У вищій парі – одна невідома реакція.

Отже, умова статичної визначності для плоских ланцюгів має вигляд:

$$3n = 2p_5 + p_4. \qquad (6.3)$$

Таким чином, умова (6.3) відповідає умові нульового ступеня рухливості кінематичного ланцюга. Як відомо, нульовий ступінь рухливості мають групи Ассура. Тобто *групи Ассура – статично визначні системи.*

Розглянемо механізм, схема якого зображена на рис. 6.1.

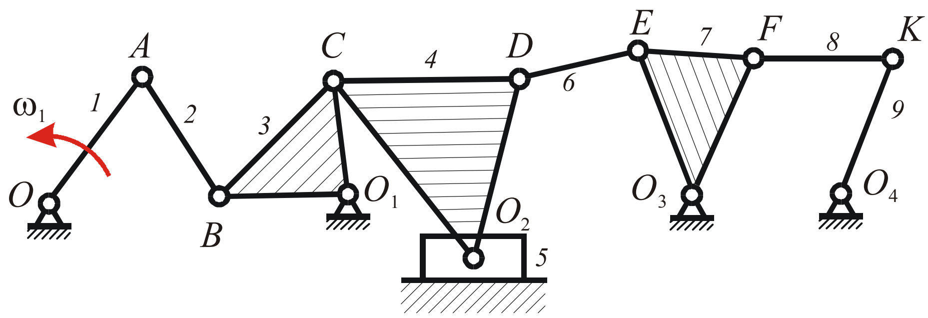


Рис. 6.1 Кінематична схема механізму

Розіб'ємо кінематичний ланцюг на групи Ассура. Візьмемо будь-яку проміжну групу, наприклад III. Вона включає ланки 6 і 7, тобто $3n = 3 \cdot 2 = 6$.

Ланки утворюють чотири кінематичні пари п'ятого класу – $2p_5 = 2 \cdot 4 = 8$. Тобто, число невідомих дорівнює 8, а число рівнянь статики – 6.

$$3n < 2p_5.$$

Отже, маємо статично невизначну систему.

Візьмемо *останню приєднану групу Ассура* (ланки 8 і 9). Тут дві ланки і три шарніри. Справедлива умова

$$3n = 2p_5.$$

Таким чином, на відміну від кінематичного аналізу, *кінетостатичне дослідження механізму потрібно починати з останньої приєднаної групи Ассура.*

6.1.2. Плани сил структурної групи

При кінетостатичному дослідженні механізму заданими являються такі параметри: розміри і вага ланок, положення центрів мас, моменти інерції мас, рушійні сили і сили опору.

Рівняння кінетостатики легко розв'язати графічно, використовуючи плани сил (векторні многокутники) для окремих структурних груп механізму.

Цей метод має, з одного боку, хорошу наочність, а з іншого, враховуючи, що розрахункові схеми, навантаження, які діють на ланки, відомі, зазвичай, лише дуже приблизно, – точність простих графічних побудов виявляється достатньою.

Послідовність кінетостатичного дослідження структурної групи методом планів сил.

1. Визначають кінематичні параметри ланок механізму, включно з прискореннями центрів мас ланок.
2. Розбивають механізм на групи Ассура.
3. Починають силовий розрахунок з останньої приєднаної групи Ассура.
4. Визначають сили ваги і сили інерції, які діють на ланки за методиками, викладеними в главі 5 (п. п. 5.1.3, 5.1.4)
5. Визначають тиск в кінематичних парах в такій послідовності:
   а) складають рівняння рівноваги структурної групи у векторній формі;
   б) користуючись методом академіка Бруєвича, знаходять нормальні і тангенціальні складові тисків в шарнірах;
   в) знаходять з допомогою плану сил повні зусилля (тиски) в шарнірах.

Тема 6.2. КІНЕТОСТАТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ПЛОСКИХ МЕХАНІЗМІВ

6.2.1. Силовий розрахунок типових механізмів методом планів сил

Розглянемо методику проведення кінетостатичного дослідження механізмів на прикладі кривошипно-коромислового механізму.

Приклад 6.1. Визначити тиски в кінематичних парах A, B і O_1 чотириланкового шарнірно-важільного механізму, кінематична схема якого зображена на рис. 6.2. Маси ланок та силу P вважати заданими. Прийняти, що $\omega_1 = Const$.

1. Будуємо плани швидкостей (рис. 6.2 б) і прискорень (рис. 6.2 в) ланок для заданого положення механізму.

Для точки А кривошипа лінійна швидкість $V_A = \omega_1 \cdot l_{OA}$ і доцентрове прискорення $a_A = \omega_1^2 \cdot l_{OA}$.

Побудову планів швидкостей і прискорень починаємо з відрізків $pa = {V_A}/{\mu_V}$ і $\pi a = {a_A}/{\mu_a}$.

Для точки B запишемо:

$$\begin{cases} \overline{V}_B \perp O_1B; \\ \overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA}; \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\overline{a}_B = \underbrace{\overline{a}_B^{\,n}}_{\parallel O_1B} + \underbrace{\overline{a}_B^{\,\tau}}_{\perp O_1B}; & a_B^n = \dfrac{V_B^2}{l_{BO_1}};\ \pi n_2 = \dfrac{a_B^n}{\mu_a}; \\[2ex]
\overline{a}_B = \overline{a}_A + \underbrace{\overline{a}_{BA}^{\,n}}_{\parallel AB} + \underbrace{\overline{a}_{BA}^{\,\tau}}_{\perp AB}; & a_{BA}^n = \dfrac{V_{BA}^2}{l_{BA}};\ an_1 = \dfrac{a_{BA}^n}{\mu_a}.
\end{cases}
$$

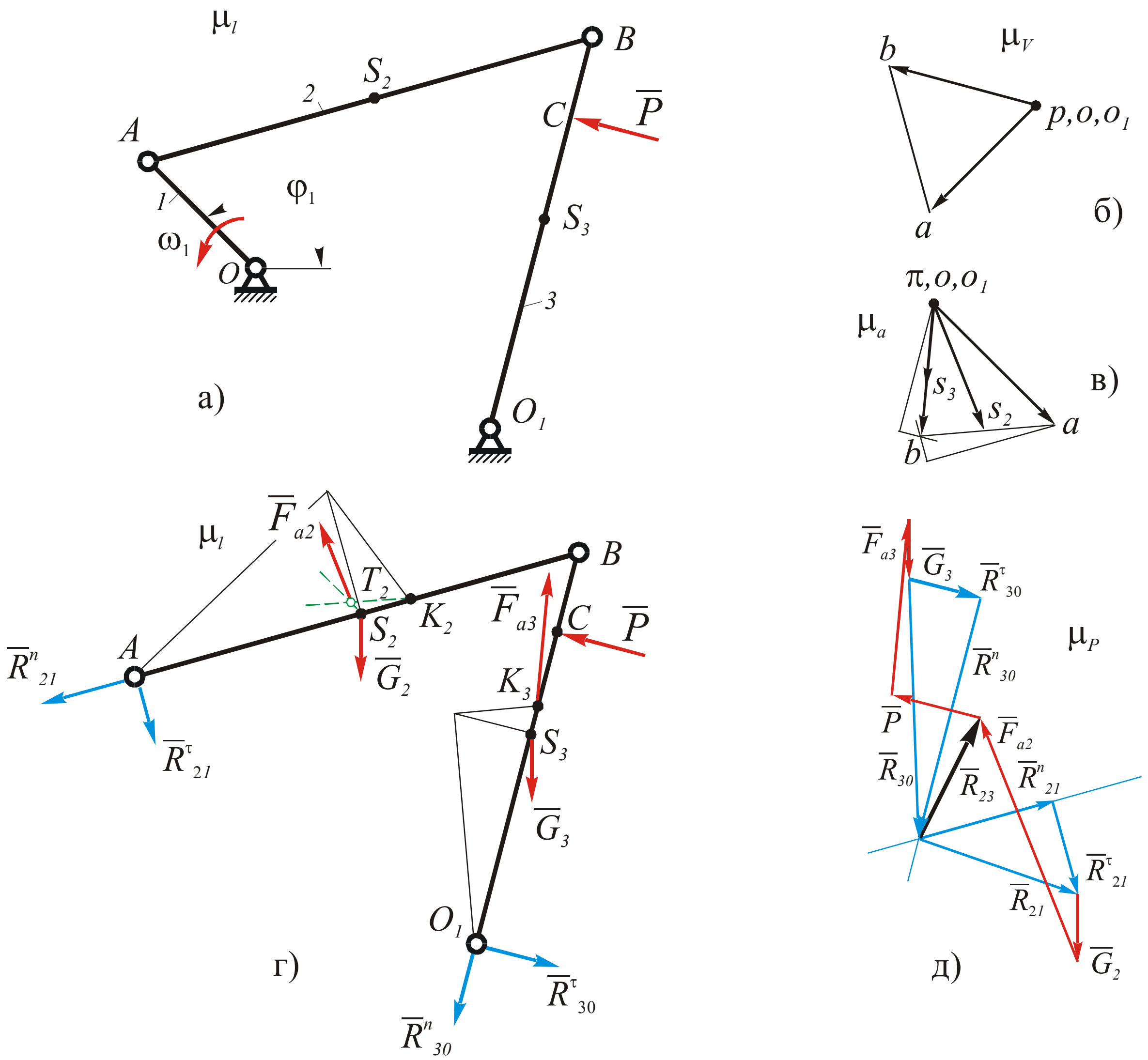


Рис. 6.2 Силовий розрахунок чотириланкового шарнірно-важільного механізму: а – кінематична схема; б – план швидкостей; в – план прискорень; г– група Ассура; д – план сил

2. Розбиваємо механізм на групи Ассура.

До початкового механізму приєднана одна група Ассура ІІ-го класу 2-го порядку (рис. 6.2 г)

3. Оскільки приєднана група тільки одна, з цієї групи й починаємо аналіз. Креслимо групу Ассура у тому ж положенні у масштабі μ_l.

4. Визначаємо сили ваги і сили інерції ланок:

$$G_2 = m_2 g; \qquad G_3 = m_3 g;$$

$$\overline{F}_{a_2} = -m_2 \overline{a}_{S_2}; \quad F_{a_2} = m_2 \cdot \mu_a \cdot \pi s_2;$$

Ланка 2 здійснює плоско-паралельний рух. Сила інерції $\overline{F}_{a_2}$ спрямована паралельно до $\overline{a}_{S_2}$ і прикладена в полюсі інерції T_2. Вважаючи ланку 2 стержнем, величину її радіуса інерції можна знайти, як $\rho_2 = l_{AB} / \sqrt{12}$.

Розглядаємо рух ланки 2 як суму поступального, наприклад з точкою *A*, і обертального навколо точки *A*. Знайдемо полюс інерції T_2 на перетині лінії дії сили інерції $\overline{F}_{a2}^{/} = -m_2 \overline{a}_A$ в поступальному русі разом з точкою *A*, що проходить через центр ваги S_2 паралельно до напрямку вектора $\overline{\pi a}$ плану прискорень, і лінії дії сили інерції в обертальному русі відносно точки *A* $\overline{F}_{a2}^{//} = -m_2 \overline{a}_{S_2 A}$, яка проходить через центр коливань ланки 2 (точка K_2) паралельно до напрямку вектора $\overline{s_2 a}$ плану.

Ланка 3 виконує обертальний рух відносно точки O_1. Сила інерції $\overline{F}_{a3} = -m_3 \overline{a}_{s3}$; $(F_{a3} = m_3 \cdot \pi S_3 \cdot \mu_a)$. Центр коливань ланки K_3, де ця сила прикладена, знайдемо, визначивши її радіус інерції $\rho_3 = l_{BO_1} / \sqrt{12}$ і виконавши відповідні побудови.

5. Визначимо тиски в кінематичних парах.

Оскільки ланки 2 і 3, що входять до групи Ассура, виділені із механізму, то в шарнірах O_1 і *A* слід прикласти реакції відповідно з боку стояка на ланку 3 $\overline{R}_{30}$ і з боку кривошипа 1 на ланку 2 $\overline{R}_{21}$. Прикладаємо їх в точках O_1 і *A* відповідно, попередньо розклавши на нормальну (вздовж осі ланки) і тангенціальну (перпендикулярно до її осі) складові. Записуємо векторне рівняння рівноваги:

$$\overline{R}_{21}^{n} + \overline{R}_{21}^{\tau} + \overline{G}_2 + \overline{F}_{a2} + \overline{P} + \overline{F}_{a3} + \overline{G}_3 + \overline{R}_{30}^{\tau} + \overline{R}_{30}^{n} = 0 \qquad (1)$$

Тут чотири невідомих, а, як відомо, з векторного рівняння (1) можна знайти тільки дві невідомі (2 рівняння в проекціях на осі).

Знайдемо тангенціальні складові $\overline{R}_{21}^{\tau}$ і $\overline{R}_{30}^{\tau}$ із умови рівності нулю моменту в шарнірі *B*.

Для ланок 2 і 3:

$$\begin{cases} \sum M_B^{(2)} = R_{21}^{\tau} \cdot l_{AB} + G_2 \cdot h_{G_2} - F_{a_2} \cdot h_{F_{a_2}} = 0 \\ \sum M_B^{(3)} = -R_{30}^{\tau} \cdot l_{O_1B} + G_3 \cdot h_{G_3} + P \cdot h_P - F_{a3} \cdot h_{F_{a_3}} = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Вибираємо масштаб μ_F $(\frac{\text{Н}}{\text{мм}})$ і знаходимо масштабні значення кожної із відомих сил:

$$\left(R_{21}^{\tau}\right) = \frac{R_{21}^{\tau}}{\mu_F}; \quad \left(F_{a_2}\right) = \frac{F_{a_2}}{\mu_F} \text{ і т.д.}$$

Розв'язуємо геометрично векторне рівняння (1), тобто будуємо багатокутник сил (рис. 6.2 д), починаючи і закінчуючи побудову з невідомих сил $\overline{R}_{21}^{n}$ і $\overline{R}_{30}^{n}$, проводячи їх напрямки.

Визначивши складові, знаходимо величину повної реакції:

$$R_{21} = \sqrt{\left(R_{21}^{n}\right)^2 + \left(R_{21}^{\tau}\right)^2}$$
$$R_{30} = \sqrt{\left(R_{30}^{n}\right)^2 + \left(R_{30}^{\tau}\right)^2}. \qquad (3)$$

Складати вектори треба послідовно для кожної ланки. Тоді безпосередньо із плану сил можна знайти тиск в кінематичній парі *B*, як замикаючий вектор для багатокутника сил, прикладених до ланки 2 або 3. Наприклад з умови рівноваги другої ланки:

$$\overline{R}_{21} + \underbrace{\overline{R}_{23}}_{?} + \overline{F}_{a_2} + \overline{G}_2 = 0 \qquad (4)$$

$$\overline{R}_{23} = -\overline{R}_{32} \qquad (5)$$

6.2.2. Кінетостатичний розрахунок початкової ланки

Розглянемо початковий механізм, який включає стояк і ланку 1 кривошипно-коромислового механізму (див. приклад 1, рис. 6.2). Прикладемо до кривошипа діючі на нього сили. В точці *A* прикладемо силу $\overline{R}_{12} = -\overline{R}_{21}$. Тут сила $\overline{R}_{12}$ є реакцією з боку ланки 2, з'єднаної з початковим механізмом і являє собою рівнодійну всіх сил, прикладених до ланок механізму. Після силового аналізу структурних груп сила $\overline{R}_{12}$ відома.

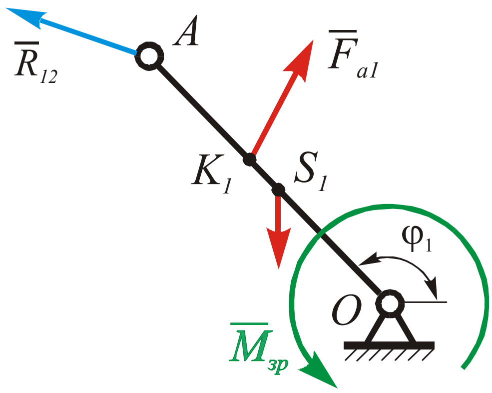


Рис. 6.3 Початковий механізм

Невідомими є реакції в шарнірі O і рушійний момент, прикладений до початкової (вхідної) ланки. Цей момент змінний і для даного моменту часу та заданих умов він розглядається як *урівноважувальний*. Тобто в даний момент часу він урівноважує всі сили, що діють на ланки механізму, включаючи сили інерції, крім реакцій в кінематичних парах (вони взаємно зрівноважені).

Запишемо рівняння рівноваги кривошипа:

$$\sum M_0 = M_{зр} + M_0\left(\overline{G}_1\right) + M_0\left(\overline{F}_{a_1}\right) + M_0\left(\overline{R}_{12}\right) = 0 \qquad (6)$$

Визначаючи $M_{зр}$ для різних положень за цикл руху механізму, будують діаграми $M_{зр} - \varphi$, за якою знаходять, наприклад, найбільш несприятливі положення вхідної ланки: $M_{зр} = M_{зр\max}$.

Отже, якщо кривошип – ведуча ланка, то $M_{зр}$ є моментом рушійних сил; якщо ця ланка ведена – то є моментом сил опору.

Якщо до ведучої ланки момент підводиться або з нього знімається через муфту (безпосередньо через вал, на якому закріплений кривошип), то зовнішнім силовим фактором є невідомим момент $M_{зр}$ Якщо ж підвід (або відвід) енергії здійснюється через фрикційну або зубчасту передачу, або підводиться до повзуна, то зовнішнім силовим фактором є урівноважувальна сила $F_{зр}$ (рис. 6.4 а, б, г).

Для пасової передачі (рис. 6.4 в) маємо дві невідомі F_1 і F_2, але вони зв'язані формулою Ейлера.

Тобто, в перелічених випадках краще розглядати не урівноважувальний момент $M_{зр}$, а урівноважувальну силу $F_{зр}$:

$$F_{зр} = \frac{M_{зр}}{h_{зр}} \qquad (7)$$

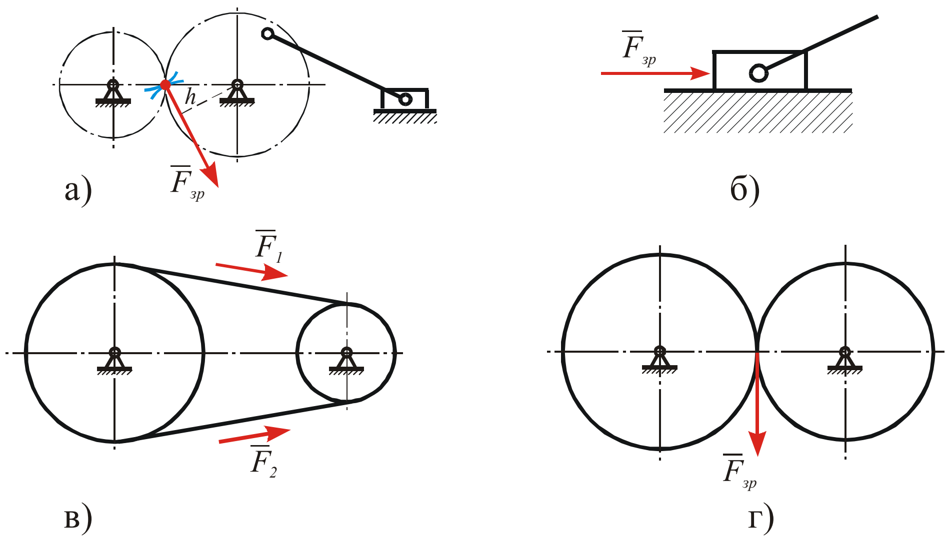


Рис. 6.4 Приклади дії урівноважувальних сил і моментів: а – в зубчастій передачі; б – в повзуні; в – в пасовій передачі; г – у фрикційній передачі;

Для пасової передачі (рис. 6.4 в) маємо дві невідомі F_1 і F_2, але вони зв'язані формулою Ейлера.

Тобто, в перелічених випадках краще розглядати не урівноважувальний момент $M_{зр}$, а урівноважувальну силу $F_{зр}$:

$$F_{зр} = \frac{M_{зр}}{h_{зр}} \tag{7}$$

Тут $M_{зр}$ визначається за рівнянням (6); $h_{зр}$ – дійсне значення плеча сили, а не його масштабне значення, взяте зі схеми.

Розв'язання задачі кінетостатичного дослідження механізму можна здійснити аналітичним методом (як і в кінематичному аналізі). Враховуючи багаторазовість розв'язку за цикл роботи ця задача дуже трудомістка. Наприклад, силовий розрахунок кривошипно-повзункового механізму дизеля, який працює в усталеному режимі, при зміні узагальненої координати $\Delta\varphi_1 = 5°$ виливається в розв'язання системи з 33-х рівнянь 72 рази кожне. Радикально знімається трудомісткість розрахунку при допомозі ЕОМ.

6.2.3. Визначення урівноважувальних сил і моментів методом жорсткого важеля Жуковського

Із викладеного вище неважко зробити висновок, що урівноважувальний момент (сила) є зведений момент або сила, прикладені до цієї ж ланки, але спрямований протилежно до напрямку $M_{зр}$ $\left(F_{зр}\right)$.

$$\bar{F}_{зр} = -\bar{F}_{зв} \tag{6.4}$$

$$\bar{M}_{зр} = -\bar{M}_{зв} \tag{6.5}$$

Зведений момент при цьому включає всі сили, прикладені до механізму, включно з силами інерції.

Отже, для визначення урівноважувального моменту (сили) можна користуватися тими ж методами і розрахунковими формулами, що і при визначенні зведених моментів (сил), не проводячи кінетостатичного дослідження всього механізму. (Не потрібно визначати спеціально тиск в кінематичних парах між вхідною або вихідною ланкою і приєднаними до них ланками структурних груп). Нагадаємо, що тиски в шарнірах є внутрішніми силами механізму.

Використаємо для визначення $M_{зр}$ метод жорсткого важеля Жуковського.

<u>Приклад 5.2.</u> Для механізму, зображеного на рис. 6.5, визначимо методом жорсткого важеля Жуковського урівноважувальний момент, прикладений до вхідної ланки 1. Прийняти, що $\omega_1 = Const$.

Ступінь його рухливості $w = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1$. Вхідною ланкою є ланка 1, закон руху якої нам заданий.

На механізм діє задана система зовнішніх сил (див. рис. 6.5а). У загальному випадку механізм як система, яка має одну ступінь вільності, не буде знаходитись в рівновазі. Щоб привести механізм до врівноваженого стану, треба в деякій точці прикласти урівноважувальну силу $\bar{F}_{зр}$. За таку точку вибираємо точку А на ланці 1. Задаємо напрямок сили $\bar{F}_{зр}$, наприклад перпендикулярно до OA.

Щоб скористатися методом Жуковського, будуємо в довільному масштабі план швидкостей механізму (рис. 6.5 б), та повертаємо його на 90° проти напрямку ω_1 (рис. 6.5 в). Перенесемо у відповідні точки плану всі сили, що діють на механізм. До точки A у вибраному напрямку прикладаємо урівноважувальну силу $\bar{F}_{зр}$ Записуємо умову рівноваги важеля відносно полюса p:

$$M_p\left(\bar{F}_1\right) + M_p\left(\bar{F}_2\right) + M_p\left(\bar{F}_3\right) + M_p\left(\bar{F}_4\right) + M_p\left(\bar{F}_5\right) + M_p\left(\bar{F}_{зр}\right) = 0 \tag{1}$$

Позначивши відповідним чином плечі і зважаючи на знак моментів, знаходимо:

$$F_{зр} = F_1 \frac{h_1}{h_{зр}} + F_2 \frac{h_2}{h_{зр}} + F_4 \frac{h_4}{h_{зр}} - F_3 \frac{h_3}{h_{зр}} - F_5 \frac{h_5}{h_{зр}} \tag{2}$$

Відношення відрізків $h_i/h_{зр}$ беруться безпосередньо з плану швидкостей.

Примітка: на рис. 5.5 в) показане лише плече сили $\overline{F}_2$.

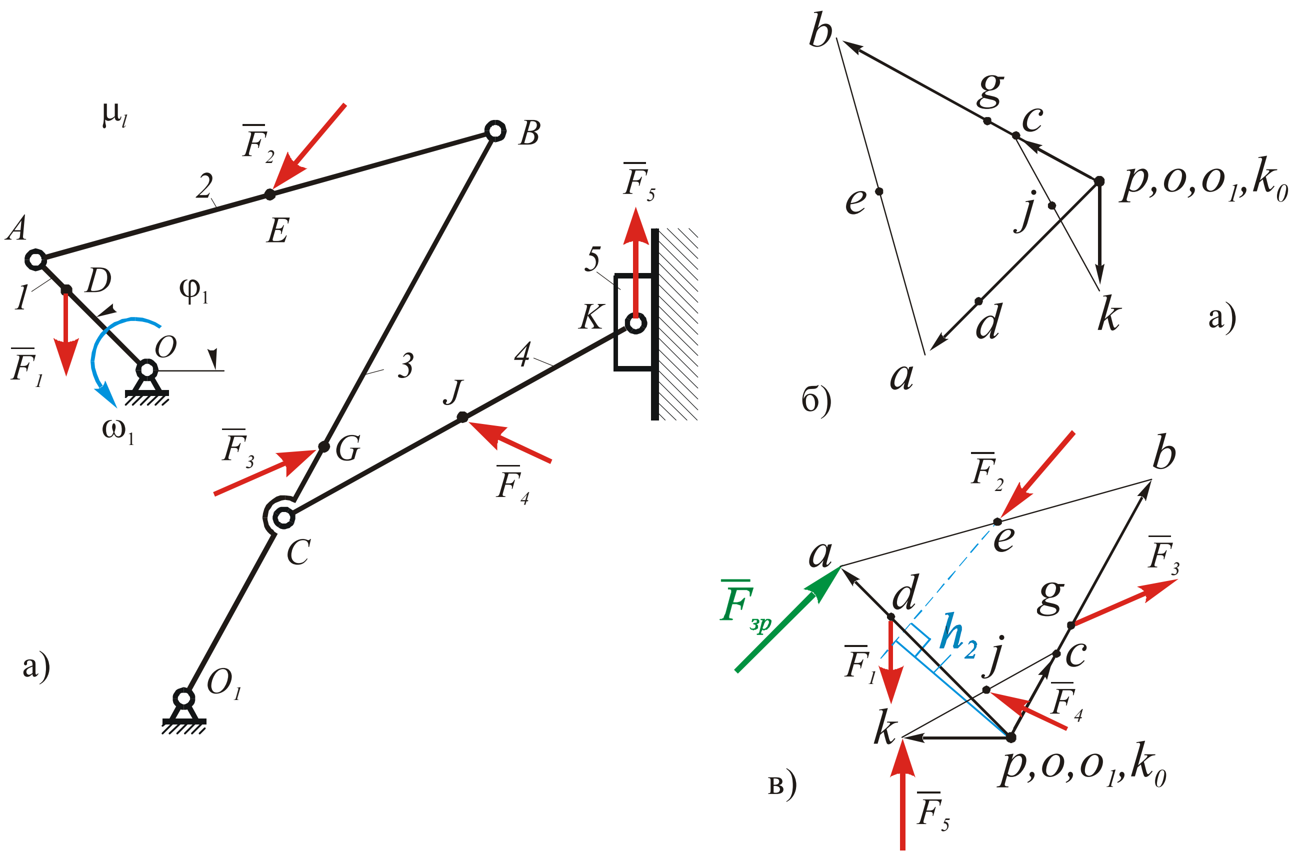


Рис. 6.5 Силовий розрахунок шестиланкового шарнірно-важільного механізму: а – кінематична схема; б – план швидкостей; в – жорсткий важіль Жуковського

Викладений метод є загальним для механізмів будь-якого класу.

При динамічному аналізі, на відміну від кінетостатичного, сили до ланки зведення загалом зводяться роздільно. Наприклад, окремо сили опору, сили тертя, рушійні та інші сили. Сили ваги найчастіше зводять разом з рушійними силами. Роздільне зведення дозволяє краще врахувати вплив кожної сили на закон руху механізму.

Лекція №13

Розділ 7. УРІВНОВАЖУВАННЯ МЕХАНІЗМІВ

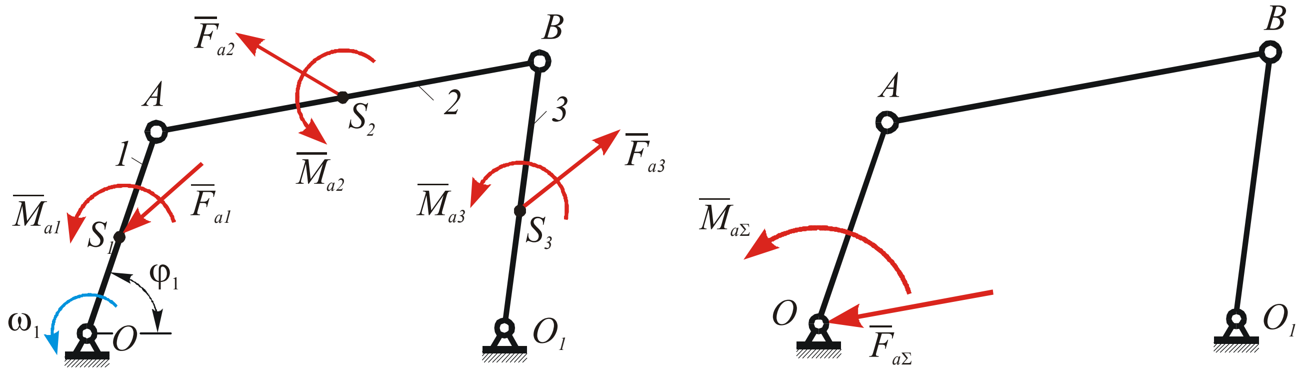
Виконуючи силовий розрахунок механізму, ми встановили, що у загальному випадку в кінематичних парах, утворених рухомими ланками зі стояком, діють реакції. За прискореного руху ланок ці реакції містять динамічні складові, які в усталеному режимі до того ж змінюються циклічно. Тобто, вони можуть бути джерелом багатьох небажаних ефектів, наприклад вібрацій, які передаються основі (стояку), а отже і на фундамент.

Завданням великої ваги є максимально можливе усунення цього ефекту, що досягається зрівноважуванням або балансуванням рухомих мас механізмів.

Тема 7.1. НЕВРІВНОВАЖЕНІСТЬ МЕХАНІЗМІВ

7.1.1. Види неврівноваженості механізмів

Розглянемо шарнірно-важільний чотириланковий механізм (рис. 7.1).



а) б)

Рис. 7.1 Шарнірно-важільний механізм: а вихідна схема; б – еквівалентна схема

Закон руху вхідної ланки заданий – $\omega_1 = Const$. Решта ланок рухається прискорено. Знаючи розміри і характеристики мас ланок, можна визначити їх сили і моменти інерції. Зведемо всю систему сил інерції до центру шарніра *O* (рис. 7.1. б) і подамо у вигляді головного вектора і головного моменту:

$$\overline{F}_{a_\Sigma} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_{a_i} \tag{7.1}$$

$$\bar{M}_{a_\Sigma} = \sum_{i=2}^{n} M_0\left(F_{a_i}\right) + \sum_{i=2}^{n} M_{a_i} \tag{7.2}$$

де n – кількість рухомих ланок механізму.

Для першої ланки $\omega_1 = Const$. Отже $\varepsilon_1 = 0$, а значить $M_{a1} = 0$. Крім того, оскільки лінія дії сили інерції першої ланки $\bar{F}_{a1}$ проходить через точку O, момент цієї сили відносно точки O $M_0\left(\bar{F}_{a1}\right) = 0$.

Навантаження $F_{a\Sigma}$ і $M_{a\Sigma}$ є причиною динамічного навантаження основи (хоча це чисто розрахункові величини і в суть їх ми не вдаємось).

Якщо головний вектор $F_{a\Sigma}$ і головний момент $\bar{M}_{a\Sigma}$ системи сил інерції не дорівнюють нулю, то такий механізм вважається статично неврівноваженими.

Якщо головний вектор сил інерції механізму $\bar{F}_{a\Sigma} = 0$, а головний момент $\bar{M}_{a\Sigma} \neq 0$, то має місце моментна неврівноваженість механізму.

7.1.2. Статичне та моментне врівноваження механізмів на стадії проектування

а) Статичне врівноважування механізмів.

У цьому випадку домагаються виконання умови

$$\bar{F}_{a_\Sigma} = 0 \tag{7.3}$$

В результаті усувається динамічна дія сил інерції на фундамент (але дія моментів зберігається).

Можна записати

$$\bar{F}_{a_\Sigma} = -m_\Sigma \bar{a}_S \tag{7.4}$$

Тут m_Σ — сумарна маса усіх рухомих ланок; $\bar{a}_S$ – прискорення центру мас системи. Тобто статичне врівноваження досягається за умови, що центр мас системи буде нерухомим.

Із теоретичної механіки відомо, що за плоско-паралельного руху тіло можна представити у вигляді двох зосереджених мас (рис. 7.2), що підлягають умові:

$$\begin{cases} m = m_A + m_B \\ m_A l_{AS} = m_B l_{BS} \end{cases}. \tag{7.5}$$

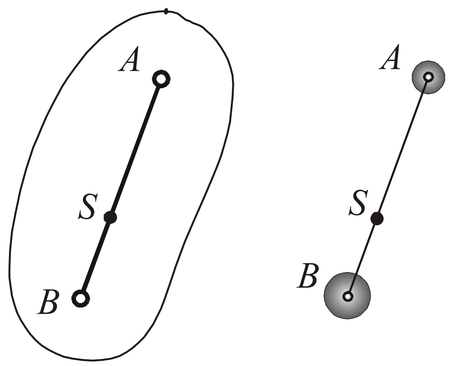


Рис. 7.2 Тіло та його модель

Друга умова свідчить, що центр мас *S* міститься в тому ж місці. А значить головний вектор сил інерції замінної системи дорівнює головному вектору сил інерції заданого тіла. (Однак головні моменти сил інерції не збігаються, але для статичного зрівноважування це ролі не грає).

Виконаємо статичне врівноважування шарнірного чотириланкового механізму (рис. 7.3).

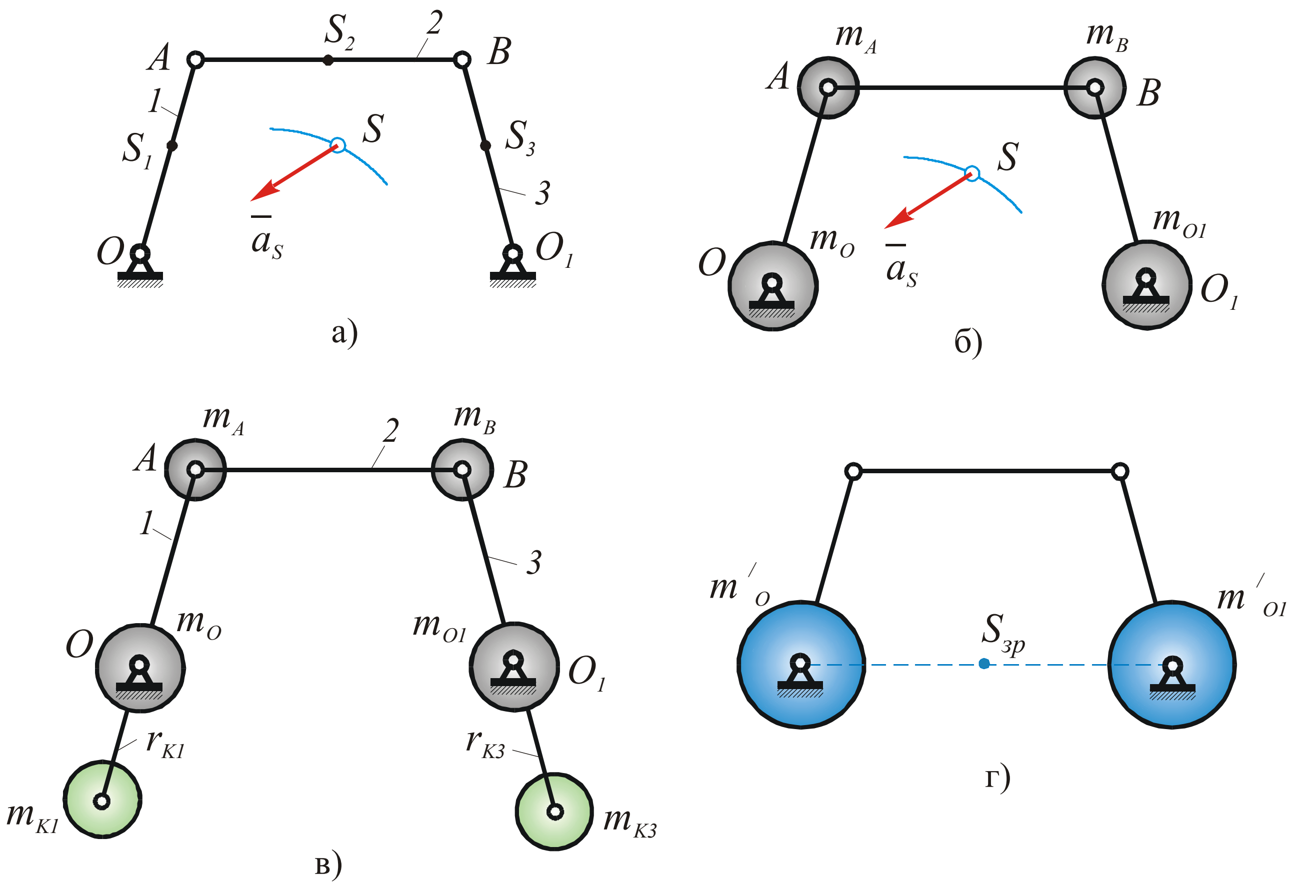


Рис. 7.3 Статичне врівноважування чотириланкового механізму: вихідна схема (а); еквівалентні схеми (б, в, г)

Вважатимемо заданими маси ланок m_1, m_2, m_3 і їх довжини l_1, l_2, l_3. S – центр мас механізму. Замінимо кожну ланку двома зосередженими масами (рис. 7.3 б).

Для ланки 1, користуючись умовою (6.5), можна записати:

$$\begin{cases} m_1 = m_0 + m_{A1}; \\ m_0 l_{OS_1} = m_{A1} l_{AS_1}. \end{cases}$$

Звідси

$$m_1 = m_0 + m_0 \frac{l_{OS_1}}{l_{AS_1}} = m_0 \left(\frac{l_1}{l_{AS_1}} \right); \; m_1 = m_{A1} + m_{A1} \frac{l_{AS_1}}{l_{OS_1}} = m_{A1} \left(\frac{l_{OS_1}}{l_1} \right).$$

Остаточно отримаємо співвідношення:

$$m_0 = m_1 \frac{l_{AS_1}}{l_1}; \qquad m_{A1} = m_1 \frac{l_{OS_1}}{l_1}.$$

За аналогією:

$$m_{A2} = m_2 \frac{l_{BS_2}}{l_2}; \quad m_{B2} = m_2 \frac{l_{AS_2}}{l_2}.$$

$$m_{B3} = m_3 \frac{l_{O_1S_3}}{l_3}; \quad m_{O_1} = m_3 \frac{l_{BS_3}}{l_3}.$$

Таким чином, механізм замінений чотирма масами m_O, $m_A = m_{A1} + m_{A2}$, $m_B = m_{B1} + m_{B2}$, m_{O_1}. Центр мас механізму залишається в тому ж місці і рухається прискорено (рис. 7.3 б).

На ланках 1 і 3 розмістимо противаги m_{K1} і m_{K3} (рис. 7.3 в) таким чином, щоб спільні центри мас двомасових систем $[m_A, m_{K1}]$ і $[m_B, m_{K3}]$ опинилися в точках O і O_1 відповідно. Для цього мають виконуватись умови:

$$\begin{cases} m_A l_1 = m_{K1} r_{K1}; \\ m_B l_3 = m_{K3} r_{K3}. \end{cases}, \tag{7.6}$$

Об’єднаємо маси на 1-й і 3-й ланках:

$$m'_O = m_A + m_{K1} + m_O\,;\; m'_{O_1} = m_B + m_{K3} + m_{O_1}\,.$$

Тобто після постановки противаг, що підлягають умові (7.6), механізм можна подати у вигляді двох нерухомих мас m'_O і m'_{O_1}.

Отже центр мас механізму з балансирами m_{K1} і m_{K3} стає **нерухомим** (рис. 7.3 г). Маси балансирів m_{K1} і m_{K3} підбирають за умовами (7.6), задаючись радіусами r_{K1} і r_{K3}.

б) Моментне врівноважування механізмів.

Моментне врівноважування виконується після повного статичного врівноважування. Завданням моментного врівноважування є досягнення умови

$$\bar{M}_{a\Sigma} = 0\,. \tag{7.7}$$

Розглянемо статично врівноважений у попередньому прикладі механізм (рис. 7.4).

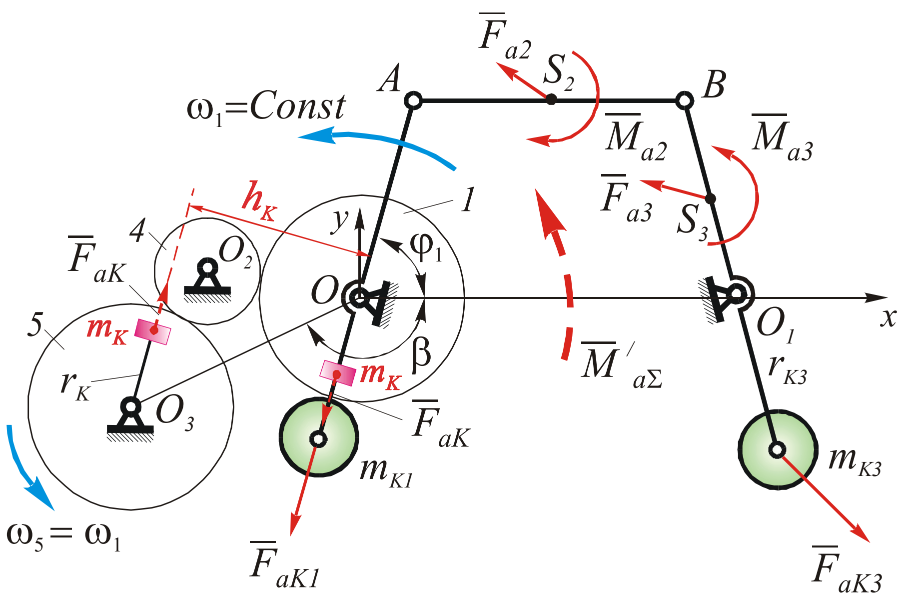


Рис. 7.4 Схема моментного врівноважування механізму

У вираз для головного моменту інерції такого механізму увійдуть і моменти інерції мас противаг m_{K1} і m_{K3}.

Оскільки $\omega_1 = Const$, то $M_O\left(\bar{F}_{aK1}\right) = 0$, адже лінія дії сили інерції $\bar{F}_{aK1}$ при цьому проходить через центр обертання ланки – точку *O*.

Таким чином

$$\bar{M}'_{a\Sigma} = \bar{M}_{a_2} + \bar{M}_{a_3} + \bar{M}_0\left(\bar{F}_{aK3}\right) = 0\,. \tag{7.8}$$

Закон зміни цього моменту за цикл наведений на рис. 7.5.

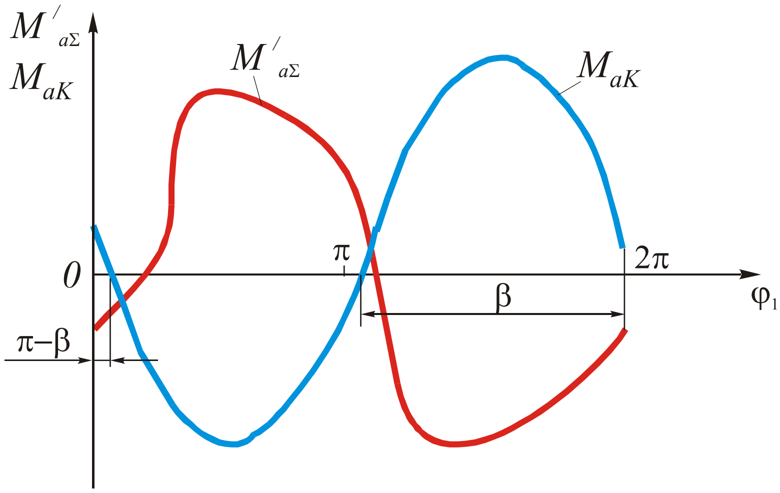


Рис. 6.5 Визначення величини компенсуючого моменту M_{aK}

Моментне врівноважування зводиться до того, щоб до системи прикласти деякий компенсуючий зовнішній момент M_{aK}, графік зміни якого (рис. 7.5), складаючись з графіком зміни головного моменту інерції $\bar{M}'_{a\Sigma}$, дав би у сумі "0". Досягається це, наприклад, таким чином. З кривошипом 1 (рис. 7.4) жорстко з'єднують зубчасте колесо, кінематично пов'язане з другим зубчастим колесом таким чином, щоб передатне відношення між ними дорівнювало 1 ($u_{15} = 1$). Тоді $\omega_1 = \omega_5 = Const$. Причому напрямки обертання цих коліс мають збігатися.

На ланках 1 і 5 розміщують однакові допоміжні маси m_K (рис. 7.4). Радіальні координати r_K цих мас для ланок 1 і 5 однакові, а кутові відрізняється на π. На кожну з цих мас діють сили інерції $\bar{F}_{aK}$, утворюючи пару сил на плечі h_K. Модуль цієї пари:

$$M_{a_K} = m_K r_K \omega_1^2 h_K = m_K r_K \omega_1^2 l_{OO_3} \sin\left(\varphi_1 + \beta\right) \tag{7.9}$$

Це рівняння синусоїди, зсунутої на $\angle\beta$ вліво уздовж осі φ_1.

Задача полягає в тому, щоб, варіюючи параметри синусоїди, максимально наблизити цю криву до такого положення, коли вона перебуватиме по відношенню до графіка $\bar{M}'_{a\Sigma}$ ніби в протифазі. Краще варіювати величину амплітуди $M_K^* = m_K r_K \omega_1^2 l_{OO_3}$ і кут β.

Дібравши їх найкращим чином, знаходять масу m_K:

$$m_K = \frac{M_K^*}{r_K \omega_1^2 l_{OO_3}} \tag{7.10}$$

Тема 7.2. УРІВНОВАЖУВАННЯ ОБЕРТОВИХ МАС (РОТОРІВ)

7.2.1. Неврівноваженість ротора та її види

Роторами називатимемо будь-які обертові маси: зубчасті колеса, робочі колеса турбін, колінчасті вали, маховики і т. ін. Питання їх балансування як на стадії проектування, так і після виготовлення, стоїть дуже серйозно. Наприклад швидкість обертання турбіни атомної електростанції становить ~400 хв$^{-1}$, а ротор важить ~50 т. Її діаметр близько 2 м, а довжина 20 м. Незбалансованість ротора турбіни може призвести до сильних вібрацій, а можливо і до катастрофи. В газотурбінних двигунах кількість обертів головного вала турбіни ~10000 хв$^{-1}$!

При рівномірному обертанні ротора відносно осі z (рис. 7.6) можуть виникнути динамічні навантаження, якщо центр мас S не буде лежати на його осі.

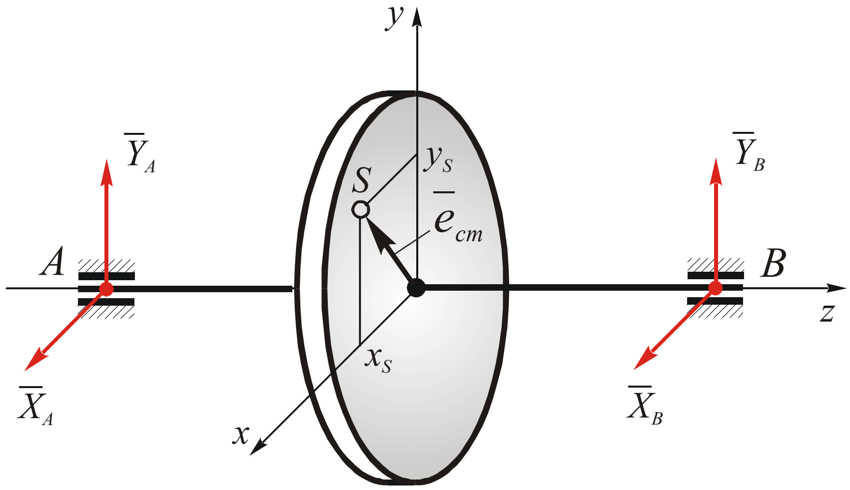


Рис. 7.6 Ротор з ексцентриситетом маси

Головний вектор сил інерції $F_a = m\omega^2\sqrt{x_S^2 + y_S^2}$. У векторному вигляді запишемо

$$\overline{F}_a = m\omega^2\overline{e}_{cm}. \tag{7.11}$$

Тут $\overline{e}_{cm} = \overline{r}_S$ – радіус-вектор центру мас S ротора і називається *ексцентриситетом маси ротора*.

Позначимо

$$\overline{D}_{cm} = m\overline{e}_{cm}. \tag{7.12}$$

Це *головний вектор дисбалансу ротора*.

Тоді

$$\overline{F}_a = \omega^2\overline{D}_{cm}. \tag{7.13}$$

Головний момент інерції ротора $M_a = \omega^2 \sqrt{J_{xz}^2 + J_{yz}^2}$ або $M_a = \omega^2 M_D$. Тут $M_D = \sqrt{J_{xz}^2 + J_{yz}^2}$ – *головний момент дисбалансу ротора*. Ця величина має векторний зміст, тобто

$$\bar{M}_a = \omega^2 \bar{M}_D. \qquad (7.14)$$

На практиці неврівноваженість ротора характеризується не величинами $\bar{F}_a$ і $\bar{M}_a$, а пропорційними їм головним вектором $\bar{D}_{cm}$ і головним моментом $\bar{M}_D$ дисбалансу ротора.

Розрізняють *статичну*, *моментну* і *динамічну* неврівноваженість ротора.

а) Статична неврівноваженість ротора.

Має місце, коли центр мас не лежить на осі обертання, але головна центральна вісь інерції паралельна осі обертання (рис. 7.7). Така неврівноваженість характерна, наприклад, для колінчастих валів з одним коліном.

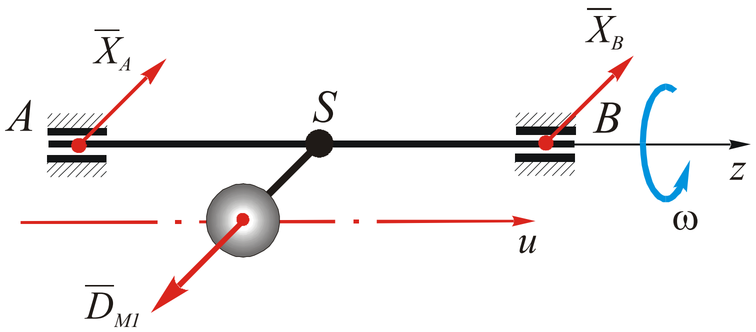


Рис. 7.7 Статично неврівноважений ротор

У цьому випадку ексцентриситет маси ротора $\bar{e}_{cm} \neq 0$; а відцентрові моменти інерції $J_{xz} = J_{yz} = 0$. Тобто

$$\bar{D}_{cm} \neq 0; \quad \bar{M}_D = 0.$$

Цю неврівноваженість легко усунути, якщо до ротора прикріпити коректуючу масу m_K, яка забезпечить виконання умови

$$\bar{D}_{cm} = -\bar{D}_K. \qquad (7.15)$$

Тут $\bar{D}_K = m_K \bar{e}_K$. Причому центр коректуючої маси має лежати на лінії дії вектора $\bar{e}_{cm}$, а вектор її дисбалансу $\bar{e}_K$ – обернено направлений по відношенню до $\bar{e}_{cm}$.

б) Моментна неврівноваженість ротора.

Має місце, коли центр мас лежить на осі обертання ротора, але його головна центральна вісь не збігається з віссю обертання (рис. 7.8). Така неврівноваженість характерна, наприклад, для двоколінчастих валів. При цьому $e_{cm} = 0$; $J_{xz} \neq 0$; $J_{yz} \neq 0$. Тоді

$$\bar{D}_{cm} = 0\,; \quad \bar{M}_D \neq 0\,.$$

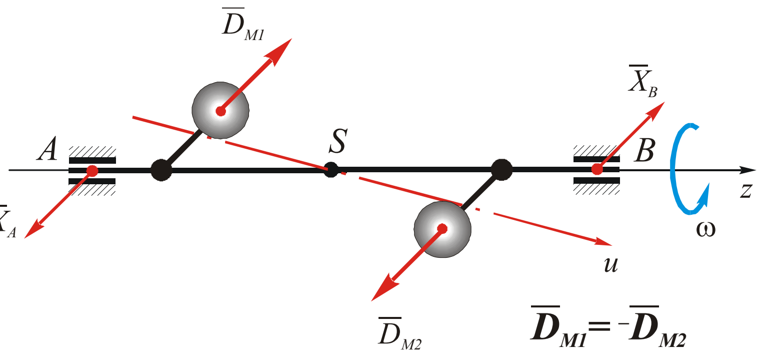


Рис. 7.7 Моментно неврівноважений ротор

Для усунення неврівноваженості потрібно встановити, як мінімум, дві коректуючі маси, щоб створити пару сил $\bar{M}_K = -\bar{M}_D$. Ці маси ставлять в площині корекції таким чином, щоб виникала саме пара сил корекції.

в) Динамічна неврівноваженість ротора.

Має місце. коли центр мас не лежить на осі обертання і ця вісь не збігається з головною віссю інерції ротора($e_{cm} \neq 0$; $J_{xz} \neq 0$; $J_{yz} \neq 0$). Тобто

$$\bar{D}_{cm} \neq 0\,; \quad \bar{M}_D \neq 0\,.$$

У цьому випадку ми маємо в опорах реакції R_A і R_B, представлені векторами, які перехрещуються, і які обертаються разом з валом (рис. 7.9).

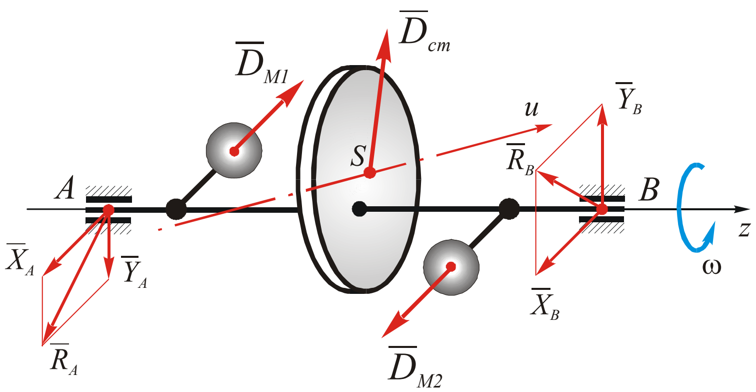


Рис. 7.9 Динамічно неврівноважений ротор

Ця неврівноваженість усувається постановкою відповідним чином двох мас в площинах, перпендикулярних до осі обертання.

7.2.2. Статичне і динамічне балансування виготовлених роторів

Неврівноваженість роторів має виключатись вже на стадії проектування. Однак в процесі виготовлення роторів неврівноваженості можуть виникати за рахунок відхилення від проектних розмірів, неоднорідності матеріалу, неточності складання.

а) Статичне балансування виготовленого ротора.

Його метою є суміщення центру мас ротора з віссю обертання. Виконується як вручну з допомогою ножових опор (рис. 7.10), так і на спеціальних стендах (рис. 7.11)

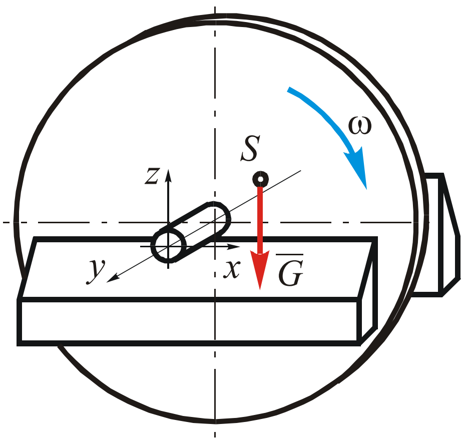


Рис. 7.10 Ножові опори для балансування ротора

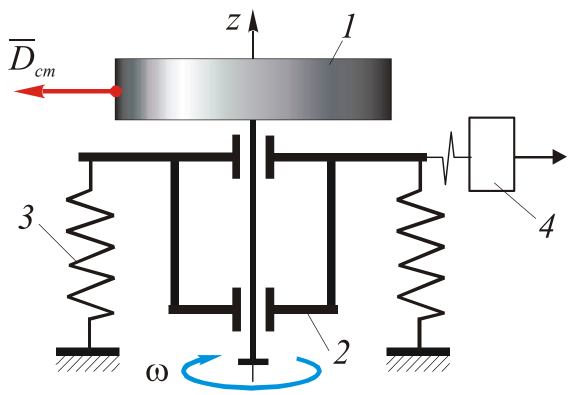


Рис. 7.11 Балансувальний стенд

За першим методом виготовлений ротор встановлюється на ножові опори, що практично виключає тертя в точках обпирання. Якщо ротор незбалансований, то він прагнутиме зайняти положення стійкої рівноваги. Після того, як ротор займе таке положення, його центр мас лежатиме на вертикальній прямій, яка належить площині, що проходить через точки обпирання. Після виявлення місця надлишкової маси, вона або видаляється, або додається з протилежного боку. Процедура повторюється доти, аж поки ротор не набуде стану байдужої рівноваги на ножових опорах, що є можливим лише за умови повної його збалансованості.

В умовах масового виробництва балансування роторів проводять на спеціальних стендах, одна з можливих схем якого наведена на рис. 7.11.

Ротор 1 закріплюють в опорах обертання на плиті 2. Плита встановлена на пружній основі 3, яка допускає підвищені переміщення в просторі. При наявності дисбалансу плита виконує складний рух (вісь *z* описує конус). Сейсмодатчик 4 коливається. Ці коливання трансформуються в електричний сигнал, який надходить до ЕОМ. Після необхідних обчислень встановлюються точні координати місця розташування надлишкової маси.

б) Динамічне балансування виготовленого ротора.

Його метою є суміщення головної осі інерції ротора з віссю обертання.

Динамічне балансування абсолютно необхідно проводити для довгих роторів. Проводиться воно на спеціальних балансувальних машинах. Вони бувають трьох типів: з нерухомою віссю обертання ротора; з віссю обертання, яка коливається в площині відносно другої осі; з віссю, що виконує просторовий рух.

На рис. 7.12 показана схема балансувальної машини.

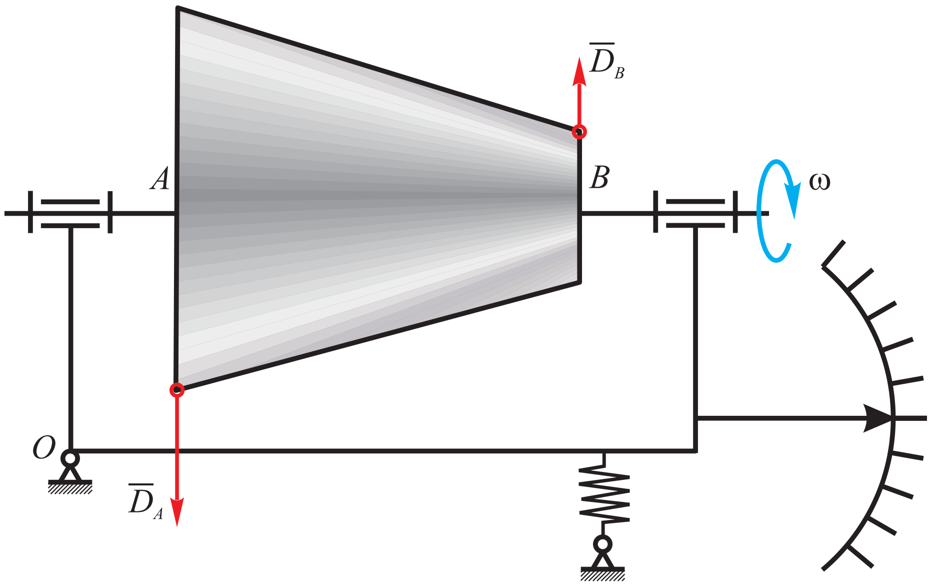


Рис. 7.12 Стенд для динамічного балансування ротора

Тут A і B – площини корекції. Спочатку усувають дисбаланс в перерізі B. Для цього при декількох пусках визначають величини амплітуди коливань A_{Bi}, яка пропорційна величині дисбалансу D_B. Причому, за першого (основного) пуску розганяється ротор у вихідному стані. У двох останніх пусках (пробних) розганяється ротор з додатковими фіксованими масами в перерізі B, що дозволяє за величиною амплітуди точно встановити величину шуканого дисбалансу D_B. Потім ротор повертається на 180° і повторюються ті ж дії для перерізу A.

Для дуже точного балансування його здійснюють у вакуумі $\left(10^{-3} атм\right)$. Це зменшує повітряний опір і зменшується потужність приводу, враховуючи вагу турбіни.

Лекція №14

Розділ 8. СИНТЕЗ ПЛОСКИХ МЕХАНІЗМІВ

При проектуванні схем механізмів (синтезі) за вибраною структурною схемою і заданими кінематичними характеристиками визначають розміри ланок механізмів, які забезпечили б необхідні рухи.

Тема 8.1. СИНТЕЗ КІНЕМАТИЧНИХ СХЕМ МЕХАНІЗМІВ З НИЖЧИМИ ПАРАМИ

Мова йде про важільні механізми. Їх кінематичний синтез містить цілий ряд конкретних задач:

- синтез за кількома положеннями ланок;
- синтез за окремими заданими кінематичними параметрами (наприклад середньою швидкістю);
- синтез за заданою траєкторією точки ланки.

8.1.1. Умова існування кривошипа в чотириланкових механізмах (правило Грасгофа)

При синтезі механізму важливою умовою є можливість провертання його ланок, тобто наявність в його схемі одного або кількох кривошипів. Ця умова залежить від співвідношення довжин ланок.

Розглянемо чотириланковий механізм (рис. 8.1) з довжинами ланок *a, b, c,* і *d*.

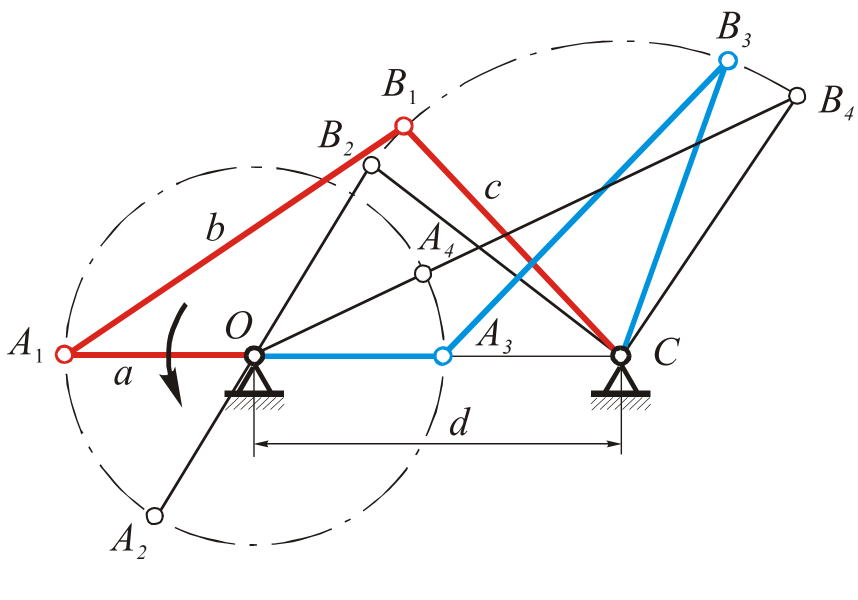


Рис. 9.1 Шарнірно-важільний чотириланковий механізм

Як відомо, кривошип – це ланка механізму, яка здійснює повний оберт. Щоб ланка *OA* могла бути кривошипом, вона має пройти через два крайніх положення: OA_1 і OA_3.

Приймемо, що розмір *a* (ланка *OA*) – найменший, а розмір *d* (стояк *OC*) – найбільший.

Розглянемо трикутник A_1B_1C. Оскільки в трикутнику довжина однієї сторони менша від суми довжин двох інших сторін, запишемо таку нерівність:

$$d + a < b + c\,. \tag{8.1}$$

Для трикутника A_3B_3C справедлива така умова:

$$d - a < b + c\,. \tag{8.2}$$

Оскільки за умовою $d > a$, то нерівність (8.1) забезпечує виконання нерівності (8.2) незалежно від співвідношення сторін *b* і *c*. Якщо найдовшою є ланка *AB* ($b > c > d$) або *BC* ($c > b > d$), то нерівність (8.1) тим більше виконується.

Нерівність (8.1) дозволяє сформулювати *правило Грасгофа*.

Найкоротша ланка шарнірного чотириланкового механізму може бути кривошипом, якщо сума довжин найдовшої і найменшої ланок механізму менша суми довжин інших ланок

Положення кривошипа OA_2 і OA_4 відповідають крайнім положенням коромисла *CB*.

8.1.2. Приклади синтезу чотириланкових механізмів

а) Синтез кривошипно-коромислового механізму за двома положеннями ланок.

За заданою відстанню між шарнірами *O* і *C*, які належать стояку (рис. 8.2), довжиною коромисла l_3 та його кутовим координатам γ_1 і γ_2 в крайніх положеннях механізму треба знайти невідомі довжини ланок: кривошипа l_1 і шатуна l_2.

Для цього з’єднуємо прямими точки B_1 і B_2 з точкою *O*. Маємо

$$l_{OB_1} = l_1 + l_2\,;$$

$$l_{OB_2} = l_2 - l_1\,.$$

Звідси

$$l_1 = \left(l_{OB_1} - l_{OB_2}\right)/2\,;$$

$$l_2 = \left(l_{OB_1} + l_{OB_2}\right)/2\,.$$

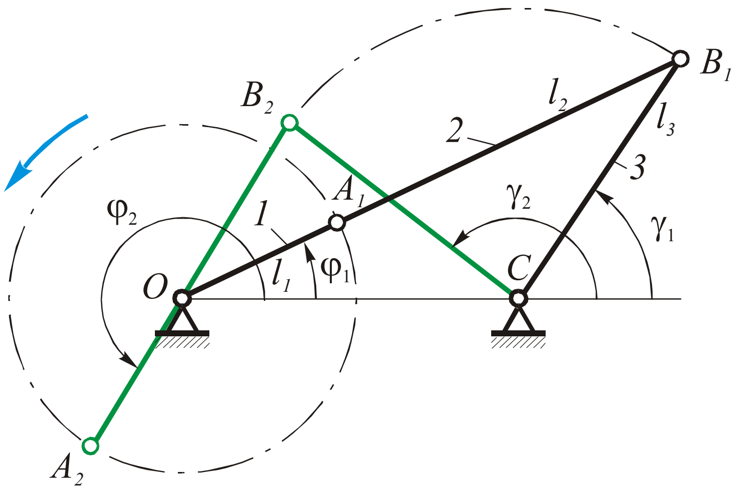


Рис. 8.2 Синтез кривошипно-коромислового механізму

б) Синтез кривошипно-повзункового механізму за середньою швидкістю вихідної ланки.

При проектуванні машин часто задають середню швидкість повзуна V_c (м/с). Розглянемо центральний кривошипно-повзунковий механізм (рис. 8.3).

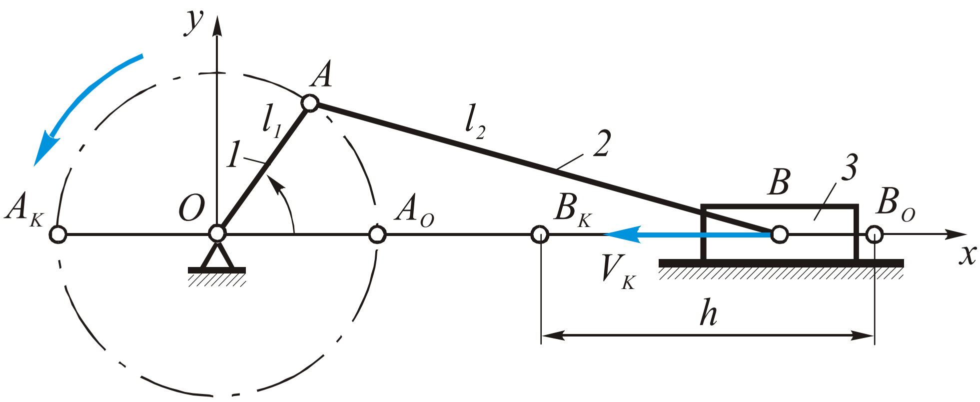


Рис. 8.3 Синтез кривошипно-повзункового механізму

Тут подвійний хід повзуна відповідає одному повному оберту кривошипа. Можна записати, що

$$2h = 4l_1.$$

Якщо частота обертання кривошипа (кількість обертів за секунду) n (с$^{-1}$), то

$$V_c = 2hn = 4l_1 n.$$

Звідси довжина кривошипа

$$l_1 = V_c / 4n.$$

Довжину коромисла вибирають, задаючись співвідношенням $\lambda_2 = l_2/l_1$. Чим менше це співвідношення, тим менші габарити механізму, але більші тиски виникають в несприятливих положеннях механізму в кінематичних парах. Наприклад, для механізмів двигунів внутрішнього згорання вибирають це співвідношення в межах $\lambda_2 = 3...5$.

Тема 8.2. СИНТЕЗ МЕХАНІЗМІВ З ВИЩИМИ ПАРАМИ

8.2.1. Основна теорема зачеплення

До переваг цих механізмів слід віднести можливість реалізувати необхідні закони руху за мінімальної кількості ланок та відносно вищу точність відтворення цих законів у порівнянні з шарнірно-важільними механізмами.

Поверхні елементів вищої кінематичної пари, які забезпечують заданий закон руху ланок, називаються спряженими поверхнями.

Механізми з вищими парами можуть мати одну пару спряжених профілів, наприклад кулачкові механізми, або кілька пар, як в зубчастих механізмах.

Між геометрією спряжених профілів та законом відносного руху елементів вищої кінематичної пари існує взаємозв'язок. Встановлює його *основна теорема зачеплення.*

В задачах синтезу спряжених профілів закон відносного руху вважається заданим. Дійсно, у співвідношенні

$$\overline{\omega}_2 = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_{21}.$$

швидкості $\overline{\omega}_1$ і $\overline{\omega}_2$ відомі. Звідси

$$\overline{\omega}_{12} = \overline{\omega}_1 - \overline{\omega}_2 \qquad (8.3)$$

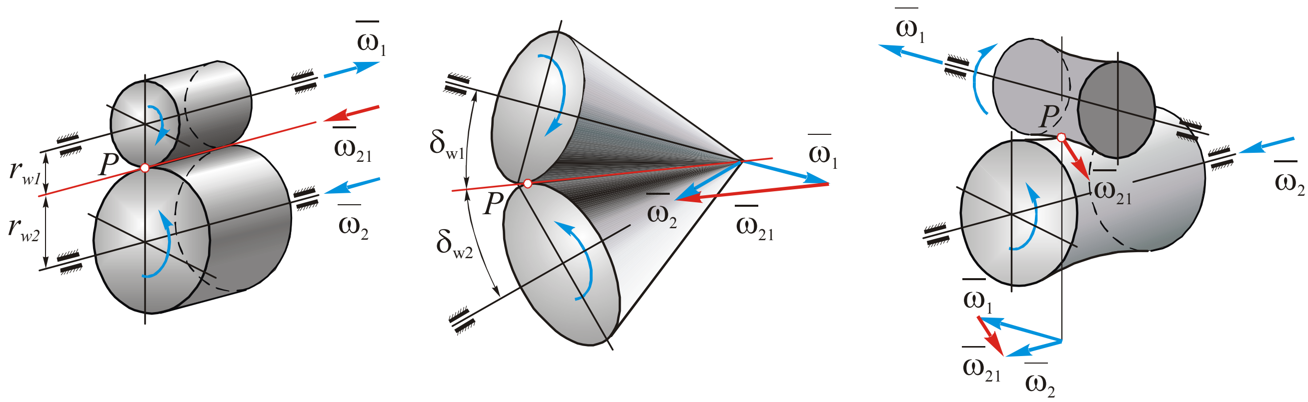
На рис. 8.4 наведені приклади, з яких видно, що вектори швидкостей $\overline{\omega}_1$ і $\overline{\omega}_2$ можуть бути паралельними, перетинатися або перехрещуватися.

Вісь, яка проходить через точку *P*, є миттєвою віссю обертання однієї з ланок в системі координат, пов'язаною з іншою ланкою.

Аксоїдом називається геометричне місце положень миттєвих осей обертання в основній системі відліку.

Коли осі обертання нерухомі і паралельні, аксоїдами є циліндри (рис. 8.4 а), які дотикаються по твірній і перекочуються один по одному без ковзання.

Коли осі обертання нерухомі і перетинаються в деякій точці (рис. 8.4 б), аксоїдами є конуси з кутами при вершинах $2\delta_{w1}$ і $2\delta_{w2}$. Ці кути визначають положення миттєвої осі обертання в основній системі відліку.



а) б) в)

Рис. 8.4 Типи аксоїдів: а – циліндри; б – конуси; в – гіперболоїди

Коли осі обертання перехрещуються (рис. 8.4 в), відносний рух ланок є гвинтовим, тобто складається з обертального навколо деякої осі і поступального вздовж цієї осі. В цьому випадку мову слід вести про *миттєву гвинтову вісь*. Якщо швидкості обертання ланок $\overline{\omega}_1$ і $\overline{\omega}_2$ постійні, то аксоїдами є гіперболоїдами обертання з прямолінійною твірною, які перекочуються один по одному, дотикаючись по миттєвій гвинтовій осі, ковзаючи при цьому вздовж цієї осі.

В загальному випадку основна теорема зачеплення може бути сформульована так:

Спряжені профілі в будь-якій точці контакту мають спільну нормаль до їх поверхонь, яка перпендикулярна до напрямку швидкості точки контакту в заданому відносному русі цих поверхонь.

Довести цю теорему досить просто, йдучи від протилежного твердження: неперпендикулярність спільної нормалі в точці контакту спряжених поверхонь до напрямку вектора відносної швидкості передбачає наявність ще однієї складової швидкості – у напрямку цієї нормалі. А в цьому випадку елементи вищої пари мають або взаємно проникати, або відриватись один від одного, що суперечить умові утворення вищої кінематичної пари.

8.2.2. Основна теорема зачеплення для плоских механізмів (теорема Віліса).

Для плоских механізмів з вищою парою вводиться поняття *миттєвого центру обертання.*

Центроїдою називається геометричне місце положень миттєвих центрів обертання ланок у відносному русі в основній системі відліку.

Центроїда утворюється як лінія перетину аксоїда з поперечною січною площиною. Як і аксоїди, центроїди перекочуються одна по одній без ковзання.

Точка дотику центроїд *P* називається *полюсом зачеплення* (див. рис. 8.4 а).

Основна теорема плоского зачеплення формулюється так:

Спільна нормаль в точці дотику спряжених профілів в будь-який момент зачеплення проходить через полюс Р і ділить міжосьову відстань O_1O_2 у відношенні, обернено пропорційному відношенню кутових швидкостей ланок.

Для доведення цієї теореми скористаємось рис. 8.5.

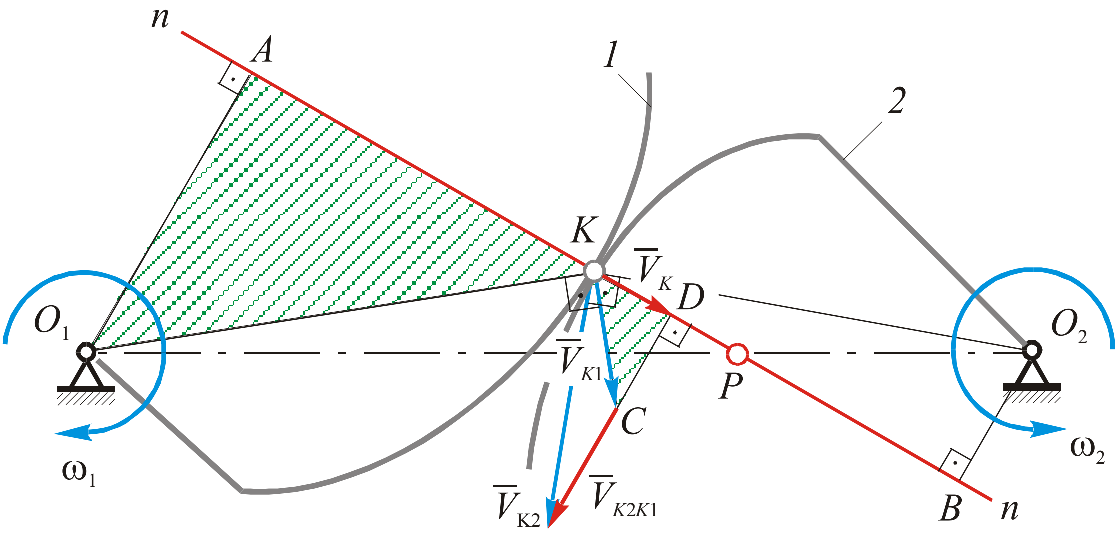


Рис. 8.5 Плоский механізм з вищою парою

Тут $\overline{V}_{K1}$ і $\overline{V}_{K2}$ – абсолютні швидкості точки K для першої і другої ланки відповідно. Для них справедливе співвідношення:

$$\overline{V}_{K2} = \overline{V}_{K1} + \overline{V}_{K2K1}.$$

Згідно с основною теоремою зачеплення, сформульованою в п. 8.2.1, швидкість точки K у напрямку спільної нормалі n-n для обох ланок однакова: $\overline{V}^n_{K1} = \overline{V}^n_{K2} = \overline{V}_K$.

З подібності трикутників O_1AK і KDC можна записати співвідношення:

$$\frac{O_1A}{O_1K} = \frac{KD}{KC} \tag{8.4}$$

Враховуючи, що $KD = \left|\overline{V}_K\right| = \left|\overline{V}^n_{K2}\right| = \omega_2\left(\mu_l \cdot O_2B\right)$ і $KC = \left|\overline{V}_{K1}\right| = \omega_1\left(\mu_l \cdot O_1K\right)$, співвідношення (8.4) перепишемо у вигляді

$$\frac{O_1A}{O_1K} = \frac{\omega_2\left(\mu_l \cdot O_2B\right)}{\omega_1\left(\mu_l \cdot O_1K\right)}$$

або

$$\frac{O_1A}{O_2B} = \frac{\omega_2}{\omega_1}. \qquad (8.5)$$

Тепер розглянемо трикутники O_1AP і O_2BP. Вони також подібні. Отже

$$\frac{O_1A}{O_2B} = \frac{O_1P}{O_2P}.$$

Тобто

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{O_1P}{O_2P} = u_{21}, \qquad (8.6)$$

що й треба було довести.

Згідно з основною теоремою плоского зачеплення положення полюса зачеплення P однозначно визначається через міжосьову відстань O_1O_2 і передатне відношення u_{21}, які в задачах синтезу мають бути заданими.

8.2.3. Графічні методи синтезу спряжених профілів

8.2.3.1. Метод послідовних положень профілів

В основу методу покладено принцип оберненості руху, згідно з яким одна з центроїд ($Ц_2$ на рис. 8.6) зупиняється, а стояк разом з іншою центроїдою ($Ц_1$) обертається зі швидкістю $-\omega_2$. При цьому центроїда $Ц_1$ здійснює одночасно відносний обертальний рух навколо полюса P зі швидкістю ω_{12}.

Метод полягає у кресленні ряду послідовних положень профілю $П_1$ та побудові профілю $П_2$ як внутрішньої обвідної цих положень (рис. 8.6 а).

На центроїдах показані точки, якими вони дотикаються при перекочуванні: відповідно 1^* і 1^{**}; 2^* і 2^{**} і т.д. Оскільки центроїди перекочуються без ковзання, положення відповідних точок визначають, виходячи з умов рівності відповідних дуг центроїд: $\cup P1^* = \cup P1^{**}$; $\cup P2^* = \cup P2^{**}$; ...; $\cup P10^* = \cup P10^{**}$.

В оберненому русі лінія, що сполучає центри обертання центроїд O_1O_2, займатиме послідовні положення O_2-1; O_2-2; ...; O_2-10. Точки 1^{**}, 2^{**}, ..., 10^{**} нерухомої центроїди $Ц_2$, які є миттєвими центрами обертання центроїди $Ц_1$, розглядаємо як полюси зачеплення у відповідних положеннях.

Коли полюс зачеплення перебуватиме в точці 2^{**}, тобто центроїда $Ц_1$ займе положення $Ц_1^{(2)}$ (рис. 8.6 б), промінь O_12^* збіжиться з лінією центрів O_2-2. При цьому центроїда $Ц_1$ повернеться на кут $\varphi^{(2)}$. Прив'яжемо профіль $П_1$ до лінії O_1P (вихідне положення нашої побудови). В положенні лінії центрів O_2-2 профіль займе положення 2. На рис. 8.6 а положення профілів в оберненому русі вказані в кружках.

Шуканий спряжений профіль $П_2$ будуємо як обвідну отриманих послідовних положень заданого профілю $П_1$. На рис. 8.6 а цей профіль виділений штрихуванням.

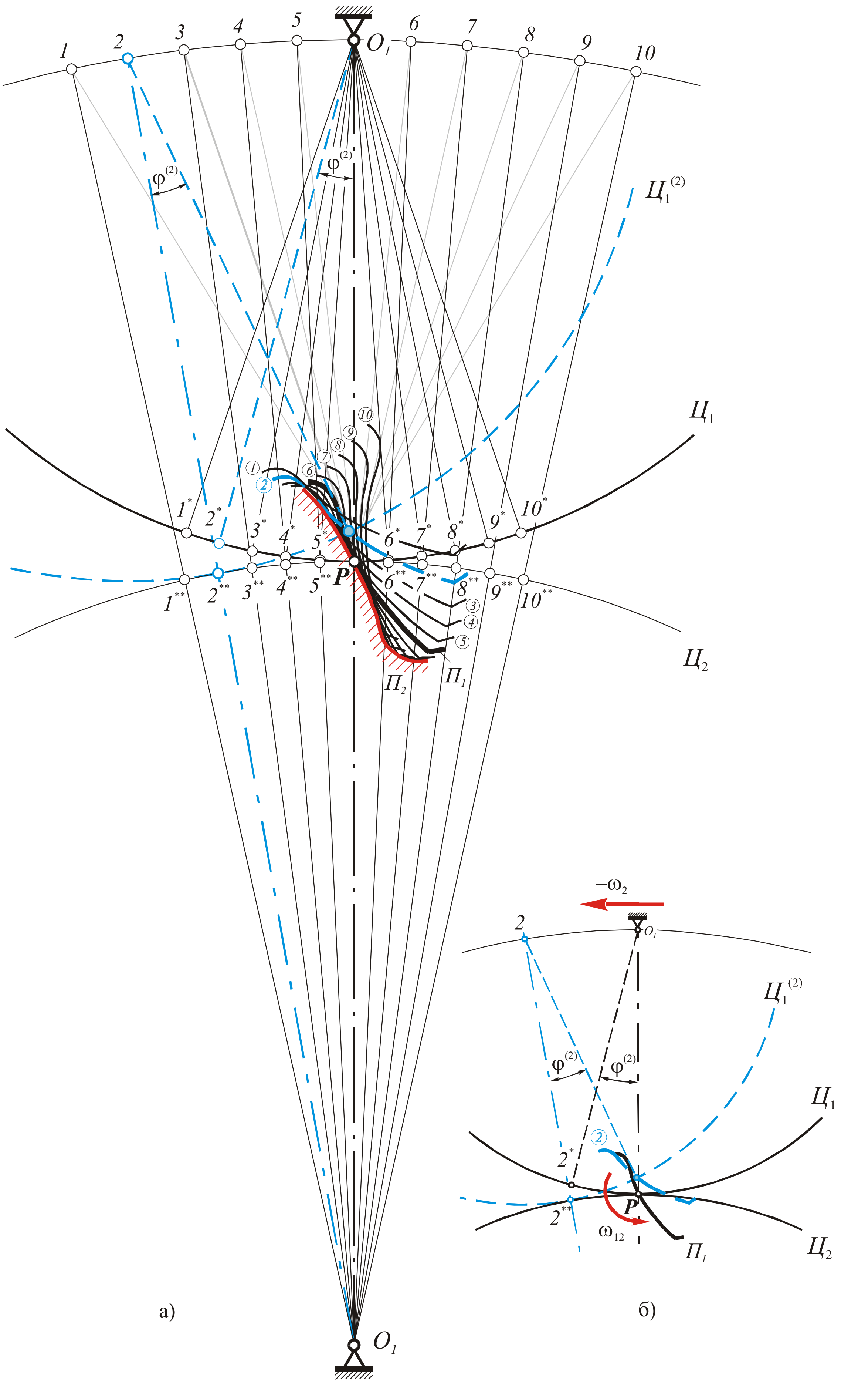


Рис. 8.6 Синтез спряжених профілів за методом послідовних положень

8.2.3.2. Спосіб Рело

Спряжений профіль можна побудувати за положеннями нормалей. Базується спосіб на основній теоремі зачеплення. Він досить ефективний у випадках, коли можна легко визначити положення нормалей до заданого профілю.

Вважатимемо заданими міжосьову відстань O_1O_2, закон відносного руху ланок $u_{21} = \omega_2 : \omega_1 = O_1P : O_2P$ та профіль $П_2$ (рис. 8.7). Побудуємо спряжений з ним профіль $П_1$.

Виберемо на профілі $П_2$ ряд точок 1_2, 2_2, 3_2, ... 6_2. Проведемо через них нормалі до профілю до перетину з центроїдою $Ц_2$ в точках 1^{**}, 2^{**}, 3^{**}, ..., 6^{**} відповідно. Відкладемо на центроїді $Ц_1$ точки 1^{*}, 2^{*}, 3^{*}, ..., 6^{*}, з якими відповідні точки центроїди $Ц_2$ вступають в контакт при проходженні полюса P. Для цього скористаємось умовами: $\cup P1^{*} = \cup P1^{**}$; $\cup P2^{*} = \cup P2^{**}$; ...; $\cup P6^{*} = \cup P6^{**}$, оскільки центроїди перекочуються без ковзання.

Згідно з основною теоремою зачеплення точка контакту спряжених профілів лежить на нормалі, яка проходить через полюс. Виходячи з цього, можна знайти положення точок профілю $П_2$ на нерухомі площині, коли вони вступають в контакт з профілем $П_1$. Для прикладу візьмемо точку 1_2. Вона є вершиною трикутника $O_2 1_2 1^{**}$ (рис. 8.7 б). Повернемо цей трикутник разом з центроїдою $Ц_2$ відносно точки O_2 до суміщення точки 1^{**} з полюсом P (рис. 8.7 в). Оскільки сторона трикутника $1_2 1^{**}$ збігається з нормаллю до профілю $П_2$ в точці 1_2 , то точку 1 слід розглядати як точку контакту профілів.

Аналогічно можна знайти положення інших точок контакту на нерухомій площині (див. рис. 8.7 а).

Геометричне місце точок контакту спряжених профілів* 1, 2, 3, ..., 6 *називається лінією зачеплення.

Нормаль до профілю $П_2$, що проходить через полюс зачеплення, є спільною для обох профілів. В положенні, що розглядається, в полюсі P зустрілись точки 1^{*} і 1^{**} центроїд $Ц_1$ і $Ц_2$ (див. рис. 8.7 в, г). Повертаючи центроїди у вихідне положення, повертаємо одночасно і трикутник $O_1 1 1^{*}$ (рис. 8.7 г, д). Отримана точка 1_1 профілю $П_1$ є спряженою з точкою 1_2 профілю $П_2$.

Аналогічно знаходимо й інші точки профілю $П_1$. З'єднуючи плавною кривою точки 1_1, 2_1, 3_1, ... , 6_1, отримаємо шуканий профіль $П_1$, спряжений з заданим профілем $П_2$ (рис. 8.7 а).

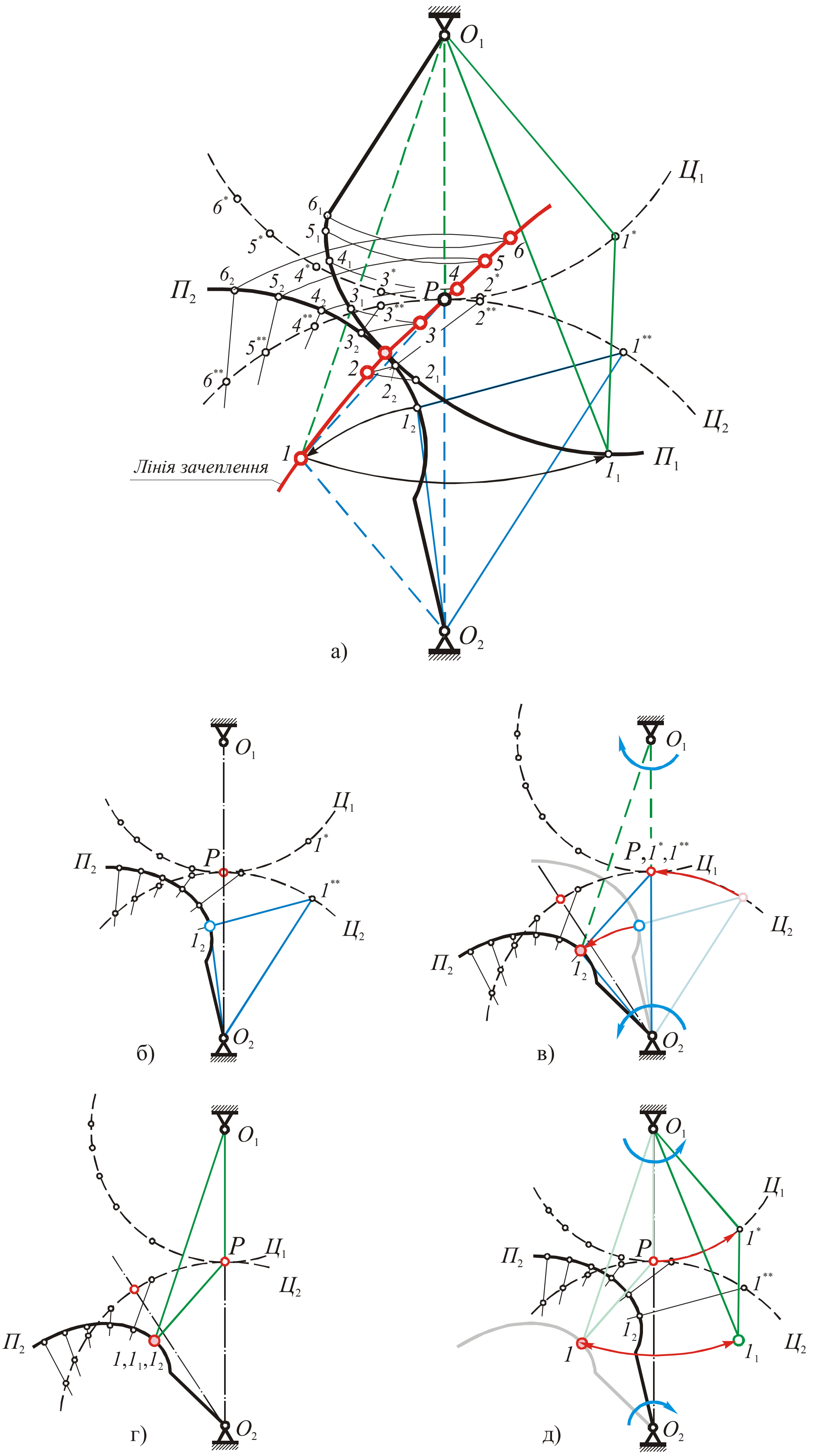


Рис. 8.7 Синтез спряжених профілів за методом Рело: реалізація методу (а); стадії синтезу (б, в, г, д)

Лекція №15

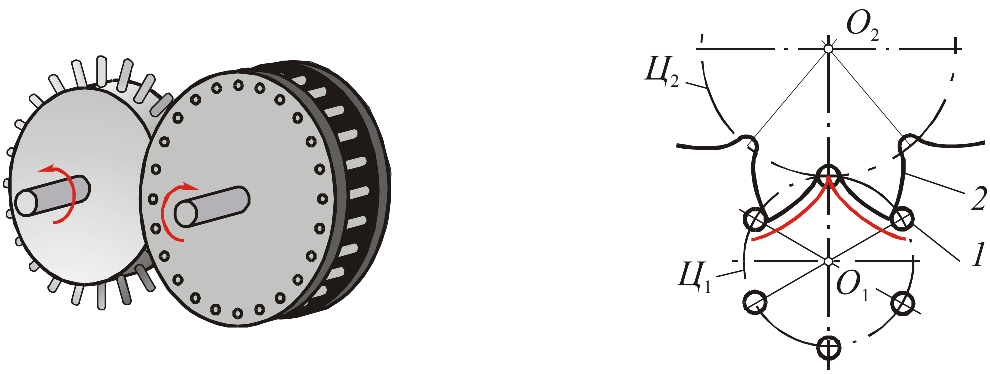
Розділ 9. ЗУБЧАСТЕ ЗАЧЕПЛЕННЯ

Зубчастим називається зачеплення, в якому неперервний рух вихідної ланки забезпечується шляхом послідовної взаємодії декількох пар спряжених поверхонь.

Історія зубчастих передач сягає часів древнього Єгипту, коли використали перші примітивні зубчасті колеса (рис. 9.1 а), які лише віддалено нагадують сьогоднішні. Їх прямими „нащадками” можна вважати *цівкові передачі*, які відносяться до *циклоїдних*.

На рис. 9.1 б зображена схема цівкової передачі. *Цівкою* називають ролик 1, який взаємодіє з зубцем колеса 2. Профіль зубця виконаний по циклоїді, еквідистантній до циклоїди, яку описує деяка точка кола, на якому розташовані центри цівок, при перекочуванні його по центроїді колеса 2. Зміщення циклоїди для утворення профілю зубця, як видно з рисунка, визначається діаметром цівки.

Головним недоліком цівкової передачі є підвищений знос цівок. Широкого застосування ці передачі не мають.



а) б)

Рис. 9.1 Схема цівкової передачі: а – античний прототип; б – сучасна цівкова передача

Промислова революція, яка розпочалася у XVIII столітті, спонукала до пошуку ефективних засобів передачі руху. Найширше застосування тут знайшли саме зубчасті передачі, які мають цілий ряд переваг: компактність за високої вантажопідйомності, високий коефіцієнт корисної дії, точність відтворення заданого закону руху, сталість кінематичних характеристик і т.п.

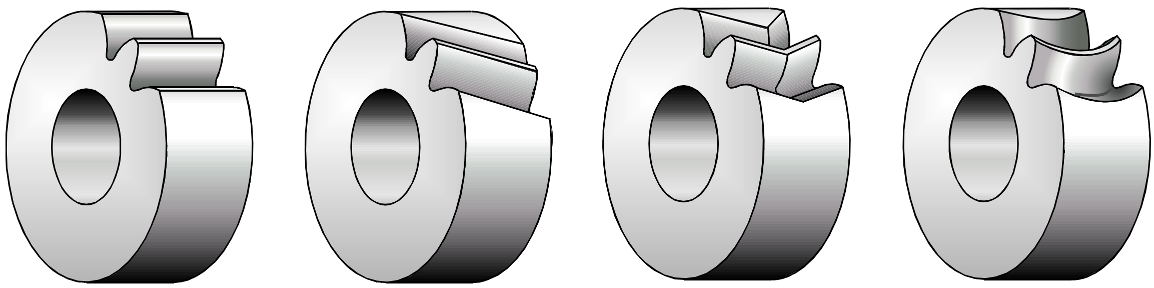
Справжня революція в машинобудуванні відбулась у середині XIX століття., коли був винайдений зубофрезерний верстат. Цей винахід, як втілення передової наукової думки, дозволив поставити виробництво високоякісних машин на потік, значно прискоривши процеси індустріалізації суспільства.

Тема 9.1. КЛАСИФІКАЦІЯ ЗУБЧАСТИХ ПЕРЕДАЧ

На сьогодні існують найрізноманітніші типи зубчастих передач. Вони відрізняються конструкцією, формою елементів вищої кінематичної пари, характером виконуваних рухів. Велика різноманітність передач вимагає їх класифікації за певними ознаками. Наведемо основні з них.

I. За типом передачі:
- евольвентні;
- неевольвентні (циклоїдні, кругові і т.п.).

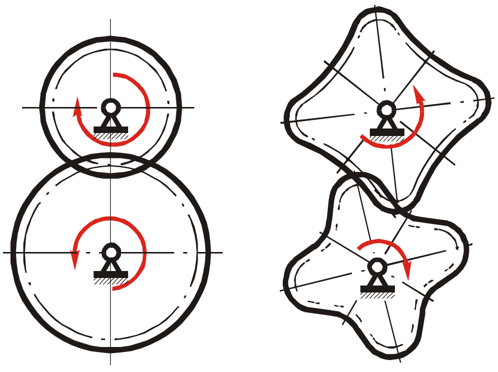
II. За формою зубця:
- прямозубі (рис. 9.2 а);
- косозубі (рис. 9.2 б);
- шевронні (рис. 9.2 в);
- з криволінійними зубцями (рис. 9.2 г).



а) б) в) г)

Рис. 9.2 Типи зубчастих коліс: а – прямозубі; б – косо зубі; в – шевронні; г -- кругові

III. За формою коліс:
- з круглими колесами (рис. 9.3 а);
- з не круглими колесами (рис. 9.3 б).



а) б)

Рис. 9.3 Типи зубчастих коліс: а – круглі; б – некруглі

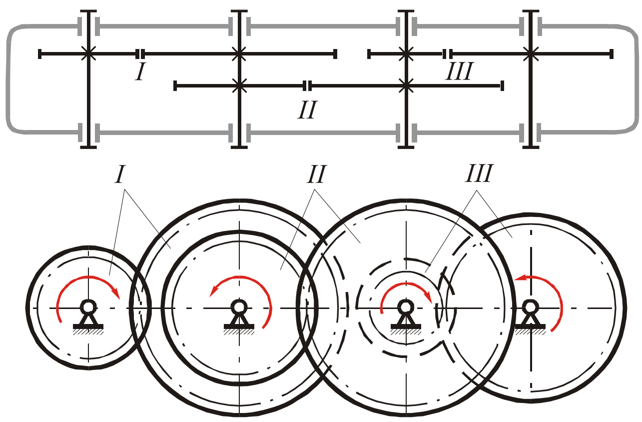


Рис. 9.4 Багатоступінчаста зубчаста передача

IV. За кількістю ступенів:
- одноступінчасті (рис. 9.3);
- багатоступінчасті (рис. 9.4).

V. За розташуванням осей (див. лекцію №14, п. 8.2.1):
- з паралельними осями (циліндричні);
- з пересічними осями (конічні);
- з перехресними осями (черв'ячні, гвинтові, гіпоїдні).

Тема 9.2. ЕВОЛЬВЕНТНА ЦИЛІНДРИЧНА ПЕРЕДАЧА

Л. Ейлер в якості спряжених профілів зубців запропонував використовувати евольвенту.

В зачепленні передатне відношення u_{12} може бути як постійним, так і змінним. Найчастіше на практиці застосовуються передачі з постійним передатним відношенням. Евольвентне зачеплення як раз і забезпечує постійність цього відношення.

9.2.1. Загальні відомості

Евольвентою називається крива, яку описує точка прямої, що перекочується по колу без ковзання (рис. 9.5).

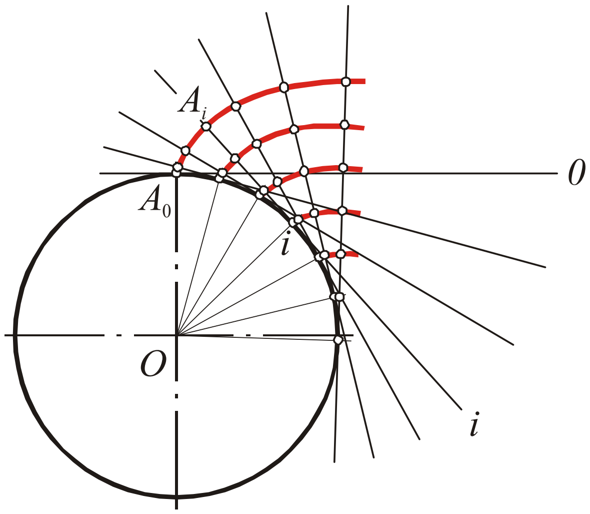


Рис. 9.5 Формування евольвенти

Пряма, яка описує евольвенту, є дотичною до кола і одночасно являється нормаллю до профілю евольвенти. Точки дотику прямої до кола є центрами кривин евольвенти в даній точці. Отже, коло є геометричним місцем центрів кривин, тобто *еволютою* евольвенти.

Покажемо, що евольвентні профілі спряжені.

Сумістимо центри еволют з центрами обертання коліс (O_1O_2 – міжосьова відстань). Спільна нормаль в точці дотику евольвентних профілів є одночасно спільною дотичною до еволют (рис. 9.6).

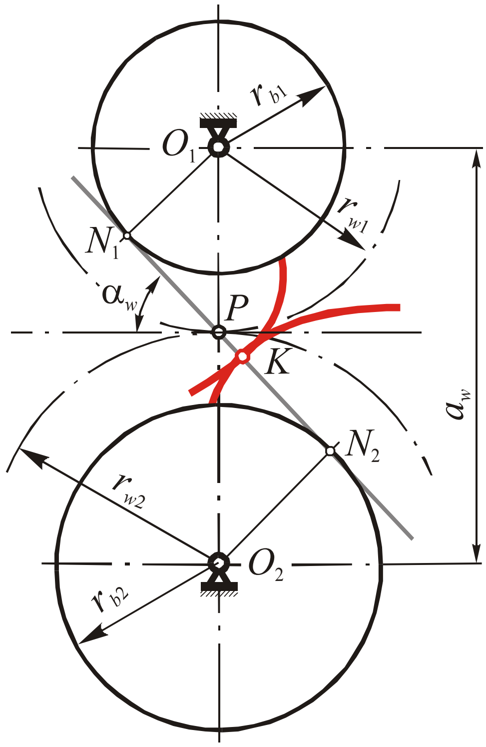


Рис. 9.6 Евольвентні профілі

Покажемо, що точка *P* є полюсом зачеплення, тобто

$$\frac{O_2P}{O_1P} = \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

Проведемо через полюс центроїди радіусами r_{w1} і r_{w2}. В полюсі швидкості точок центроїд однакові, оскільки ковзання відсутнє: $V_1 = V_2$ або $\omega_1 r_{w1} = \omega_2 r_{w2}$.

Звідси

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{w_2}}{r_{w_1}} = \frac{O_2P}{O_1P}. \tag{9.1}$$

Таким чином евольвентні профілі відповідають основній теоремі плоского зачеплення, тобто спряжені, а точка *P*, відповідно, є полюсом зачеплення.

Евольвентне зачеплення має одну дуже важливу для їх практичного застосування властивість – сталість передатного відношення. Звернемось до рис. 9.6. В процесі зачеплення точка контакту профілів зубців *K* лежить на прямій N_1N_2, яка є спільною дотичною до еволют коліс. На який би кут не повертались зубчасті колеса, лінія N_1N_2 положення свого не змінює, оскільки центри еволют нерухомі. Отже і полюс P положення на лінії центрів O_1O_2 не змінює. Значить

$$\frac{O_2P}{O_1P}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=u_{12}=Const\,.$$

Введемо деякі означення:

- лінія N_1N_2 називається *теоретичною лінією зачеплення*;
- кут між лінією зачеплення N_1N_2 і нормаллю до лінії центрів O_1O_2 ($\angle\alpha_w$ на рис. 9.6) називається *кутом зачеплення*;
- кола радіусів r_{b1} і r_{b2} – еволюти евольвент – називаються *основними колами*;
- кола радіусів r_{w1} і r_{w2}, які є центроїдами, що дотикаються в полюсі P, називаються *початковими колами.*

З подібності трикутників O_1PN_1 і $O_2P\,N_2$ випливає, що

$$\frac{O_1P}{O_2P}=\frac{O_1N_1}{O_2N_2}\text{ або }\frac{r_{w1}}{r_{w2}}=\frac{r_{b1}}{r_{b2}}=u_{12}\,,$$

тобто передатне відношення однозначно визначається відношенням радіусів основних кіл. Це означає, що при зміні міжосьової відстані a_w, а отже і радіусів початкових кіл r_{w1} і r_{w2}, та кута зачеплення α_w, передатне відношення u_{12} залишається незмінним.

9.2.2. Геометрія евольвентного зачеплення

В зубчастих колесах однойменні профілі зубців розташовані на відстані кроку вздовж основного кола p_b (рис. 9.7) і, виходячи з основних властивостей евольвенти, еквідистантні (див. рис. 9.5).

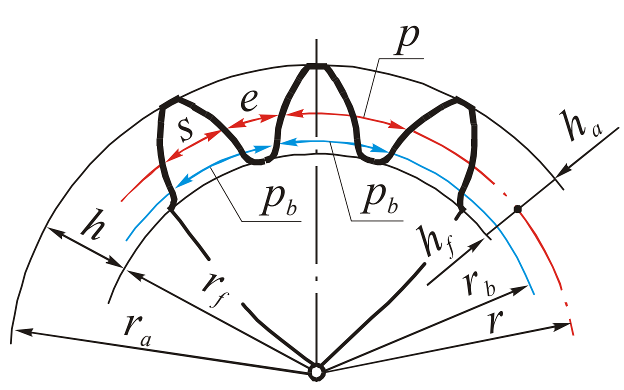


Рис. 10.7 Геометрія зубчастого колеса

Коловим кроком називається відстань по дузі кола даного радіуса між однойменними профілями двох сусідніх зубців.

Якщо кількість зубців z, то крок вздовж основного кола

$$p_b = \frac{2\pi r_b}{z}. \qquad (9.2)$$

Згідно з (9.2) крок вздовж дуги кола довільного радіуса $p = \frac{2\pi r}{z}$. Звідси

$$r = \frac{p}{2\pi} z. \qquad (9.3)$$

У загальному випадку r – число ірраціональне, що значно ускладнює вимірювання і контроль цього розміру. Позначимо

$$\frac{p}{\pi} = m \qquad (9.4)$$

Тут m — *модуль зачеплення* і приймають його числом раціональним. Модуль вимірюється в міліметрах і вибирається зі стандартного ряду згідно з ГОСТ 9563-60 (СТ СЕВ 310.76).

Коло, для якого модуль — число раціональне (стандартне) називається ділильним колом. Це коло ділить зубець на головку і ніжку

На рис. 9.7 h_a – висота головки зубця, а h_f – висота ніжки. Тут також позначені: *s—товщина зубця по ділильному колу*, або *ділильна товщина зубця*; *e – ділильна ширина западини.*

Ділильні кола коліс , що знаходяться в зачепленні, в окремих випадках можуть проходити через полюс, тобто збігатися з початковими. Проте слід враховувати, що вони належать конкретним колесам, а початкові кола з’являються лише в зачепленні.

Коло радіуса r_f (рис. 9.7) називається *колом западин*, а радіуса r_a – колом вершин.

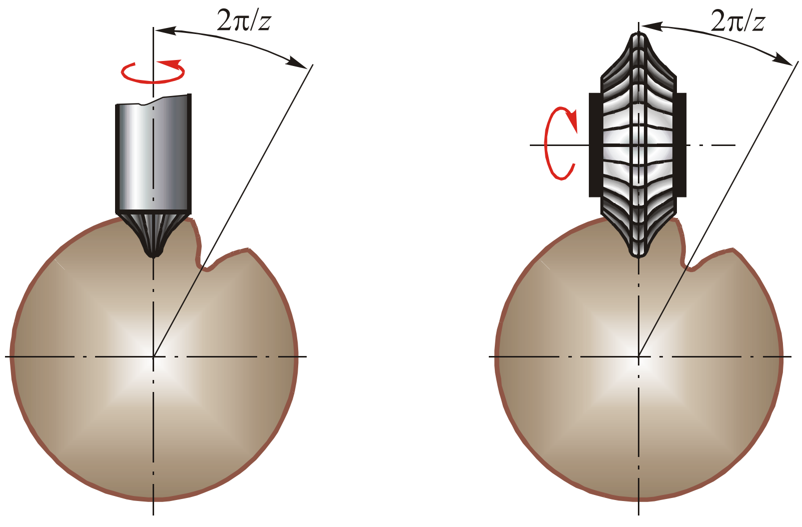
9.2.3. Методи виготовлення зубчастих коліс.

Основним на сьогодні способом виготовлення зубчастих коліс є їх нарізання.

Більшість сучасних зачеплень створювались і вдосконалювались на основі розробок способів їх виготовлення різальним інструментом. Для отримання евольвентних профілів зубців користуються двома методами: *копіювання* і *обкочування*.

В якості обладнання використовуються спеціальні зуборізальні верстати.

Метод копіювання полягає у формуванні бічних профілів зубців за допомогою спеціальних пальцевих (рис. 9.8 а) або дискових фрез (рис. 9.8 б).



а) б)

Рис. 9.8 Метод копіювання з використанням пальцевої (а) та дискової (б) фрез

Контур різального леза фрези повторює контур западини між зубцями. Обертаючись, фреза переміщується вздовж бічної твірної зубця, і, як результат, утворюється одна западина. Після цього фреза повертається до вихідного положення, а заготовка обертається на кут $2\pi/z$, де z – кількість зубців колеса, яке нарізається, і процес повторюється.

Метод цей застосовують рідко, бо він потребує великого комплекту зуборізного інструменту. Крім того, в порівнянні з іншими методами, він менш продуктивний і недостатньо точний.

Метод обкочування теоретично обґрунтував французький геометр Теодор Олів'є, який запропонував два варіанти цього методу:

1) обидві спряжені поверхні зубців коліс нарізаються однією *твірною поверхнею* (див. нижче), яка відрізняється від необхідних спряжених поверхонь;
2) твірна поверхня збігається з однією з необхідних спряжених поверхонь, причому відносний рух твірної поверхні і заготовки має бути таким, який мають необхідні спряжені поверхні (див. підпункт 8.2.3.1. „Метод послідовних положень профілів").

Перший варіант методу, запропонованого Олів'є, покажемо на прикладі нарізання зубців інструментом, який виконується або як зубчасте колесо з різальними гранями на зубцях (*довбач*), або як *зубчаста рейка* (*гребінка*), яку можна розглядати як граничну форму зубчастого колеса, коли кількість зубців прямує до нескінченності. Для рейки всі кола переходять у прямі, а евольвентний профіль зубця – у пряму лінію, яка утворює кут α з цими прямими (рис. 9.9).

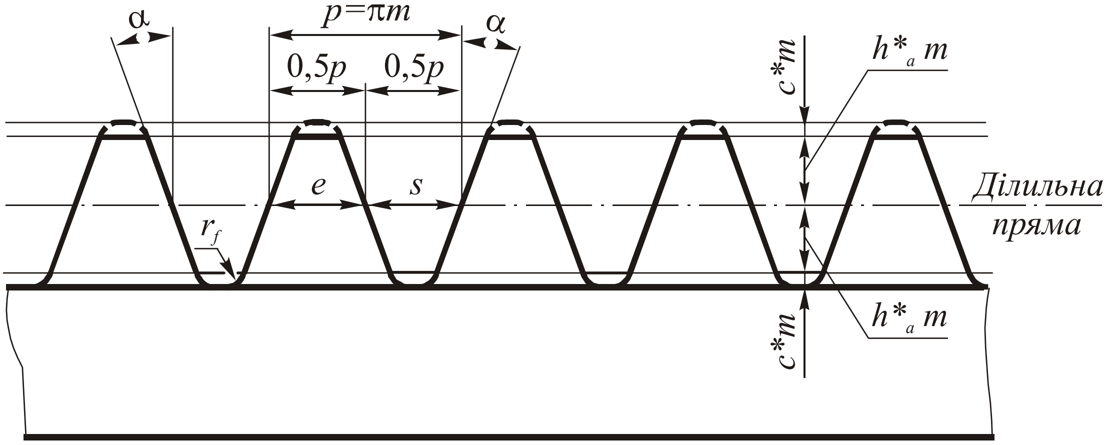


Рис. 9.9 Зубчаста рейка (гребінка)

Сьогодні замість рейки частіше використовують *черв'ячну фрезу*, як різновид рейкового інструменту (рис. 9.10). Вона являє собою гвинт з різальними гранями на зубцях. Якщо провести осьовий переріз фрези, то ми отримаємо рейку.

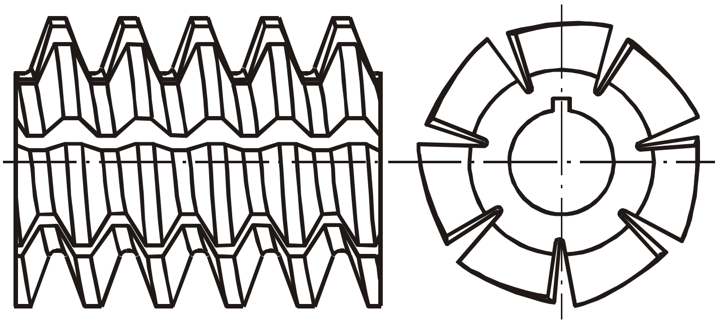


Рис. 9.10 Черв'ячна фреза

Для однозахідної фрези кут підйому гвинтової лінії не перевищує 5º. Найчастіше на практиці користуються рейковим інструментом. Довбачі застосовують, як правило, при нарізанні внутрішніх зубців (рис. 9.11 а).

У процесі нарізання зубчастих коліс за методом обкочування розрізняють три основні рухи інструмента і заготовки (рис. 9.11):

1 – *рух різання* (поступальний для довбача або обертальний для черв'ячної фрези) – здійснюється інструментом відносно стояка і нерухомої заготовки;

2 – *рух обкочування* – це рух, який здійснюється інструментом відносно заготовки;

3 – *рух подачі* здійснюється інструментом відносно заготовки в напрямку до її центру.

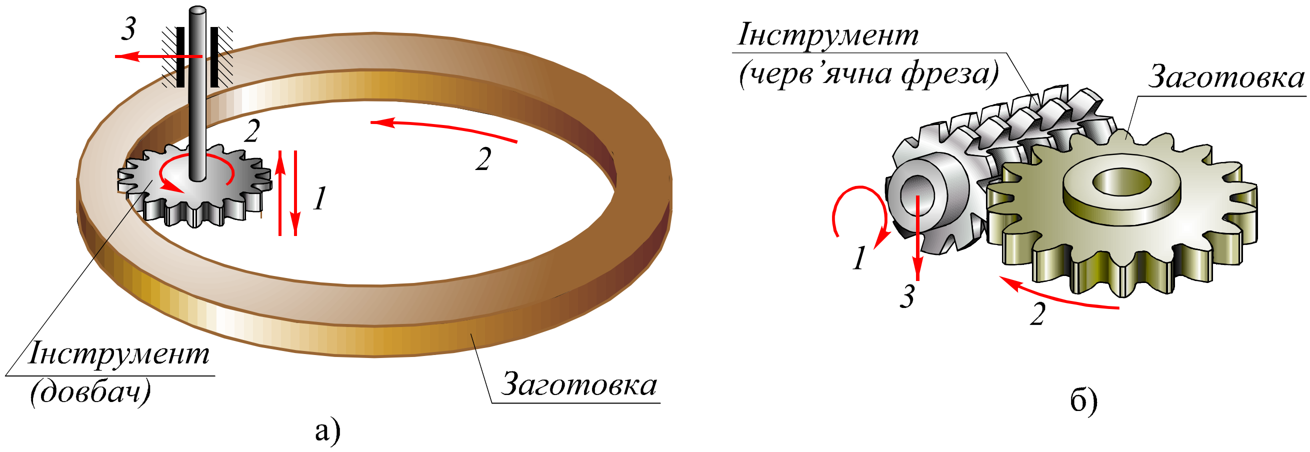


Рис. 9.11 Основні рухи рейкового інструменту і заготовки в процесі нарізання зубчастих коліс методом обкочування: а – з використанням довбача; б – з використанням черв'ячної фрези

За один рух різання інструмент на заготовці формує так звану *твірну* або *інструментальну поверхню*.

Під час руху обкочування інструмент і заготовка відтворюють відносні рухи, які мали б два зубчастих колеса, що знаходяться у правильному зачепленні. Тому інструмент і виконується у вигляді колеса (довбач) або рейки.

Рух подачі присутній у процесі нарізання для зменшення сил різання.

Щоб розібратися, як саме відбувається формування бічних поверхонь зубців при нарізанні коліс за методом обкочування, розглянемо взаємодію заготовки з інструментальною рейкою.

Як видно з рис. 9.9, профіль рейки складається з прямолінійної та криволінійної частин. Теоретичний профіль зубця інструментальної рейки мав би бути прямолінійним. Насправді висота головки зубця інструменту збільшена на величину радіального зазору (штрихова лінія). Справа в тому, що головка зубця різального інструменту формує ніжку зубця колеса, а в зачепленні між головкою зубця одного колеса та дном западини другого колеса (іншими словами – між колом вершин одного колеса та колом западин другого) має бути гарантований радіальний зазор

Припустимо, що за однин рух різання інструмент входить на всю глибину в заготовку (рух подачі виключаємо, хоча на практиці це зробити неможливо). Зубець рейки формує на заготовці твірну поверхню При цьому прямолінійна його частина формує площину, а криволінійна – деяку циліндричну поверхню.

За першим рухом різання йде рух обкочування, тобто поворот заготовки і поступальне зміщення рейки, що імітує відносний рух в процесі зачеплення колеса і рейки. Далі виконується другий рух різання. При цьому утворюється на заготовці друга твірна поверхня і т.д. За поворот заготовки на один крок формується бічна поверхня одного зубця, яка є внутрішньою обвідною твірних поверхонь (рис. 9.12).

Контур рейки, який формує зубчасту поверхню на заготовці колеса, називається *вихідним твірним контуром* (*ВТК*) *рейки*. Він визначає форму і розміри зубців, що нарізаються.

Параметри ВТК рейки стандартизовані. Згідно з ГОСТ 13754-68 вони мають такі значення:

- кут профілю $\alpha=20^{o}$;
- коефіцієнт висоти головки $h_a^*=1$;
- коефіцієнт радіального зазору $c^*=0,25$;
- радіус закруглення $\rho_f=0,4m$.

Слід відзначити, що прямолінійна частина ВТК рейки формує евольвентну частину зубця, а закруглена – перехідну частину (галтельний перехід від евольвенти до кола западин)

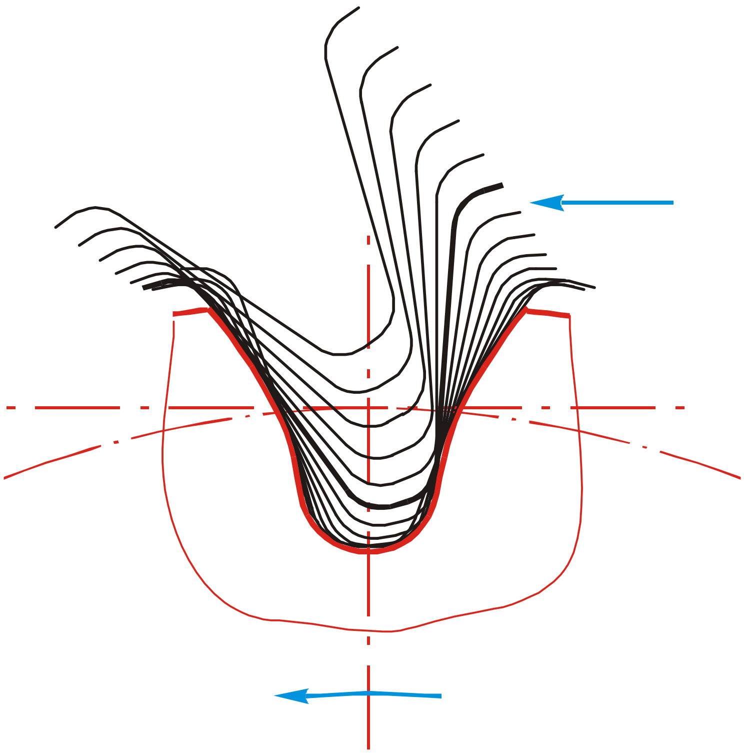


Рис. 9.12 Твірні поверхні на заготовці зубчастого колеса

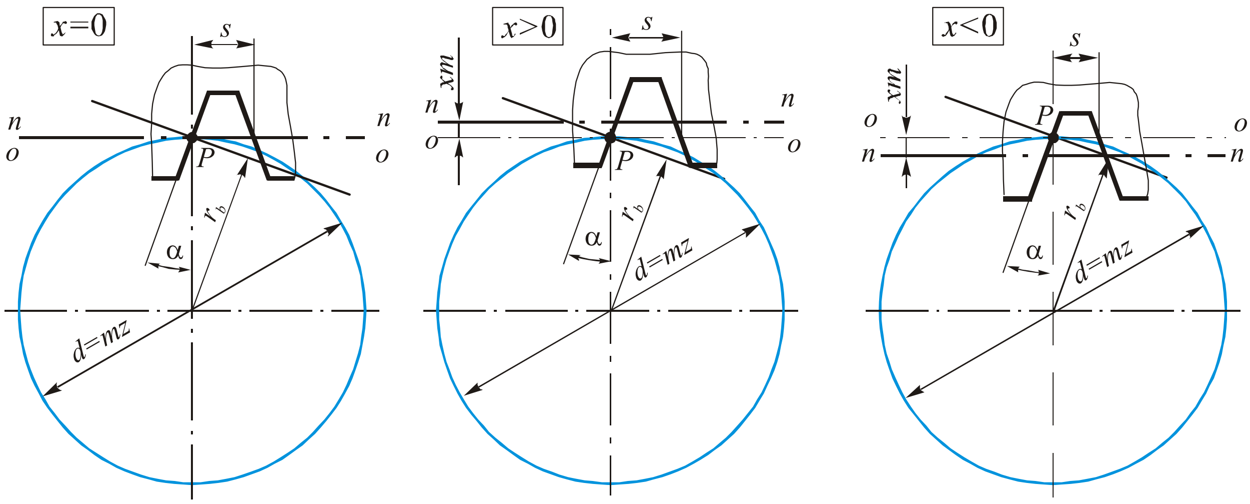
Зачеплення заготовки з інструментом у процесі нарізання зубчастого колеса називається верстатним зачепленням.

В залежності від взаємного розташування ВТК рейки і заготовки, на момент завершення верстатного зачеплення розрізняють три варіанти нарізання зубчастих коліс (рис. 9.13):

а) ділильна пряма рейки дотикається до ділильного кола колеса (рис. 9.13 а);

б) ділильна пряма рейки не дотикається до ділильного кола колеса (рис. 9.13 б);

в) ділильна пряма рейки перетинається з ділильним колом колеса (рис. 9.13 в);



а) б) в)

Рис. 9.13 Відносні положення ВТК інструменту і заготовкип: а – нульова установка інструменту; б – додатна установка інструменту; в – від’ємна установка інструменту

За першим варіантом має місце *нульова установка інструменту*, і говорять, що колесо нарізане без зміщення:

$$\chi = xm = 0; \qquad x = 0.$$

Тут χ – величина, кратна модулю, і називається *абсолютним зміщенням*, мм; *x – коефіцієнт зміщення.*

Товщина зубця колеса по ділильному колу дорівнює ширині западини рейки по ділильній прямій, тобто:

$$s = 0{,}5\pi m.$$

За другим варіантом має місце *додатна установка інструменту*, і говорять, що колесо нарізане з додатним зміщенням:

$$\chi = xm > 0; \qquad x > 0.$$

Товщина зубця колеса по ділильному колу тут більша від ширини западини рейки по ділильній прямій. Згідно з рис. 9.13 б

$$s = 0{,}5\pi m + 2xm\ \mathrm{tg}\alpha. \tag{9.5}$$

Отже ділильна товщина зубця колеса, нарізаного з додатним зміщенням більша, ніж у колеса, нарізаного без зміщення. Зрозуміло також, що у колеса, нарізаного з додатним зміщення, ділильна товщина зубця *s* більша від ділильної ширини западини *e* (див. рис. 9.7).

За третім варіантом має місце *від'ємна установка інструменту*, і говорять, що колесо нарізане з від'ємним зміщенням

$$\chi = xm < 0\,; \qquad x < 0\,.$$

Товщина зубця колеса по ділильному колу тут менша від ширини западини рейки по ділильній прямій. Згідно з рис. 9.13 в

$$s = 0{,}5\pi m - 2xm\ \mathrm{tg}\alpha\,. \tag{9.6}$$

Отже ділильна товщина зубця колеса, нарізаного з від'ємним зміщенням, менша, ніж у колеса, нарізаного без зміщення, і, відповідно, ділильна товщина зубця менша від ділильної ширини западини.

Пряма рейки, що дотикається до ділильного кола колеса, нарізаного зі зміщенням, називається *верстатно-початковою прямою*.

Незалежно від зміщення, колеса з будь-якою кількістю зубців, нарізані одним виконавчим твірним контуром даного модуля, мають спряжені поверхні, тобто утворюють правильне без бічних зазорів зачеплення. При цьому радіуси основних кіл, як уже відзначалось, залишаються незмінними. Вони, згідно з рис. 9.13, пов'язані з ділильними радіусами співвідношенням:

$$r_b = r\cos\alpha \qquad \text{або} \qquad r_b = 0{,}5mz\cos\alpha\,,$$

і звідси робимо висновок, що зміщення впливає тільки на товщину зубця по ділильному колу і на розташування ділянки евольвенти, яка використовується.

Лекція №16

9.2.4. Визначення розмірів зачеплення.

В залежності від зміщень, з якими були нарізані колеса, можна отримати три типи передач. Відрізняються вони взаємним розташуванням початкових і ділильних кіл (рис. 9.14).

1. Ділильні кола коліс збігаються з початковими (рис. 9.14 а):

$$r_1 = r_{w1}\,; \qquad r_2 = r_{w2}\,; \qquad \alpha_w = \alpha = 20°\,; \qquad a_w = a = \frac{d_1 + d_2}{2} = r_1 + r_2\,.$$

Цей випадок має місце, коли ділильна товщина зубця одного колеса збігається з ділильною шириною западини другого колеса (для початкових кіл ці розміри коліс завжди однакові). Дана умова може реалізуватися , коли колеса нарізані або без зміщення, або зі зміщеннями, однаковими за абсолютною величиною, і протилежними за знаком:

$$x_1 = x_2 = 0 \qquad \text{або} \qquad |x_1| = |-x_2|.$$

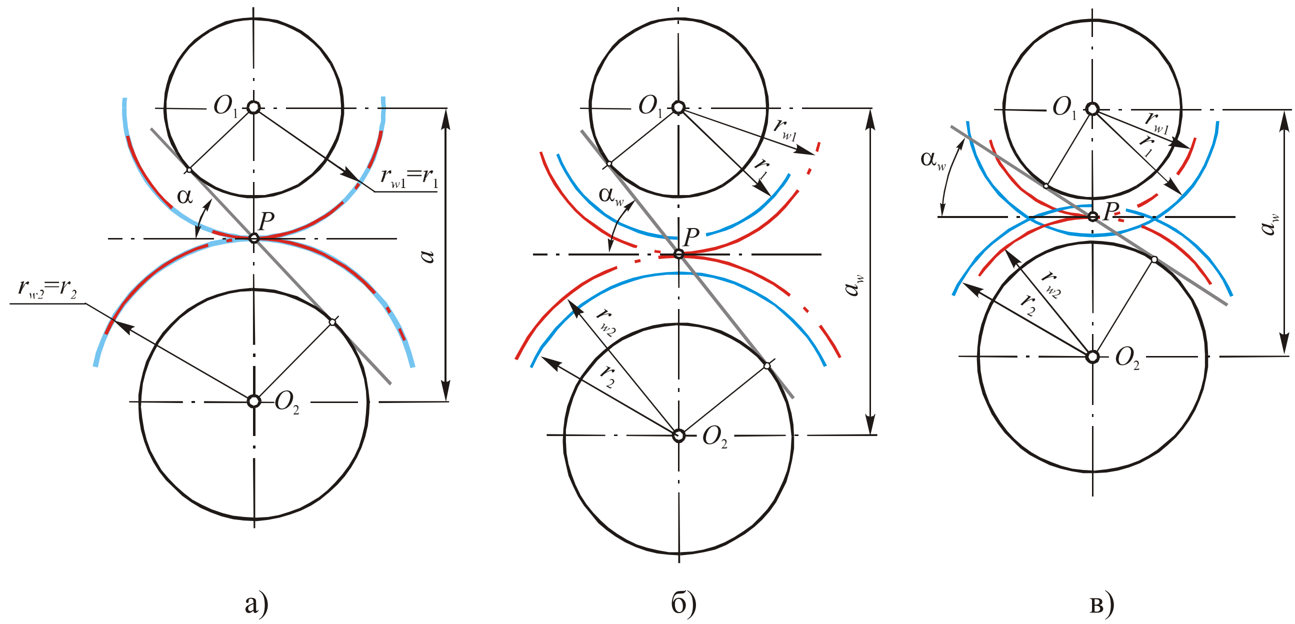


Рис. 9.14 Взаємне розташування початкових і ділильних кіл коліс у зачепленні: а – $x_1 = x_2 = 0$ **або** $|x_1| = |-x_2|$**; б –** $x_1 + x_2 > 0$**; в –** $x_1 + x_2 < 0$

2. Ділильна товщина зубця одного колеса більша від ділильної ширини западини другого колеса.

У цьому випадку ділильні і початкові кола коліс не збігаються (рис. 9.14 б). Міжосьова відстань a_w буде більшою від ділильної:

$$a_w > \frac{d_1 + d_2}{2}.$$

Збільшується і кут зачеплення:

$$\alpha_w > \alpha = 20°.$$

Такий тип передачі можна отримати за умови

$$x_1 + x_2 > 0$$

3. Ділильна товщина зубця одного колеса менше від ділильної ширини западини другого колеса.

Як і в попередньому випадку, тут ділильні і початкові кола коліс також не збігаються (рис. 9.14 в). Проте міжосьова відстань a_w буде меншою від ділильної:

$$a_w < \frac{d_1 + d_2}{2}.$$

Кут зачеплення зменшується:

$$\alpha_w < \alpha = 20^\circ.$$

Такий тип передачі можна отримати за умови

$$x_1 + x_2 < 0$$

Отже, стоїть завдання заходження a_w і α_w, інших розмірів передачі та її елементів. Для цього слід розглянути деякі особливості евольвенти.

Розглянемо довільну точку *M* евольвенти (рис. 9.15). Кут ν_M між радіусами *OC* і *OB*, проведеними в граничну точку *C* евольвенти і в точку *B* дотику твірної прямої *q* до основного кола, називається *кутом розгорнення евольвенти* в точці *M*. У точці *C* $\nu_C = 0$.

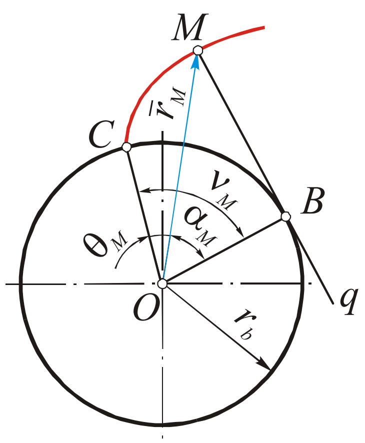


Рис. 9.15 Параметри евольвенти

Кут α_M між радіусами *OB* і *OM* називається *кутом профілю* в точці *M*. З прямокутного трикутника *OBM*

$$\alpha_M = \arccos\left(r_b / r_M\right), \tag{9.7}$$

де $r_M = |\vec{r}_M|$ – величина радіуса-вектора точки *M* евольвенти.

Кут

$$\theta_M = \nu_M - \alpha_M \tag{9.8}$$

називається *евольвентним кутом*.

Виходячи з властивостей евольвенти, $\cup CB = MB$. Тоді з ΔOBM маємо

$$\mathrm{tg}\alpha_M = \frac{MB}{OB} = \frac{\cup CB}{OB} = \frac{r_b \nu_M}{r_b} = \nu_M = \theta_M + \alpha_M .$$

Звідси

$$\theta_M = \mathrm{tg}\alpha_M - \alpha_M = \mathrm{inv}\alpha_M . \quad (9.9)$$

Залежність $\theta_M = \mathrm{inv}\alpha_M$ називається *евольвентою функцією*. З її допомогою визначають основні розміри зачеплення та його елементів.

Умовою складання двох зубчастих коліс є відсутність зазорів у зачепленні – тобто утворення *правильного зачеплення*. В аналітичному вигляді ця умова запишеться так:

$$p_w = s_{w1} + s_{w2} , \quad (9.10)$$

де p_w – крок зачеплення вздовж початкового кола:

$$p_w = \frac{2\pi r_{w1}}{z_1} = \frac{2\pi r_{w2}}{z_2} ; \quad (9.11)$$

s_{w1} і s_{w2} – товщини зубців вздовж початкових кіл відповідно першого і другого колеса.

Товщини зубців вздовж ділильних кіл обчислюються за формулою (9.6). Позначивши в цьому виразі $2xtg\alpha = \delta$, запишемо для першого і другого колеса відповідно:

$$s_1 = m\left(\frac{\pi}{2} + \delta_1\right); \; s_2 = m\left(\frac{\pi}{2} + \delta_2\right). \quad (9.12)$$

Коефіцієнти δ_1 і δ_2 характеризують зміну товщини зубців вздовж ділильного кола внаслідок зміщення інструменту (див. рис. 9.13, лекція 15).

Для визначення фактичного кута зачеплення α_M використаємо основну властивість евольвенти (рис. 9.16):

$$\psi_i + \theta_i = \psi + \theta . \quad (9.13)$$

Тут θ_i, θ – евольвентні кути

$$\theta_i = \mathrm{inv}\alpha_i ; \qquad \theta = \mathrm{inv}\alpha ;$$

ψ_i, ψ – центральні кути:

$$\psi_i = \frac{s_i}{2r_i};\ \psi = \frac{s}{2r}; \qquad (9.14)$$

s_i, s – товщини зубців відповідно вздовж довільного (радіуса r_i) і ділильного кіл.

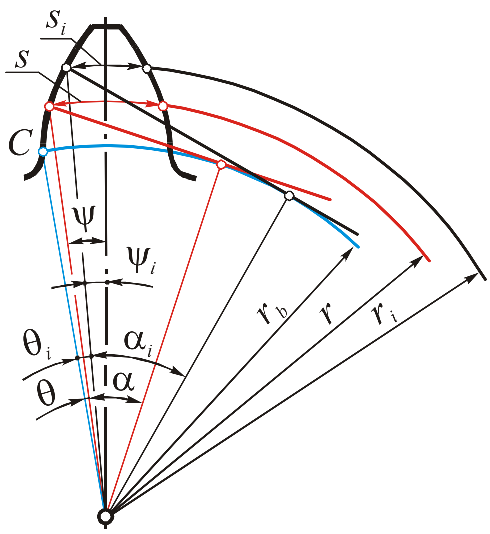


Рис. 9.16 Геометрія зубця евольвентного профілю

Після підстановки в (9.13) матимемо:

$$s_i = s\left(r_i/r\right) - 2r_i\left(\text{inv}\alpha_i - \text{inv}\alpha\right). \qquad (9.15)$$

Враховуючи (9.12) і (9.14), а також те, що ділильний радіус колеса обчислюються за формулою $r = 0{,}5mz$, згідно з (9.15) товщини зубців вздовж початкових кіл:

$$s_{w1} = s_1\left(r_{w1}/r_1\right) - 2r_{w1}\left(\theta_w - \theta_1\right) = r_{w1}\left[\frac{\pi}{z_1} + 2\left(\frac{\delta_1}{z_1}\right) - 2\left(\theta_w - \theta_1\right)\right] = \frac{p_w}{2}; \qquad (9.16)$$

$$s_{w2} = s_2\left(r_{w2}/r_2\right) - 2r_{w2}\left(\theta_w - \theta_2\right) = r_{w2}\left[\frac{\pi}{z_2} + 2\left(\frac{\delta_2}{z_2}\right) - 2\left(\theta_w - \theta_2\right)\right] = \frac{p_w}{2}. \qquad (9.17)$$

Тут $\theta_{w1} = \theta_{w2} = \theta_w = \text{inv}\alpha_w$

Підставляємо (9.16) та (9.17) в (9.10). З урахуванням (9.11) отримаємо:

$$r_{w1}\left[\frac{\pi}{z_1} + 2\left(\frac{\delta_1}{z_1}\right) - 2\left(\theta_w - \theta_1\right)\right] + r_{w2}\left[\frac{\pi}{z_2} + 2\left(\frac{\delta_2}{z_2}\right) - 2\left(\theta_w - \theta_2\right)\right] = \frac{2\pi r_{w1}}{z_1} = \frac{2\pi r_{w2}}{z_2}. \qquad (9.18)$$

Передатне відношення зубчастої циліндричної передачі $i_{12} = \frac{r_{w2}}{r_{w1}} = \frac{z_2}{z_1}$. Звідси отримаємо співвідношення $r_{w1} = r_{w2}\left(z_1/z_2\right)$ або $r_{w2} = r_{w1}\left(z_2/z_1\right)$. Після підстановки одного з них в (9.18) та відповідних перетворень отримаємо

$$2\pi + 2\left(\delta_1 + \delta_2\right) - 2\left(z_1 + z_2\right)\mathrm{inv}\alpha_w + 2\left(z_1 + z_2\right)\mathrm{inv}\alpha = 2\pi .$$

Звідси, враховуючи, що $\delta_1 = 2x_1 tg\alpha$ і $\delta_2 = 2x_2 tg\alpha$, визначаємо інволюту кута проектованого зачеплення:

$$\mathrm{inv}\alpha_w = \mathrm{inv}\alpha + 2\frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2}\mathrm{tg}\alpha . \qquad (9.19)$$

Тут $\mathrm{inv}\alpha = \mathrm{tg}\alpha - \alpha$ ($\alpha = 20°$ згідно з ГОСТ 13754-68).

Знайшовши величину $\mathrm{inv}\alpha_w$, за таблицями інволют визначають значення α_w, що дає можливість легко обчислити всі необхідні розміри передачі.

1. Радіуси ділильних кіл:

$$r_1 = \frac{mz_1}{2}; \qquad r_2 = \frac{mz_2}{2}. \qquad (9.20)$$

2. Радіуси основних кіл:

$$r_{b1} = r_1 \cos\alpha ; \qquad r_{b2} = r_2 \cos\alpha . \qquad (9.21)$$

3. Радіуси початкових кіл:

$$r_{w1} = \frac{mz_1}{2}\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_W}; \qquad r_{w2} = \frac{mz_2}{2}\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_W}. \qquad (9.22)$$

4. Міжосьова відстань:

$$a_w = \frac{m\left(z_1 + z_2\right)\cos\alpha}{2\cos\alpha_w}. \qquad (9.23)$$

Вираз (9.23) записують також у вигляді

$$a_w = a + ym , \qquad (9.24)$$

де y – *коефіцієнт сприйманого зміщення*. З (9.24) отримаємо

$$y = \frac{z_1 + z_2}{2}\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_w} - 1\right). \qquad (9.25)$$

5. Радіуси кіл западин:

$$r_{f1} = r_1 - m\left(h_a^* + c^* - x_1\right); \qquad r_{f2} = r_2 - m\left(h_a^* + c^* - x_2\right). \tag{9.26}$$

6. Радіуси кіл вершин:

$$r_{a1} = a_w - r_{f2} - c^* m \qquad r_{a2} = a_w - r_{f1} - c^* m. \tag{9.27}$$

Ці радіуси можна визначити через *коефіцієнт зрівняльного зміщення* Δy:

$$\Delta y = x_1 + x_2 - y. \tag{9.28}$$

Після нескладних перетворень формули (9.27) набувають вигляду:

$$r_{a1} = r_1 + m\left(h_a^* + x_1 - \Delta y\right); \; r_{a2} = r_2 + m\left(h_a^* + x_2 - \Delta y\right). \tag{9.29}$$

Нагадаємо, що згідно з ГОСТ 13754-68 $h_a^* = 1$, $c^* = 0{,}25$.

Якщо колеса нарізані без зміщення ($x_1 = x_2 = 0$ і $\alpha_w = \alpha$), формули для визначення основних розмірів передачі спрощуються:

1. Радіуси ділильного та початкового кіл

$$r_w = r = \frac{mz}{2}. \tag{9.30}$$

2. Міжосьова відстань

$$a_w = a = \frac{m}{2}\left(z_1 + z_2\right). \tag{9.31}$$

3. Радіус кола западин

$$r_f = \frac{m}{2}\left(z - 2{,}5\right). \tag{9.32}$$

4. Радіус кола вершин

$$r_a = \frac{m}{2}\left(z + 2\right). \tag{9.33}$$

9.2.5. Косозубе зачеплення.

За формою бічної поверхні зубців розрізняють *прямозубі* і *косозубі* колеса.

У прямозубих колесах бічна поверхня зубця утворюється шляхом поступального руху евольвенти у напрямку, паралельному осі обертання колеса. Якщо ділильний циліндр колеса розвернути на площину (рис. 9.17 а), то лінії перетину бічних поверхонь зубців з ділильним циліндром зображатимуться прямими, паралельними осі обертання колеса.

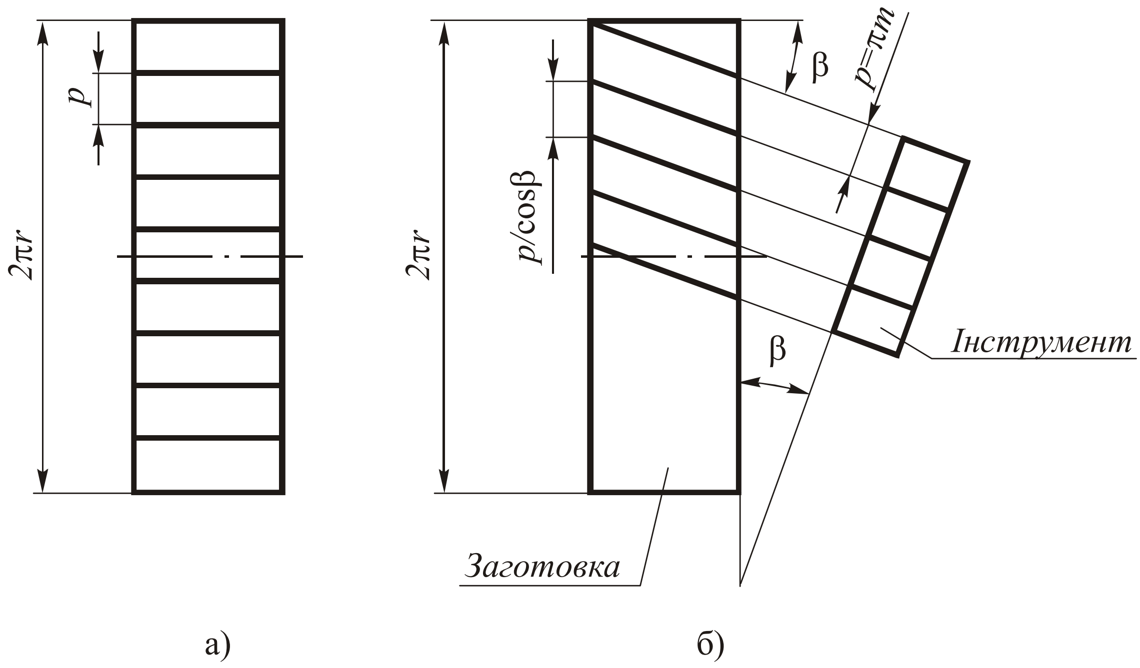


Рис. 9.17 Прямозубі (а) і косозубі (б) колеса

В косозубих колесах бічна поверхня зубця утворюється внаслідок гвинтового руху евольвенти по основному циліндру. Якщо розвернути ділильний циліндр такого колеса на площину (рис. 9.17 б), то гвинтові лінії перетину цього циліндра з бічними поверхнями зубців зобразяться прямими лініями, нахиленими під кутом β до напрямків, паралельних осі обертання колеса.

Нарізаються косозубі колеса тим самим інструментом, що і прямозубі, але встановлюють його похило під $\angle\beta$ до торця колеса t–t (див. рис. 9.17 б). Внаслідок нахилу *торцевий крок* збільшується

$$p_t = \frac{p}{\cos\beta}, \tag{9.34}$$

а значить збільшується і модуль в торцевому перетині (*торцевий модуль*)

$$m_t = \frac{m}{\cos\beta}. \tag{9.35}$$

При розрахунку розмірів зубчастих косозубих коліс у розрахункові формули замість стандартного модуля m слід підставляти торцевий модуль m_t. Так наприклад ділильний радіус колеса

$$r = \frac{m_t z}{2} = \frac{mz}{2\cos\beta}. \qquad (9.36)$$

Слід відзначити, що розміри косого зубця по висоті, у порівнянні з прямозубими колесами, не змінюються, адже використовується для нарізання один і той самий інструмент. Тому при розрахунку розмірів косозубих коліс параметри вихідного твірного контуру (ВТК) h_a^*, c^* а також Δy і x у формулах (9.26) – (9.29) потрібно перемножити не на торцевий, а на стандартний (нормальний) модуль. Наприклад:

$$r_f = \frac{mz}{2\cos\beta} - m\left(h_a^* + c^* - x\right).$$

Через поворот інструменту профільний кут ВТК збільшується у порівнянні зі стандартною величиною $\alpha = 20°$, оскільки розміри за висотою не змінюються, а торцевий крок збільшується. Розрахунковий кут α_t визначається за формулою:

$$\mathrm{tg}\alpha_t = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\cos\beta}. \qquad (9.37)$$

9.2.6. Елементи зовнішнього евольвентного зачеплення.

Побудуємо картину зачеплення, тобто зобразимо зубці коліс, що знаходяться в зачепленні (рис. 9.18). Для цього потрібно обчислити всі необхідні розміри коліс і визначити координати точок профілів зубців (методика такої побудови розглядається при виконанні курсового проекту і вона детально описана в [5]).

Розглянемо елементи зачеплення, зображені на рис. 9.18.

1. *Теоретична лінія зачеплення* – це лінія N_1N_2, що є спільною дотичною до основних кіл (див. п. 10.2.1., лекція 19).
2. *Активна лінія зачеплення* $B_{p1}B_{p2}$.

Активна лінія зачеплення – це геометричне місце точок контакту однієї пари зубців від початку до закінчення зачеплення.

В точках B_{p1} і B_{p2} теоретична лінія зачеплення перетинається з колами вершин зубців коліс. В одній з цих точок в залежності від напрямку обертання, наприклад в точці B_{p1}, спряжені профілі входять в зачеплення, а в іншій – B_{p2}, виходять із зачеплення.

3. *Робочі профілі зубців.*

Робочі профілі зубців – це ті ділянки спряжених профілів, точки яких взаємодіють у процесі зачеплення.

На рис. 9.18 вони заштриховані. На головках зубців робочі профілі обмежені колами вершин, тобто точками L_1 і L_2, а на ніжках – точками M_1 і M_2, спряженими з ними. Точки L_1 та M_2; L_2 та M_1 зустрічаються на лінії зачеплення в точках B_{p2} і B_{p1} відповідно в перший або останній моменти контакту профілів. Щоб знайти точку M_2 на ніжці зубця другого колеса, потрібно радіусом O_2B_{p2} провести дугу до перетину з профілем цього зубця. Аналогічно знаходять точку M_1 на ніжці першого колеса (див. рис. 9.18).

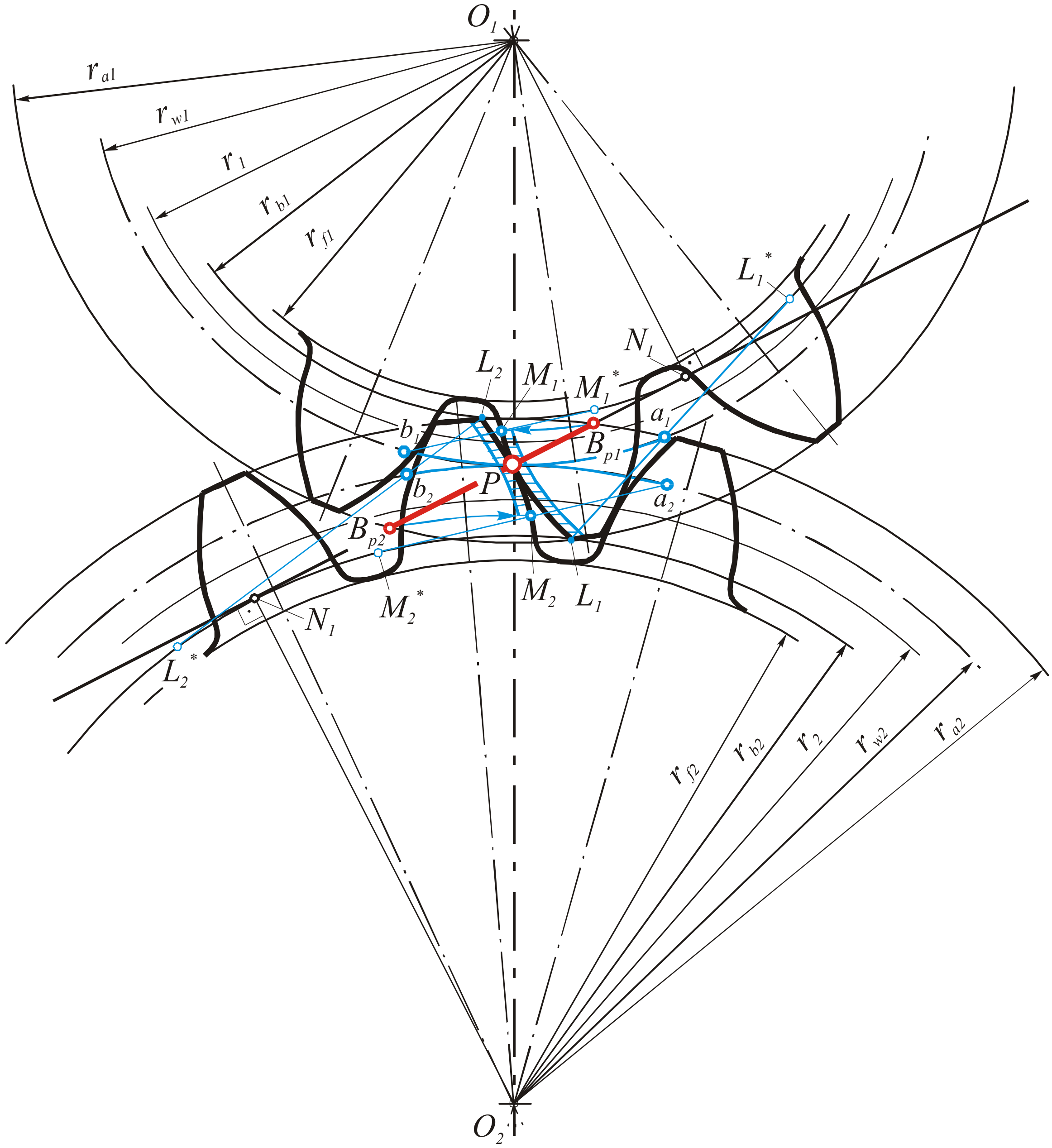


Рис. 9.18 Елементи зубчастого евольвентного зачеплення

4. *Дуга зачеплення.*

Дуга зачеплення – це частина початкового кола колеса, яка відповідає куту повороту колеса за час зачеплення однієї пари зубців.

Щоб знайти дугу зачеплення, наприклад для другого колеса, потрібно з точок, які обмежують робочий профіль зубця, провести дотичні до основного кола (на рис. 9.18 це лінії $L_2L_2^*$ і $M_2M_2^*$). Точки їх перетину з початковим колом і дадуть дугу зачеплення $\cup a_2b_2$. Аналогічно знаходять і дугу зачеплення для першого колеса $\cup a_1b_1$.

Оскільки початкові кола в процесі зачеплення перекочуються без ковзання, то має виконуватись умова

$$\cup a_1b_1 = \cup a_2b_2 . \tag{9.38}$$

Лекція №17

9.2.7. Вплив зміщення інструменту на форму зубців при їх нарізанні.

На рис. 9.19 зображені профілі зубців трьох коліс з однаковою кількістю зубців, нарізаних одним інструментом, але з різними зміщеннями.

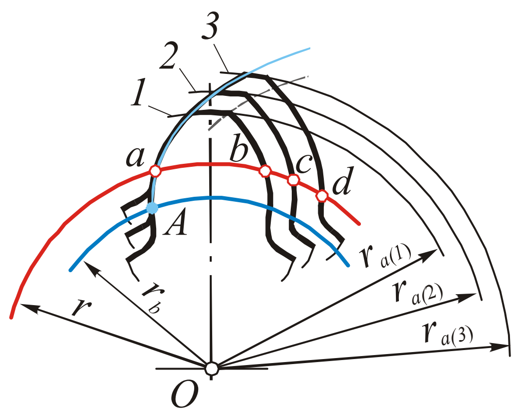


Рис. 9.19 Форма зубця в залежності від зміщення інструменту

З рисунка видно, що величини коефіцієнтів зміщення коліс знаходяться у залежності:

$$x_3 > x_2 > x_1 . \tag{9.39}$$

Оскільки колеса мають однакові ділильні радіуси, то зі зростанням величини зміщення ділильна товщина зубця зростає, тобто $s_3 > s_2 > s_1$. Тут $s_3 = \cup ad$; $s_2 = \cup ac$; $s_1 = \cup ab$ (див. рис. 9.19). Збільшуються також радіуси кіл западин і кіл вершин. Зубці при основі товщають, проте вершини їх звужуються.

Якщо розглядати зубець як консольну балку, навантажену зосередженою силою, то, чим більшим буде зміщення, тобто, чим товстішим буде зубець при основі, тим міцнішим він буде на згин.

З іншого боку, оскільки основні кола коліс теж однакові, то профілі зубців окреслюються одною евольвентою. Проте, в залежності від величини зміщення, відповідні профілі окреслюють різні ділянки евольвенти. Згідно з рис. 9.19, чим більшим є зміщення, тим віддаленіша від основи (точка *A*) ділянка евольвенти окреслює профіль зубця. Радіус кривини профілю зростає. Контактні ж напруження, згідно з формулою Герца, при цьому зменшуються, що сприяє зменшенню зносу поверхні.

Таким чином, вибираючи коефіцієнти зміщення при проектуванні механічної передачі, можна впливати на форму зубців коліс, а значить і на якість зачеплення.

9.2.8. Показники якості зачеплення.

Для оцінки якості зачеплення вводять *якісні показники зубчастої передачі*. Вони дозволяють оцінити передачу з точки зору безшумності і плавності її роботи, можливого зносу і міцності зубців. З їх допомогою проектують оптимальні передачі, вибираючи раціональні значення коефіцієнтів зміщення.

До якісних показників зубчастої передачі відносяться:

- *коефіцієнт перекриття*;
- *коефіцієнт ковзання*;
- *коефіцієнт питомого тиску*.

9.2.8.1. Коефіцієнт перекриття.

Щоб зачеплення було неперервним і плавним, потрібно, щоб на момент закінчення зачеплення однієї пари зубців у зачепленні знаходилась ще хоча б одна пара. Це можливо за умови, що довжина дуги зачеплення буде більшою від кроку вздовж початкового кола.

На рис. 9.20 зображені площадки, які є геометричним місцем ліній контакту зубців прямозубих коліс у процесі зачеплення.

Ширина площадки дорівнює ширині колеса b, а висота дорівнює довжині активної лінії зачеплення $B_{\text{p}1}B_{\text{p}2}$ (див. рис. 9.18, лекція 17). Відстань між двома сусідніми лініями контакту на цих рисунках – це відстань між двома евольвентами вздовж спільної нормалі до них, тобто вздовж лінії зачеплення. Ця відстань за властивостями евольвенти дорівнює відстані по основному колу між цими ж евольвентами, тобто дорівнює основному кроку p_b.

В момент, коли пара 2-2 входить в зачеплення в точці $B_{\text{p}1}$, пара 1-1 перебуває на площині зачеплення на відстані основного кроку від неї (рис. 9.20 а). До моменту виходу пари 1-1 із зачеплення в точці $B_{\text{p}2}$ в зачепленні перебувають одночасно дві пари зубців (рис. 9.20 б). При подальшому повороті зубчастих коліс в зачепленні перебуватиме одна пара – 2-2, аж поки вона не займе положення 2^*-2^*, коли ввійде в зачеплення наступна пара зубців (рис. 9.20 в).

Таким чином контактні пари мов би перекривають одна одну, забезпечуючи неперервність процесу зачеплення.

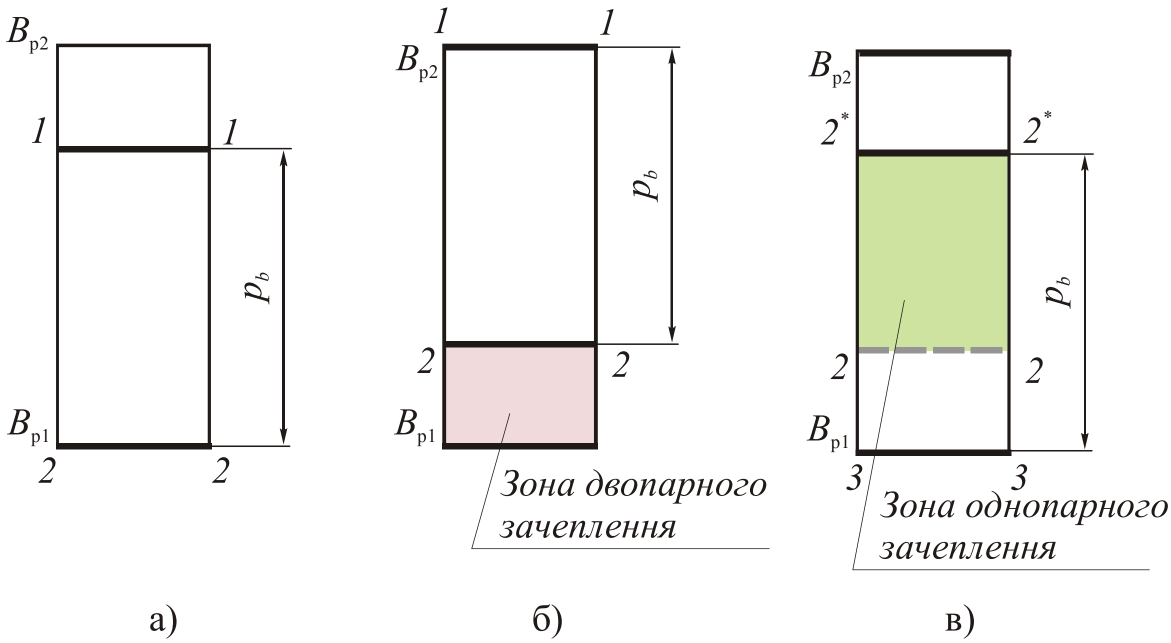


Рис. 9.20 Положення лінії контакту в процесі зачеплення однієї пари зубців: а – перша стадія зачеплення; б –друга стадія зачеплення; в – третя стадія зачеплення

Коефіцієнтом перекриття прямозубої передачі називається відношення довжини дуги зачеплення до кроку вздовж початкового кола або довжини активної лінії зачеплення до основного кроку.

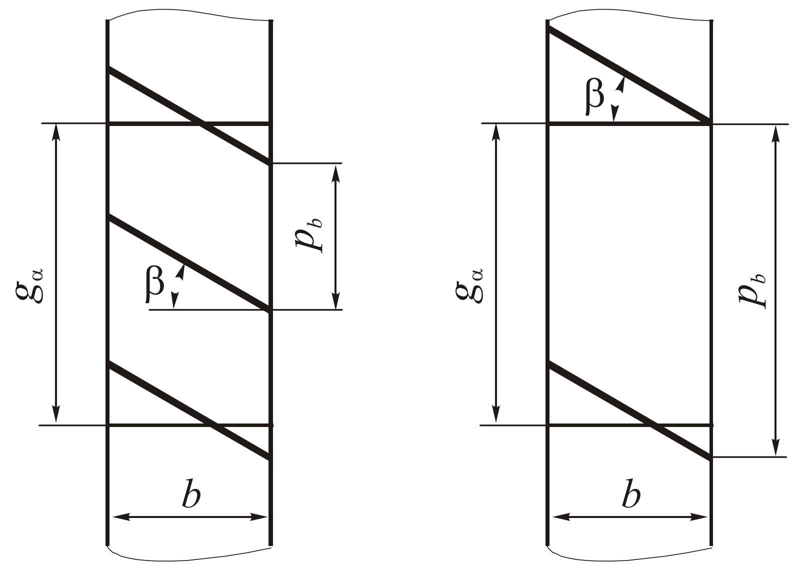
$$\varepsilon_\alpha = \frac{\cup ab}{p_w} = \frac{B_{p1}B_{p2}}{p_b} > 1. \qquad (9.40)$$

Допустима величина коефіцієнта перекриття $[\varepsilon_\alpha]$ визначається ступенем точності передачі (див. табл. 3.1 [5])

Слід зазначити, що зі збільшенням коефіцієнта зміщення x коефіцієнт перекриття ε_α зменшується.

При косозубому зчепленні тривалість зачеплення однієї пари зубців зростає, тому і коефіцієнт перекриття в косозубій передачі ε_γ більший від ε_α.

Розвернемо ділильний циліндр косозубого колеса на площину (рис. 9.21). Гвинтові лінії перетину цього циліндра з бічними поверхнями зубців зобразяться прямими лініями, які нахилені під кутом β і знаходяться на відстані торцевого кроку p_t (див. лекцію 16).



а) б)

Рис. 9.21 Положення лінії контакту в процесі зачеплення однієї пари зубців косозубих коліс : а – $p_b < g_\alpha$ **;**
б – $p_b > g_\alpha$

Для косозубої передачі коефіцієнт перекриття визначається як сума двох складових:

$$\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta. \tag{9.41}$$

Тут ε_α – коефіцієнт торцевого перекриття, який обчислюється за формулою (9.40). Другий доданок $\varepsilon_\beta = \dfrac{b\,\mathrm{tg}\beta}{p_t}$ – *коефіцієнт бічного перекриття*, де b – ширина колеса.

З рис. 9.21 б) видно, що навіть при довжині активної лінії зачеплення g_α, меншій від торцевого кроку p_t, тобто коли коефіцієнт торцевого перекриття $\varepsilon_\alpha<1$, зачеплення, внаслідок нахилу зубців, залишиться неперервним. В цьому перевага косозубого зачеплення.

На практиці для косозубого зачеплення допустима величина коефіцієнта торцевого перекриття приймається $[\varepsilon_\alpha]=1$.

9.2.8.2. Коефіцієнт ковзання

Характеризує ступінь ковзання зубців коліс в процесі зачеплення. Визначається як відношення швидкості ковзання в точці K контакту профілів $\vec{V}_{ковз} = \vec{V}_{K1} - \vec{V}_{K2}$ до тангенціальної складової $\vec{V}_K^{\tau}$ швидкості точки K зубця даного колеса (рис. 9.22).

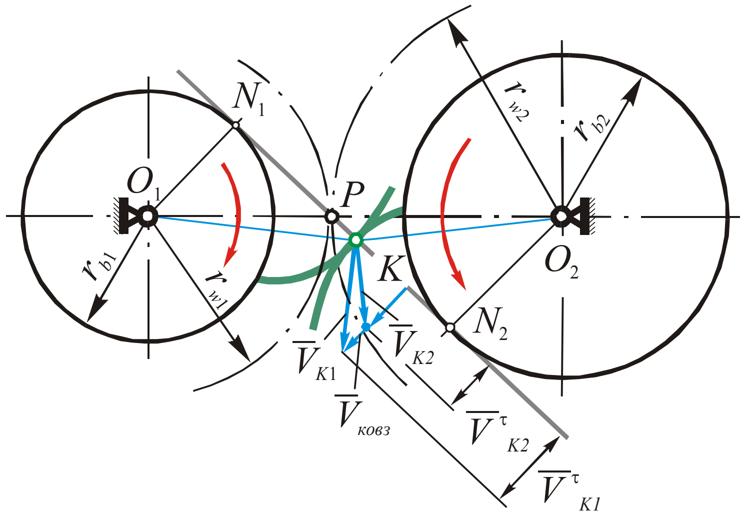


Fig. 10.22 Velocities of gears in a contact point

$$\lambda_1 = \frac{V_{ковз}}{V^{\tau}_{K_1}}; \quad \lambda_2 = \frac{V_{ковз}}{V^{\tau}_{K_2}}. \tag{9.42}$$

Для визначення коефіцієнтів ковзання можна скористатись такими формулами:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \left(1 + \dfrac{1}{u_{12}}\right)\dfrac{l_K}{l_K + l_{P1}} \\ \lambda_2 = \left(1 + \dfrac{1}{u_{12}}\right)\dfrac{l_K}{l_K - l_{P2}}. \end{cases} \tag{9.43}$$

Тут u_{12} – передатне число зубчастої передачі; l_K – величина алгебраїчна, яка виражає відстань від полюса зачеплення P до поточного положення точки K контакту пари зубців; l_{P1} і l_{P2} – абсолютні значення довжин відрізків PN_1 і PN_2.

В процесі зачеплення точка K контакту зубців переміщується вздовж активної лінії зачеплення від точки B_{p1} до точки B_{p2} (див. рис. 9.18, лекція 16). Тоді відстань l_K змінюватиметься від ($-B_{p1}P$) до нуля, і далі від нуля до($+PB_{p2}$).

На рис. 9.23 зображені графіки залежності коефіцієнтів ковзання λ_1 і λ_2 від положення точки контакту K на теоретичній лінії зачеплення N_1N_2, побудовані згідно з формулами (9.43).

Як видно, максимального значень на активній лінії зачеплення коефіцієнт ковзання λ_1 набуває в точці B_{p1}, тобто в перший момент контакту ніжки зубця першого колеса з вершиною головки зубця другого колеса (це відповідно точки M_1 і L_2 профілів на. рис. 9.18, лекція 16). Коефіцієнт ковзання λ_2 набуває максимального значення в точці B_{p2} , тобто в момент виходу зубців із зачеплення.

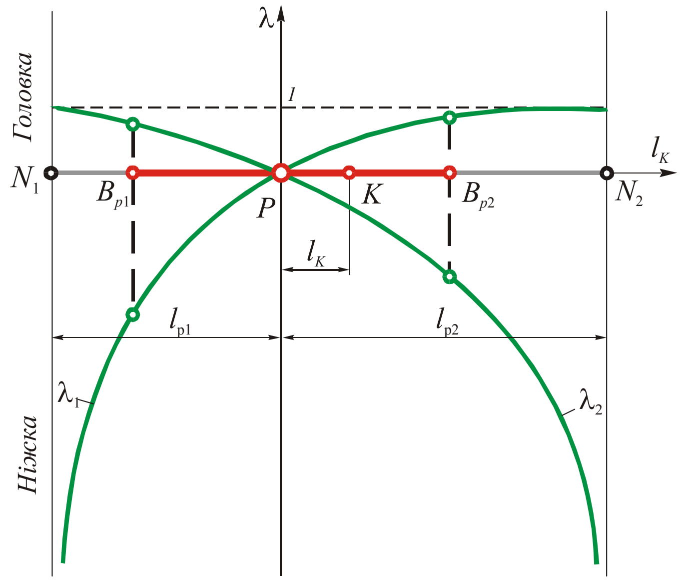


Рис. 9.23 Графіки залежності коефіцієнтів ковзання λ_1 і λ_2 від положення точки контакту *K* на лінії зачеплення

Коефіцієнти ковзання λ_1 і λ_2 залежать від коефіцієнтів зміщення коліс x_1 і x_2.

9.2.8.3. Коефіцієнт питомого тиску

Дієздатність зубчастої передачі визначається величиною контактних напружень, які виникають при взаємодії пари зубців у зоні контакту. Після досягнення цими напруженнями певних граничних значень, враховуючи до того ж їх циклічність, робочі поверхні зубців починають викришуватись, і передача виходить із ладу. Ці напруження можна визначити за формулою Герца для випадку контакту двох циліндрів:

$$\sigma_H = 0{,}418\sqrt{\frac{Q}{b}\frac{E_{зв}}{\rho_{зв}}}\,. \tag{9.44}$$

Тут Q – сила в зачепленні; b – ширина зубця (довжина лінії контакту); $E_{çâ} = \dfrac{2E_1E_2}{E_1 + E_2}$ – зведений модуль пружності матеріалів коліс; $\rho_{çâ} = \dfrac{\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$ – зведений радіус кривини, де ρ_1 і ρ_2 – радіуси кривин евольвентних профілів в точці контакту (рис. 9.24).

Користуючись позначеннями на рис. 9.24, можна записати, що $\rho_{çâ} = \dfrac{N_1K \cdot KN_2}{N_1N_2}$.

Коефіцієнт питомого тиску враховує вплив геометрії зубців (радіусів кривини їх профілів в точці контакту) на величину контактних напружень. Він визначається як відношення

$$\vartheta = \frac{m}{\rho_{зв}} = \frac{m \cdot N_1 N_2}{N_1 K \cdot K N_2}\,. \qquad (9.45)$$

Тут m – модуль зачеплення.

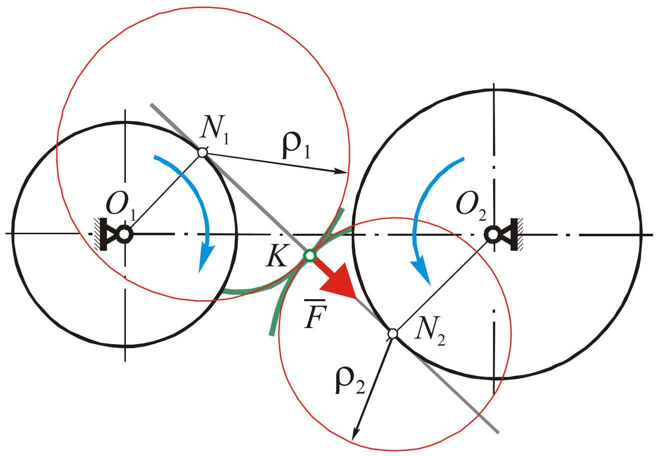


Рис. 9.24 Схема навантаження пари зубців коліс під час зачеплення

Коефіцієнт ϑ не залежить від величини модуля, оскільки радіус кривини ρ пропорційний модулю.

Оскільки точка K в процесі зачеплення пари зубців зміщується вздовж лінії зачеплення, а значить довжини відрізків N_1K і KN_2 змінюються, змінюватиметься і величина коефіцієнту питомого тиску залежно від положення точки контакту K на лінії зачеплення. Графік такої зміни представлений на рис. 9.25.

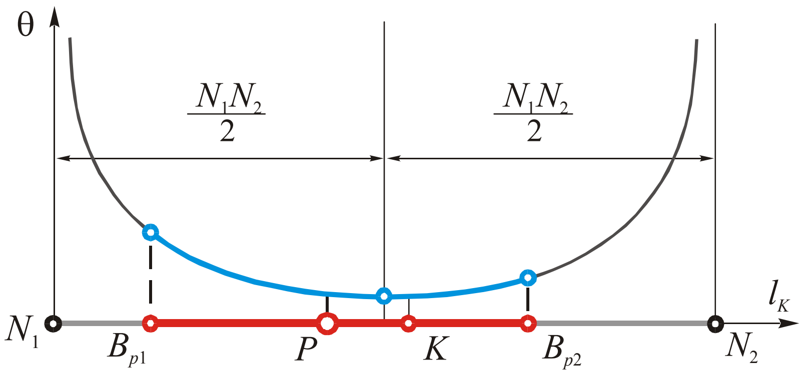


Рис. 9.25 Графік зміни величини коефіцієнта питомого тиску в залежності від положення точки контакту *K* на лінії зачеплення

Коефіцієнт питомого тиску ϑ залежать від коефіцієнтів зміщення коліс x_1 і x_2.

Чим більші коефіцієнти зміщення, тим меншим буде коефіцієнт питомого тиску. При проектуванні евольвентної передачі потрібно намагатись, щоб коефіцієнт ϑ був якнайменшим.

9.2.9. Інтерференція зубчастих профілів. Підрізання та загострення зубців

Інтерференцією називається взаємне проникнення зубців при їх взаємодії поза лінією зачеплення.

Це явище супроводжується пластичними деформаціями крайок зубців у вершинах і їх ніжок.

Причиною інтерференції є похибки при виготовленні коліс, внаслідок чого виникає неприпустиме їх зближення після складання. Іншою причиною може бути неправильний вибір коефіцієнтів зміщення.

Інтерференція зубців заготовки й інструменту в умовах верстатного зачеплення призводить до *підрізання ніжок зубців*.

Розглянемо умови, за яких стає можливим підрізання зубців.

Діаметр ділильного кола заготовки $d = mz$. За незмінного діаметра d при збільшенні модуля зменшується кількість зубців, які можна нарізати на заготовці. Розміри зубців при цьому збільшуються.

Визначимо мінімальну кількість зубців, яку можна нарізати буз зміщення інструменту, щоб не було підрізання.

На рис. 9.26 лінія вершин рейки $h_a^* m$, яка формує евольвентну частину профілю ніжки зубця, (розміром $c^* m$ нехтуємо) перетинає спільну нормаль лівіше від точки *N*. Тобто контакт зубців рейки і заготовки відбувається поза теоретичною лінією зачеплення, що й призводить до підрізання ніжки зубця.

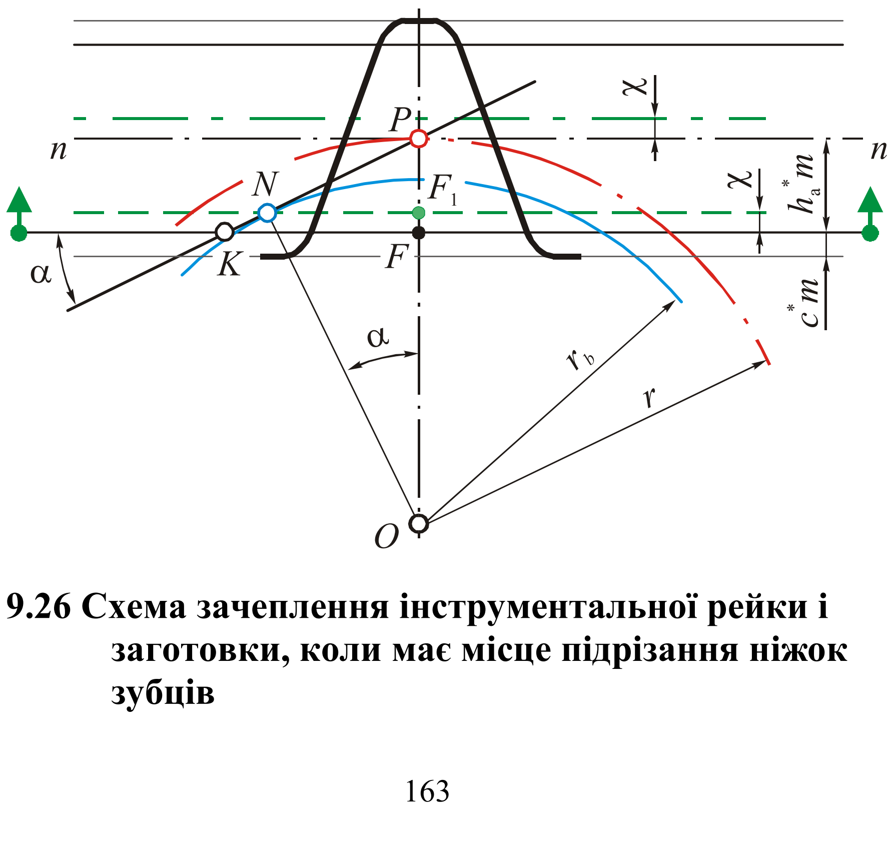


Рис. 9.26 Схема зачеплення інструментальної рейки і заготовки, коли має місце підрізання ніжок зубців

Підрізання зубців без зміщення інструменту не відбудеться за виконання умови:

$$NP \geq KP. \tag{9.46}$$

Враховуючи, що

$$NP = OP\sin\alpha = \frac{mz}{2}\sin\alpha;$$

$$KP = \frac{PF}{\sin\alpha} = \frac{h_a^* m}{\sin\alpha},$$

умова (9.46) набуде вигляду:

$$\frac{mz_{\min}}{2}\sin\alpha \geq \frac{h_a^* m}{\sin\alpha}.$$

Звідси

$$z_{\min} \geq \frac{2h_a^*}{\sin^2\alpha}. \tag{9.47}$$

При $h_a^* = 1$ і $\alpha = 20°$

$$z_{\min} \approx 17.$$

Мінімальна кількість зубців, яку можна нарізати без зміщення інструменту без підрізання $z_{\min} \approx 17$**.**

Щоб нарізати колесо з кількістю зубців z<17 без їх підрізання, потрібно ввести додатне зміщення інструменту χ, за якого лінія вершин рейки (без урахування $c^* m$) проходила б через точку на основному колі заготовки, що лежить правіше від точки N, або, в крайньому випадку, проходила через неї (див. рис. 9.26). Для цього випадку маємо умову:

$$NP = KP. \tag{9.48}$$

Тут $NP = \dfrac{mz}{2}\sin\alpha$; $KP = \dfrac{PF_1}{\sin\alpha} = \dfrac{\left(h_a^* - x\right)m}{\sin\alpha}$. Тоді $\dfrac{mz}{2}\sin\alpha = \dfrac{\left(h_a^* - x\right)m}{\sin\alpha}$. Звідси

$$z\sin^2\alpha = 2\left(h_a^* - x\right).$$

З іншого боку, згідно з (9.47)

$$\sin^2\alpha = \frac{2h_a^*}{z_{\min}} = \frac{2}{17}.$$

Таким чином

$$\frac{2}{17}z = 2\left(1 - x\right).$$

Остаточно отримаємо:

$$x = \frac{17 - z}{17}. \quad (9.49)$$

При додатному зміщенні, як уже відзначалось, потовщується ніжка, але, разом з тим, загострюється вершина, що зменшує міцність крайки зубця при його контактній взаємодії з ніжкою зубця другого колеса. Тому додатне зміщення обмежують товщиною вершини зубця, яка кратна модулю:

$$s_a = s_a^* m. \quad (9.50)$$

Тут s_a^* – коефіцієнт товщини зубця у вершині; його величина призначається залежно від способу термообробки зубців. Рекомендації щодо вибору s_a^* можна знайти в [5].

9.2.10. Вибір коефіцієнтів зміщення. Блокуючі контури

При виборі коефіцієнтів зміщення у процесі проектування зубчастого зачеплення в першу чергу мають виконуватися такі три умови:

- відсутність підрізання зубців ($x_1 \geq x_{1\min}$, $x_2 \geq x_{2\min}$);
- відсутність неприпустимого загострення зубців у вершинах ($x_1 \leq x_{1\max}$, $x_2 \leq x_{2\max}$);
- забезпечується неперервність зачеплення ($\varepsilon_\alpha \geq \varepsilon_{\alpha\min}$).

Тобто існує деякий допустимий інтервал для вибору коефіцієнтів зміщення:

$$x_{\min} \leq x \leq x_{\max}. \quad (9.51)$$

Для відповідальних передач, в яких до плавності ходу, міцності, ресурсу ставляться підвищені вимоги, коефіцієнти зміщення слід вибирати в указаному інтервалі обов’язково з урахуванням якісних показників проектованого зачеплення. Завдання це досить складне, адже оптимізувати приходиться відразу кілька параметрів, виходячи при цьому з умов експлуатації передачі (швидкохідність, характер навантаження, умови змащення, матеріали колеса і шестерні та спосіб їх термообробки і т.п.).

Цю задачу розв’язують з допомогою так званих *блокуючих контурів*.

Блокуючим контуром називається сукупність ліній в системі координат x_1 і x_2, які обмежують область допустимих значень коефіцієнтів зміщення вихідного контуру для передачі з певною кількістю зубців зубчастих коліс z_1 і z_2.

Для кожної зубчастої передачі можна побудувати свій блокуючий контур. На рис. 9.27 зображений блокуючий контур для прямозубої передачі з кількістю зубців шестерні z_1=12 і колеса z_2=15 [2].

Тут червоними лініями позначена границя області допустимих значень коефіцієнтів зміщення x_1 і x_2. Зліва і знизу ця область обмежена умовами відсутності підрізання евольвентних профілів зубців ($x_1 = x_{\min 1}; x_2 = x_{\min 2}$). Справа ж вона обмежена умовою неперервності зачеплення $\varepsilon_\alpha \geq \varepsilon_{\alpha \min}$. Як видно з рисунка, лінії, що відповідають неприпустимому загостренню вершин зубців ($s_{a1} = 0, s_{a2} = 0$), виходять за межі області. Це свідчить про те, що для передачі z_1=12, z_2=15, обмеження по $\varepsilon_\alpha = 1$ настає раніше, ніж по загостренню зубців.

Зеленим кольором на рисунку позначені границі розширеної області допустимих значень x_1 і x_2 Проте таке розширення не рекомендоване стандартом.

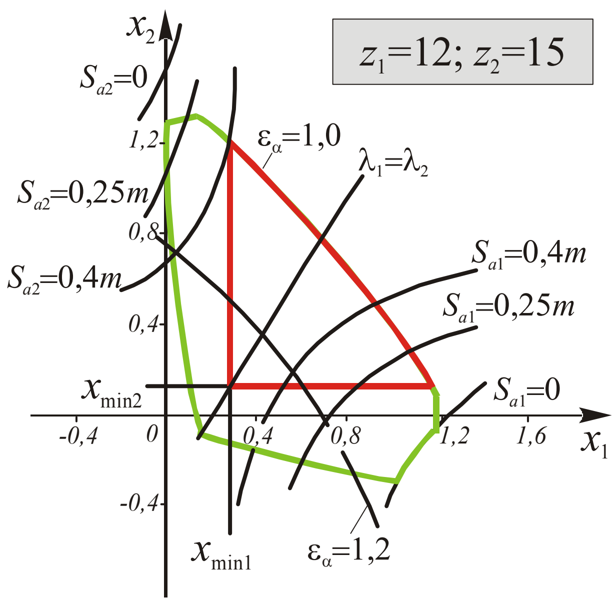


Рис. 9.27 Блокуючі контури

Для оптимального добору коефіцієнтів зміщення всередині блокуючого контуру зображені ізолінії, які відповідають найкращим значенням показників якості зачеплення для конкретних умов роботи передачі.

Лекція №18

Тема 9.3. ПРОСТОРОВІ ЗУБЧАСТІ ПЕРЕДАЧІ

В цьому параграфі ми коротко зупинимось на особливостях геометрії та кінематики основних типів просторових зубчастих передач, що застосовуються в машинобудуванні: конічній та гіперболоїдній (зокрема черв’ячній) передачах. Детальніше з матеріалом по цій темі можна ознайомитись в навчальній літературі [1, 2, 3, 4, 6 та ін.]

9.3.1. Евольвентна конічна передача.

В конічній передачі аксоїдами є конуси, осі обертання яких перетинаються (див. п. 8.2.1, лекція 14). Схема такої передачі наведена на рис. 9.28.

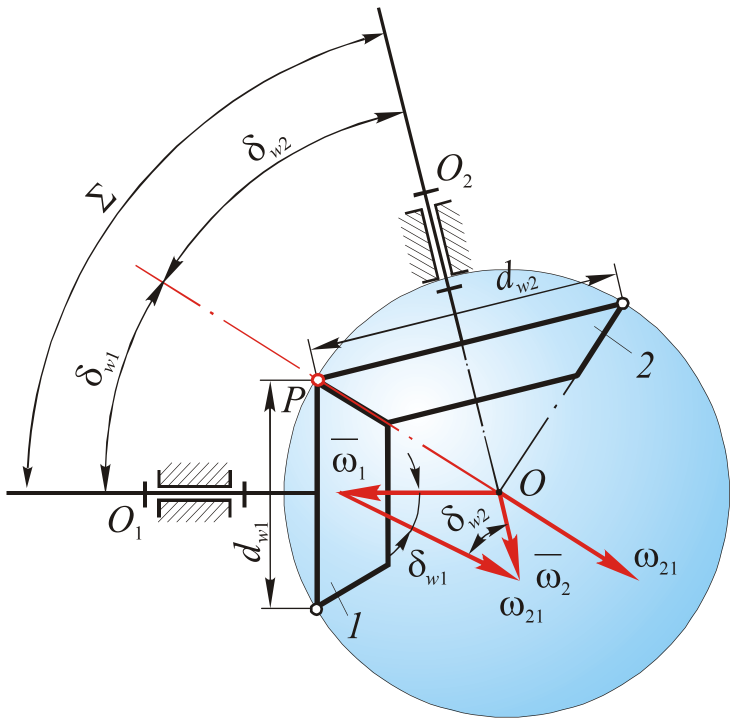


Рис. 9.28 Схема конічної передачі

Тут *OP* – миттєва вісь обертання, яка складає з осями обертання коліс кути δ_{w1} і δ_{w2}. Оскільки *початкові конуси* (аксоїди) перекочуються без ковзання, можна записати:

$$\vec{V}_{P1} = \vec{V}_{P2},$$

або

$$\omega_1 l_{OP}\sin\delta_{w1} = \omega_2 l_{OP}\sin\delta_{w2}\,. \qquad (9.51)$$

Передатне відношення передачі

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sin\delta_{w2}}{\sin\delta_{w1}}\,. \qquad (9.52)$$

Враховуючи, що

$$\delta_{w1} + \delta_{w2} = \Sigma\,, \qquad (9.53)$$

де Σ – *міжвісний кут*, розв'яжемо разом рівняння (9.52) і (9.53):

$$\sin\delta_{w2} = u_{12}\sin\left(\Sigma - \delta_{w2}\right) = u_{12}\left(\sin\Sigma\cos\delta_{w2} - \sin\delta_{w2}\cos\Sigma\right) =$$
$$= u_{12}\sin\delta_{w2}\left(\sin\Sigma\, ctg\delta_{w2} - \cos\Sigma\right);$$

$$u_{12}\sin\Sigma\,\mathrm{ctg}\delta_{w2} = 1 + u_{12}\cos\Sigma\,.$$

Звідси

$$\mathrm{tg}\delta_{w2} = \frac{u_{12}\sin\Sigma}{1 + u_{12}\cos\Sigma}\,, \qquad (9.54)$$

або

$$\mathrm{tg}\delta_{w1} = \frac{\sin\Sigma}{u_{12} + \cos\Sigma} \qquad (9.55)$$

Конічна зубчаста передача з міжвісний кутом $\Sigma = 90^\circ$ називається *ортогональною*. Для такої передачі

$$\mathrm{tg}\delta_{w2} = u_{12}\,; \qquad (9.56)$$

$$\mathrm{tg}\delta_{w1} = \frac{1}{u_{12}}\,, \qquad (9.57)$$

Всі точки ланок 1 і 2 (рис. 9.28) рухаються вздовж сферичних траєкторії. Так траєкторія точки *P* розташована на сфері радіуса *OP*.

Базою для визначення розмірів зубців є *ділильний конус*, який, при нарізанні зубців без зміщення різального інструменту, збігається з початковим. Основою ділильного конуса є круг, який лежить в площині, перпендикулярній до осі колеса, і проходить через точку *P*.

Діаметр основи ділильного конус, або ділильний діаметр, виражається через модуль:

$$d_1 = mz_1; \qquad d_2 = mz_2. \tag{9.58}$$

Довжина твірної ділильного конуса *OP* називається *ділильною конусною відстанню R*.

Спряжені профілі зубців конічних коліс виконують евольвентними. Як і в циліндричних передачах, евольвентні профілі є найбільш технологічними.

Для нарізання конічних коліс застосовують спосіб обкочування у верстатному зачепленні заготовки з *уявним твірним колесом*. Бічні поверхні твірного колеса утворюються за рахунок руху різального інструменту при виконанні головного руху різання. Найпоширенішим є інструмент – аналог рейки – з прямолінійним лезом. За прямолінійного головного руху прямолінійне лезо утворює *плоске* твірне колесо з кутом при вершині $\delta_{woc} = 90^\circ$ (рис. 9.29 а), або *плосковершинне* з $\delta_{woc} = 90^\circ - \theta_{fwo1}$ (рис. 9.29 б), де θ_{fwo1}– кут ніжки зубця колеса, що нарізається у верстатному зачепленні (детальніше див. [1-4, 6]).

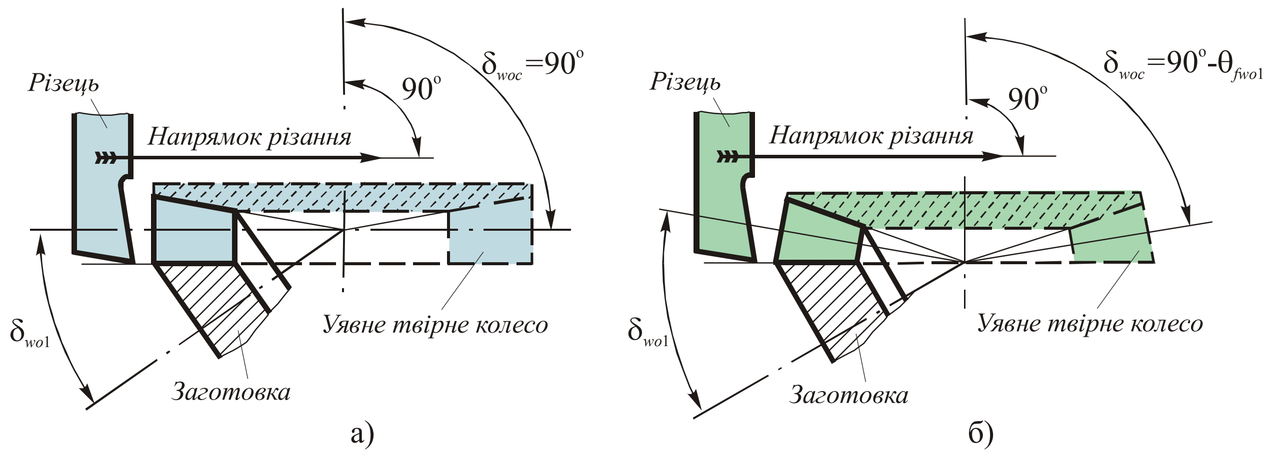


Рис. 9.29 Нарізання конічних коліс методом обкочування: а – з плоским твірним колесом; б – з плосковершинним твірним колесом

Товщина зубця конічного колеса вздовж твірної – величина змінна. Відповідно, крок теж буде змінним (рис.10.30): $p_e > p_m > p_i$. Отже і модуль по довжині зубця змінний.

Розрізняють середній ділильний модуль

$$m_m = \frac{p_m}{\pi} \tag{9.59}$$

і зовнішній ділильний модуль

$$m_e = \frac{p_e}{\pi}. \tag{9.60}$$

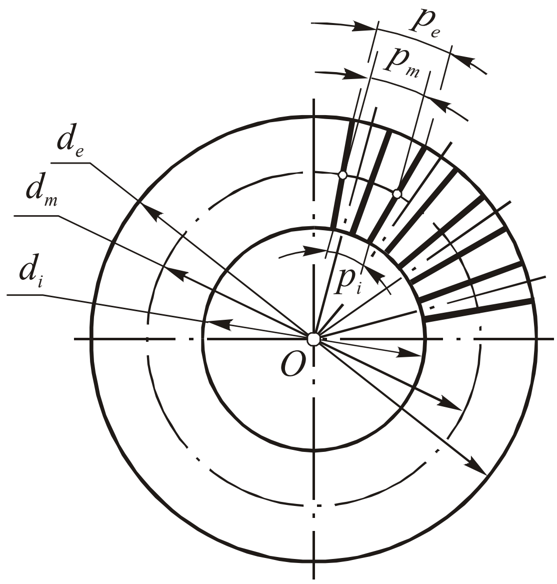


Рис. 9.30 Розміри конічного колеса (в плані)

Стандартизованим є зовнішній модуль. Це значно спрощує контроль розмірів.

До основних розмірів конічного колеса слід віднести (рис. 9.31):

- зовнішні діаметри: d_e – ділильний; d_{fe} – западин; d_{ae} – вершин;
- середні діаметри: d_m, d_{fm}, d_{am};
- внутрішні діаметри: d_i, d_{fi}, d_{ai}.

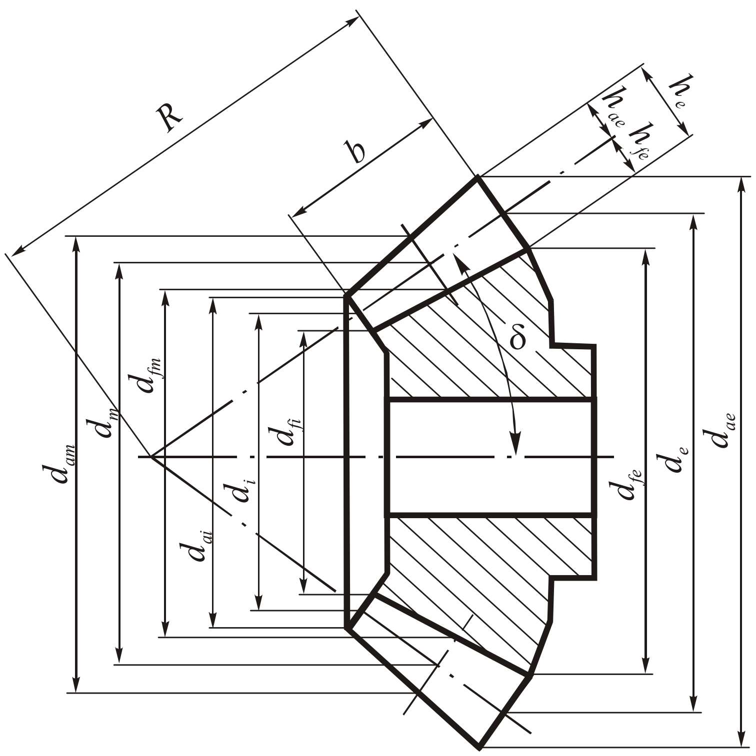


Рис. 9.31 Основні розміри конічного колеса

Для визначення зовнішніх діаметрів коліс, нарізаних без зміщення, користуються такими розрахунковими формулами:

$$d_e = m_e z\,; \tag{9.61}$$

$$d_{fe} = m_e z - 2h_{fe}\cos\delta\,; \tag{9.62}$$

$$d_{ae} = m_e z - 2h_{ae}\cos\delta\,. \tag{9.63}$$

Зовнішня конусна відстань:

$$R_e = 0{,}5\frac{d_e}{\sin\delta}\,. \tag{9. 64}$$

Тут δ – кут ділильного конуса даного колеса.

Зовнішня висота зубця:

$$h_e = h_{ea} + h_{ef}\,, \tag{9.65}$$

де $h_{ea} = h_a^* m_e$ – висота головки; $h_{ef} = \left(h_a^* + c^*\right)m_e$ – висота ніжки. Тут $h_a^* = 1$; $c^* = 0{,}2$ для коліс, які нарізані без зміщення.

Середній модуль пов'язаний із зовнішнім співвідношенням:

$$m_m = m_e - \left(\frac{b}{z}\right)\sin\delta \tag{9.65}$$

Тут b – ширина зубчастого вінця (див. рис. 9.31).

9.3.2. Передачі з осями, що перехрещуються

На відміну від циліндричних і конічних передач, тут колеса у відносному русі обертаються відносно деякої осі і ковзають уздовж неї. Ця вісь називається *миттєвою віссю обертання-ковзання* або *миттєвою гвинтовою віссю*.

Геометричні місця миттєвих осей обертання-ковзання на кожному з коліс передачі дають *гвинтові аксоїди відносного руху*.

Якщо передатне відношення постійне, то положення миттєвої осі обертання-ковзання (гвинтової осі) не змінюється, а гвинтові аксоїди відносного руху є однопорожнинними гіперболоїдами обертання (рис. 9.32). Тому такі передачі називаються *гіперболоїдними*.

На відміну від циліндричної або конічної передачі форма початкових поверхонь коліс не повторює форму аксоїдів, а визначається областю точок контакту спряжених поверхонь зубців. Порівняльне дослідження таких характеристик гіперболоїдних передач, як к.к.д., габарити і т.п., показало, що іноді зубці краще розташовувати в областях, віддалених від гвинтових аксоїдів.

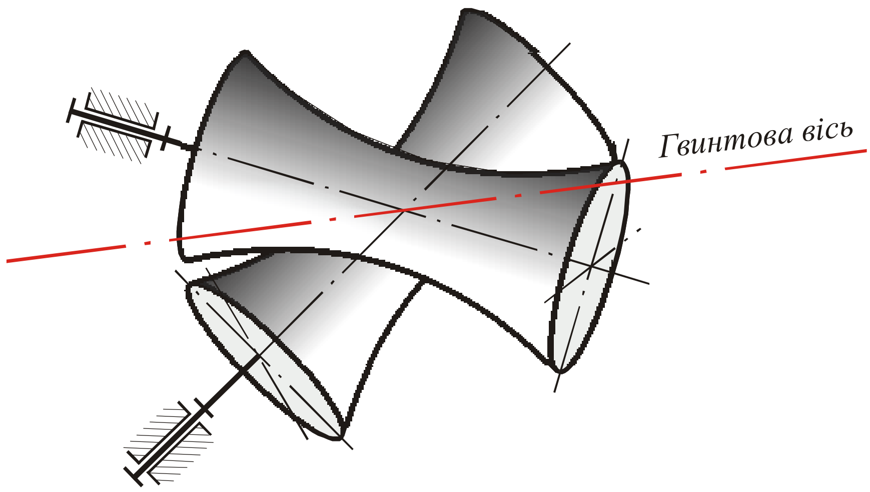


Рис. 9.32 Гвинтові аксоїди та гвинтова вісь

Розрізняють гіперболоїдні передачі першого і другого роду.

В *гіперболоїдних передачах першого роду* обидві спряжені поверхні зубців можуть утворюватись однією твірною поверхнею, а в *гіперболоїдних передачах другого роду* твірна поверхня збігається з однією зі спряжених поверхонь.

9.3.2.1. Гіпоїдна та гвинтова передачі

Ці передачі відносяться до гіперболоїдних передач першого роду.

Гіперболічна передача з конічними початковими поверхнями називається *гіпоїдною зубчастою передачею* (рис. 9.33 а), а з циліндричними – *гвинтовою зубчастою передачею* (рис.9.33 б).

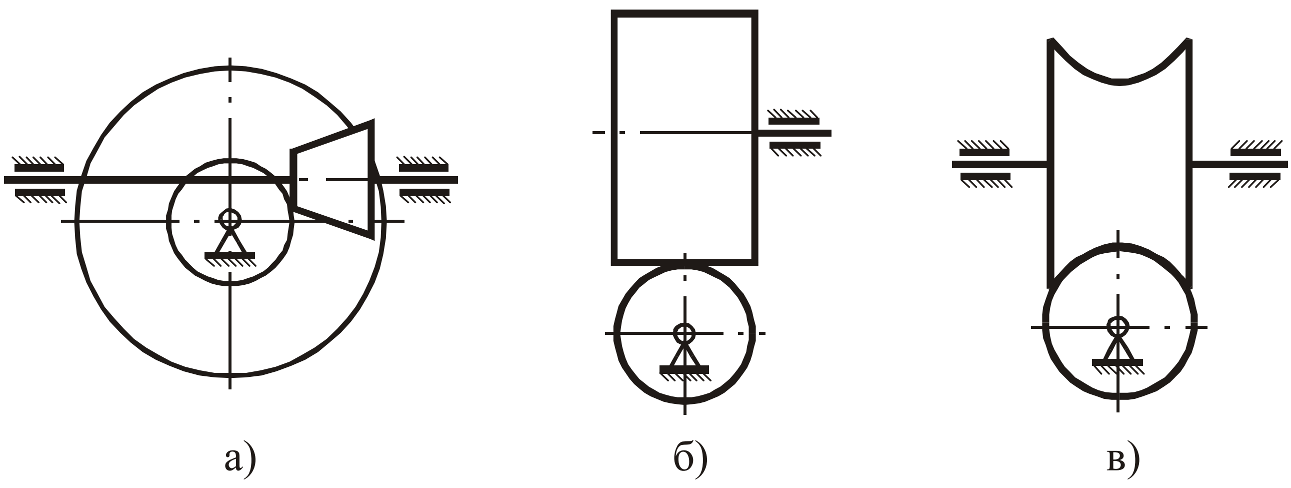


Рис. 9.33 Гіперболоїдна зубчаста передача: а – гіпоїдна передача; б – гвинтова передача; в – черв'ячна передача

На рис. 9.33 а) і б) наведені приклади гіперболоїдних передач з осями, які перехрещуються під кутом 90°, проте цей кут може бути й не прямим.

Слід також зазначити, що у гвинтовій передачі контакт зубців відбувається в точці.

9.3.2.2. Черв'ячна передача

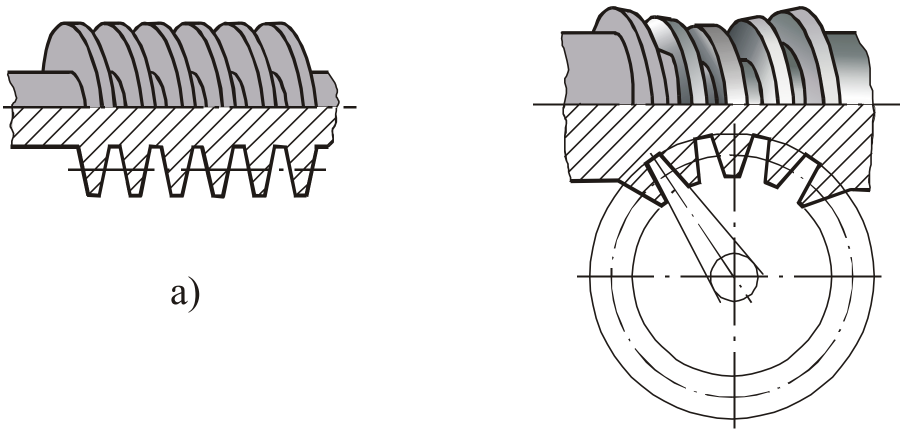
На рис. 9.33 в) зображено черв'ячну передачу. Ця передача відноситься до гіперболоїдних передач другого роду.

У черв'ячних передачах має місце лінійний контакт зубців коліс. Мале колесо тут має гвинтові зубці і називається *черв'яком*, а велике – називається *черв'ячним колесом*.

Кут схрещування осей обертання ланок завжди складає 90º.

Як і звичайні гвинти, черв'яки можуть бути однозахідними (z_1=1) і багатозахідними (z_1>1). Тут z_1 – кількість заходів черв'яка.

Черв'ячні передачі розрізняють за формою черв'яка: з циліндричним (рис. 9.34 а) і глобоїдним черв'яком (рис. 9.34 б).



а)

б)

Рис. 9.34 Форма черв'яка: а – циліндричний черв'як; б – глобоїдний черв'як

За формою гвинтової поверхні зубця черв'яки можна поділити на два види: з лінійчатою бічною поверхнею і нелінійчатою. Найбільше розповсюдження на сьогодні мають два типи черв'яків з лінійчатою гвинтовою поверхнею: *архімедів* черв'як і *евольвентний* черв'як.

Є також *конволютні* черв'яки, в яких трапецеїдальний нормальний перерізі витка.

Найпростіше нарізати архімедові черв'яки, але їх досить складно шліфувати. Евольвентні черв'яки більш технологічні.

На рис. 9.35 зображений переріз черв'ячної пари.

Тут d_1 і d_2 – діаметри ділильних циліндрів черв'яка і черв'ячного колеса відповідно. Початкові поверхні тут теж циліндричні.

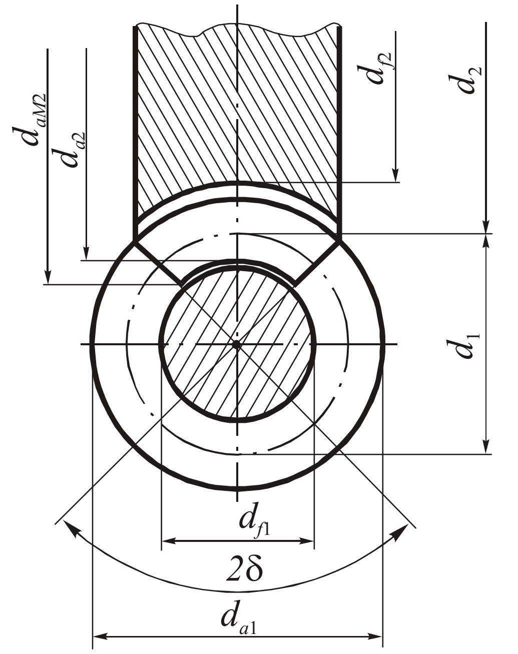


Рис. 9.35 Черв'ячна пара

Розглянемо розгортку витка різьби черв'яка (рис. 9.36).

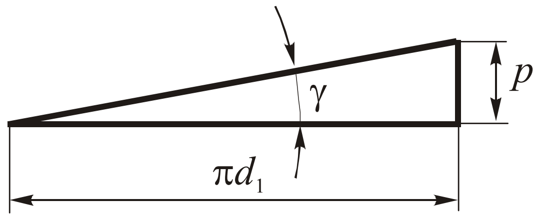


Рис. 9.36 Розгортка витка різьби черв'яка

Кут підйому гвинтової лінії пов'язаний з кроком різьби p та довжиною ділильного кола черв'яка співвідношеннями:

- для однозахідної різьби

$$\mathrm{tg}\gamma = \frac{p}{\pi d_1}; \tag{9.66}$$

- для багатозахідної різьби

$$\mathrm{tg}\gamma = \frac{p z_1}{\pi d_1}, \tag{9.67}$$

де z_1 – кількість заходів черв'яка.

З (9.67) отримаємо:

$$d_1 = \frac{p}{\pi}\frac{z_1}{\mathrm{tg}\gamma} = mq. \tag{9.68}$$

Тут q – коефіцієнт діаметра черв'яка, який призначається за ГОСТ 19642-74:

q=6,3 … 25.

Основні розміри черв'ячної передачі та її елементів визначають за такими формулами (нульове зміщення інструменту):

Для черв'яка:

- ділильний діаметр черв'яка

$$d_1 = mq; \tag{9.69}$$

- діаметр кола западин

$$d_{f_1} = d_1 - 2\left(h_a^* + c^*\right)m; \tag{9.70}$$

- діаметр кола вершин

$$d_{a_1} = d_1 + 2h_a^* m. \tag{9.71}$$

Для колеса:

- ділильний діаметр

$$d_2 = mz_2; \tag{9.72}$$

- діаметр кола западин

$$d_{f_2} = d_2 - 2\left(h_a^* + c^*\right)m; \tag{9.73}$$

- діаметр кола вершин

$$d_{a_2} = d_2 + 2h_a^* m; \tag{9.74}$$

- найбільший діаметр черв'ячного колеса

$$d_{aM_2} = d_2 + d_1\left(1 - \cos\delta\right). \tag{9.75}$$

тут δ – кут обхвату черв'яка колесом (див. рис. 9.35). Приймають $\delta = 100\ldots110°$.

У наведених формулах коефіцієнти $h_a^* = 1$; $c^* = 0,2$.

Міжосьова відстань черв'ячної передачі

$$a_w = 0,5\left(q + z_2\right)m. \tag{9.76}$$

Основним кінематичним параметром черв'ячної передачі є передатне число, яке визначається за формулою:

$$u_{12} = \frac{z_2}{z_1} \tag{9.77}$$

Під час руху витки черв'яка ковзають вздовж зубців колеса. Це стає зрозумілим з рис. 9.37.

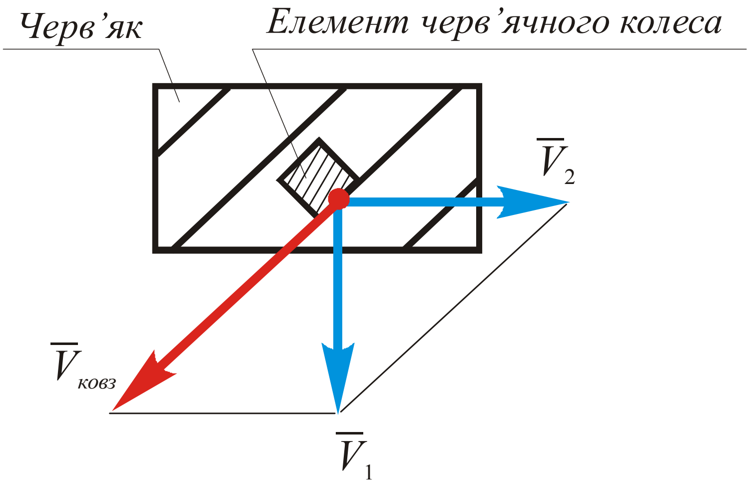


Рис. 9.37 План швидкостей черв'ячної пари

Лінійні швидкості черв'яка і колеса, які обертаються у взаємно перпендикулярних площинах, на плані швидкостей (рис. 9.37) представлені векторами $\vec{V}_1$ і $\vec{V}_2$; $\vec{V}_{ковз}$ – швидкість ковзання. Ці швидкості пов'язані векторним співвідношенням

$$\vec{V}_{ковз} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 \,. \tag{9.78}$$

Умови роботи передачі дуже важкі: напрямок переміщення плями контакту не збігається з напрямком швидкості ковзання $\vec{V}_{ковз}$. А це створює дуже несприятливі умови для утворювання мастильного клину. Тому деталі черв'ячної передачі виготовляють із антифрикційних матеріалів. Причому, в силових передачах черв'яки виготовляють зі сталі, а колеса – з чавуну, бронзи, латуні, залежно від відповідальності та навантаженості передачі.

К.к.д. черв'ячної передачі визначають так, як і для різьби:

$$\eta = \frac{\mathrm{tg}\gamma}{\mathrm{tg}(\gamma + \varphi)} \tag{9.79}$$

Тут γ – кут підйому гвинтової лінії черв'яка; φ – кут тертя для даної антифрикційної пари.

Більше інформації з теорії гіперболоїдних передач можна знайти в [1-4, 6].

Лекція №19

Розділ 10. КУЛАЧКОВІ МЕХАНІЗМИ

Для забезпечення робочого процесу багатьох машин часто потрібно вводити до їх складу механізми, рух вихідних ланок яких відбувається за строго заданими законами, узгодженими з законами руху інших механізмів. Дуже просто і надійно ця проблема вирішується за допомогою компактних *кулачкових механізмів*.

Кулачковий механізм – це триланковий механізм, який складається зі стояка і двох рухомих ланок, що утворюють між собою вищу кінематичну пару, а зі стояком – дві нижчі кінематичні пари.

Вхідною ланкою в кулачковому механізмі, як правило, є *кулачок*, тобто ланка, якій належить елемент вищої кінематичної пари, виконаний у вигляді поверхні змінної кривизни.

Вихідні ланки можуть здійснювати зворотно-поступальний, зворотно-обертальний або просторовий рухи. Поступально рухома вихідна ланка називається *штовхачем*, а обертально рухома – *коромислом*.

Тема 10.1. ВИДИ КУЛАЧКОВИХ МЕХАНІЗМІВ

Розрізняють *плоскі* і *просторові* кулачкові механізми. Основна увага нами буде приділена плоским кулачковим механізмам, як найбільш розповсюдженим в техніці.

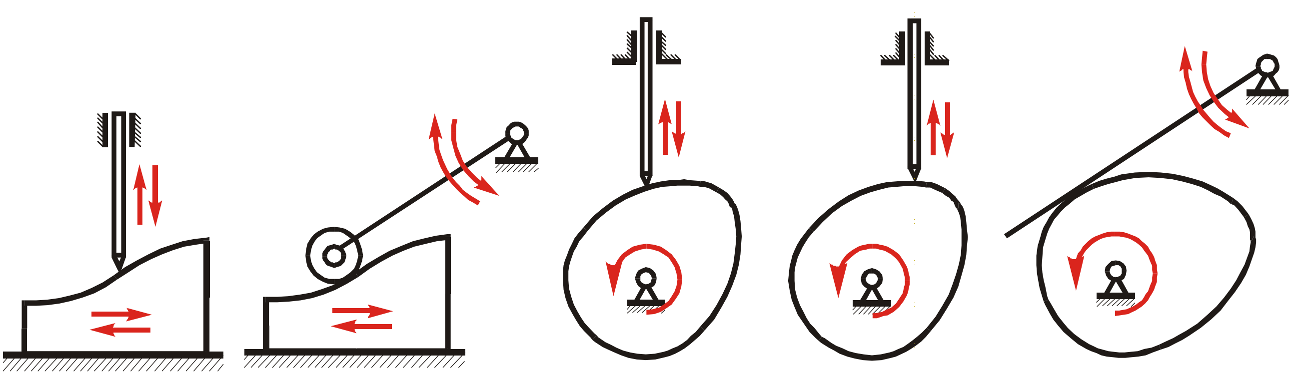
10.1.1. Плоскі кулачкові механізми

Як і в будь-якому іншому плоскому механізмі, в плоскому кулачковому механізмі всі його точки рухаються в паралельних площинах.

Класифікують плоскі кулачкові механізми за кінематичними та конструктивними ознаками:

а) За характером рухів, які здійснюють кулачок і штовхач:

- зворотно-поступальний рух кулачка перетворюється в зворотно-поступальний рух штовхача (рис. 10.1 а);
- зворотно-поступальний рух кулачка перетворюється в зворотно-обертальний рух штовхача (рис. 10.1 б);
- обертальний рух кулачка перетворюється в зворотно-поступальний рух штовхача. Цей тип механізмів буває центральним (рис. 10.1 в) і нецентральним або з ексцентриситетом (рис. 10.1 г);
- обертальний рух кулачка перетворюється в зворотно-обертальний рух штовхача (рис. 10.1 д).

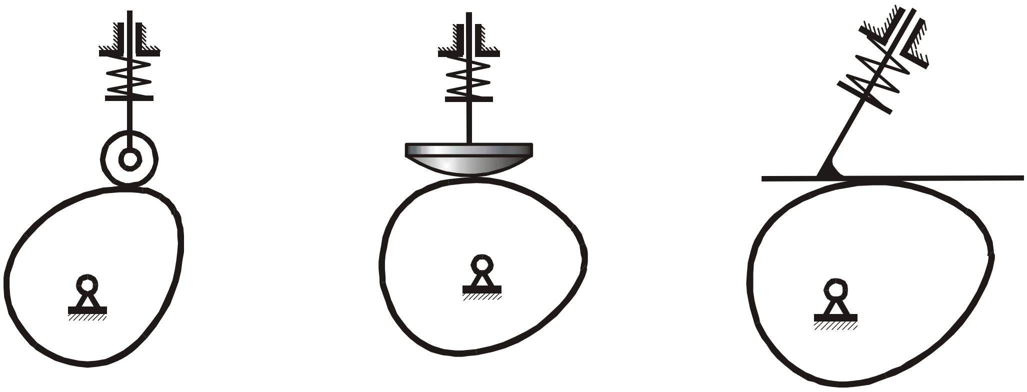


а) б) в) г) д)

Рис. 10.1 Схеми кулачкових механізмів залежно від характеру рухів їх ланок: з поступально рухомим кулачком (а, б); з обертальним кулачком (в, г, д)

б) За типом штовхача:

- із загостреним штовхачем (рис. 10.1 а, в ,г)
- зі штовхачем, споряджений роликом (рис. 10.1 б та рис. 10.2 а)
- зі сферичним грибоподібним штовхачем (рис. 10.2 б)
- з плоским тарілчастим штовхачем (рис. 10.1 д; рис. 10.2 в)



а) б) в)

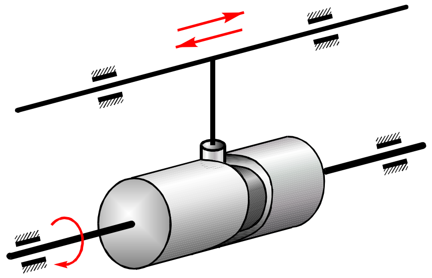
Рис. 10.2 Схеми кулачкових механізмів залежно від типу штовхача: а – зі штовхачем, спорядженим роликом; б – зі сферичним грибоподібним штовхачем; в – з плоским тарілчастим штовхачем

10.1.2. Просторові механізми

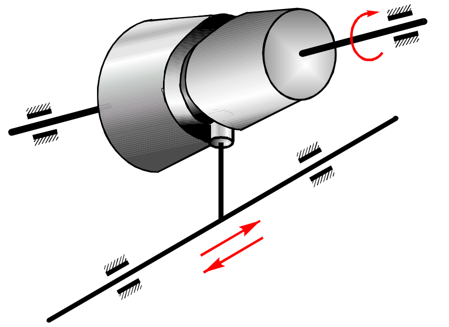
Існує безліч схем просторових кулачкових механізмів. Найчастіше зустрічаються такі їх конструкції:

- з циліндричним кулачком (рис. 10.3 а);
- з конічним кулачком (рис. 10.3 б);

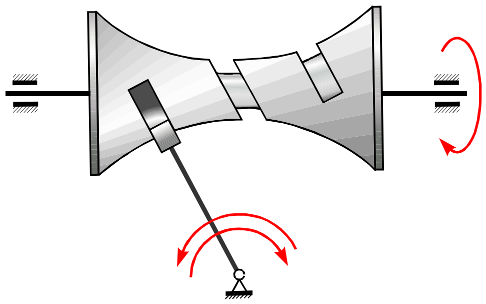
- з гіперболоїдним кулачком (рис. 10.3 в);
- з коноїдним кулачком (рис. 10.3 г).



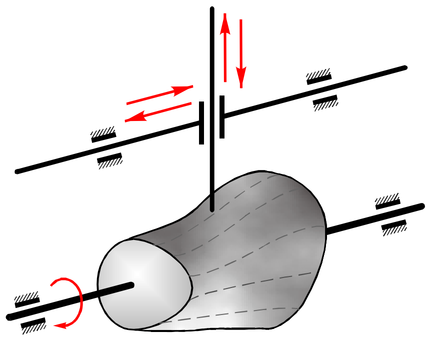
а)



б)



в)



г)

Рис. 10.3 Просторові кулачкові механізми: а – з циліндричним кулачком; б – з конічним кулачком; в – з гіперболоїдним кулачком; г – з коноїдним кулачком

Тема 10.2. СПОСОБИ ЗАМИКАННЯ КУЛАЧКА І ШТОВХАЧА

Теоретично замикання у вищий кінематичній парі може здійснюватись і під власною вагою штовхача. Але такий метод замикання ненадійний, враховуючи, що на штовхач діють сили інерції, які можуть відривати штовхач від кулачка, а це неприпустимо.

В кулачкових механізмах застосовується примусове замикання: силове та геометричне (див. лекцію №1, п. 1.1.2).

10.2.1. Силове замикання.

До речі, використання власної ваги штовхача теж слід віднести до силових методів замикання вищої пари в кулачковому механізмі. У разі примусового силового замикання застосовують пружини, тиск рідини або газу. На рис. 10.2 та рис. 10.4 а) показані схеми застосування пружин для силового замикання вищих кінематичних пар у різних типах кулачкових механізмів.

Як відзначалось, на штовхач діють сили інерції, які можуть спричинювати відрив штовхача від кулачка, а значить порушуватимуть заданий закон руху. Щоб унеможливити розмикання вищої кінематичної пари, характеристика пружини має добиратись такою, щоб максимально можлива сила інерції, яка діє на штовхач, не перевищувала мінімального пружного зусилля в пружині (рис. 10.4 б):

$$F_{np_{\min}} > F_{a_{\max}}.$$

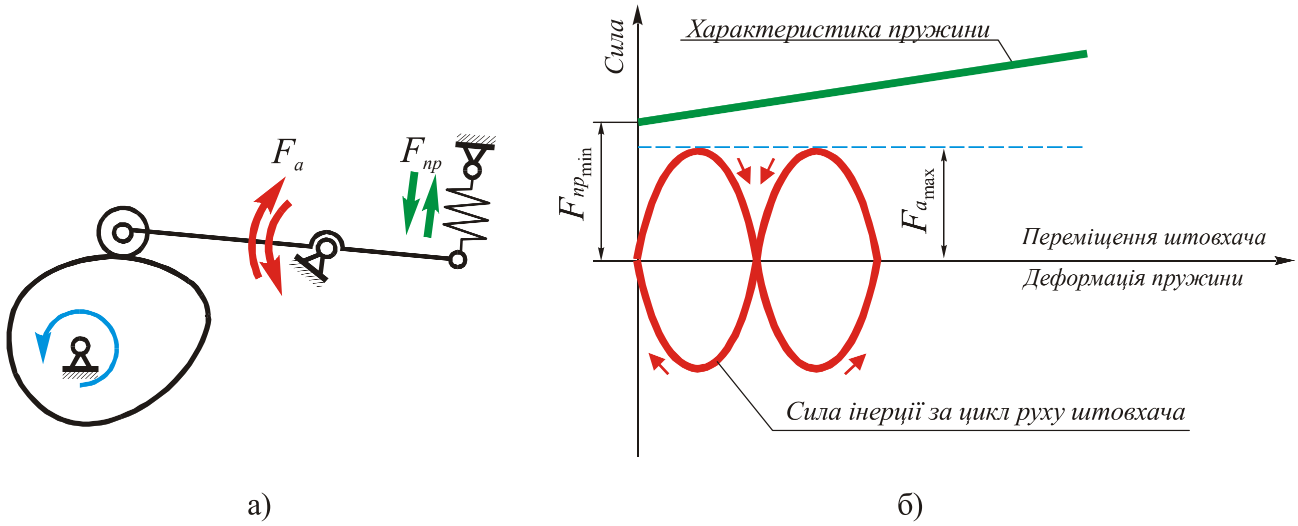


Рис. 10.4 Силове замикання: а – схема кулачкового механізму; б – характеристики сил, що діють на штовхач

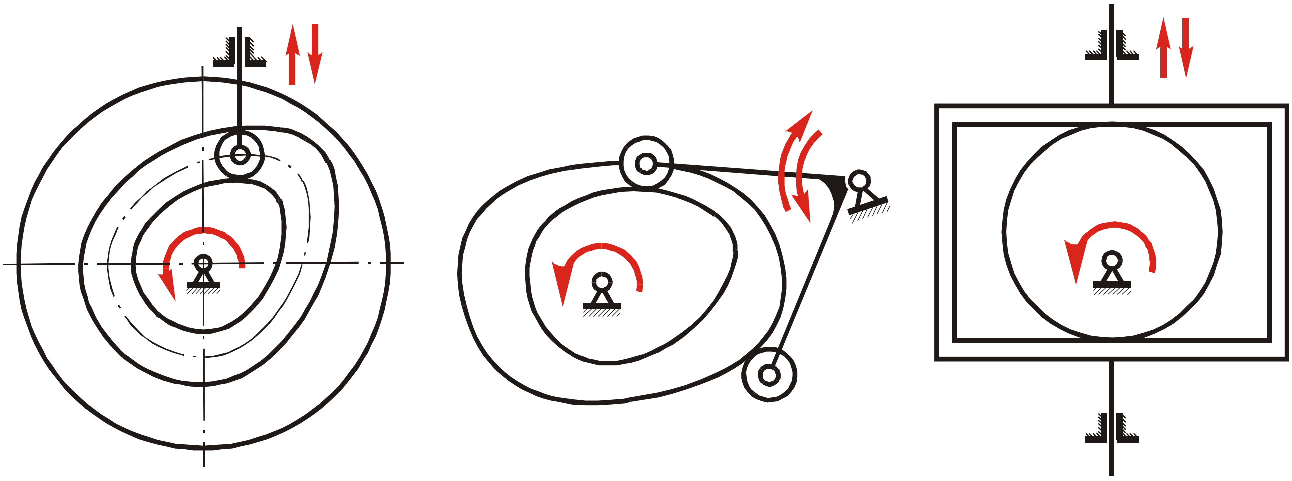
10.2.2. Геометричне замикання

При геометричному замиканні можливість відриву однієї ланки від другої усувається введенням до схеми механізму надлишкової в'язі. Ця в'язь має бути пасивною, тобто не змінювати ступеня рухливості механізму.

Одним із найбільш розповсюджених способів геометричного замикання є застосування *пазового кулачка* (рис. 10.5 а)

Складність точного виготовлення паза та наявність ударів ролика об паз привели до появи *дводискових кулачків* (рис. 10.5 б). В цих механізмах вихідна ланка взаємодіє з двома дисковими кулачками, жорстко з'єднаними між собою.

Замість дводискових кулачків використовують *діаметральний кулачок* (рис. 10.5 в), в якому довільний профіль можна виконати тільки на частини контуру кулачка. Друга частина контуру знаходиться з умови забезпечення дотикання кулачка до другої площини (для утворення пасивної в'язі). Найпростішим та чи не найпоширенішим серед такого типу механізмів є механізм, в якому діаметральний кулачок є звичайним ексцентриком.



а) б) в)

Рис. 10.5 Геометричне замикання: а – пазовий кулачок; б – дводисковий кулачок; в – діаметральний кулачок

Тема 10.3. ОСНОВНІ ПЕРЕВАГИ ТА НЕДОЛІКИ КУЛАЧКОВИХ МЕХАНІЗМІВ

а) **Переваги кулачкових механізмів:**

- точне відтворення заданого закону переміщення, швидкості і прискорення вихідної ланки;
- компактність;
- простота проектування.

а) Недоліки кулачкових механізмів:

- у вищій кінематичній парі має місце високий питомий тиск і, як наслідок, підвищений знос елементів пари, а тому виникає необхідність зміцнювальної обробки робочих поверхонь ланок;
- під час роботи механізму, в разі неточного виготовлення його деталей, має місце значний шум , особливо при зміні напрямку руху штовхача;
- необхідність замикання вищої кінематичної пари конструктивно ускладнює механізм.

Тема 10.4. ГЕОМЕТРІЯ КУЛАЧКА

Розглянемо її на прикладі регулювання руху впускного клапана поршневого двигуна (рис. 10.6). Протягом одного оберту кулачка маємо чотири фази роботи клапана.

Фаза 1 – відкривання клапана 3 для впуску робочого тіла в камеру згорання двигуна. При цьому кулачок 1 повертається на кут $\varphi_{вд}$, а точка контакту штовхача (коромисла) 2 з кулачком переміщується по дузі a_0a_1.

Фаза 2 – клапан повністю відкритий і знаходиться в нерухомому і найбільш віддаленому від осі обертання штовхача положенні. Точка контакту переміщується вздовж профілю кулачка по дузі кола a_1a_2 радіусом R_{max}, яка опирається на центральний кут φ_{∂}.

Фаза 3 – закривання клапана. Під дією пружини 4 клапан 3 повертається з найвіддаленішого положення у вихідне, при цьому точка контакту між штовхачем і кулачком переміщується по дузі a_2a_3, а кулачок повертається на кут $\varphi_{пв}$.

Фаза 4 – клапан закритий і знаходиться в найнаближенішому до осі обертання штовхача положенні. Точка контакту ковзає по дузі кола a_3a_0 радіусом R_{min} і штовхач зупиняється. Кулачок при цьому повертається на кут $\varphi_{б}$. При подальшому обертанні кулачка, коли точка контакту досягає точки a_0, цикл повторюється.

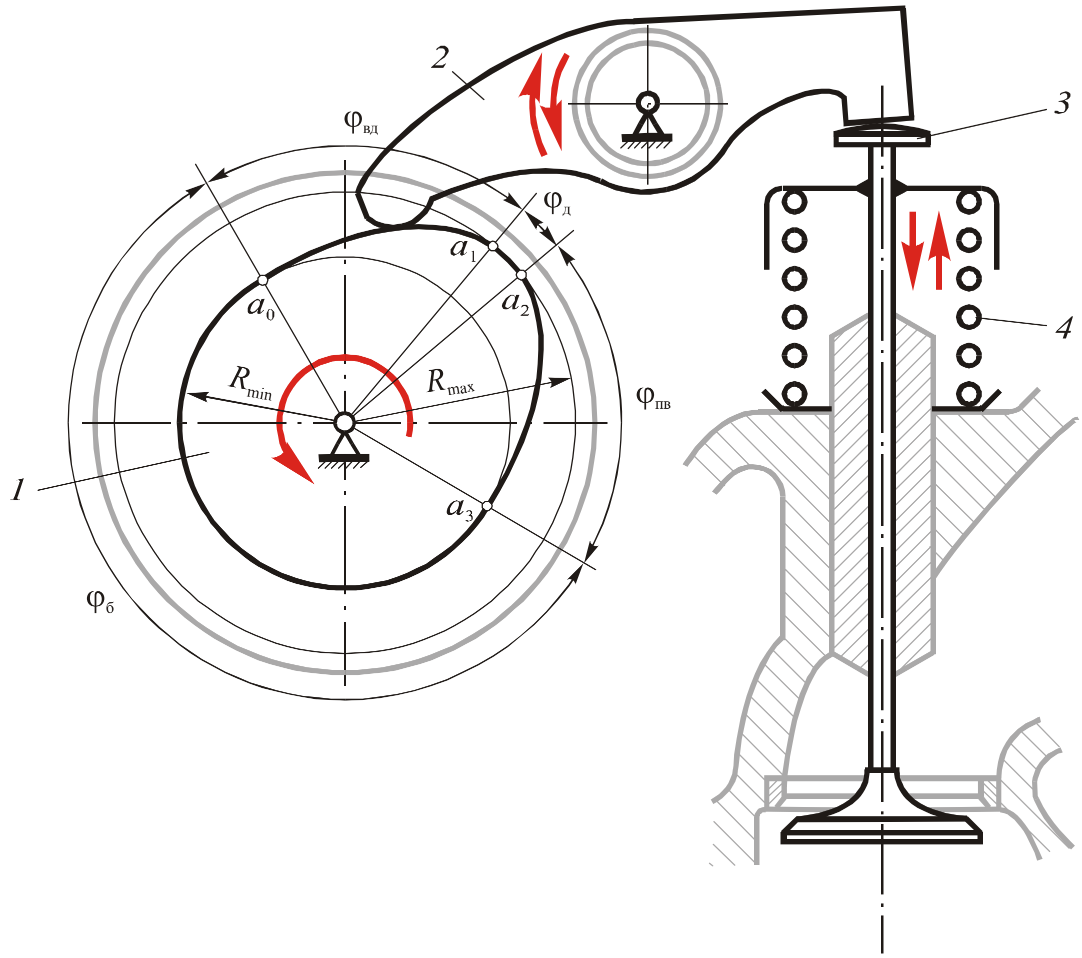


Рис. 10.6 Механізм регулювання руху впускного клапана поршневого двигуна

Перелічені кути повороту називаються *фазовими кутами кулачка*: $\varphi_{вд}$ – *кут віддалення*; $\varphi_{д}$ – *кут дальнього стояння*; $\varphi_{пв}$ – *кут повернення*; $\varphi_{б}$ – *кут ближнього стояння*.

Повний кут повороту кулачка за цикл складає 2π. Тобто

$$\varphi_{вд} + \varphi_{д} + \varphi_{пв} + \varphi_{б} = 2\pi. \tag{10.1}$$

Робочий кут:

$$\varphi_{р} = \varphi_{вд} + \varphi_{д} + \varphi_{пв}. \tag{10.2}$$

В окремих випадках кути дальнього стояння $\varphi_{д}$ і ближнього стояння $\varphi_{б}$ можуть бути відсутніми.

Тема 10.5. КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ КУЛАЧКОВИХ МЕХАНІЗМІВ

Основною задачею кінематичного аналізу кулачкових механізмів є визначення переміщень, швидкостей і прискорень (або їх аналогів) штовхача при заданому законі руху кулачка.

Як і для інших плоских механізмів, для кулачкових механізмів застосовують аналітичні і графоаналітичні методи кінематичного аналізу.

Розглянемо приклади кінематичного аналізу деяких кулачкових механізмів графоаналітичним методом.

Приклад 10.1. Визначити переміщення точки A штовхача кулачкового механізму з центральним поступально рухомим штовхачем при повороті кулачка на кут φ з кутовою швидкістю ω_1 (рис. 10.7).

Застосуємо принцип оберненості руху. Надамо всьому механізму кутову швидкість $-\omega_1$. Тоді кулачок 1 зупиниться, а штовхач 2 зі стояком обертатиметься навколо осі O з кутовою швидкістю $-\omega_1$ і одночасно переміщуватиметься вздовж осі *x-x*.

Повернемо стояк з штовхачем у напрямку кутової швидкості $-\omega_1$ на кут φ_{01}. Точка A штовхача займе положення $\overline{A_1}$. Величину лінійного переміщення штовхача знайдемо, провівши радіусом $r = O\overline{A_1}$ дугу до перетину з віссю *x-x* в точці A_1. Відрізок A_0A_1 – шукане переміщення штовхача.

Отримане переміщення відкладемо на графіку $S_2 = S_2(\varphi)$ у вигляді відрізка $1-1' = \dfrac{\mu_l \cdot A_0 A_1}{\mu_s}$ (рис. 10.8), де μ_S – масштабний коефіцієнт для осі переміщень.

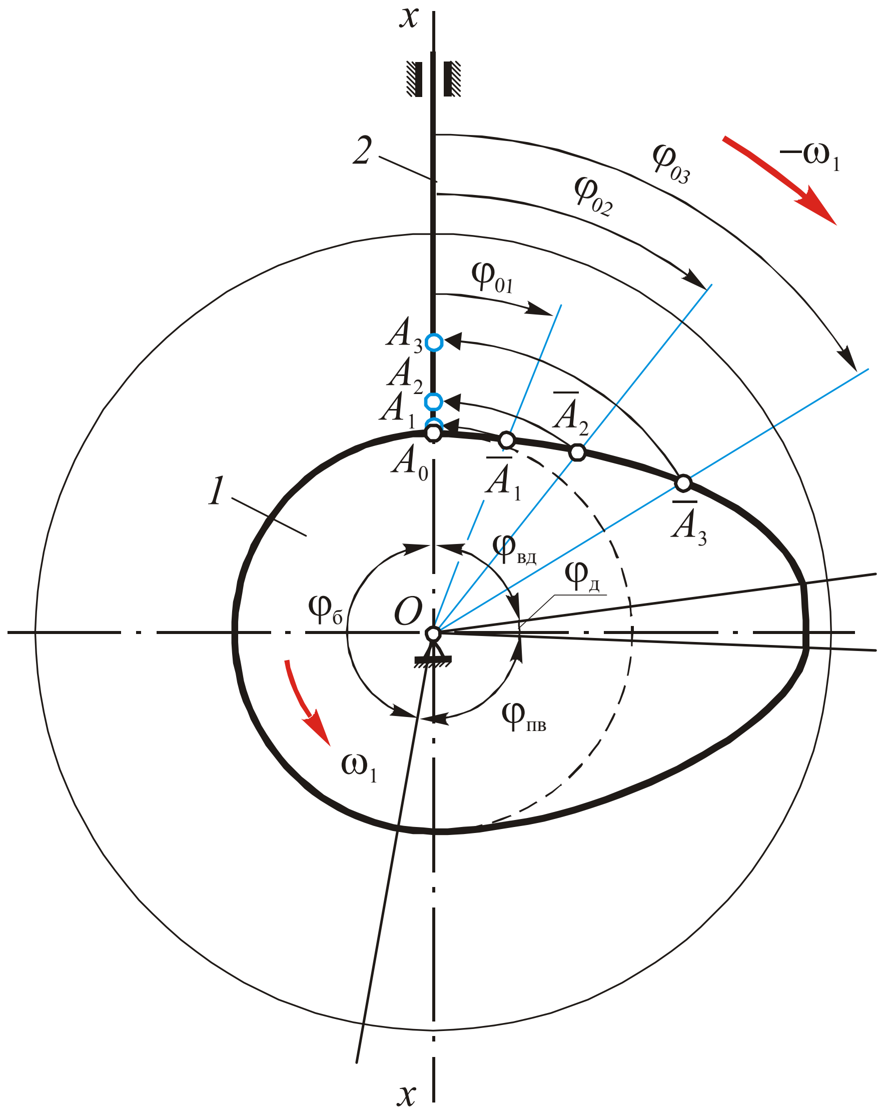


Рис. 10.7 Кулачковий механізм з поступально рухомим центральним штовхачем

Повертаючи стояк зі штовхачем навколо точки O, отримаємо послідовні його положення $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$ і т.д., які відповідають кутам φ_{02}, φ_{03} і т.д.

Відкладаючи в масштабі μ_S отримані переміщення на графіку $S_2 = S_2(\varphi_1)$, отримаємо *діаграму переміщень штовхача за цикл* (рис. 10.8). Вона є графіком функції положення штовхача.

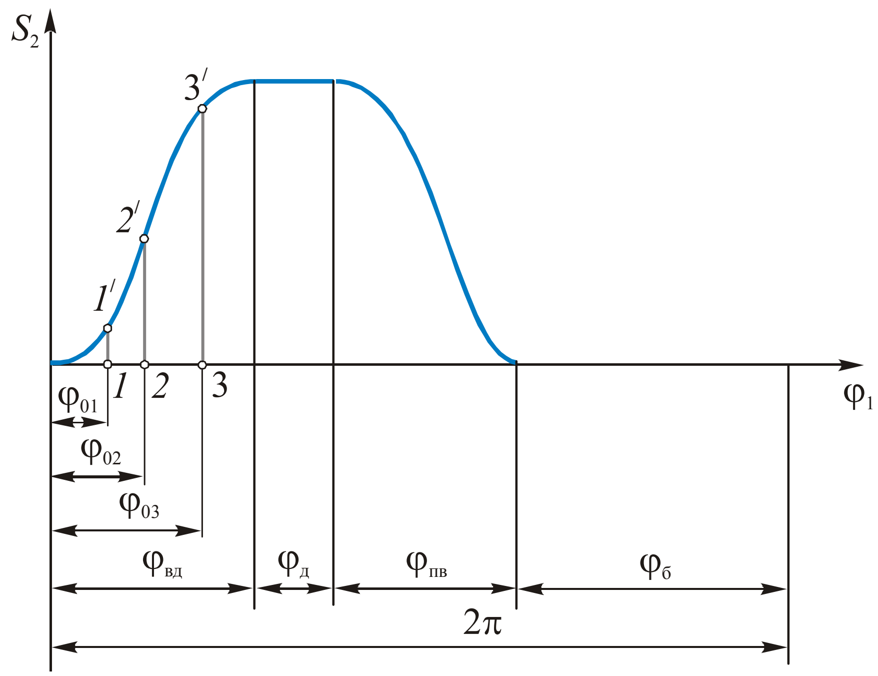


Рис. 10.8 Графік функції положення штовхача

Якщо штовхач кулачкового механізму споряджений роликом, то аналіз зводиться до попереднього, коли врахувати, що центр ролика описує криву, рівновіддалену (еквідистантну) від робочого профілю кулачка (рис. 10.9). Ця крива утворює *теоретичний профіль кулачка*. Саме для теоретичного профілю і виконують всі необхідні побудови.

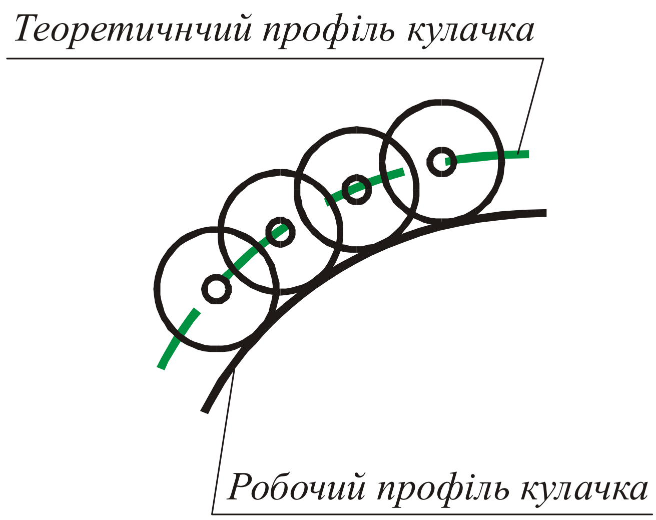


Рис. 10.9 Формування робочого профілю кулачка

Приклад 11.2. Провести кінематичне дослідження кулачкового механізму з обертальним плоским штовхачем (рис. 10.10).

Почнемо кінематичний аналіз кулачкового механізму від положення, яке відповідає початку фази віддалення штовхача (коромисла). В цьому положенні коромисло 2 дотикається до профілю кулачка 1 в точці A_0 (див. рис. 10.10). Відрізок OO_1 вважаємо таким, що належить стояку.

Для аналізу, як і в попередньому прикладі, скористаємось принципом оберненості руху. Повернемо стійку на деякий кут φ_{01} у напрямку $-\omega_1$. При цьому відрізок OO_1 займе положення $OO_1^/$. Положення коромисла знайдемо, провівши з точки $O_1^/$ відрізок, що дотикається до профілю кулачка в точці A_1.

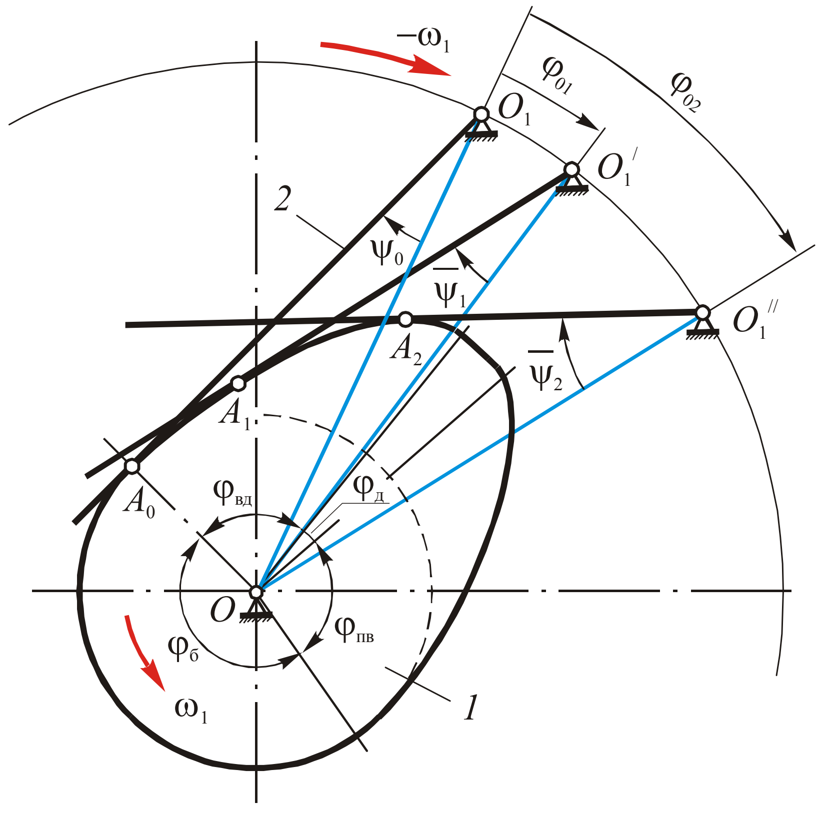


Рис. 10.10 Кулачковий механізм з плоским обертальним штовхачем

Величина переміщення коромисла в цьому положенні визначатиметься зміною кута ψ між відрізками OO_1 та O_1A_0:

$$\psi_1 = \overline{\psi}_1 - \psi_0 .$$

Для другого положення відповідно матимемо:

$$\psi_2 = \overline{\psi}_2 - \psi_0 .$$

Провівши аналогічні побудови для ряду послідовних положень механізму, та визначивши в кожному з них величину переміщення коромисла, можемо побудувати діаграму переміщень за цикл руху механізму в координатах $\psi - \varphi_1$, аналогічну тій, що зображена на рис. 10.8 для кулачкового механізму з поступально рухомим штовхачем.

Як для першого прикладу, так і для другого, діаграми аналогів швидкостей та прискорень штовхача можна отримати, продиференціювавши графіки переміщень штовхача.

Лекція №20

Тема 10.6. СИНТЕЗ КУЛАЧКОВИХ МЕХАНІЗМІВ

10.6.1. Загальні зауваження

Задача синтезу кулачкового механізму полягає в тому, щоб за відомими розмірами ланок, схемою механізму, а також згідно з заданим законом руху ведучої і веденої ланок, побудувати профіль кулачка.

Рух ведучої і веденої ланки як правило задається аналітично у вигляді рівнянь руху або графічним способом у вигляді діаграм. Характер цих рівнянь або діаграм може бути різним, в залежності від заданих умов руху. З технічної точки зору, зручно задавати діаграми або рівняння переміщень у функції кута повороту кулачка (функції положення).

На рис.10.11 наведені деякі приклади діаграм руху штовхача. Діаграми переміщень $S_2 = S_2(\varphi_1)$ тут зображені у вигляді прямих ліній (рис. 10.11 а), прямих, що переходять в дуги кола (рис. 10.11 б), спряжених парабол (рис. 10.11 в) та косинусоїди (рис. 10.11 г).

Диференціюючи ці діаграми, ми отримаємо діаграми аналогів швидкостей штовхача $\dfrac{dS_2}{d\varphi_1} = \dfrac{dS_2}{d\varphi_1}(\varphi_1)$, а диференціюючи ще раз – діаграми аналогів прискорень $\dfrac{d^2S_2}{d\varphi_1^2} = \dfrac{d^2S_2}{d\varphi_1^2}(\varphi_1)$.

З рис.10.11 а) видно, що за прямолінійного закону переміщення штовхача в точках зміни напрямку руху прискорення теоретично прямує до нескінченності. В цей момент мають місце так звані *жорсткі удари*.

Для законів руху, представлених на рис.10.11 б) і в), при зміні напрямку руху штовхача спостерігається стрибкоподібна зміна прискорення. Тобто також мають місце удари, проте зміна тиску відбувається миттєво на кінцеву величину, а не до нескінченності, як при жорсткому ударі. Такі удари називаються *м’якими*.

Якщо закон руху штовхача заданий діаграмою у вигляді косинусоїди (рис. 10.11 г), стрибки на діаграмах швидкостей і прискорень відсутні, а значить відсутні і будь-які удари.

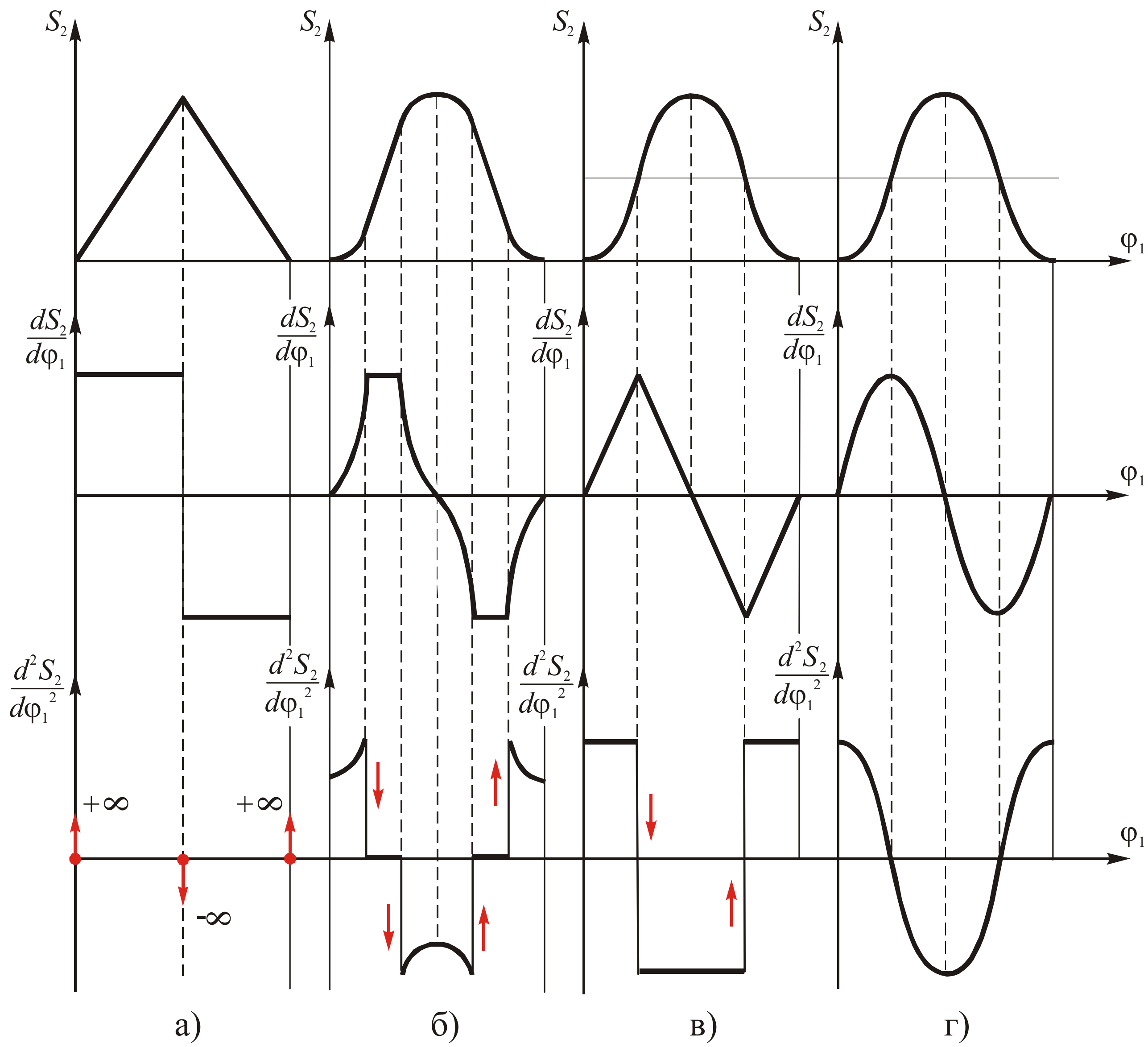


Рис. 10.11 Діаграми руху штовхача: а – в кінематичній парі кулачок-штовхач мають місце "жорсткі” удари; б і в – мають місце "м'які" удари; г – удари відсутні

З точки зору динаміки кулачкового механізму серед наведених прикладів законів руху штовхача останній є найбільш прийнятним.

При проектуванні кулачкових механізмів, щоб уникнути ударів, як правило, після попереднього аналізу фаз руху штовхача задають закон зміни аналога його прискорення, а потім шляхом інтегрування отримують діаграми швидкостей і переміщень (рис.10.12).

Процес синтезу кулачкового механізму розбивають на два етапи: *динамічний синтез* та *кінематичний синтез*.

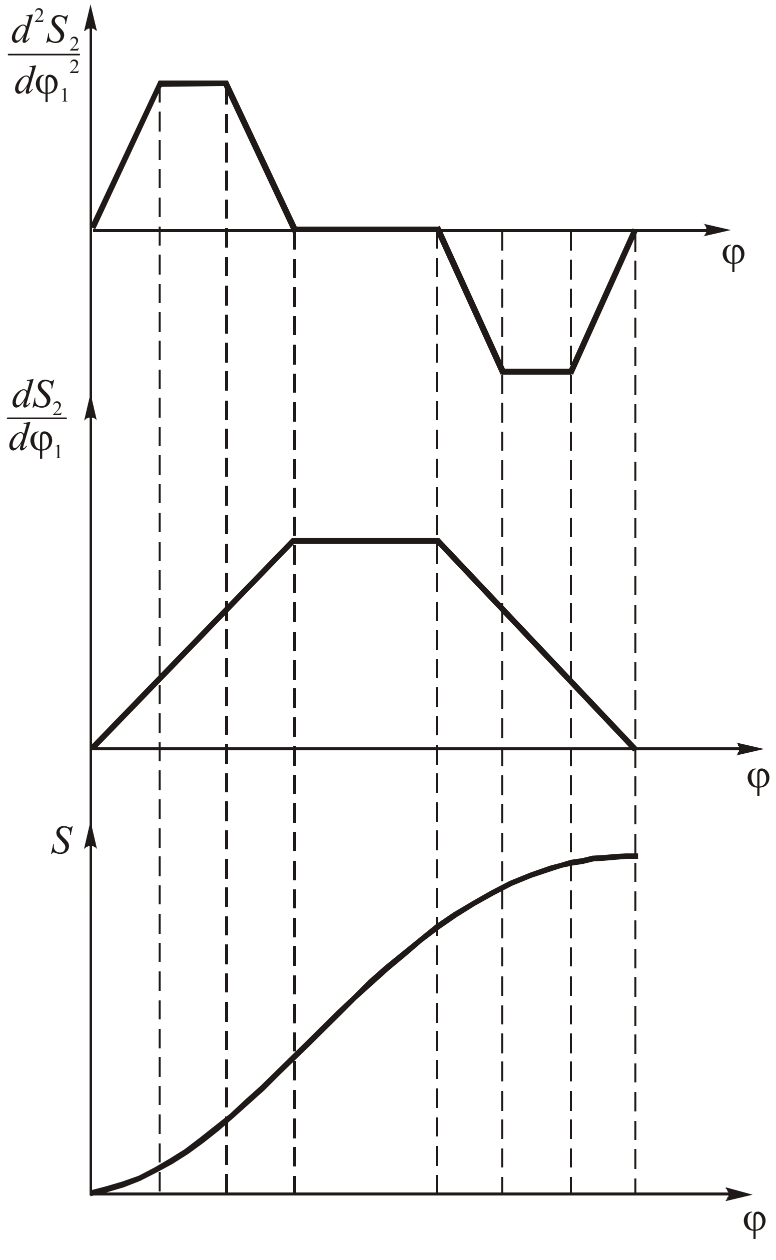


Рис. 10.12 Діаграми руху штовхача, отримані шляхом графічного інтегрування графіка передатної

10.6.2. Динамічний синтез кулачкового механізму

Завданням динамічного синтезу є визначення мінімальних розмірів кулачкового механізму (величини мінімального радіуса кулачка, мінімальної довжини коромисла, якщо вона не задана, і т.п.).

Розглянемо особливості динамічного синтезу деяких типових кулачкових механізмів.

10.6.2.1. Механізм з поступально рухомим штовхачем, оснащеним роликом

Проаналізуємо умови, що мають бути враховані при виборі мінімальних розмірів такого механізму.

На рис. 10.13 зображений нецентральний механізм.

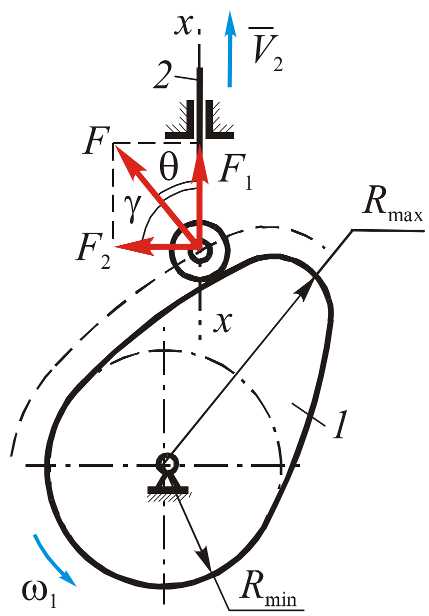


Рис. 10.13 Механізм з нецентральним поступально рухомим штовхачем, оснащеним роликом

Як відомо, тиск у вищій кінематичній парі спрямований уздовж спільної нормалі в точці дотику профілів. Розкладемо тиск $\overline{F}$ на дві складові: уздовж напрямку руху штовхача $x-x$ (сила $\overline{F}_1$) та уздовж перпендикуляра до напрямку $x-x$ ($\overline{F}_2$). Тут сили зведені до точки контакту теоретичного профілю кулачка (пунктирна лінія) з вістрям штовхача.

Кут θ на рис. 10.13 – це *кут тиску*.

Кутом тиску називається кут між напрямком сили тиску і напрямком швидкості точки прикладання цієї сили.

Зрозуміло, що чим більшим буде кут θ, тим більшою має бути сила *F*, щоб подолати сили опору, які діють на штовхач, і примусити його рухатись.

Значить, за деякого кута θ_{max} можливе *заклинювання механізму*.

Кут γ, що доповнює кут тиску θ до 90°, називається *кутом передачі руху*.

Величина кута θ обмежується, з одного боку, умовою незаклинювання (тобто він не може бути як завгодно великим), а з іншого – величиною ККД механізму, який зростає зі зменшенням цього кута. Друга умова є вирішальною: зазвичай оптимальний кут θ вибирають з умови оптимального к.к.д., але він має бути меншим від отриманого з умови незаклинювання.

Для кулачкових механізмів з поступально рухомим штовхачем приймають:

$$\theta_{max} = 30° \text{ або } \gamma_{min} = 60°.$$

Зрозуміло, що при заданому законі руху, зокрема величині ходу штовхача, кут θ буде визначатись крутизною підйому профілю кулачка від R_{min} до R_{max} (див. рис. 10.13). Величина мінімального радіуса R_{min} в свою чергу визначає габарити кулачка при незмінному максимальному ході штовхача.

Розглянемо методику визначення мінімального радіуса кулачка для механізму даного типу.

На рис.10.14 а) і б) зображені кінематична схема та план швидкостей механізму відповідно.

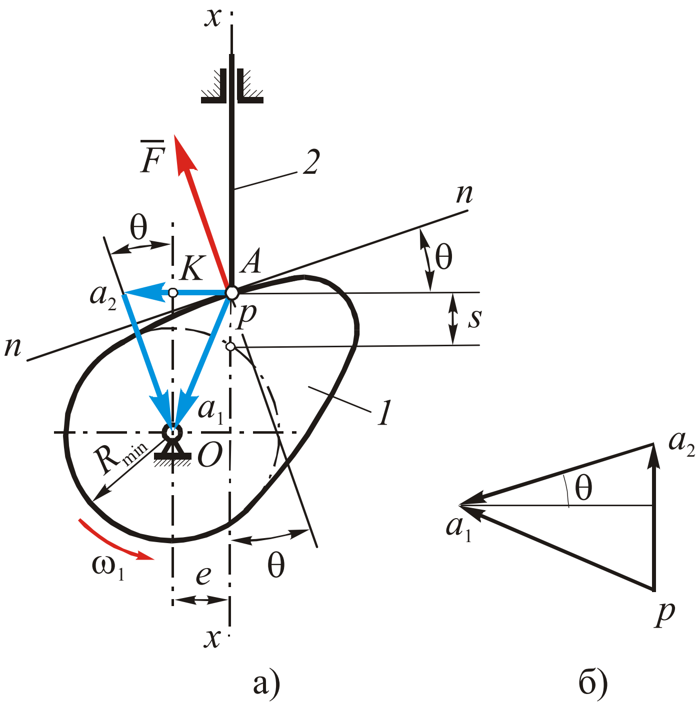


Рис. 10.14 Кулачковий механізм з загостреним штовхачем: а – кінематична схема; б – план швидкостей

Сумістимо полюс плану швидкостей p з точкою A механізму, а точку a_1 – з точкою O, і на цьому відрізку побудуємо повернутий на 90° план швидкостей. Масштабний коефіцієнт цього плану

$$\mu_V = \frac{V_A}{OA} = \frac{\omega l_{OA} \cdot \mu_l}{l_{OA}} = \omega \mu_l. \tag{10.3}$$

Тоді

$$pa_2 = \frac{V_{A_2}}{\mu_V}. \tag{10.4}$$

Тут

$$V_{A_2} = \frac{dS}{dt} = \frac{dS}{d\varphi}\omega. \tag{10.5}$$

Підставляємо (10.3) і (10.5) в (10.4):

$$pa_2 = \frac{\frac{dS}{d\varphi}\omega}{\omega\mu_l} = \frac{1}{\mu_l}\frac{dS}{d\varphi}. \tag{10.6}$$

Тобто план швидкостей, суміщений зі схемою механізму (рис. 10.15), можна розглядати як план аналогів швидкостей, побудований у тому ж масштабі, що і кінематична схема механізму. Тоді всі відрізки плану аналогів швидкостей механізму можна складати з будь-якими відрізками його кінематичної схеми.

На цій підставі, розглядаючи трикутник $a_1 k a_2$, можна записати:

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{pa_2 - e}{Ok},$$

або

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{\frac{dS}{d\varphi} - e}{S + \sqrt{R_{\min}^2 - e^2}}. \tag{10.7}$$

Для центрального механізму $(e = 0)$:

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{\frac{dS}{d\varphi}}{S + R_{\min}}. \tag{10.8}$$

Розглянемо методику визначення мінімального радіуса кулачка, яка базується на геометричному розв'язку рівнянь (10.7) і (10.8).

Заданими в цій задачі мають бути закони руху штовхача $S - \varphi$ і $\frac{dS}{d\varphi} - \varphi$, його максимальний хід $h_{\max}$ та допустимі кути тиску $\theta_{\max}$ або передачі руху $\gamma_{\min}$.

1. Будують циклограму руху штовхача у координатах $S-\dfrac{dS}{d\varphi}$, виключаючи з діаграм руху штовхача $S-\varphi$ і $\dfrac{dS}{d\varphi}-\varphi$ параметр φ (рис. 10.15). При цьому величини масштабних коефіцієнтів μ_S і $\mu_{\frac{dS}{d\varphi}}$ циклограми (рис. 10.15 б) мають бути однаковими.

При силовому замиканні можна обмежитись побудовою циклограми тільки для кута віддалення $\varphi_{вд}$ (рис. 10.15), а при геометричному замиканні будувати циклограму треба для повного кута повороту кулачка (рис. 10.16).

2. Визначають мінімальний радіус кулачка $R_{\min}$, задаючись допустимою величиною кута тиску $\theta_{\max}$. Для цього потрібно під кутом $\theta_{\max}$ до осі S провести дотичну до циклограми $S-\dfrac{dS}{d\varphi}$. Для центрального механізму ($e=0$) точка її перетину з віссю S визначає величину $R_{\min}$. Дійсно, з трикутника BB_1B_2

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{B_1B_2}{BB_2}=\frac{\dfrac{ds}{d\varphi}}{s+OB}.$$

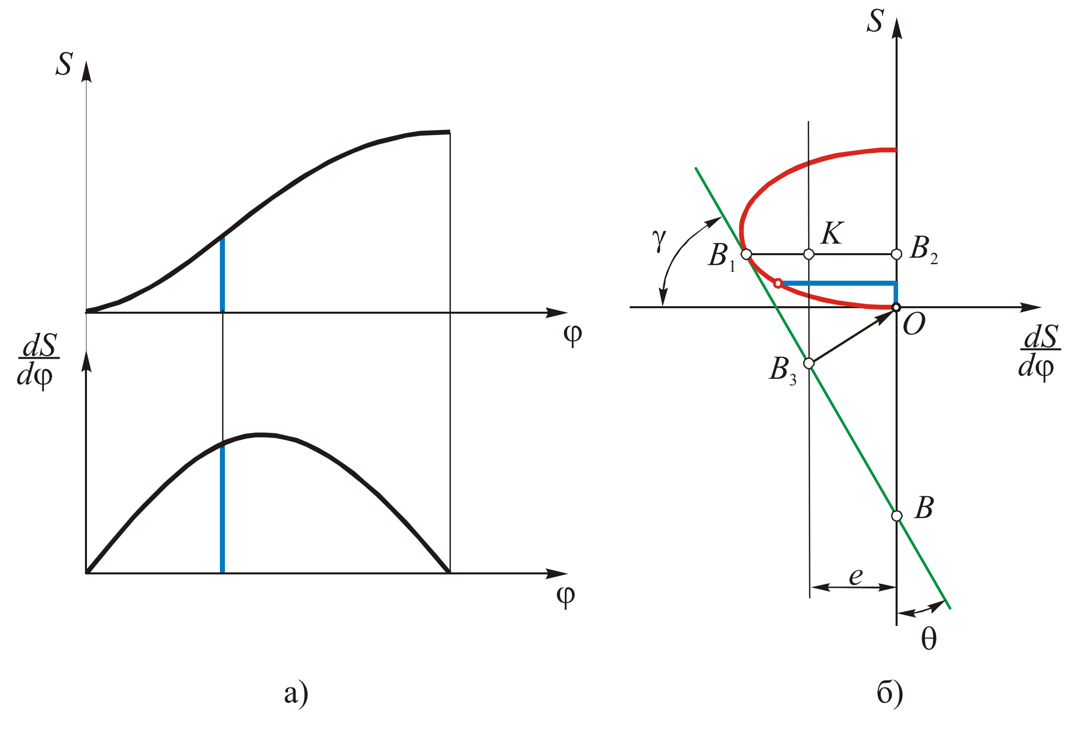


Рис. 10.15 Визначення мінімального радіуса кулачка:
а – кінематичні діаграми руху штовхача;
б – циклограма руху

Порівнюючи отриманий вираз з (10.8), знаходимо, що $\mu_l \cdot OB = R_{\min}$. Тут потрібно покласти $\theta = \theta_{\max}$.

Якщо задано ексцентриситет, то, проводячи пряму, паралельну до осі S на відстані e (рис.10.15), отримаємо з трикутника B_3B_1K

$$tg\theta = \frac{\dfrac{ds}{d\varphi} - e}{s + \sqrt{B_3O^2 - e^2}}.$$

Таким чином, при $\theta = \theta_{\max}$ $\mu_l \cdot B_3O = R_{\min}$.

В обох випадках

$$\mu_l = \mu_S = \mu_{\frac{dS}{d\varphi}}.$$

З рис. 10.15 видно, що за однакових кутів $\theta = \theta_{\max}$ мінімальний радіус кулачка центрального механізму більший, ніж у механізму з ексцентриситетом.

Введення ексцентриситету зменшує габарити кулачкового механізму.

При геометричному замиканні мінімальний радіус кулачка вибирають таким чином, щоб початок радіуса-вектора $\vec{R}_{\min}$ знаходився в заштрихованій області (рис. 10.16).

Як і для механізму з силовим замиканням, введення ексцентриситету в цьому випадку також зменшує габарити механізму.

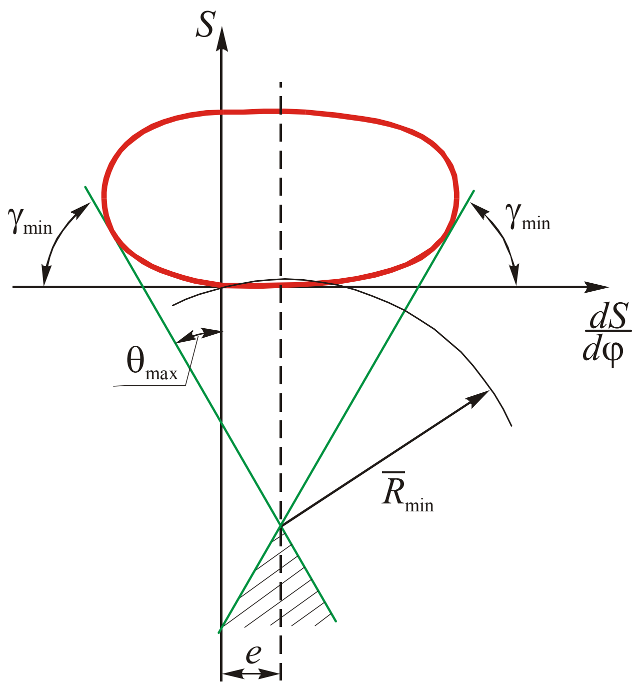


Рис. 10.16 Визначення мінімального радіуса кулачка при геометричному замикання

10.6.2.2. Механізм з обертальним штовхачем

Для даного типу кулачкових механізмів, як і для механізмів з поступально рухомим штовхачем, мінімальні розміри кулачка визначаються допустимими значеннями кутів тиску у вищій кінематичній парі (рис. 10.17).

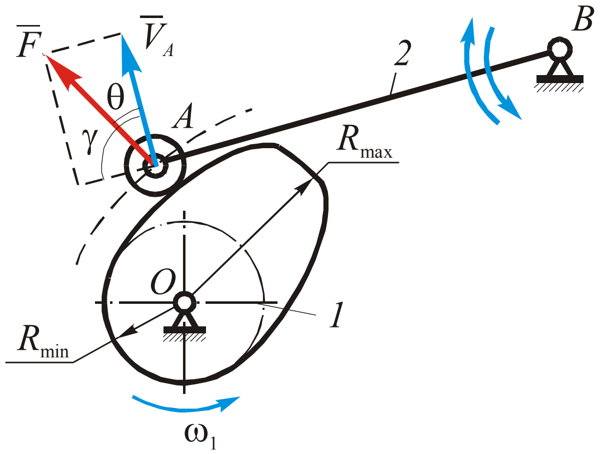


Рис. 10.17 Механізм з коромисловим штовхачем

Рекомендовані значення допустимих кутів тиску та кутів передачі руху для механізмів з обертальним штовхачем

$$\theta_{max} = 45^\circ; \quad \gamma_{min} = 45^\circ.$$

Методика визначення мінімального радіуса кулачка принципово не відрізняється від описаної вище. Особливістю є те, що циклограма руху штовхача будується в полярних координатах.

Заданими мають бути закони руху коромисла, його довжина та максимальний кут хитання ψ_{max} і допустимі кути тиску θ_{max} або передачі руху γ_{min}.

Динамічний синтез проводять у такій послідовності.

1. Будують циклограму руху штовхача, виключаючи з діаграм руху штовхача $\psi - \varphi$ і $\dfrac{d\psi}{d\varphi} - \varphi$ параметр φ. Для цього розмічають траєкторію руху точки A коромисла, яка є дугою кола радіуса l_{BA} (рис. 10.18) у відповідності з діаграмою $\psi - \varphi$. Через точки поділу A_1, A_2, A_3, ... проводять положення коромисла і відкладають відрізки $A_iC_i = \left(l_{BA} \cdot \left| ii^* \right| \mu_{\frac{d\psi}{d\varphi}} \right) \dfrac{1}{\mu_l}$. Тут μ_l – масштабним коефіцієнтом побудови коромисла BA. Слід відзначити, що ці відрізки відкладають від точки A_i до центру B обертання коромисла, якщо напрямки обертання коромисла і кулачка збігаються. Якщо ж напрямки обертання протилежні, відкладати відрізки слід на продовженні BA.

2. Через отримані точки C_i проводять замкнену криву, яка і є циклограмою руху коромисла.
3. При точках C_i на сторонах BC_i будують кути $\gamma_{\min}$.
4. Виділяють область, яка обмежена сторонами побудованих кутів, що відповідають віддаленню та наближенню коромисла (на рис. 10.18 ця область заштрихована). В цій області будь-яка точка може слугувати центром обертання кулачка. Мінімальним його радіус буде тоді, коли центром обертання буде вибрана точка O.

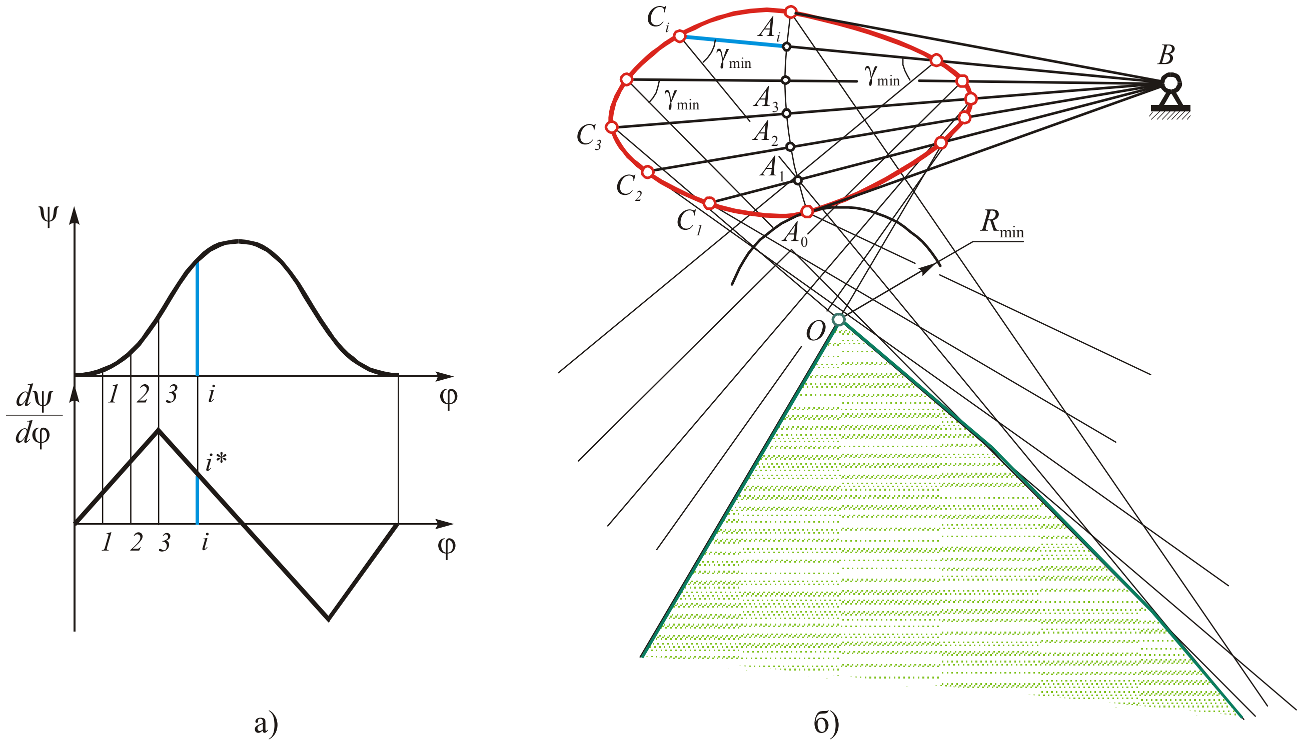


Рис. 10.18 Визначення мінімального радіуса кулачка:
а – кінематичні діаграми руху штовхача;
б – циклограма руху

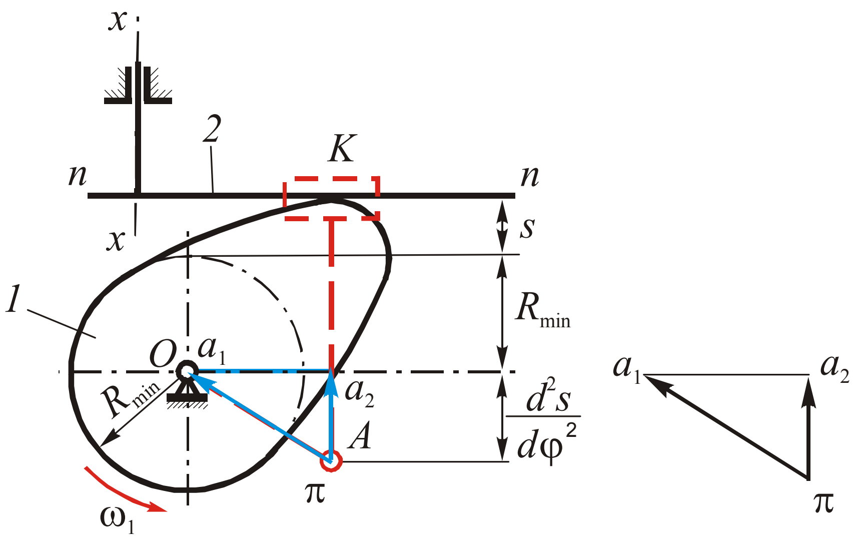
Лекція №21

10.6.2.3. Механізм з плоским тарілчастим штовхачем

Головною умовою при виборі мінімального радіуса кулачка для такого механізму є *забезпечення випуклості його контуру*, оскільки між штовхачем і кулачком має бути тільки одна точка контакту.

Покажемо, як на практиці можна реалізувати цю умову.

Для механізму, зображеного на рис. 10.19 а, побудуємо план прискорень (рис. 10.19 б). З цією метою скористаємось схемою замінного механізму, зображеного пунктиром.



а) б)

Рис. 10.19 Механізм з плоским тарілчастим штовхачем: а – кінематична схема; б – план прискорень

Сумістимо полюс плану прискорень π з точкою A замінного механізму, а точку a_1 – з точкою O. Масштабний коефіцієнт плану прискорень, суміщеного зі схемою механізму,

$$\mu_a = \frac{a_{A_1}}{\pi a_1} = \frac{\omega_1^2 l_{OA} \cdot \mu_l}{l_{OA}}.$$

Отже

$$\mu_a = \omega_1^2 \mu_l. \tag{10.9}$$

Тоді

$$\pi a_2 = \frac{a_{A_2}}{\mu_a} = \frac{a_{A_2}}{\omega_1^2 \mu_l}$$

Враховуючи, що, за умови рівномірного руху кулачка ($\varepsilon_1 = 0$),

$$a_{A_2} = \frac{d^2 S}{dt^2} = \frac{d^2 S}{d\varphi^2}\omega^2,$$

запишемо:

$$\pi a_2 = \frac{d^2S}{d\varphi^2}\frac{1}{\mu_l}. \tag{10.10}$$

Тобто план прискорень, суміщений зі схемою механізмом (рис. 10.19), можна розглядати як план аналогів прискорень, побудований у тому ж масштабі, що і кінематична схема механізму. Тоді всі відрізки плану аналогів прискорень механізму можна складати з будь-якими відрізками його кінематичної схеми.

Умовою випуклості профілю в точці дотику є умова

$$A\ K > 0\ .$$

Згідно з рис. 10.19 цю умову можна записати як

$$R_{\min} + S + \frac{d^2S}{d\varphi^2} > 0\,.$$

Або

$$R_{\min} > -\left(S + \frac{d^2S}{d\varphi^2}\right). \tag{10.11}$$

Методика графічного визначення мінімального радіуса кулачка $R_{\min}$, запропонована *Геронімусом*, передбачає таку послідовність дій.

1. За заданими діаграмами руху штовхача $S-\varphi$ та $\frac{d^2S}{d\varphi^2}-\varphi$ будують діаграму в координатах $S-\frac{d^2S}{d\varphi^2}$ (рис. 10.20). При цьому масштабні коефіцієнти $\mu_S = \mu_{\frac{d^2S}{d\varphi^2}}$.
2. Із формули (10.11) виходить, що

$$\frac{-\frac{d^2S}{d\varphi^2}}{R_{\min} + S} < 1. \tag{10.12}$$

Це повністю відповідає побудові, зображеній на рис. 10.20: з боку від'ємних значень аналога прискорень штовхача $\frac{d^2S}{d\varphi^2}$ проводять дотичну до діаграми під кутом 45°.

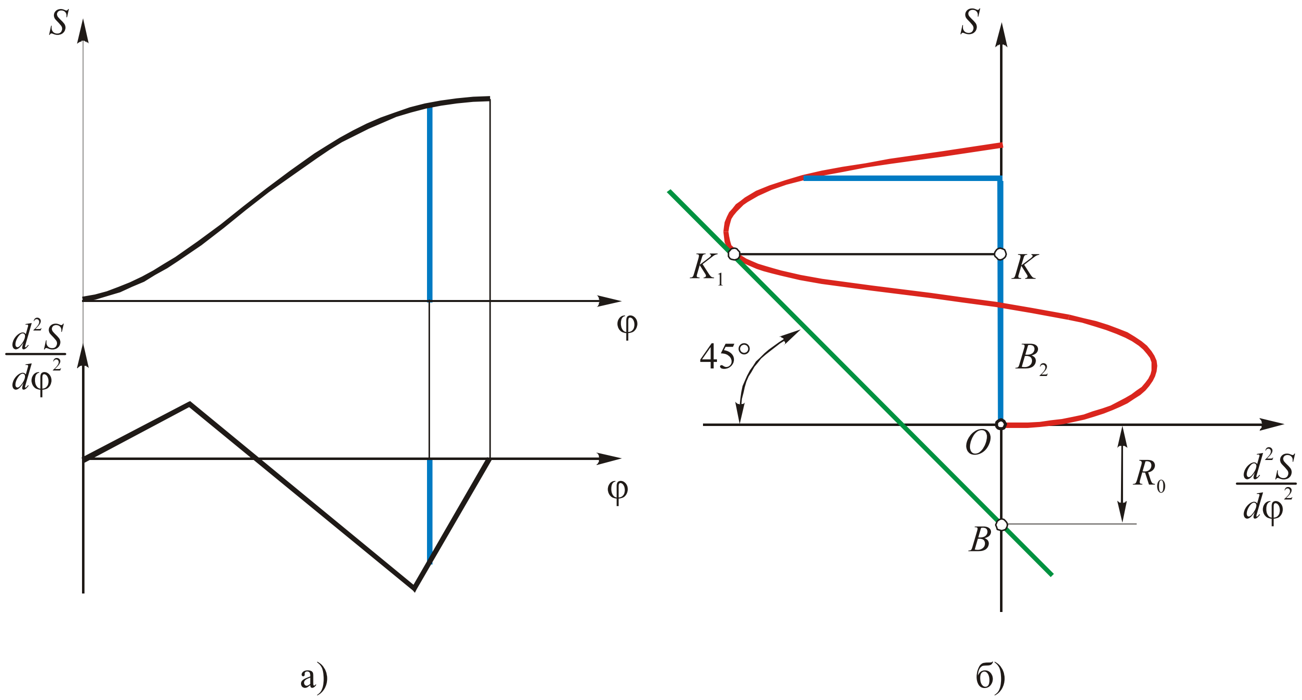


Рис. 10.20 Визначення мінімального радіуса кулачка: а – кінематичні діаграми руху штовхача; б – циклограма руху

За умови $R_{\min} = R_0$

$$R_{\min} + S + \frac{d^2S}{dS^2} = 0\,, \tag{10.13}$$

а це неприпустимо з точки зору контактної міцності, адже за умови (10.13) маємо нульовий радіус кривини профілю кулачка в точці контакту зі штовхачем. Тобто маємо злам поверхні профілю кулачка. Тому завжди має виконуватись умова

$$R_{\min} > R_0\,. \tag{10.14}$$

3. Якщо в результаті проведених побудов точка перетину дотичної з віссю S лежатиме вище точки O, це відповідатиме умові $R_0 < 0$, що не має сенсу. У цьому випадку приймають

$$\left|R_{\min}\right| \approx \mu_{\frac{d^2S}{d\varphi^2}} \cdot KK_1 \quad \left(R_{\min} \approx -\frac{d^2S}{d\varphi^2}\right).$$

10.6.3. Кінематичний синтез плоских кулачкових механізмів

Завданням кінематичного синтезу є визначення елементу вищої кінематичної пари на кулачку, тобто профілюється кулачок за заданою залежністю S - φ.

Кінематичний синтез проводять різними методами – аналітичними та графічними. Вище ми розглянули графічні методи кінематичного аналізу деяких кулачкових механізмів. Слід зазначити, що синтез графічними методами проводиться в порядку, оберненому до аналізу [1, 6].

Тому в цьому пункті ми детальніше ознайомимось з аналітичними методами синтезу різних кулачкових механізмів.

Як і у випадку кінематичного аналізу, при кінематичному синтезі застосовують принцип оберненості руху.

10.6.3.1. Механізм з поступально рухомим штовхачем

Розглянемо нерухому систему осей xOy, жорстко пов'язану зі стояком, початок якої суміщений з центром обертання кулачка (рис. 10.21). За початкове виберемо таке положення системи, коли вісь y проходить через точку A_0 початку підйому профілю кулачка.

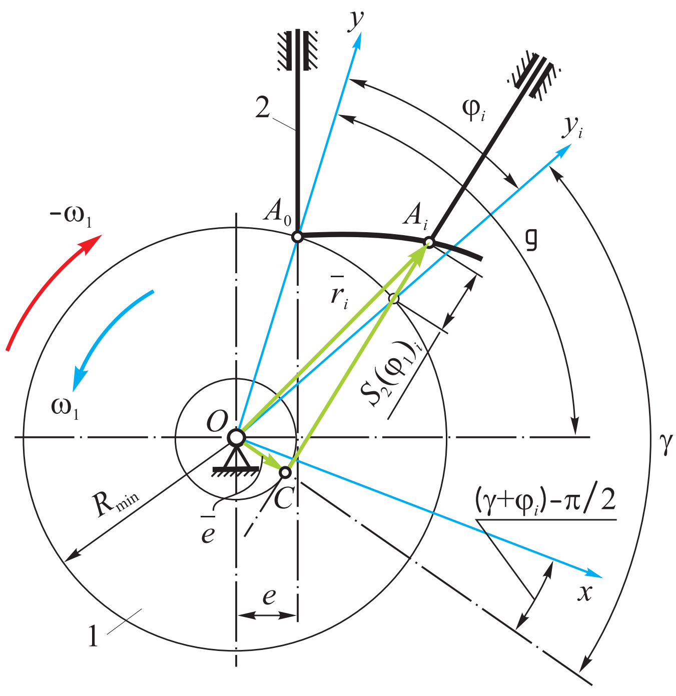


Рис. 10.21 Профілювання кулачка механізму з поступально рухомим штовхачем

Згідно з принципом оберненості руху, поворот кулачка на кут φ_i адекватний повороту стояка зі штовхачем відносно нерухомого кулачка на такий-самий кут в протилежному напрямку (див. рис. 10.21). Тут $S_2(\varphi_1)$ – переміщення штовхача у відповідності із заданою функцією положення.

Радіус-вектор точки A_i:

$$\vec{r}_i = \overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA_i}. \tag{10.15}$$

Позначимо $\overrightarrow{OC} = \vec{e}$; $\overrightarrow{CA_i} = \overrightarrow{S_2(\varphi_1) + \sqrt{R_{\min}^2 - e^2}}$.
Тобто

$$\vec{r}_i = \vec{e} + \overrightarrow{S_2(\varphi_1) + \sqrt{R_{\min}^2 - e^2}}. \tag{10.16}$$

Тоді координати цієї точки:

$$\begin{cases} x_{A_i} = e\cos\left((\gamma+\varphi_i)-\dfrac{\pi}{2}\right) + \left[\sqrt{R_{\min}^2 - e^2} + S_2(\varphi_1)_i\right]\cdot\sin\left((\gamma+\varphi_i)-\dfrac{\pi}{2}\right); \\ y_{A_i} = e\sin\left((\gamma+\varphi_i)-\dfrac{\pi}{2}\right) + \left[\sqrt{R_{\min}^2 - e^2} + S_2(\varphi_1)_i\right]\cdot\cos\left((\gamma+\varphi_i)-\dfrac{\pi}{2}\right). \end{cases} \tag{10.17}$$

10.6.3.2. Механізм з обертальним штовхачем

Для механізму з обертальним штовхачем поворот кулачка на кут φ_i рівнозначний повороту на такий-самий кут прямої OO_1 (рис.10.22). При цьому точка O_1 переміститься в точку O_1^*.

Можна записати:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1^*A}.$$

Тут $\left|\overrightarrow{OO_1}\right| = l$; $\left|\overrightarrow{O_1^*A}\right| = r_2$.

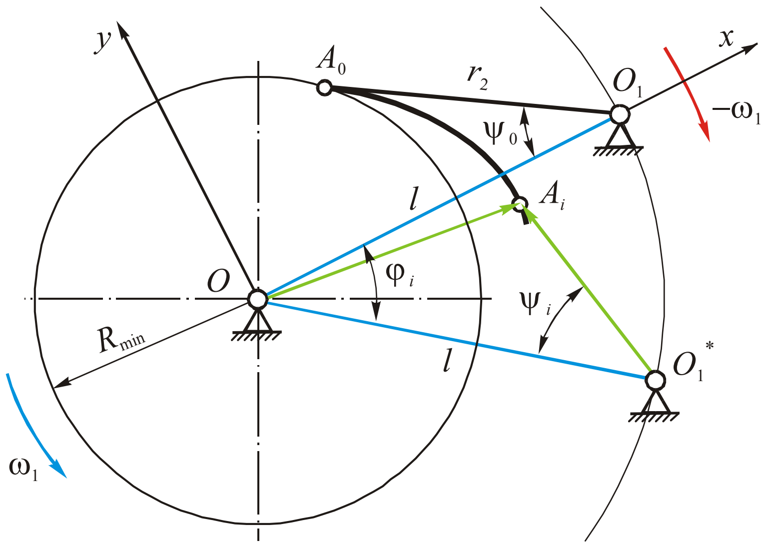


Рис. 10.22 Профілювання кулачка механізму з обертальним штовхачем

В проекціях на координатні осі матимемо:

$$\begin{cases} x_A = l\cos\varphi_i - r_2\cos(\varphi_i + \psi_i); \\ y_A = -l\sin\varphi_i + r_2\sin(\varphi_i + \psi_i). \end{cases} \tag{10.18}$$

10.6.3.3. Механізм з плоским тарілчастим штовхачем

Згідно з рис. 10.23 радіус-вектор точки A можна виразити як:

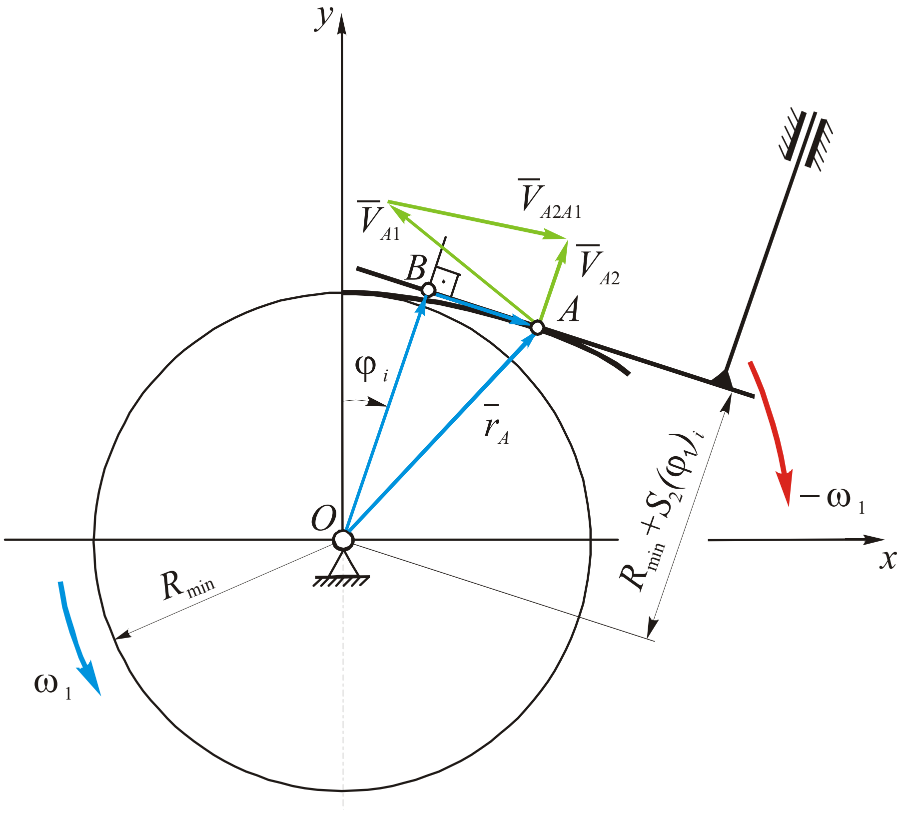


Рис. 10.23 Профілювання кулачка механізму з плоским тарілчастим штовхачем

Згідно з рис. 10.23 радіус-вектор точки A можна виразити як:

$$\vec{r}_A = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}$$

Тут $\left|\overrightarrow{OB}\right| = R_{\min} + S_2(\varphi_1)_i$.

Трикутник OBA подібний до трикутника швидкостей $\vec{V}_{A_2} = \vec{V}_{A_1} + \vec{V}_{A_2A_1}$. Звідси:

$$\frac{V_{A_1}}{V_{A_2}} = \frac{OA}{AB}.$$

$$AB = OA\frac{V_{A_2}}{V_{A_1}} = r_A\frac{\frac{dS_2}{d\varphi_1}\omega_1}{\omega_1 r_A} = \frac{dS_2}{d\varphi_1}.$$

Отже,

$$\vec{r}_A = \overrightarrow{\left[R_{\min} + S_2\left(\varphi_1\right)\right]} + \overrightarrow{\left(\frac{dS_2}{d\varphi_1}\right)}. \qquad (10.19)$$

Координати точки дотику профілю кулачка з площиною тарілки штовхача при заданому значенні кута φ_i:

$$\begin{cases} x_A = \left[R_{\min} + S_2\left(\varphi_1\right)\right]\sin\varphi_1 + \left(\dfrac{dS_2}{d\varphi_1}\right)\cos\varphi_1; \\ y_A = \left[R_{\min} + S_2\left(\varphi_1\right)\right]\cos\varphi_1 - \left(\dfrac{dS_2}{d\varphi_1}\right)\sin\varphi_1. \end{cases} \qquad (10.20)$$

10.6.4. Динамічний та кінематичний синтез механізму з циліндричним кулачком

Як приклад розглянемо синтез кулачка механізму з поступально рухомим штовхачем (рис. 10.24).

Динамічний синтез такого механізму зводиться до вибору мінімального радіуса циліндра кулачка. Його величина визначається з умови незаклинювання механізму, тобто дотриманням умови $\theta \le [\theta]$.

Кут тиску θ є кутом між вектором швидкості $\vec{V}_2$ і нормаллю *n-n* (рис. 10.24).

Розглянемо трикутник швидкостей, гострі кути в якому виразимо як

$$\chi_1 = \theta \quad ; \quad \chi_2 = 90^\circ - \chi_1.$$

За теоремою косинусів

$$\frac{V_1}{\sin\chi_2} = \frac{V_2}{\sin\chi_1} \quad \text{або} \quad \frac{\omega_1 r_1}{\cos\theta} = \frac{V_2}{\sin\theta}.$$

Звідси

$$r_1 = \frac{V_2\cos\theta}{\omega_1\cdot\sin\theta} = \frac{\frac{dS_2}{d\varphi_1}\cdot\omega_1}{\omega_1\cdot\mathrm{tg}\theta};$$

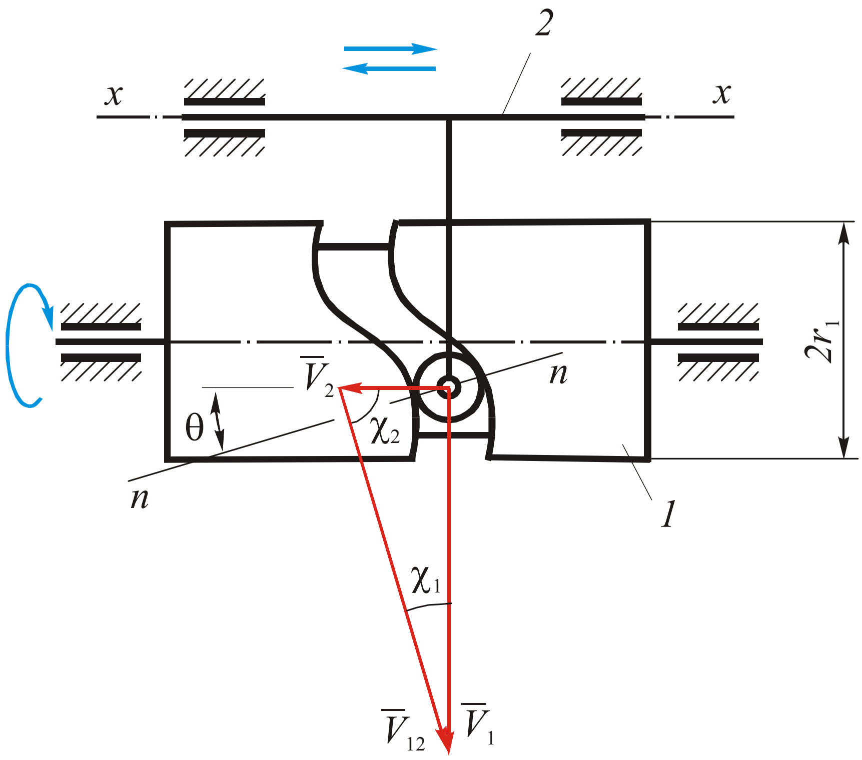


Рис. 10.24 Механізм з циліндричним кулачком

$$r_1 = \frac{dS_2}{d\varphi_1}\,\mathrm{ctg}\theta. \tag{10.21}$$

Тут $\dfrac{dS_2}{d\varphi_1} = \dfrac{dS_2}{d\varphi_1}(\varphi_1)$ – передатна функція аналога прискорення штовхача.

Задавшись величиною $[\theta]$, обчислюють величину r_1 для ряду послідовних значень узагальненої координати φ_1 за цикл руху механізму і будують графік функції $r_1 = r_1(\varphi_1)$. За побудованим графіком вибирають найбільше значення в якості мінімального радіуса циліндра кулачка.

Кінематичний синтез із застосуванням графічного методу профілювання кулачка виконують, користуючись розгорткою циліндра кулачка на площину (рис. 10.25).

Використовуючи метод оберненості руху, вважають розгортку нерухомою, а вісь руху штовхача $x-x$ такою, що рухається зі швидкістю $\vec{V}_{x-x} = -\vec{V}_1$ (тут $V_1 = \omega_1 r_1$). Переміщення штовхача, у відповідності до заданої функції положення, відкладають у напрямку осі $x-x$ (див. рис. 10.25).

Аналогічно профілюють і механізм з коромисловим штовхачем [2].

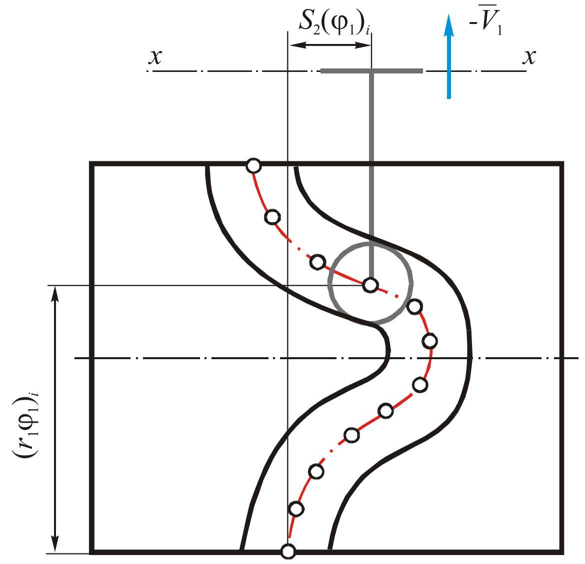


Рис. 10.25 Розгортка циліндричного кулачка на площину

Лекція №22

Розділ 11. ТЕРТЯ ТА ЗНОШУВАННЯ В КІНЕМАТИЧНИХ ПАРАХ

При роботі машин і механізмів відбувається розсіювання механічної енергії. Причиною такого розсіювання є тертя.

Вирізняють *внутрішнє* і *зовнішнє тертя*.

Внутрішнє тертя – це тертя між частками матеріалу при його деформації (рис. 11.1 а). Проявом цього виду тертя є наявність у матеріалу петлі пружного гістерезису (рис. 11.1 б). Чим ширша петля, тим вищими є демпфірувальні властивості матеріалу, тобто його здатність гасити коливання (у реальних матеріалів вільні коливання затухають навіть у вакуумі).

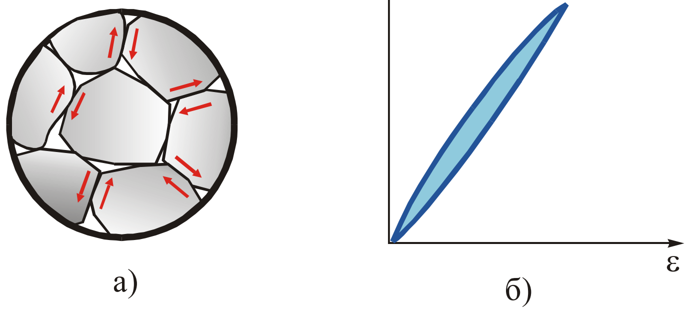


Рис. 11.1 Внутрішнє тертя: а – тертя між часточками матеріалу; б – петля пружного гістерезису

Зовнішнє тертя — це опір відносному зміщенню контактуючих тіл чи спробі викликати це зміщення. Сила цього опору називається силою тертя.

В подальшому будемо розглядати тільки зовнішнє тертя.

Тема 11.1. ВИДИ ТЕРТЯ В КІНЕМАТИЧНИХ ПАРАХ

Фізична природа тертя до кінця не вивчена. Існують різні школи, які трактують природу тертя з різних позицій, наприклад з точки зору фізики металів, електричної природи і т.д.

Розглянемо різні види тертя, не заглиблюючись у природу цього явища.

11.1.1. Класифікація тертя за кінематичною ознакою

Розрізняють:

- тертя ковзання (рис. 11.2 а);
- тертя кочення (рис. 11.2 б);
- тертя вертіння (рис. 11.2 в);
- тертя кочення з проковзуванням (в зубчастому зачепленні, наприклад)
- тертя за вібропереміщень.

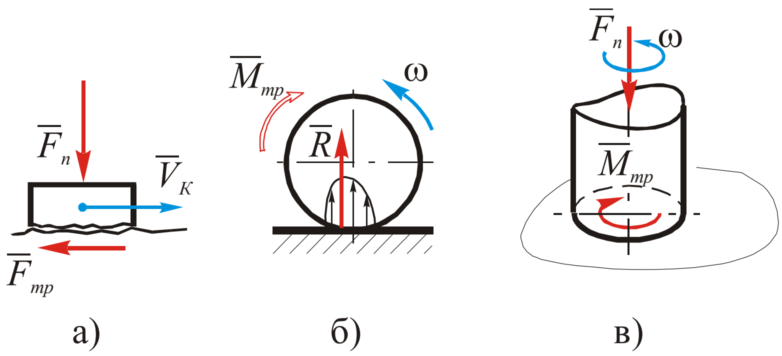


Рис. 11.2 Види тертя за кінематичною ознакою: а – тертя ковзання; б – тертя кочення; в – тертя вертіння.

11.1.2. Класифікація тертя за станом поверхні

Розрізняють:

- тертя без змащення – *сухе тертя*;
- тертя зі змащенням – *рідинне тертя*.

11.1.3. Тертя спокою і тертя руху.

Тертя спокою передує тертю руху.

Сила тертя спокою завжди більша від сили тертя руху.

Сила тертя спокою, будь-яке перевищення якої призводить до руху, називається *найбільшою силою тертя спокою*.

В техніці тертя спокою відіграє позитивну роль. Завдяки цьому виду тертя працюють механічні передачі, рухається по земній поверхні транспорт, та, власне, і ми з вами ходимо.

Тертя руху ж, як правило, шкідливе. Воно виникає при відносному зміщенні ланок, і з ним пов'язаний знос елементів кінематичних пар, непродуктивні витрати енергії і т.п.

Тема 11.2. СУХЕ ТЕРТЯ

Це тертя має місце за відсутності на поверхнях тертя введеного мастильного матеріалу.

11.2.1. Закон Амонтона-Кулона

Розглянемо сухе тертя в нижчій поступальній кінематичній парі, коли тіло взаємодіє з площиною (рис. 11.3). Тут F_n – сила нормального тиску, а $F_{тр}$ – сила тертя.

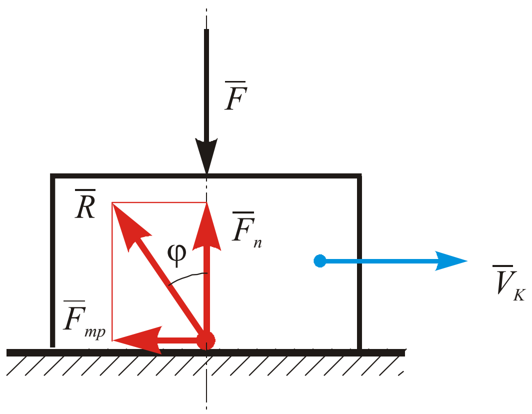


Рис. 11.3 Сили в нижчій поступальній кінематичній парі

Сила тертя залежить від величини нормального тиску в кінематичних парах, направлена в бік, протилежний швидкості ковзання, і визначається коефіцієнтом тертя.

$$F_{тр} = f \cdot F_n \,. \tag{11.1}$$

Тут f – коефіцієнт тертя.

Згідно з рис.11.3 можна записати:

$$\text{tg}\varphi = \frac{F_{тр}}{F_n} = f \,.$$

Тобто

$$f = \mathrm{tg}\varphi\,. \tag{11.2}$$

Тут кут φ називається *кутом тертя*.

Значення коефіцієнтів тертя і кутів тертя для різних пар матеріалів приводяться у довідковій літературі з деталей машин, фізики.

Розрізняють коефіцієнти тертя спокою $f_{сп}$ і тертя руху f Вони підлягають умові

$$f < f_{сп} \tag{11.3}$$

11.2.2. Фактори, що впливають на коефіцієнт тертя

Коефіцієнт тертя не є сталою величиною. На нього впливає цілий ряд конструктивно-технологічних та експлуатаційних факторів.

а) природа контактуючих тіл;
б) стан поверхні – існує певна оптимальна шорсткість поверхні, за якої тертя буде мінімальним (так наприклад, ідеально відполірована поверхня не є ідеальною з точки зору тертя);
в) швидкість відносного руху тіл, що труться.

Зупинимось детальніше на останньому факторі.

Згідно з Кулоном коефіцієнт тертя не залежить від швидкості ковзання (рис. 11.4 а). При $F_n = Const$ і $F_{тр} = Const$.

На практиці сила сухого тертя залежить від швидкості ковзання (рис. 11.4 б).

Рис. 11.4 Залежність сили тертя від швидкості ковзання:
а – за Амантоном-Кулоном; б – на практиці

Існує оптимальне значення $V_{гр}$ (гранична швидкість), за якої сила тертя, а значить і коефіцієнт тертя, мінімальні. В зоні малих швидкостей ковзання спостерігається різке падіння сили тертя при збільшенні швидкості. За такої залежності між силою тертя і швидкістю ковзання при малих швидкостях переміщень спостерігається нестійкий (стрибкоподібний) рух. Таке явище характерне для технологічного обладнання. Воно супроводжується нерівномірністю подачі, підвищеним зносом спрямовуючих та інструменту. В механізмах виникають додаткові динамічні навантаження, знижується точність роботи обладнання.

Для усунення цього явища заміняють сухе тертя рідинним зі спеціальним гідростатичним мастилом. Замість традиційних чавуну та бронзи для спрямовуючих та повзунів застосовують, де це можливо, фторопласт. Заміняють тертя ковзання тертям кочення.

11.2.3. Тертя в нижчих кінематичних парах

Окрім перелічених факторів, які впливають на величину коефіцієнта тертя, слід відзначити також форму і розташування елементів кінематичної пари. Для різних їх типів визначають *зведені коефіцієнти тертя*.

Розглянемо поступальну кінематичну пару, утворену ланками 1 і 2 (рис. 11.5), що контактують по поверхні довільної форми.

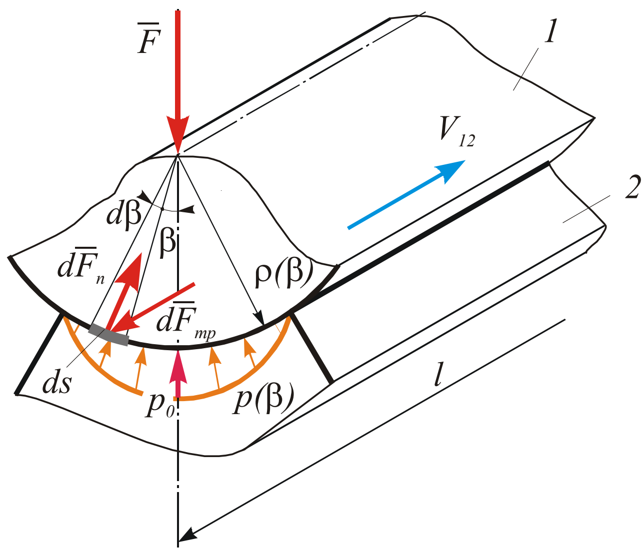


Рис. 11.5 Поступальна пара з поверхнею контакту довільної форми

Довжина поверховості контакту *l*. Радіус кривини поверхні контакту в довільній точці позначимо $\rho(\beta)$. Виділимо елементарну площадку контакту $l \cdot ds$. Сила тертя на ній

$$dF_{тр} = f dF_n;$$

$$dF_n = p(\beta) l ds = p(\beta) l \rho(\beta) d\beta .$$

Тобто

$$dF_{тр} = f p(\beta) l \rho(\beta) d\beta \tag{11.4}$$

Результуюча сила тертя:

$$F_{тр} = f l \int_{-\beta_1}^{\beta_2} p(\beta) \cdot \rho(\beta) d\beta \tag{11.5}$$

11.2.3.1. Тертя в клинчастому повзуні

Розрахункова схема такого повзуна зображена на рис. 11.6.

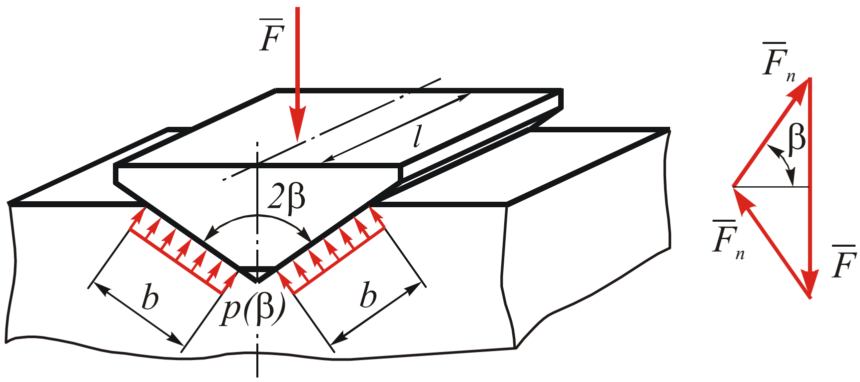


Рис. 11.6 Клинчастий повзун

З плану сил маємо:

$$2F_n \sin\beta = F .$$

Тоді тиск на поверхні контакту

$$p(\beta) = \frac{F}{2lb\sin\beta}$$

Враховуючи, що в нашому прикладі

$$\int_{-\beta_1}^{\beta_2} \rho(\beta) d\beta = 2b ,$$

згідно з (11.5) отримаємо:

$$F_{тр} = fl\frac{F}{2lb\sin\beta}\cdot 2b = f'\cdot F\ .$$

Тут зведений коефіцієнт тертя для клинчастого повзуна

$$f' = \frac{f}{\sin\beta} \qquad (11.6)$$

11.2.3.2. Тертя в циліндричному повзуні

В циліндричному повзуні (рис. 11.7) радіус кривини поверхні контакту $\rho(\beta) = r = Const$

а) Пара не приброблена.

Приймають рівномірний розподіл тиску $p(\beta) = p = Const$ (рис. 11.7). Тоді з умови рівноваги повзуна, проектуючи силу F_n на напрямок сили F, отримаємо:

$$F = 2\int_0^{\pi/2} prl\cdot\cos\beta d\beta = 2prl\ .$$

Звідси

$$p = p(\beta) = \frac{F}{2rl}\ .$$

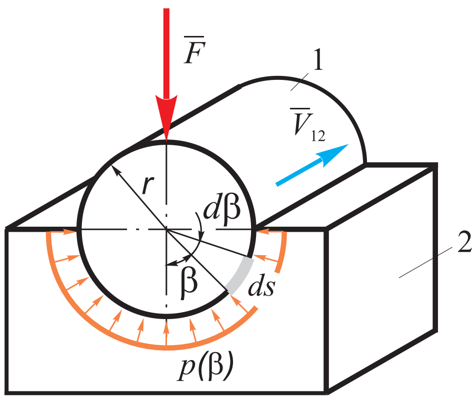


Рис. 11.7 Циліндричний повзун з неприробленою парою

Підставляючи $p(\beta)$ і $\rho(\beta)$ в (11.5), отримаємо

$$F_{тр} = fl\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{F}{2rl}\cdot rd\beta = fF\cdot\frac{\pi}{2} = f'\cdot F\ .$$

Тут зведений коефіцієнт тертя

$$f' = \frac{\pi}{2} f\,. \qquad (11.7)$$

б) Пара приміблена.

В приробленій парі приймається косінусоїдальний закон розподілення тиску (рис. 11.8).

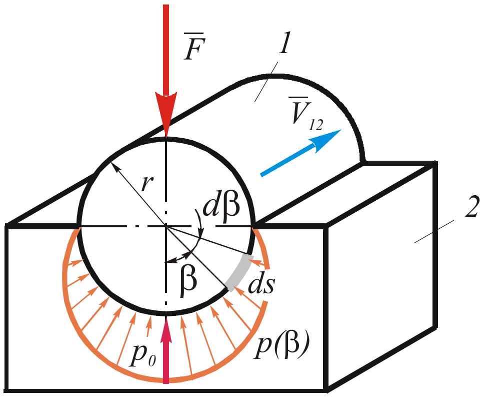


Рис. 11.8 Циліндричний повзун з приробленою парою

$$p(\beta) = p_0 \cos\beta\,.$$

Тоді

$$F_{тр} = fl \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p_0 \cos\beta \cdot r d\beta = 2 frlp_0\,. \qquad (11.8)$$

З умови рівноваги ланки 1:

$$F = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} pl \cos\beta ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p_0 l \cos^2\beta r d\beta = p_0 lr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\beta d\beta = p_0 lr \frac{\pi}{2}\,.$$

Звідси

$$p_0 = \frac{2F}{\pi lr}\,. \qquad (11.9)$$

Тоді із формули (11.8)

$$F_{тр} = 2 frl \cdot \frac{2F}{\pi lr} = \frac{4}{\pi} fF = f' \cdot F\,,$$

де зведений коефіцієнт тертя

$$f' = \frac{4}{\pi} f \qquad (11.10)$$

11.2.3.3. Тертя в обертальній парі

В обертальних кінематичних парах з елементами, виконаними у вигляді круглих циліндрів (рис. 11.9), і навантажених силою F, розподіл тиску приймається таким самим, як і в циліндричному повзуні. Сила тертя визначається так само, як і для того випадку.

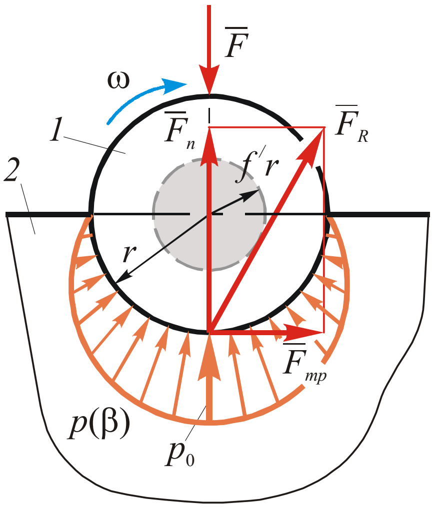


Рис. 11.9 Обертальна пара

Сумарна сила $\overline{F}_R = \overline{F}_{тр} + \overline{F}_n$ (рис. 11.9) дотикається до коло радіуса $f'r$, що окреслює так званий *круг тертя*. Момент цієї сили відносно осі шарніра перешкоджає обертанню.

Для сферичних пар (рис. 11.10 а) зведений коефіцієнт тертя $f' = 1{,}27 f$. Для пар з конічними елементами (рис. 11.10 б) зведений коефіцієнт тертя $f' = \dfrac{f}{\cos\beta}$.

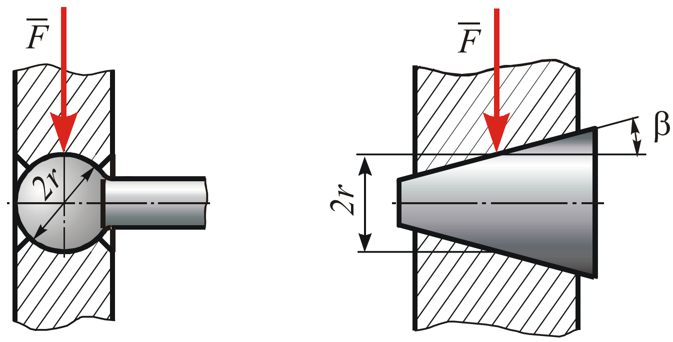


Рис. 11.10 Обертальні пари: а – сферичний шарнір; б – з конічними елементами

Лекція №23

11.2.3.4. Тертя в п'яті

На рис. 11.11 зображена кінематична пара, яка включає п’яту 1 і підп’ятник 2, навантажена осьовою силою *F*. В цьому випадку на поверхні п’яти (рис. 11.11 б) виникає сила тертя вертіння, яка також підлягає закону Амонтона–Кулона.

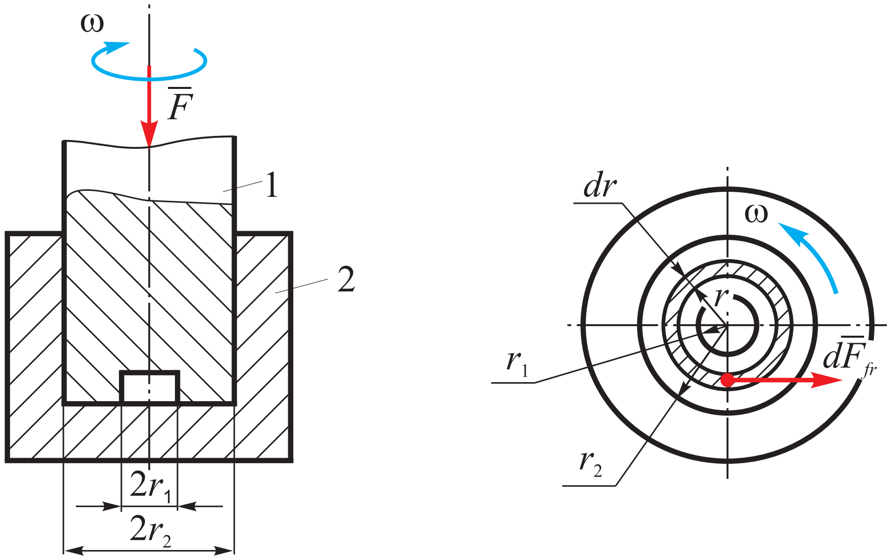


Рис. 11.11 П'ята з підп'ятником

Якщо вважати розподіл нормального тиску *p* по всій ширині кільця рівномірним, то можна записати:

$$p = \frac{F}{\pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)}. \tag{11.11}$$

Виділимо кільце товщиною dr. Момент, що створюється силою dF_{mp} на цій площадці, дорівнює

$$dM_{mp} = dF_{mp} \cdot r; \tag{11.12}$$

$$dF_{mp} = fdF_n = f \cdot p 2\pi r dr. \tag{11.13}$$

Отже

$$dM_{mp} = f\, 2 p \pi r^2 dr.$$

Інтегруючи, отримаємо

$$M_{тр} = \int_{r_1}^{r_2} 2\pi f p r^2 dr = \frac{2}{3}\pi f p\left(r_2^3 - r_1^3\right).$$

Або з урахуванням (11.11)

$$M_{тр} = \frac{2}{3} f F \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2}. \qquad (11.14)$$

Якщо п’ята не кільцева, тобто $r_1 = 0$, то

$$M_{тр} = \frac{2}{3} F \cdot f \cdot r. \qquad (11.15)$$

11.2.3.5. Тертя у гвинтовій парі

Розглянемо різьбу, представлену на рис.11.12.

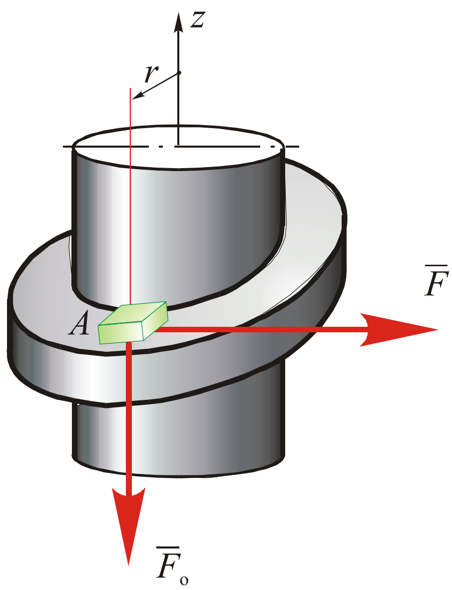


Рис. 11.12 Гвинтова пара

На гайку, представлену елементом *A*, діє деяка сила F_0 і момент в площині, перпендикулярній до осі *z*. Цей момент представлений силою *F*:

$$M = F \cdot r.$$

Щоб гайка була у рівновазі або в стані рівномірного руху вздовж різьби, має виконуватись умова рівноваги сил, що діють на гайку. Розглянемо розгортку різьби (рис. 11. 13 а).

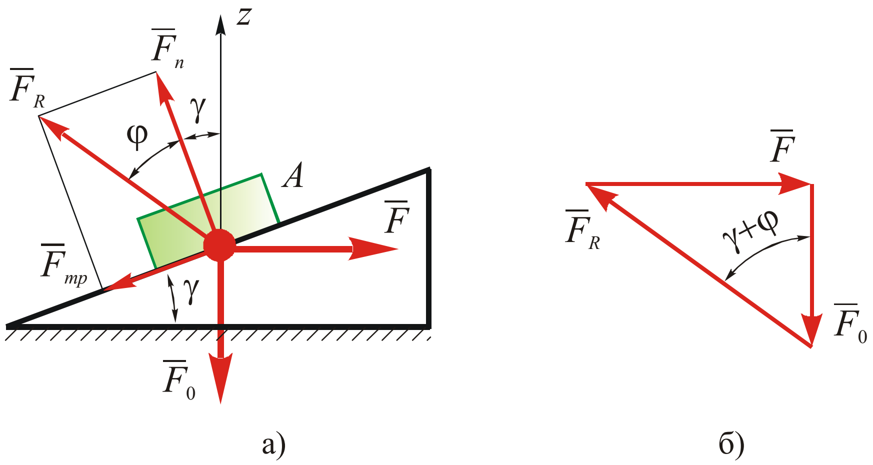


Рис. 11.13 Гвинтова пара: а – розгортка витка різьби; б – план сил

Умову рівноваги елемента A, навантаженого системою сил, що сходяться в одній точці, запишемо у вигляді:

$$\overline{F} + \overline{F}_0 + \overline{F}_R = 0 \tag{11.16}$$

Із плану сил (рис.11.13 б)

$$F = F_0 \mathrm{tg}(\varphi + \gamma) \tag{11.17}$$

Тут γ – кут підйому гвинтової лінії.

Отже момент, прикладений до гайки

$$M = F_0 r \mathrm{tg}(\gamma + \varphi). \tag{11.18}$$

Умова (11.17) отримана для випадку, коли гайка рухається проти напрямку сили F_0 (затяжка різьби або підйом вантажу домкратом).

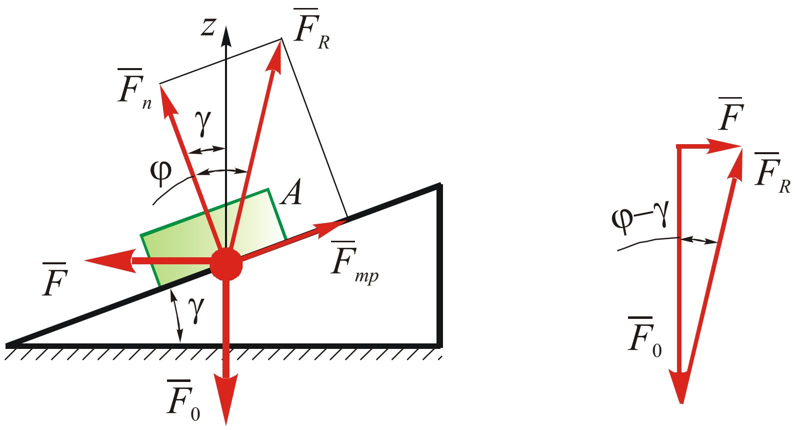
Якщо гайка рухається у напрямку сили F_0 (рис. 11.14), отримаємо

$$F = F_0 \mathrm{tg}(\varphi - \gamma). \tag{11.19}$$

Якщо $\gamma = \varphi \Rightarrow F = 0$, тобто гайка рухається рівномірно під дією сили F_0 (моменту до гайки прикладати не потрібно).

Якщо $\gamma > \varphi$ – маємо прискорений рух під дією F_0.

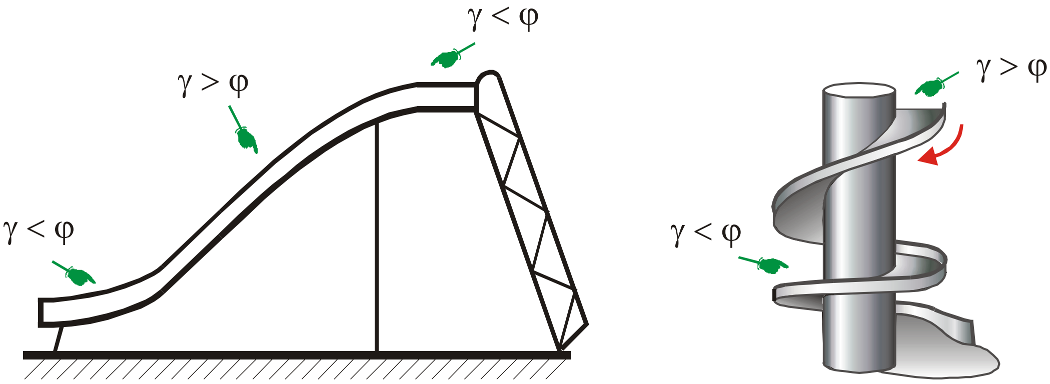
Якщо $\gamma < \varphi$ – маємо *умову самогальмування.* За цієї умови без дії моменту $M = F \cdot r$ рух гайки неможливий.



а) б)

Рис. 11.13 Гвинтова пара: а – розгортка витка різьби; б – план сил

Прикладами означених вище випадків можуть слугувати дитяча гірка (рис. 11.15 а), сковзало для транспортування вантажу з поверху на поверх (рис. 7.15 б) і т.п.



а) б)

Рис. 11.15 Приклади використання на практиці умов самогальмування: а – дитяча гірка; б – сковзало

Визначимо силу тертя в різьбі. Згідно з рис. 11.13:

$$F_{тр} = F_R \sin\varphi. \tag{11.20}$$

Із плану сил

$$F_R = \frac{F}{\sin(\varphi + \gamma)}.$$

Тоді

$$F_{mp} = F\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi+\gamma)}. \qquad (11.21)$$

Після тригонометричних перетворень:

$$F_{mp} = F\frac{\mathrm{tg}\varphi}{\sin\gamma + \mathrm{tg}\varphi\cos\gamma} = F\frac{f}{\sin\gamma + f\cos\gamma}. \qquad (11.22)$$

Рівняння (11.22) можна використовувати для прямокутної різьби.

Цим же рівнянням можна скористатися для визначення сили тертя в трикутній різьбі, якщо замість коефіцієнта тертя f підставляти зведений коефіцієнт тертя f' для клинчастого повзуна з кутом $2(90-\alpha/2)$ при вершині (рис. 11.16):

$$f' = \frac{f}{\sin\left(90-\dfrac{\alpha}{2}\right)} = \frac{f}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}. \qquad (11.23)$$

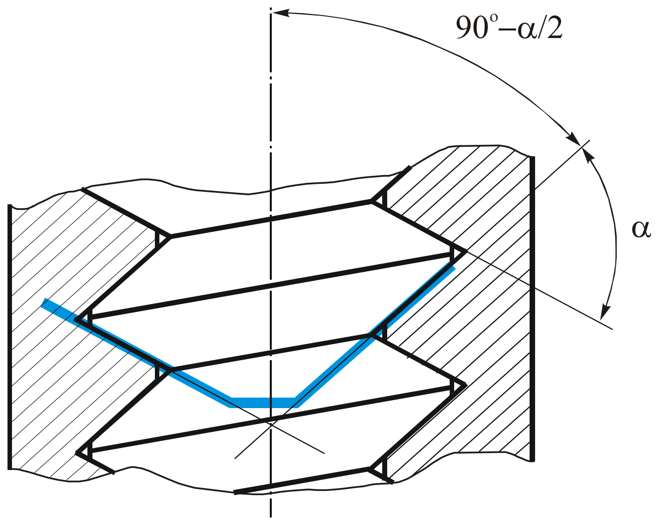


Рис. 11.12 Трикутна різьба

Тоді

$$F_{mp} = F\frac{f'}{\sin\gamma + f'\cos\gamma} \qquad (11.24)$$

Тут зведений коефіцієнт тертя f' визначається за формулою (11.23).

11.2.3.5. Тертя в кінематичних парах з гнучкою ланкою

Цю задачу вперше розв’язав Л. Ейлер.

Розглянемо гнучке тіло – пас, перекинутий з натягом через шків (рис. 11.17). Щоб змістити пас відносно шківа, потрібно, щоб сили натягу в його гілках підлягали умові $F_2 > F_1$.

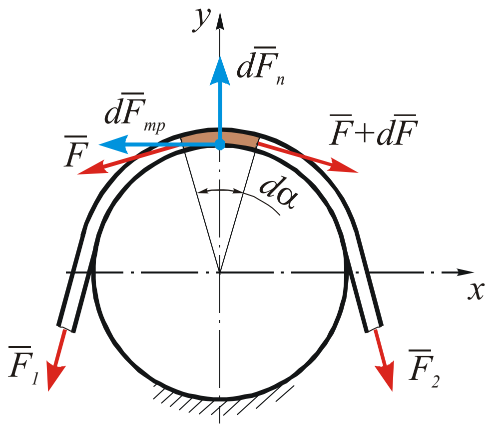


Рис. 11.12 Схема навантаження паса

Виділимо елемент паса в межах кута $d\alpha$. Умови його рівноваги в проекціях на осі:

$$\sum Y = dF_n - \left(F + F + dF\right)\sin\frac{d\alpha}{2} = 0;$$

$$\sum X = -dF_{тр} - F\cos\frac{d\alpha}{2} + \left(F + dF\right)\cos\frac{d\alpha}{2} = 0.$$

З першого рівняння можна записати:

$$dF_n \cong Fd\alpha\,, \tag{11.25}$$

а з другого

$$dF_{тр} \cong dF\,. \tag{11.26}$$

Згідно з законом Амонтона-Кулона

$$dF_{тр} = f'dF_n = f'Fd\alpha\,;$$

або

$$\frac{dF_{тр}}{F} = f'd\alpha\,. \tag{11.27}$$

Враховуючи (11.26), інтегруємо вираз (11.27) у визначених межах:

$$\int_{F_1}^{F_2} \frac{dF}{F} = \int_0^{\alpha} f' d\alpha .$$

Отримаємо;

$$\ln\left(\frac{F_2}{F_1}\right) = f'\alpha \text{, або } \frac{F_2}{F_1} = e^{f'\alpha} . \qquad (11.28)$$

Рівняння (11.28) називається *рівнянням Ейлера для зусиль в пасах*.

Для повного кута обхвату α можна записати

$$F = F_2 - F_1 = F_{тр} .$$

Тоді сила тертя між пасом і шківом

$$F_{тр} = F_1\left(e^{f'\alpha} - 1\right). \qquad (11.29)$$

Тема 11.3. РІДИННЕ ТЕРТЯ

Рідинним називається тертя за наявності на поверхні тіл що труться введеного мастильного матеріалу будь-якого типу.

Призначення змащення:

- зменшення коефіцієнту тертя;
- відведення тепла;
- захист від корозії
- демпфірування динамічних навантажень.

Види мастил:

- тверде;
- рідке;
- газове;
- консистентне;
- граничне.

Розглянемо основні характеристики різних типів мастил.

11.3.1. Тверде мастило

Тут розділення тіл, що труться, виконується з допомогою твердого мастильного матеріалу. Зазвичай це пилоподібний графіт. Особливих характеристик це мастило не має.

11.3.2. Рідке мастило

Це натуральні і синтетичні масла (оливи), вода.

Розглянемо основні характеристики рідких мастил:

а) *В'язкість динамічна* (вимірюється в *пуазах*) і *кінематична* (вимірюється в *градусах Енглера* $°E$).

В техніці частіше користуються кінематичною в'язкістю, яку визначають за швидкістю витікання мастила через калібрований отвір діаметром близько 2,8 мм. В'язкість залежить від температури: $°E_{100}$ – кінематична в'язкість при 100ºC; $°E_{50}$ – при 50ºC і т.д.

Кінематичну в'язкість визначають за спеціальними таблицями.

б) *Липучість.*

Це здатність мастила змочувати поверхню, тобто утворювати адсорбційний шар на поверхнях тіл, що труться.

Мабуть кожному відомо, що вода змочує поверхню гірше, ніж олива, а ртуть – набагато гірше, ніж вода (рис. 11.18).

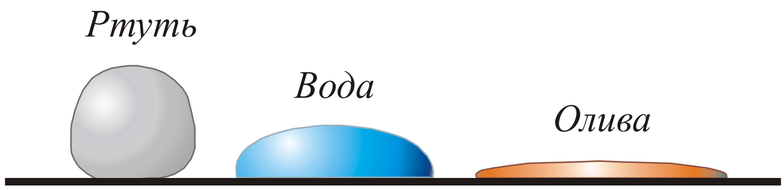


Рис. 7.18 Приклади змочування поверхні рідиною

в) *Температура спалаху парів мастила.*

За деякої температури над поверхнею мастила з'являється полум'я. Для машинних олив температура спалаху парів становить приблизно 250...300ºC. Є синтетичні мастила з температурою спалаху парів більш ніж 600ºC.

г) *Температура застигання.*

При зниженні температури в'язкість мастила збільшується і при деякій критичній температурі воно втрачає свої властивості – застигає .Автомобільний двигун перед запуском обов'язково прогрівають до певної температури, щоб мастило набуло потрібної в'язкості.

д) *Кислотостійкість.*

Є й інші специфічні властивості, про які можна прочитати у відповідній довідковій літературі.

11.3.3. Консистентне мастило

Його ще називають густим або пластичним. До даного типу мастил відноситься солідол жировий та синтетичний, ЦИАТИМ різних марок, ЛИТОЛ. До речі, одним з найкращих консистентних мастил є звичайний смалець.

Розглянемо основні характеристики консистентних мастил.

а) *Пенетрація***,** що з англійської мови перекладається як *проникнення.*

На горизонтальну поверхню наносять шар мастила і кладуть на нього калібрований конус (рис. 11.19). За глибиною його проникнення в мастильний шар судять про в'язкість мастила.

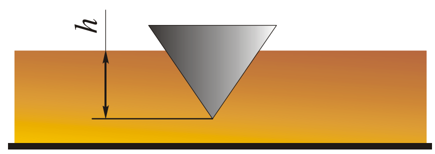


Рис. 7.19 Схема випробувань

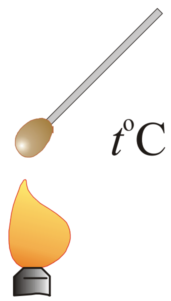


Рис. 7.20 Схема випробувань

б) *Температура краплепадіння.*

На паличку беруть невелику кількість мастила (рис. 7.20) і нагрівають. Температура, за якої впала крапля, і є температурою краплепадіння.

в) *Водостійкість.*

Мастило має бути нерозчинним у воді.

7.3.4. Газове мастило

Функцію мастила тут виконує газ: повітря, азот, інертні гази. Такий вид змащення широко застосовують в кінематичних парах точних приладів.

7.3.5. Граничне мастило

Якщо товщина мастильного шару менша 0,0001 мм, то властивості мастила вже відрізняються від об'ємних. Тому тертя і знос таких тіл визначається властивостями контактних поверхонь і властивостями мастильного шару, відмінними від об'ємних.

На рис. 11.21 зображений розріз зони контакту двох тіл з надтонким введеним мастильним шаром.

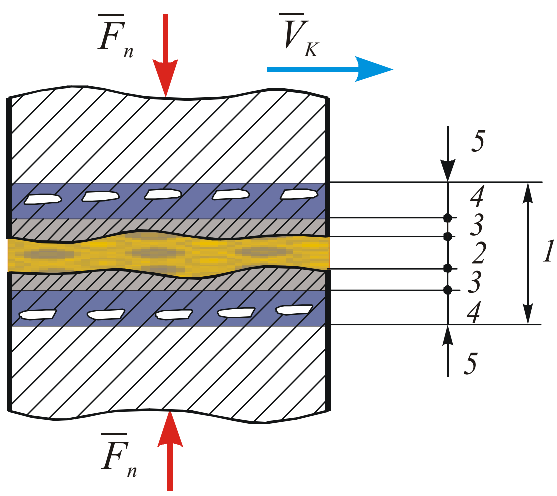


Рис. 11.21 Структура третього тіла

Проміжний шар 1 називається *третім тілом* між основними матеріалами фрикційної пари. Він складається з адсорбційного шару мастила 2, плівки оксидів 3, дефектного шару основного матеріалу 4.

Розрізнюють також:

а) *гідростатичне* та *газостатичне* змащення, коли рідина або газ підводиться під зовнішнім тиском;

б) *гідродинамічне* та *газодинамічне* змащення, коли розділення тіл, що утворюють фрикційну пару, здійснюється за рахунок тиску, який самогенерується в шарі мастила при відносному русі цих тіл

в) *еластогідродинамічне* змащення, коли характеристики тертя і товщина мастильного шару між поверхнями контактних тіл визначаються пружними властивостями, повзучістю, релаксацією матеріалу.

Лекція №24

11.3.6. Тертя ковзання змащених тіл

Основоположником гідродинамічної теорії змащених тіл є М.П. Петров, який в 1883 році опублікував основні її положення.

Рідинне тертя можна розглядати як в'язкий зсув між шарами мастила, оскільки безпосередній контакт між тілами, що труться, відсутній.

Коефіцієнт рідинного тертя f залежить від швидкості відносного руху шарів мастила V, від сили нормального тиску F_n і коефіцієнта в'язкості мастила μ:

$$f = f\left(V, F_n, \mu\right). \tag{11.30}$$

Тут μ — *динамічний коефіцієнт в'язкості*, Н·с/м^2.

М.П. Петров сформулював такі умови для рідинного тертя:

а) змащувальна рідина утримується в зазорі;
б) в шарі мастила має виникати внутрішній тиск, який урівноважує зовнішню силу;
в) змащувальна рідина повністю розділяє поверхні, що труться;
г) товщина мастильного шару повинна бути не меншою мінімальної границі, яка визначається виступами шорсткості поверхонь, що труться.

Для виконання першої умови необхідно, щоб сили зчеплення рідини з поверхнею, що треться, були більшими від сил зчеплення між шарами цієї рідини.

Для виконання другої умови необхідно, щоб в зазор між поверхнями, що труться, мимовільно нагніталась мастильна рідина, і між цими поверхнями був забезпечений *клиновий зазор*. При ковзанні тіла по поверхні рідини саме завдяки клиновому ефекту воно спливає над нею (рис. 11.22). Для цапфи 1, що лежить у підшипнику 2 (рис. 11.23), виникнення масляного клину 3 пов'язане з різницею діаметрів: діаметр підшипника більший від діаметра цапфи. При обертанні цапфи у клиновий зазор нагнітається мастило. В мастильному шарі виникає тиск, який урівноважує зовнішнє навантаження, і вал спливає над мастильним шаром. При великих обертах вісь цапфи прагне збігтися з віссю підшипника.

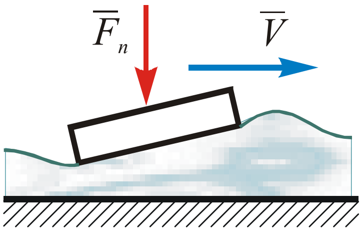


Рис. 11.22 Схема утворення масляного клину

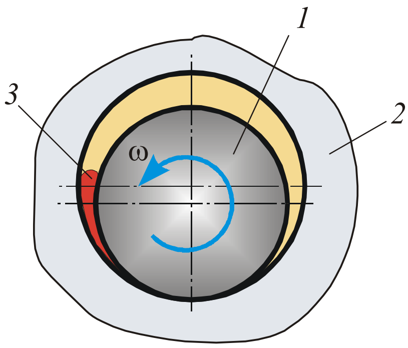


Рис. 11.23 Масляний клин у шарнірі

Визначимо коефіцієнт рідинного тертя для цапфи.

Ньютон експериментальним шляхом отримав формулу для визначення сили, яка необхідна для зміщення одного шару рідини паралельно іншому. Ця сила називається *силою в'язкого зсуву*:

$$F = \mu S \frac{dV}{dh}. \tag{11.31}$$

Тут $\frac{dV}{dh}$ – градієнт швидкості (характеризує зміну швидкості по висоті шару рідини (рис. 11.24)); S – площа поверхні ковзання; μ – динамічний коефіцієнт в'язкості.

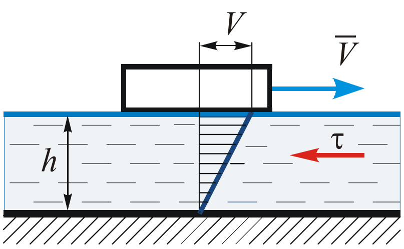


Рис. 11.24 Градієнт швидкості по висоті шару рідини

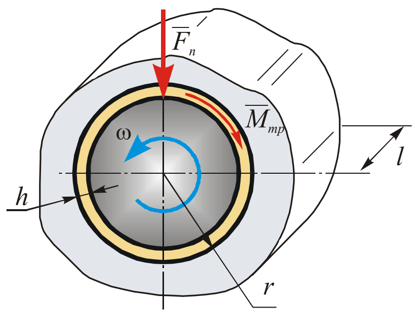


Рис. 11.25 Мастильний шар у шарнірі

Дотичні напруження при в'язкому зсуві:

$$\tau = \frac{F}{S} = \mu \frac{dV}{dh}, \qquad (11.32)$$

а, оскільки залежність швидкості V від висоти h лінійна (див. рис. 11.24), то:

$$\tau = \mu \frac{V}{h}. \qquad (11.33)$$

Момент тертя в підшипнику (див. рис. 11.25):

$$M_{тр} = F \cdot r = \mu \frac{V}{h} \cdot r \cdot S = \mu \frac{V}{h} 2\pi r^2 l = \frac{2\pi rn}{60} \frac{\mu}{h} 2\pi r^2 l = \frac{4\pi^2 r^3 nl}{60h} \mu. \qquad (11.34)$$

Тут n – швидкість обертання цапфи.

З іншого боку:

$$M_{тр} = F_n rf = 2\pi rlp \cdot rf. \qquad (11.35)$$

Тут p – тиск в рідині.

Прирівнюючи праві частини виразів (11.34) і (11.35), отримаємо формулу для визначення коефіцієнта рідинного тертя в підшипнику:

$$f = \frac{\pi^2 r}{30h} \cdot \frac{\mu n}{p}. \qquad (11.35)$$

Перший множник в цьому виразі характеризує геометричні розміри, а другий – режим тертя. Діаграма, яка описує залежність коефіцієнта рідинного тертя від режиму (умов) тертя, показана на рис 11.26. Виділена зона вказує діапазон, в якому реалізуються найоптимальніші умови тертя в підшипнику.

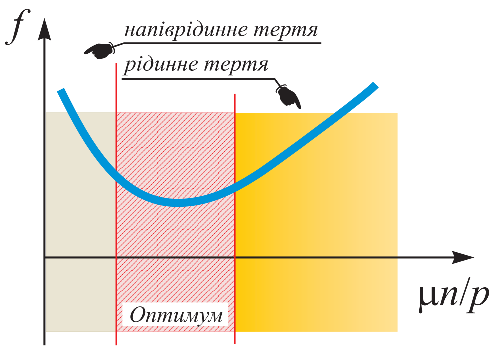


Рис. 11.26 Залежність коефіцієнта рідинного тертя від режиму тертя

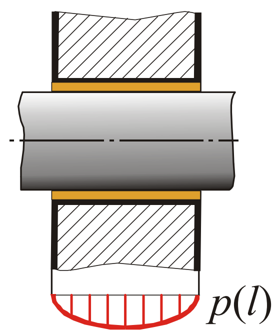


Рис. 11.27 Закон розподілу тиску в мастильному шарі по довжині цапфи

Ці викладки справедливі для довгих цапф. Для коротких, внаслідок витікання мастила через торці, картина тертя буде іншою. Закон розподілу тиску в мастильному шарі по довжині цапфи для цього випадку показаний на рис. 11. 27.

Для виконання третьої і четвертої вимог потрібно забезпечити таку обробку поверхонь, що ковзають, щоб звести до мінімуму шорсткість поверхонь цапфи і підшипника, не допускати значних деформацій цапфи, які б приводили до її перекосів у підшипнику, максимально очищати мастило від сторонніх твердих домішок.

Тема 11.4. ЗНОШУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ КІНЕМАТИЧНИХ ПАР

В процесі експлуатації механізмів і машин обов'язково має місце зношування елементів кінематичних пар. Це шкідливе явище, оскільки воно зменшує міцність і жорсткість деталей, знижує точність механізму, спотворює форму поверхні.

11.4.1. Види зносу

В машинобудуванні розглядають такі основні види зносу:

- *механічний знос* як результат механічного впливу;
- *корозійно-механічний знос*, коли механічний вплив супроводжується хімічною або електричною взаємодією матеріалу тіл, що труться, з середовищем;
- *абразивний знос* як результат різання або дряпання поверхні твердими частками;
- *ерозійний знос* як результат впливу потоку рідини або газу;
- *втомний знос*, пов'язаний з викришуванням поверхні при циклічних навантаженнях поверхневого шару (характерний для вищих кінематичних пар);
- *знос при заїданні* як результат схоплювання, виривання матеріалу і переносу його з однієї поверхні на іншу (характерний для високих питомих тисків і швидкостей ковзання в зоні контакту, наприклад в передачі гвинт-гайка, черв'ячній, гіпоїдній передачі, і т.п.)

Фізична модель зносу така (рис. 11.28).

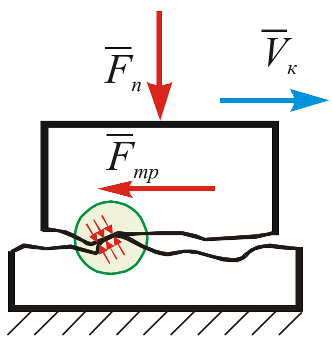


Рис. 11.28 Структура третього тіла

При ковзанні перед мікронерівністю виникає валик деформованого матеріалу, в якому виникають стисні напруження. Після проходження мікронерівності в цій області за рахунок сил тертя матеріал розтягується. Тобто в поверхневому шарі діють повторно-змінні напруження. Матеріал втомлюється, в ньому накопичуються пошкодження, які й приводять до відділення часточок матеріалу.

11.4.2. Стадії зношування

Є дві стадії зношування:

- перша стадія – *знос під час приробляння*;
- друга стадія – *нормальний* або *експлуатаційний знос*.

На стадії приробляння вихідна шорсткість поверхні, набута при виготовленні деталі, змінюється, і до початку другої стадії утворюється деяка нова рівноважна шорсткість, яка в подальшому вже практично не міняється. Причому, на стадії приробляння шорсткість може як зменшуватись так і збільшуватись. Наприклад, приробляння відполірованої деталі пов'язане зі збільшенням її шорсткості до оптимальної.

Щоб зменшити час приробляння, слід назначати таку технологію обробки деталі, яка б забезпечувала шорсткість, найближчу до рівноважної.

На рис. 11.29 показаний графік зміни параметру шорсткості деталі – середнього арифметичного відхилення профілю *Ra*, мм, – від часу експлуатації деталі.

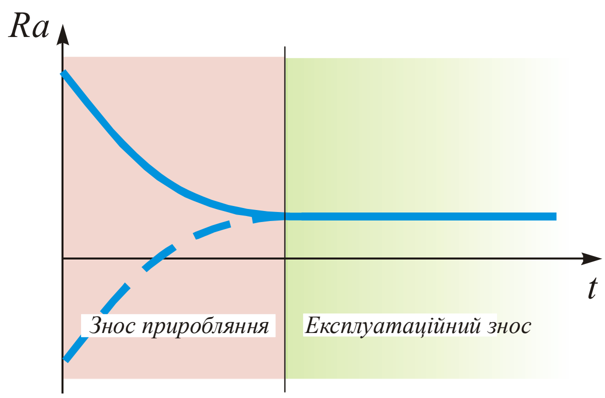


Рис. 11.29 Графік зміни параметру шорсткості деталі від часу експлуатації деталі

11.4.3. Кількісна оцінка зносу

Результат зношування, виміряний в одиницях довжини, об'єму або ваги, називається *зносом*.

Граничний знос – це знос, який відповідає граничному стану деталі.

Допустимий знос – це знос, за якого зберігається працездатність деталі.

Графічне зображення розподілу значень зносу по поверхні називають *епюрою зносу*.

Швидкість зношування:

$$\gamma = \frac{d\delta}{dt} = kp^m V_к^n . \tag{11.36}$$

Тут δ — товщина шару зруйнованого матеріалу; p — питомий тиск в досліджуваній точці поверхні; $V_к$ — швидкість ковзання; k — коефіцієнт зносу (чисельно дорівнює γ при $p = V_к = 1$); $m = 1 \ldots 3$ – коефіцієнт, який залежить від характеру деформації в зоні контакту: пружна, пластична або має місце мікрорізання; n – коефіцієнт, який залежить від виду зносу.

Для прироблених пар $m = n = 1$. Тоді

$$\gamma = kpV_к . \tag{11.37}$$

Вираз $pV_к$ називають потужністю тертя.

Інтенсивність зношування:

$$\gamma = \frac{d\delta}{ds}\frac{ds}{dt} = \gamma_s V_к . \tag{11.38}$$

$\gamma_S = \dfrac{d\delta}{ds}$ – знос, який припадає на одиницю шляху тертя, $\dfrac{\text{мм}}{\text{км}}$.

Опір матеріалу зносу називається зносостійкістю.

На зносостійкість впливає твердість матеріалів, їх пружні властивості, режим роботи (швидкість ковзання $V_к$, тиск на поверхні контакту p, температура t^o), зовнішні умови (змащення, навколишнє середовище), конструктивні умови.

За величиною γ_S розрізняють 3 класи матеріалів:

- $\gamma_S = 10^{-12} \ldots 10^{-7} \dfrac{\text{мм}}{\text{км}}$ – матеріал з високою зносостійкістю при пружній деформації;
- $\gamma_S = 10^{-7} \ldots 10^{-4} \dfrac{\text{мм}}{\text{км}}$ – матеріал з середньою зносостійкістю при пружно-пластичній деформації;
- $\gamma_S = 10^{-4} \ldots 10^{-3} \dfrac{\text{мм}}{\text{км}}$ – матеріал з низькою зносостійкістю при мікро різанні.

Тема 7.5. ВТРАТИ ПОТУЖНОСТІ НА ТЕРТЯ. МЕХАНІЧНИЙ КОЕФІЦІЄНТ КОРИСНОЇ ДІЇ (ККД)

Енергія, що підводиться до вхідної ланки в усталеному режимі, витрачається на виконання корисної роботи та на подолання сил опору середовища і сил тертя в кінематичних парах.

Механічним коефіцієнтом корисної дії називається відношення

$$\eta = \frac{A_{к.о.}}{A_p}. \tag{11.39}$$

$A_{к.о.}$ – робота сил корисного опору; $A_р$ – робота рушійних сил.

К.к.д. можна виразити через відповідні потужності, усереднені за цикл:

$$\eta = \frac{P_{к.о.}}{P_p}. \tag{11.40}$$

Відношення роботи сил тертя до роботи рушійних сил називається *коефіцієнтом втрат*

$$\psi = \frac{A_m}{A_p}. \tag{11.41}$$

Між к.к.д. і коефіцієнтом втрат існує такий зв’язок:

$$\psi = 1 - \eta. \tag{11.42}$$

Якщо з механізму, що знаходиться в усталеному русі, зняте корисне навантаження (режим холостого ходу), то сумарна робота

$$A_\Sigma = A_{к.о.} + A_m = A_m.$$

Тобто вся робота йде на подолання тертя. При цьому $\eta = 0$, а $\psi = 1$.

Розглянемо, як визначається ККД для різних видів з’єднання механізмів в машинах:

а) **Послідовне з’єднання** (рис. 11.30).

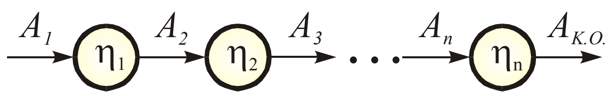


Рис. 11.30 Послідовне з’єднання механізмів в машині

Припустимо, що к.к.д. механізмів відомі. Визначимо к.к.д. машини. Для першого механізму A_1 – робота рушійних сил. Робота рушійних сил для другого механізму (вона ж, згідно зі схемою, є корисною роботою першого механізму) $A_2 = A_1\eta_1$; для 3-го – $A_3 = A_2\eta_2 = A_1\eta_1\eta_2$. Для n-го механізму:

$$A_n = A_1\left(\eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \ldots \cdot \eta_{n-1}\right).$$

Розглядаючи n-й механізм як останній в ланцюгу, знайдемо корисну роботу всієї машини:

$$A_{к.о.} = A_1\left(\eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \ldots \cdot \eta_n\right).$$

Сумарний к.к.д.

$$\eta = \frac{A_{к.о.}}{A_1} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \ldots \cdot \eta_n . \tag{11.43}$$

б) **Паралельне з'єднання** (рис. 11.31).

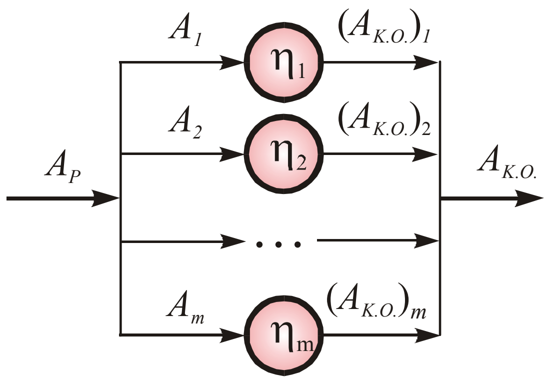


Рис. 11.31 Паралельне з'єднання механізмів в машині

Тут кожний i-й механізм виконує корисну роботу:

$$\left(A_{к.о.}\right)_i = A_i \eta_i .$$

В той же час

$$A_p = \sum_{i=1}^{n} A_i ,$$

$$A_{к.о.} = \sum_{i=1}^{n}\left(A_{к.о.}\right)_i .$$

Корисна робота усієї машини:

$$\eta = \frac{A_{к.о.}}{A_p} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(A_{к.о.}\right)_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \eta_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} . \tag{11.44}$$

Щоб визначити в цьому випадку к.к.д., потрібно знати, яким чином робота рушійних сил A_p розподіляється між механізмами. Тобто треба ввести деякий коефіцієнт, величина якого має бути відомою:

$$\Omega_i = \frac{A_i}{A_p}. \qquad (11.45)$$

Тоді

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Omega_i A_p \eta_i}{A_p}. \qquad (11.46)$$

Отже сумарний к.к.д. для таких кінематичних ланцюгів обчислюється за формулою:

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} \Omega_i \eta_i . \qquad (11.47)$$

в) **Змішане з'єднання** (рис. 11.32)

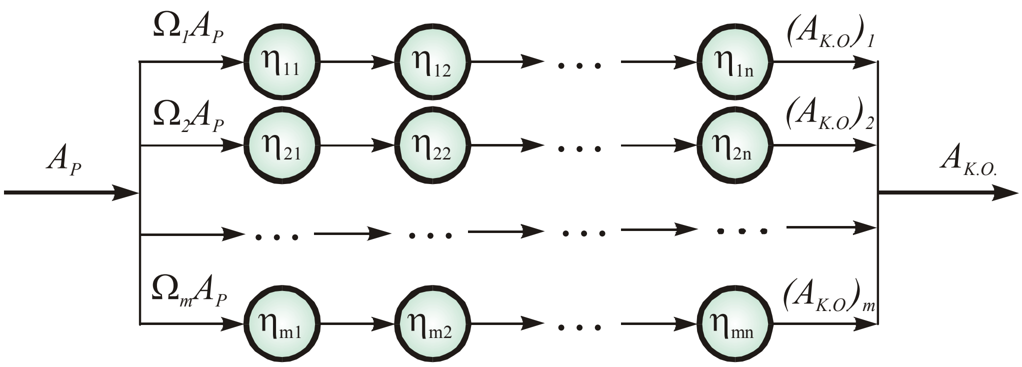


Рис. 11.31 Змішане з'єднання механізмів в машині

Тут для кожної паралельної гілки

$$\left(A_{к.р.}\right)_i = A_i \cdot \eta_{\Sigma i}, \qquad (i = 1 \dots m),$$

де $\eta_{\Sigma i} = \eta_{i1} \cdot \eta_{i2} \cdot \ldots \cdot \eta_{in}$.

Для всієї машини

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^{m} \left(A_{к.р.}\right)_i}{A_p} = \frac{\sum_{i=1}^{m} A_i \eta_{\Sigma i}}{A_p} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \Omega_i A_p \left(\eta_{i1} \cdot \eta_{i2} \cdot \ldots \cdot \eta_{in}\right)}{A_p}. \qquad (11.48)$$

Отже к.к.д. для всієї машини

$$\eta = \sum_{i=1}^{m} \Omega_i \cdot \left(\eta_{i1} \cdot \eta_{i2} \cdot \ldots \cdot \eta_{in}\right). \qquad (11.49)$$

Лекція №25

Розділ 12. ВІБРАЦІЇ В МЕХАНІЗМАХ. ВІБРОЗАХИСТ

У високодинамічних сучасних машинах виникають механічні коливання. Джерелом цих коливань (вібрацій) є неврівноваженості мас рухомих ланок (перша група причин) і тертя в кінематичних парах (друга група причин).

Якщо вібрація не є складовою якого-небудь технологічного процесу, то вона завжди буде явищем шкідливим.

Боротьбу з вібрацією – *віброзахист* – проводять за такими напрямками.

1. *Зменшення віброактивності джерела*: зменшення динамічних реакцій шляхом зрівноважування рухомих мас для першої групи причин і використання спеціальних мастил для другої групи причин).
2. *Зміна конструкції об'єкту*. При цьому досягається:
   - зміна власних частот коливань елементів конструкцій, які пов'язані з їх геометрією, тобто усуваються резонансні явища;
   - збільшується розсіювання (*дисипація*) механічної енергії в об'єкті (*демпфірування коливань*). Це досягається підбором матеріалів з високими поглинаючими або розсіювальними властивостями (широка петля пружного гістерезису); *конструкційним демпфіруванням* (тертя в нерухомих з'єднаннях – шліцьових, різьбових, заклепкових і т.п., де присутні малі переміщення, на яких виконується робота).
3. *Динамічне гасіння коливань.* Вводиться в конструкцію *віброгасник*, який формує коливання, що знаходяться у протифазі до тих, які генеруються джерелом і, тим самим, урівноважує їх.
4. *Застосування поглиначів коливань – гасників* або *демпферів.*
5. *Віброізоляція*. Її дія зводиться до послаблення в'язей між джерелом і об'єктом. Але при цьому виникають деякі негативні явища, наприклад додаткові небажані переміщення об'єкту.

Тема 12.1. ДЕМПФІРУВАННЯ КОЛИВАНЬ

На рис. 12.1 і 12.2 зображені схеми гасників коливань, які широко застосовують у вимірювальних приладах. Вони мають забезпечити таку роботу приладу, щоб він чутливо реагував на малий сигнал. Але після зняття цього сигналу стрілка приладу має плавно повертатися в „нуль”. Не повинні також виникати самочинні коливання стрілки проти певної мітки на шкалі, яка відповідає виміряному сигналу.

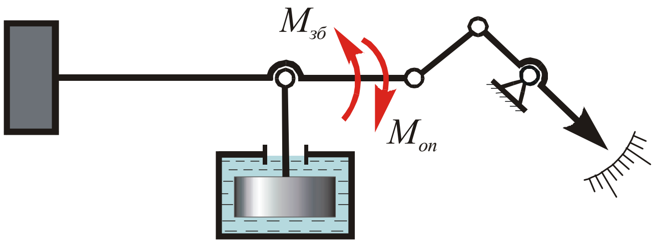


Рис. 12.1 Схема віброгасника

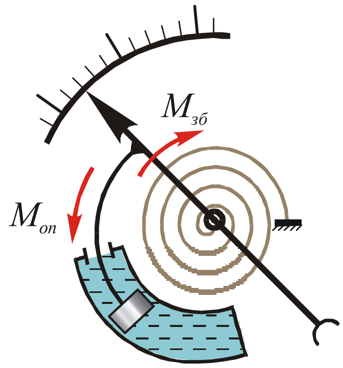


Рис. 12.2 Схема віброгасника

Тут $M_{зб}$ – момент збудження; $M_{оп}$ – момент опору.

Розглянемо приклад розрахунку характеристик гасника з обертальними масами.

Опір середовища гасника приймають пропорційним швидкості (для рідинних гасників) або квадрату швидкості (для повітряних гасників) об’єкта:

Запишемо рівняння руху об’єкту з рідинним гасником:

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2}+c\frac{d\varphi}{dt}+k\varphi+M_{оп}=M_{зб}\,. \qquad (12.1)$$

Тут J – момент інерції рухомих мас; $C\dfrac{d\varphi}{dt}$ – момент опору демпфера.

Диференціальне рівняння (12.1) описує коливальний процес в системі.

Розглянемо такі умови руху:

1. Демпфер в системі відсутній; відсутні і сили опору $M_{оп}$. Після відхилення об’єкту (стрілки) момент збудження $M_{зб}$ був знятий. Тоді рівняння (12.1) набуває вигляду:

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2}+k\varphi=0\,. \qquad (11.2)$$

Ми отримали звичайне диференціальне рівняння вільних коливань механічної системи з однією ступінню вільності. Розв’язком цього рівняння є вираз

$$\varphi = \varphi_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{J}}t\right), \qquad (12.3)$$

де φ_0 є φ при $t=0$; $\sqrt{\frac{k}{J}} = \omega_0$ – колова частота. Період коливань $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$; частота $f = \frac{1}{T}$. Таким чином, ми маємо вільні коливання з періодом T і амплітудою φ_0 (див. рис. 12.3).

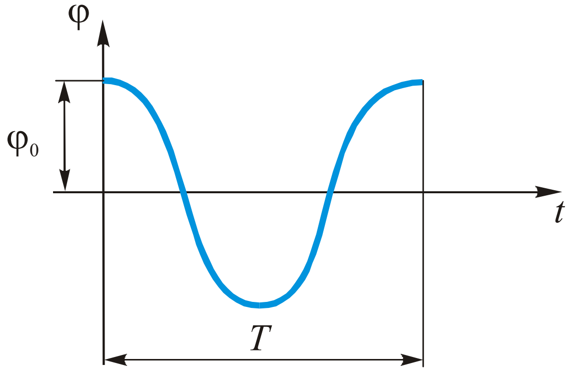


Рис. 12.3 Графік гармонійних коливань

2. Введемо в систему демпфер. Тоді рівняння (11.3) запишемо у вигляді:

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2} + c\frac{d\varphi}{dt} + k\varphi = 0. \qquad (11.4)$$

Позначимо

$$\beta = \frac{c}{2\sqrt{JK}}. \qquad (12.5)$$

Тут β — коефіцієнт демпфірування.

$$\beta\omega_0 = \frac{c}{2\sqrt{JK}}\omega_0 \quad \text{або} \quad \beta\omega_0 = \frac{c}{2\sqrt{J}\cdot\sqrt{K}}\cdot\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{J}}.$$

Звідси

$$c = 2\omega_0 J\beta. \qquad (12.6)$$

Отримаємо

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2}+2\omega_0\beta J\frac{d\varphi}{dt}+k\varphi=0. \qquad (12.7)$$

При $t=0$ $\varphi=\varphi_0$.

Розв'язком рівняння (12.7) є вираз:

$$\varphi=\varphi_0 e^{-\beta\omega_0 t}\left[\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\sin\left(\sqrt{1-\beta^2 t}\right)+\cos\left(\sqrt{1-\beta^2 t}\right)\right]. \qquad (12.8)$$

Проаналізуємо отриманий вираз. При $t\to\infty$ $\varphi\to 0$, тобто затухання відбудеться при $t\to\infty$ (рис. 12.4), що неприйнятно.

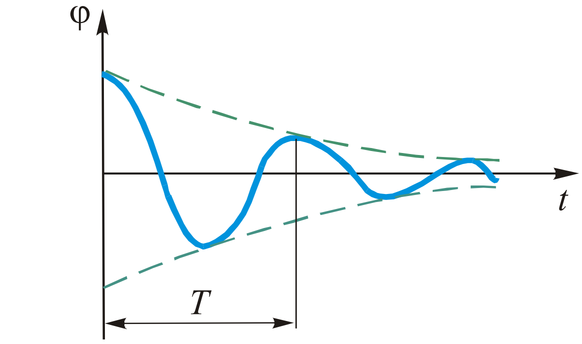


Рис. 12.4 Графік затухаючих коливань

Інтенсивність спадання амплітуди згідно (12.8) визначається величиною β (при $\beta=0$ отримаємо незатухаючі коливання (дивитись рівняння (12.7)).

На практиці задаються деяким допуском $\Delta\varphi$ (рис. 12.5).

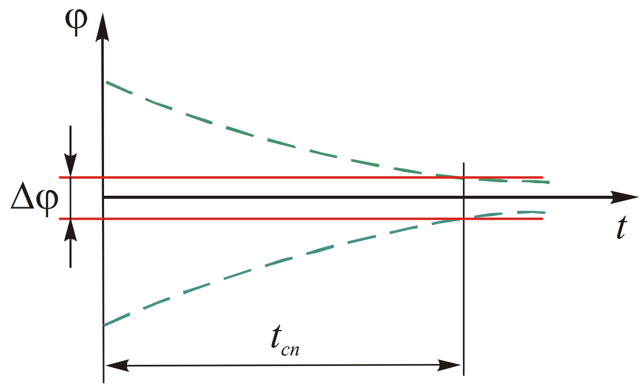


Рис. 12.4 Схема визначення допуску $\Delta\varphi$

При заданих параметрах β, J, k знаходять t_{cn} — час заспокоєння. В розрахунках, як правило, задається величиною $\beta=0,6\ldots0,8$.

Таким чином при розрахунках параметрів демпфера мають бути заданими (або підлягають визначенню) такі величини:

$$\beta,\ J,\ c,\ \lambda,\ t_{сп}\ .$$

Тут c – жорсткість пружини, якщо вона є в конструкції; $\lambda = \Delta\varphi / \varphi_0$ – допуск на відхилення.

Однією з відомих формул для визначення часу заспокоєння є *формула Арутюнова*:

$$t_{сп} = \frac{1}{\beta\omega_0}\ln\frac{1}{\lambda\sqrt{1-\beta^2}} = \sqrt{\frac{J}{k\beta^2}}\ln\frac{1}{\lambda\sqrt{1-\beta^2}}\ , \tag{12.9}$$

або з урахуванням, що $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$, а $\sqrt{\dfrac{k}{J}} = \omega_0$,

$$\frac{t_{сп}}{T} = \frac{\ln\dfrac{1}{\lambda\sqrt{1-\beta^2}}}{2\pi\beta}\ . \tag{12.10}$$

На рис. 12.6 зображений графік залежності (12.10) для допуску на відхилення $\lambda \approx 0{,}01$.

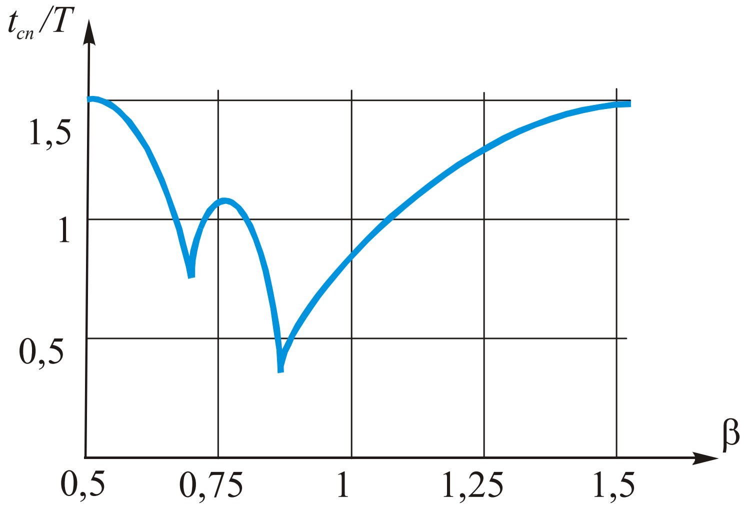


Рис. 12.6 Графік залежності (12.10) для допуску на відхилення $\lambda \approx 0{,}01$

Для пружинних демпферів можна скористатися *формулою Розумовського*. Згідно з цією формулою жорсткість пружини

$$c = \frac{2I}{t_y}\ln\lambda\ . \tag{12.11}$$

Тема 12.2. КОНСТРУКЦІЇ ГАСНИКІВ І АМОРТИЗАТОРІВ

12.2.1. Інерційні гасники

а) Коткові гасники (рис. 12.7).

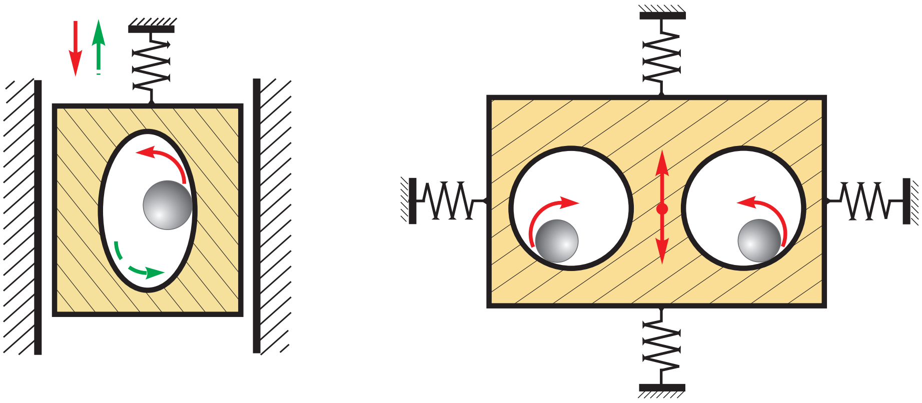
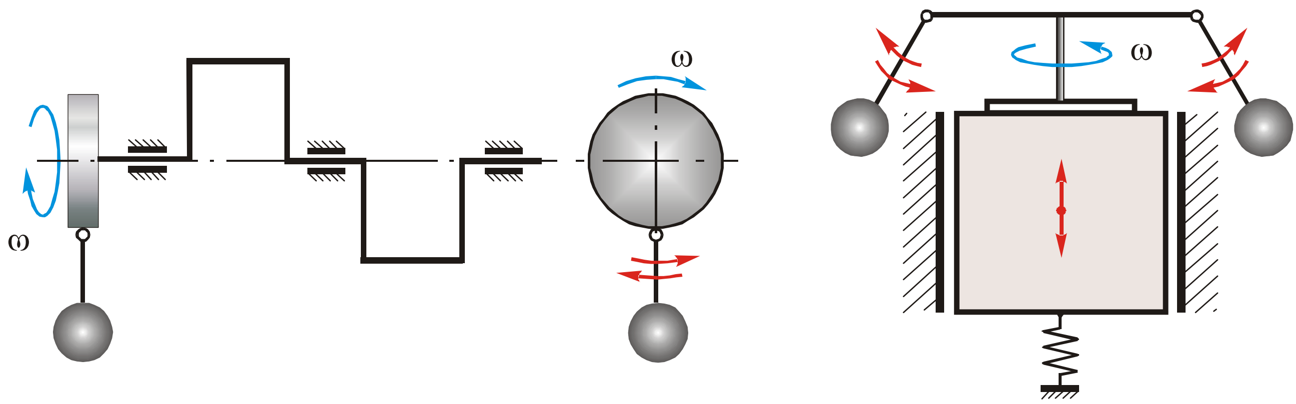


Рис. 12.6 Схеми коткових гасників

Форма отвору під коток має важливе значення. Так, якщо замість кола в перетині взяти витягнутий уздовж напрямку руху еліпс, то зростає роль вищих гармонік в спектрі реакцій гасника. Це є корисним у тих випадках, коли відповідні гармоніки присутні в коливальному процесі, який подавляється.

Конструкція гасника, представленого на правій схемі, на відміну від того, що зображений зліва, дозволяє обійтися без спрямовуючих, оскільки бічні сили у цьому випадку взаємно зрівноважуються.

б) Маятникові гасники (рис. 12.8).



а) б)

Рис. 12.8 Маятникові гасники: для гасіння крутильних (а) та поздовжніх (б) коливань

Тут наведені приклади гасників для придушення крутильних (рис. 12.8 а) і поздовжніх (рис. 12.8 б) коливань. Маятники знаходяться в полі дії відцентрових сил, пов'язаних з обертальним рухом об'єкта. Коливання швидкості обертання викликає і коливання величини і напрямку сил інерції, які, власне, і гасять небажані коливні процеси.

12.2.2. Повітряні демпфери

Демпфери такого типу використовують у вимірювальних приладах (рис. 12.9 і рис. 12.10).

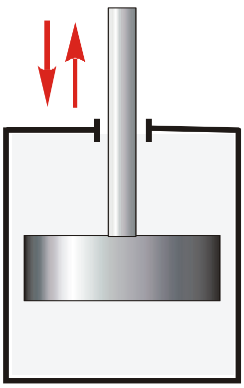


Рис. 12.9 Повітряний демпфер

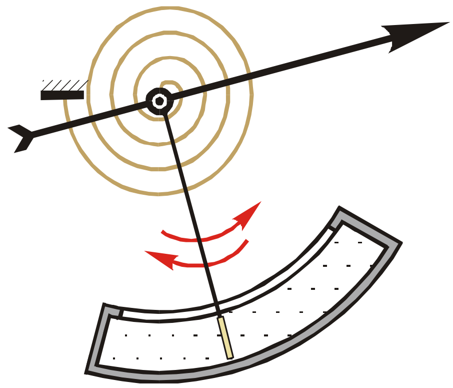


Рис. 12.10 Повітряний демпфер

12.2.3. Рідинні демпфери

На рис. 12.11 зображена конструкція демпфера, який містить регулювальний гвинт. За його допомогою змінюється величина опору перетіканню рідини по каналу і таким чином регулюється час заспокоювання.

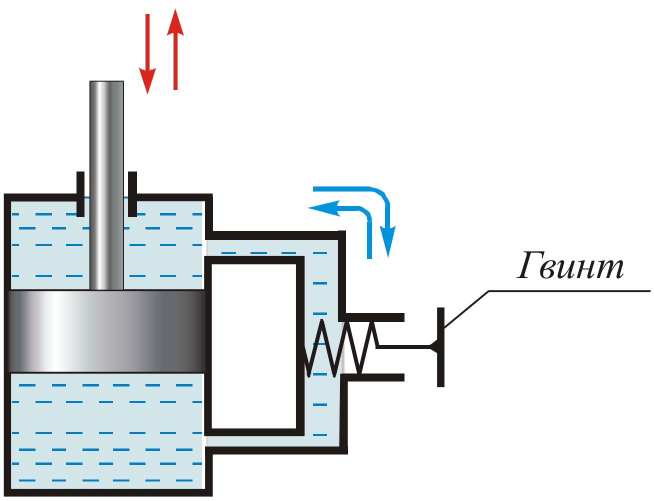


Рис. 12.11 Рідинний демпфер з регулювальним гвинтом

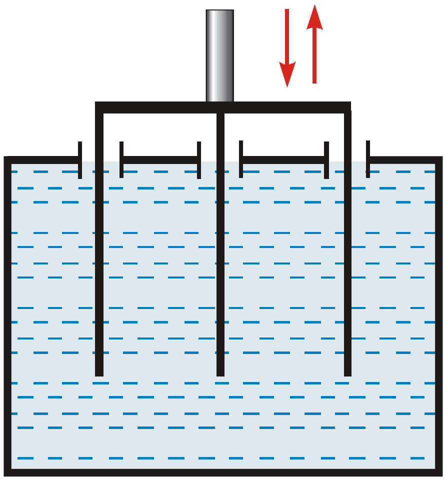


Рис. 12.12 Рідинний демпфер з пластинами

В конструкцій, зображеній на рис. 12.12, гасіння відбувається за рахунок збільшення сили опору рідини при занурюванні пластин (чим більша глибина занурення, тим більшою буде поверхня контакту пластин з рідиною, а значить збільшується сила опору).

На рис. 12.13 зображена схема рідинного демпфера для гасіння крутильних коливань.

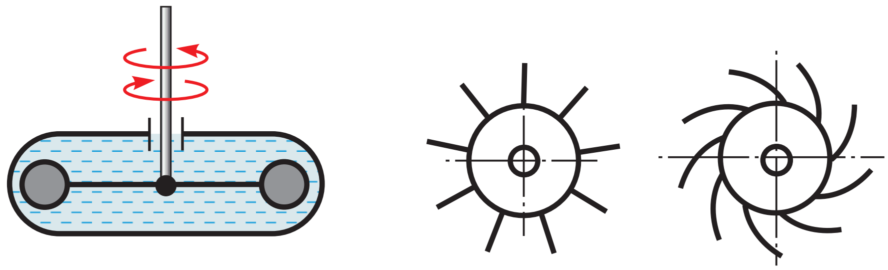


Рис. 12.13 Рідинний демпфер для гасіння крутильних коливань

Як видно з рисунка, змінюючи форму лопаток, можна регулювати силу опору переміщенню диска в рідині в залежності від напрямку його обертання в коливному процесі, а значить найоптимальніше підбирати необхідні параметри демпфера.

На рис. 12.14 зображена схема крапельного демпфера, який застосовується для заспокоєння рухомих об'єктів у дуже точних приладах, зокрема у фотопідсилювачах.

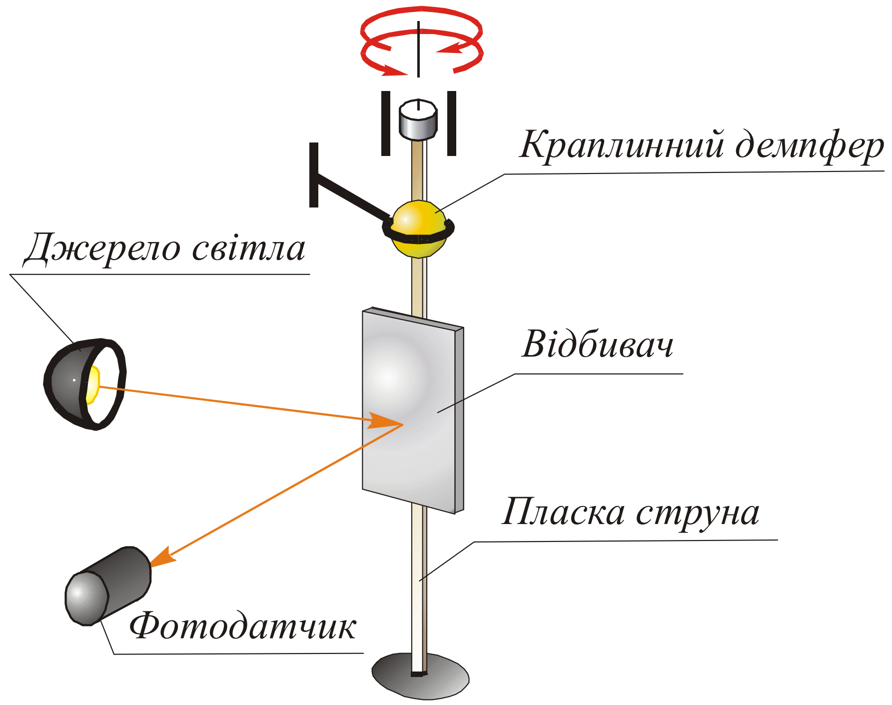


Рис. 12.14 Крапельний демпфер для гасіння крутильних коливань

12.2.4. Амортизатори

На відміну від демпферів, амортизатори призначені для гасіння великих швидкостей.

Амортизатори бувають гумові, пружинні (рис. 12.15), гумово-металічні, гумово-пружинні, пневматичні та ін.

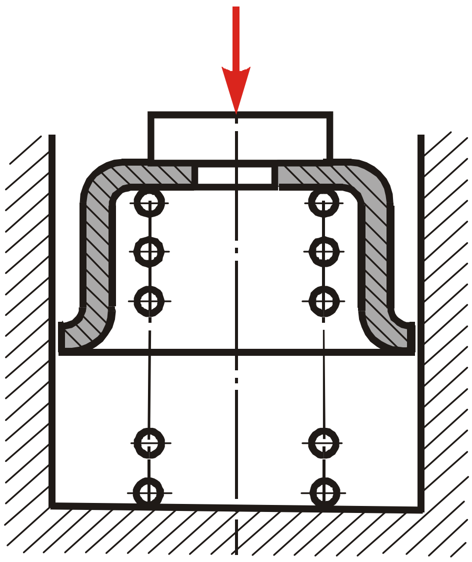


Рис. 12.15 Схема амортизатора

Література

1. *Артоболевский И.И.* Теория механизмов и машин: Учеб. для втузов.– 4-е изд., перераб. и доп.– М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.– 640 с.
2. Теория механизмов и механика машин / *Фролов К. В.*, *Попов С.А.*, *Мусатов А. и др.* – Учеб. для втузов: 3-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2001. – 496 с.: ил.
3. *Левитская О.Н.*, *Левитский Н.И.* Курс теории механизмов и машин: Учебн. Пособие для мех. спец. вузов. – 2-е изд., перераб и доп. – М.: Высш. шк., 1985. – 279 с.: ил.
4. *Попов С.А*. Курсовое проектирование по теории механизмов и механике машин: Учеб. пособие для машиностроит. спец. вузов / Под ред. К.В. Фролова. – М.: Высш. шк., 1986. – 295 с.: ил.
5. Профілювання циліндричного евольвентного зачеплення з використанням персональних ЕОМ. Методичні вказівки до курсового проекту з дисципліни «Теорія механізмів і машин» / Уклад.: О.П. Заховайко, Овсієнко О.Б., Протащук О.М., Грабовський А.П.. – К.: НТУУ «КПІ», 2000. – 40 с.
6. Теорія механізмів і машин/ А.С.Кореняко; Під ред. М.К.Афанасьєва.-К.: Вища шк. Головне вид-во, 1987.- 206с.

Додаткова література

1. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни „Теорія механізмів і машин” для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання / Уклад.: О.П.Заховайко, О.І. Дубинець. – К.: ІВЦ „Видавництво „Політехніка”, 2002. – 76 с.
2. Курсовое проектирование по теории механизмов и машин / Кореняко А.С. и др.- "Вища школа", 1970, 332 с.
3. Левитский Н.И. Теория механизмов и машин :Учебное пособие для вузов. – 2 – е изд. перераб. и доп. – М. :Наука. Гл. ред. физ. –мат. лит. ,1990. – 592 с.
4. Сборник задач по теории механизмов и машин / И.И. Артоболевский, Б.В. Эдельштейн, Главная редакция физико-математической литературы издательства "Наука", 1975. – 256 стр.
5. Курсове проектування з теорії механізмів і машин: учбовий посібник / Є.І.Крижанівський, Б.Д.Малько, В.М.Сенчікаш та ін.- Івано-Франківськ: 1996.- 357с.
6. Kinematic design of machines and mechanisms / Homer D. Eckhardt. – New York etc.: McGraw-Hill, 1998. – 621 p.
7. Forming of Involute Gearing: Instructions on term project hreparation on the discipline “Theory of Mechanisms and Machines” for international students of

engineering specialities / Уклад.: О.П. Заховайко. – К.: НТУУ «КПІ», 2007. – 48 с.
8. Theory of Mechanisms and Machines: Instructions on laboratory works procedure for international students of engineering specialities /Уклад.: О.П. Заховайко, О.І. Дубинець, Ю.М. Сидоренко. – К.:.НТУУ «КПІ», 2006. – 88 с.