

Лекція №3

Тема 2.4. Визначення моментів інерції відносно повернутих осей

Очевидним є те, що за повороту осей відносно початку координат осьові і відцентрові моменти фігури змінюються. Встановимо взаємозв'язок між моментами інерції фігури при повороті системи координат.

Розглянемо вихідну систему координатних осей Y і Z , у якій осьові і відцентрові моменти інерції фігури, зображеної на рис. 2.12,

$$I_y = \int_A z^2 dA; \quad I_z = \int_A y^2 dA; \quad I_{zy} = \int_A zy dA. \quad (2.21)$$

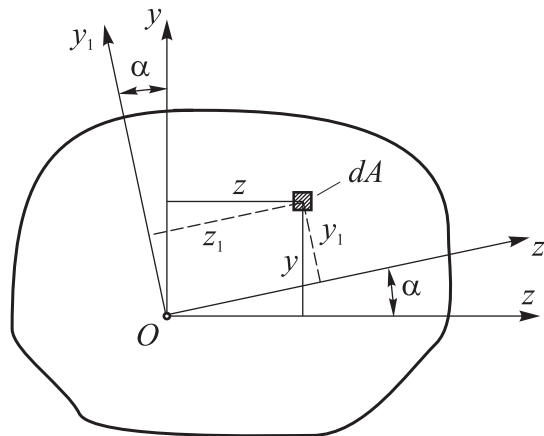


Рис. 2.12 Плоска фігура з повернутою системою координатних осей

Після повороту осей на кут α координати площадки dA у новій системі осей Y_1 і Z_1 дорівнюватимуть

$$z_1 = z \cos \alpha + y \sin \alpha; \quad y_1 = y \cos \alpha - z \sin \alpha.$$

Осьові і відцентрові моменти інерції відносно осей Y_1 і Z_1 складатимуть:

$$\begin{aligned} I_{z_1} &= \int_A y_1^2 dA = \int_A (y \cos \alpha - z \sin \alpha)^2 dA = \\ &= \cos^2 \alpha \int_A y^2 dA - 2 \cos \alpha \sin \alpha \int_A zy dA + \sin^2 \alpha \int_A z^2 dA; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{y_1} &= \int_A z_1^2 dA = \int_A (z \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dA = \\
 &= \cos^2 \alpha \int_A z^2 dA + 2 \cos \alpha \sin \alpha \int_A zy dA + \sin^2 \alpha \int_A y^2 dA ; \\
 I_{z_1 y_1} &= \int_A z_1 y_1 dA = \int_A (z \cos \alpha + y \sin \alpha)(y \cos \alpha - z \sin \alpha) dA = \\
 &= \left(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \right) \int_A zy dA + \sin \alpha \cos \alpha \left(\int_A y^2 dA - \int_A z^2 dA \right) .
 \end{aligned}$$

А з урахуванням (2.21) остаточно отримаємо

$$I_{z_1} = I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{zy} \sin 2\alpha; \quad (2.22)$$

$$I_{y_1} = I_z \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{zy} \sin 2\alpha;$$

$$I_{z_1 y_1} = I_{zy} \cos 2\alpha - \frac{1}{2} (I_y - I_z) \sin 2\alpha . \quad (2.23)$$

Примітка 2.6. Кут α вважається додатним за повороту осей проти годинникової стрілки.

Склавши вирази для осьових моментів (2.22), отримаємо

$$I_{z_1} + I_{y_1} = I_z + I_y = I_p . \quad (2.24)$$

Отже, сума осьових моментів інерції фігури за повороту системи координат не змінюється і дорівнює полярному моменту інерції цієї фігури відносно початку координат.

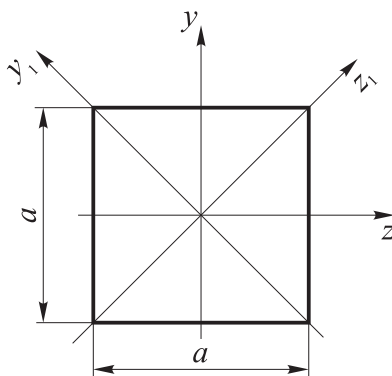


Рис. 2.13 Квадрат з повернутою системою осей

Приклад 2.8 Визначити осьові та відцентровий моменти інерції квадрата відносно координатних осей Y_1 і Z_1 , повернутих відносно вихідної системи осей Y і Z на 45° проти годинникової стрілки (рис. 2.13).

Моменти інерції квадрата відносно осей Y і Z знайдемо як для прямокутника (див. приклад 2.1):

– осьові моменти інерції

$$I_z = I_y = \frac{a^4}{12};$$

– відцентровий момент інерції $I_{yz} = 0$, оскільки осі Y і Z – це осі симетрії.

Відносно повернутих на 45° осей Y_1 і Z_1 осьові моменти інерції, згідно з формулами (2.22),

$$I_{y_1} = I_{z_1} = \frac{a^4}{12}.$$

Тобто маємо ті ж самі моменти інерції, що і для осей Y і Z .

Оскільки $I_z = I_y$, а $I_{yz} = 0$, згідно з (2.23) $I_{y_1 z_1} = 0$, що й зрозуміло, адже повернуті осі також є осями симетрії квадрата.

Тема 2.5. Головні осі інерції фігури

Якщо повернути осі Y і Z (рис. 2.12) на 90° , то моменти інерції відносно повернутих осей Y_1 і Z_1 , згідно з формулами (2.22) і (2.23), дорівнюватимуть

$$I_{y_1} = I_z; \quad I_{z_1} = I_y; \quad I_{z_1 y_1} = -I_{zy}.$$

Особливий інтерес становить третє співвідношення, згідно з яким за повороту осей на 90° відцентровий момент інерції змінює знак. Оскільки зміна моментів інерції в залежності від кута α відбувається неперервно, то існує таке проміжне положення осей, за якого відцентровий момент інерції дорівнюватиме нулю.

Осі, відносно яких відцентровий момент інерції дорівнює нулю, називаються *головними осями інерції* фігури.

Якщо при цьому початок координат збігається з центром ваги фігури, то маємо *головні центральні осі інерції*.

Позначатимемо ці осі буквами u і v .

Примітка 2.7. В подальшому віссю u позначатимемо ту головну вісь, що складатиме з віссю Z кут, менший 45° .

Вище відзначалося, що відцентровий момент інерції дорівнює нулю, якщо принаймні одна з осей координат є віссю симетрії. Звідси робимо висновок.

Якщо фігура симетрична, то її вісь симетрії і будь-яка інша вісь, їй перпендикулярна, утворюють систему головних осей інерції.

В загальному випадку плоска фігура має лише одну пару головних центральних осей інерції. Проте в окремих випадках таких пар осей може бути більше.

Приклад 2.9 Вказати положення головних центральних осей інерції геометричних фігур, зображених на рис. 2.14.

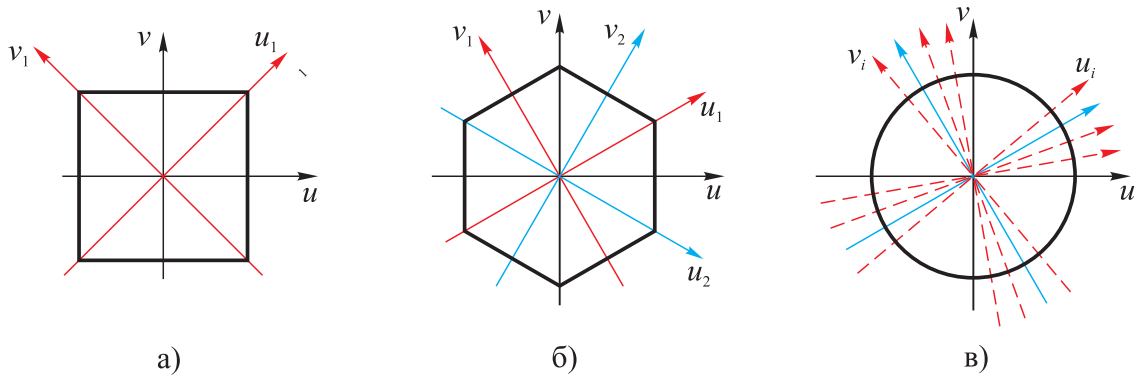


Рис. 2.14 Головні центральні осі інерції для симетричних фігур

У квадрата (рис. 2.14 а) дві пари осей симетрії: ті, що паралельні його сторонам, і ті, що проходять через діагоналі. Отже маємо дві пари головних центральних осей інерції. Це, до речі, було показано і у прикладі 2.8, коли обчислювались відцентрові моменти квадрата відносно його діагоналей.

У правильного шестикутника (рис. 2.14 б) – три пари головних центральних осей інерції, оскільки всі вони також є осями симетрії.

Для круга будь-які дві взаємно перпендикулярні центральні осі є головними центральними осями інерції.

Покажемо, що осьові моменти інерції відносно головних осей фігури набувають екстремальних значень. Для цього продиференціюємо одне з рівнянь (2.22) по α :

$$\begin{aligned} \frac{dI_{z_1}}{d\alpha} &= I_y \sin 2\alpha - I_z \sin 2\alpha - 2I_{zy} \cos 2\alpha = \\ &= -2(I_{zy} \cos 2\alpha - \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha) = -2I_{z_1 y_1}. \end{aligned}$$

Умовою екстремальності функції є рівність нулю її похідної. З отриманого виразу випливає, що похідна від осьового моменту по куту повороту α перетворюється в нуль, коли $I_{z_1 y_1} = 0$, тобто, коли осі є головними осями інерції.

Моменти інерції фігури відносно головних осей екстремальні за своїми значеннями: відносно однієї з цих осей момент інерції найбільший з усіх можливих його значень, які можна отримати при повороті системи координат, а відносно іншої — найменший.

Моменти інерції відносно головних осей фігури називаються *головними моментами інерції*, а якщо ці осі ще й центральні – то *головними центральними моментами інерції*.

Отже, головні осі – це ті осі, відносно яких моменти інерції мають максимальне або мінімальне значення, а відцентровий момент інерції дорівнює нулю.

Тема 2.6. Визначення положення головних осей інерції фігури та величини головних моментів інерції

Оскільки відцентровий момент інерції відносно головних осей дорівнює нулю, то, поклавши у формулі (2.23) $I_{z_1y_1} = I_{uv} = 0$, отримаємо:

$$I_{zy} \cos 2\alpha - \frac{1}{2}(I_y - I_z) \sin 2\alpha = 0. \quad (2.25)$$

Позначивши в цьому рівнянні $\alpha = \alpha_0$ – кут, що визначає положення головних осей відносно заданих осей Y і Z , отримаємо

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{zy}}{I_y - I_z}. \quad (2.26)$$

З цього виразу отримуємо два значення кутів α , які відрізняються на $\pi/2$. Ці кути і визначають положення головних осей u і v відносно вихідних Z і Y . Причому, менший за модулем із цих кутів не перевищує $\pi/4$. Ним ми й будемо в подальшому оперувати.

Кут α_0 – це кут, що за модулем не перевищує 45° , вказує напрямок головної осі інерції u відносно осі z . Додатний кут α_0 відкладаємо проти годинникової стрілки від осі z , а від’ємний – за годинниковою стрілкою.

Формули для визначення величин головних моментів інерції отримаємо на основі формул (2.22).

$$\begin{aligned} I_u &= I_z \cos^2 \alpha_0 + I_y \sin^2 \alpha_0 - I_{zy} \sin 2\alpha_0; \\ I_v &= I_z \sin^2 \alpha_0 + I_y \cos^2 \alpha_0 + I_{zy} \sin 2\alpha_0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Отримані формули можна зробити більш зручними для користування, позбавившись необхідності обчислювати тригонометричні функції. Для цього скористаємося умовою (2.24), а також віднявши від першого друге рівняння з (2.27), матимемо

$$I_u + I_v = I_z + I_y;$$

$$I_u - I_v = (I_z - I_y) \cos 2\alpha_0 - 2I_{zy} \sin 2\alpha_0.$$

Скориставшись формулою (2.26), покладемо у останньому рівнянні $2I_{zy} = (I_y - I_z) \operatorname{tg} 2\alpha_0$. Після розв'язку записаних рівнянь як системи відносно I_u та I_v , формули (2.27) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} I_u &= \frac{1}{2} \left[(I_z + I_y) + (I_z - I_y) \frac{1}{\cos 2\alpha_0} \right]; \\ I_v &= \frac{1}{2} \left[(I_z + I_y) - (I_z - I_y) \frac{1}{\cos 2\alpha_0} \right]. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Замінімо в цих виразах, з урахуванням (2.26), величину

$$\frac{1}{\cos 2\alpha_0} = \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0} = \pm \sqrt{1 + \frac{4I_{zy}^2}{(I_z - I_y)^2}}.$$

Остаточно отримаємо

$$\begin{aligned} I_u &= \frac{1}{2} \left[(I_z + I_y) \pm \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2} \right]; \\ I_v &= \frac{1}{2} \left[(I_z + I_y) \mp \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Примітка 2.8. Згідно з виразами (2.28), якщо $I_z > I_y$, то $I_u > I_v$.

Примітка 2.9. Якщо $I_z > I_y$, то у формулах (2.29) перед коренем квадратним беруть верхні знаки, а якщо $I_z < I_y$ – то нижні.

Якщо вихідними осями є головні осі інерції, то формули для переходу до повернутих осей (2.22) і (2.23) набувають вигляду

$$\begin{aligned} I_{z_1} &= I_u \cos^2 \alpha + I_v \sin^2 \alpha; \\ I_{y_1} &= I_u \sin^2 \alpha + I_v \cos^2 \alpha; \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$I_{z_1 y_1} = \frac{1}{2} (I_u - I_v) \sin 2\alpha. \quad (2.31)$$

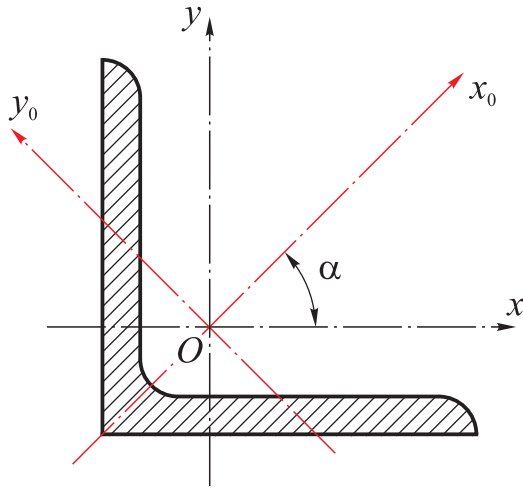


Рис. 2.15 Кутник рівнобокий

Приклад 2.10 *Визначити відцентровий момент інерції кутника рівнобокого $50 \times 50 \times 5$ відносно центральних осей XOY , паралельних його сторонам.*

Зауваження 1: на рис. 2.15 використані позначення осей, прийнятих у сортаментах прокатної сталі.

Згідно з рис. 2.15 осі X_0OY_0 – головні центральні осі інерції, оскільки вісь X_0 є віссю симетрії кутника. Згідно з сортаментом прокатної сталі для рівнобокого кутника $50 \times 50 \times 5$ головні моменти інерції: $I_u = I_{x_0} = 17,8 \text{ см}^4$; $I_v = I_{y_0} = 4,63 \text{ см}^4$. Для визначення відцентрового моменту I_{xy} відносно осей XOY скористаємося формулою (2.31). Тут кут $\alpha = -45^\circ$, адже вісь симетрії кутника X_0 є бісектрисою прямого кута. Кут α від'ємний, оскільки відкладається від осі X_0 за годинниковою стрілкою. Отже

$$I_{xy} = \frac{1}{2}(I_u - I_v) \sin 2\alpha = \frac{1}{2}(17,8 - 4,63)(-1) = -6,585 \text{ см}^4.$$

Тема 2.7. Радіуси інерції фігури

Момент інерції має вимірність довжини у четвертій степені. Отже формально ми можемо розглядати момент інерції фігури відносно будь-якої осі як добуток площі цієї фігури на квадрат деякої величини, яку називають *радіусом інерції*:

$$I_z = A \cdot i_z^2. \quad I_y = A \cdot i_y^2. \quad (2.32)$$

Тут i_z та i_y – радіуси інерції відносно осей Z і Y відповідно. З виразів (2.32) знаходимо

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}. \quad (2.33)$$

Якщо мова йде про головні центральні осі інерції, то матимемо головні радіуси інерції:

$$i_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}}; \quad i_v = \sqrt{\frac{I_v}{A}}. \quad (2.34)$$

Так, для круга радіус інерції відносно будь-якої центральної осі

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{\pi d^4/64}{\pi d^2/4}} = \frac{d}{4}.$$

Для квадрата головні радіуси інерції

$$i_u = i_v = \sqrt{\frac{a^4/12}{a^2}} = \frac{a}{\sqrt{12}}.$$

Для прямокутника (див. рис. 2.5, лекція №2) головні радіуси інерції

$$i_z = \sqrt{\frac{bh^3/12}{bh}} = \frac{h}{\sqrt{12}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{hb^3/12}{bh}} = \frac{b}{\sqrt{12}}.$$

Тема 2.8. Визначення геометричних характеристик складних перерізів

При вивченні теми 2.1 (див. лекцію 2), ми мали вже справу зі складними перерізами, для яких визначали статичні моменти площі та координати центрів ваги у вибраній системі осей.

Продовжуючи цю тему, розглянемо порядок визначення положення головних центральних осей інерції та головних моментів інерції складних перерізів.

1. Розбиваємо переріз на прості складові. Це можуть бути прості геометричні фігури, наприклад круг, прямокутник, трикутник і т. ін., положення центрів ваги, площі та інші геометричні характеристики яких відомі або легко обчислюються. Це ж стосується і прокатних профілів, для яких усі геометричні характеристики даються у сортаментах

2. Проводимо систему координат, у якій за допомогою формул (2.7) визначимо положення центру ваги перерізу. Ці осі можуть бути довільними, наприклад центральними для однієї зі складових частин перерізу.

3. Через знайдений центр ваги перерізу проводимо початкову систему осей, відносно якої визначатимемо осьові та відцентрові моменти інерції перерізу. Для цього спершу визначимо моменти інерції окремих частин перерізу відносно їх власних центральних осей, паралельних осям початкової системи, а потім за допомогою формул паралельного переносу (2.17) – (2.19) – відносно вже самих початкових осей. Складаючи ці моменти, знаходимо моменти інерції всього перерізу відносно початкових осей.

Примітка 2.9. Якщо переріз має отвір чи паз, то, як і площа чи статичний момент, момент інерції відсутньої частини вважається від'ємним.

4. За формулою (2.26) знаходимо кути нахилу головних центральних осей інерції відносно початкових. При цьому відкладаємо знайдені кути і позначаємо головні осі за правилом, сформульованим вище (див. тему 2.6).

5. За формулами (2.29) обчислюємо значення головних моментів інерції перерізу.

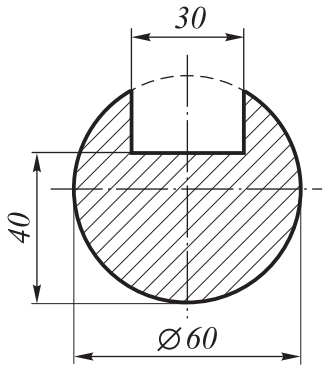


Рис. 2.16 Переріз стержня

Приклад 2.11 *Визначити головні центральні моменти інерції та головні радіуси інерції перерізу, зображеного на рис. 2.16.*

1. Зобразимо переріз у збільшеному масштабі (рис. 2.17) та розкладемо його на прості фігури: круг (I) діаметром $d = 60$ мм, прямокутник (II) зі сторонами $b = 30$ мм і $h = 15,981$ мм (цей розмір знайдено шляхом нескладних обчислень) і круговий сегмент (III). Тут дві останні фігури мають від'ємну площу. Вкажемо центри ваги цих фігур і проведемо їх центральні осі.

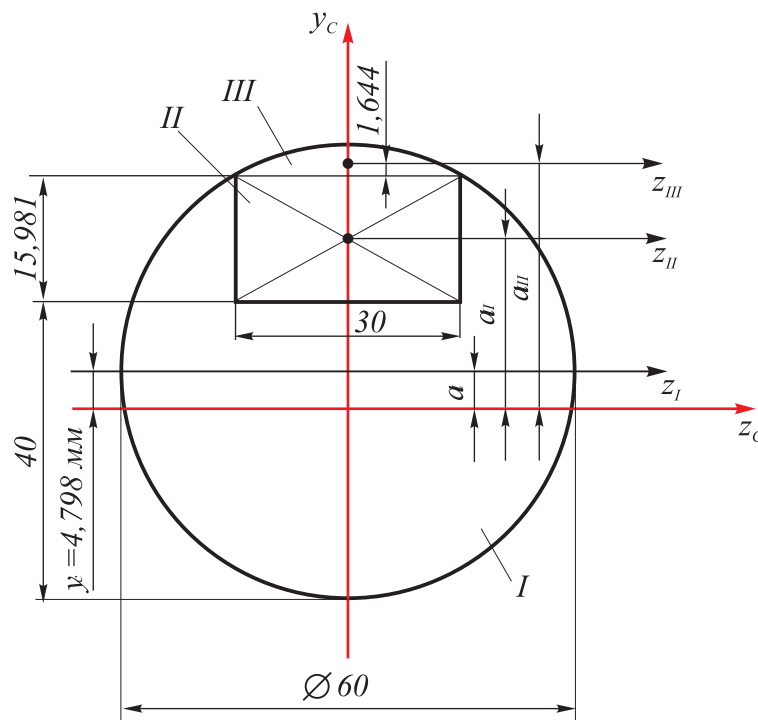


Рис. 2.17 До визначення геометричних характеристик складного симетричного перерізу

Оскільки переріз має вертикальну вісь симетрії, причому ця вісь є також віссю симетрії для кожної з виділених фігур, то центр ваги перерізу, як і кожної з вказаних його частин, лежатиме на цій осі. Позначимо її Y_c .

Щоб обчислити положення центру ваги кругового сегмента відносно хорди (рис. 2.18), скористаємось формулою:

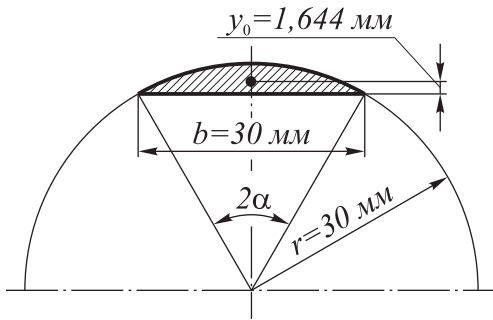


Рис. 2.18 Круговий сегмент

$$y_0 = r \left(\frac{4}{3} \frac{\sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} - \cos \alpha \right).$$

Тут $\alpha = \arcsin(0,5b/r) = \arcsin(0,5 \cdot 30/30) = 30^\circ$.

Отже

$$y_0 = 30 \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{0,125}{1,047 - 0,866} - 0,866 \right) = 1,644 \text{ мм}.$$

Тут і далі при визначенні геометричних характеристик для кругового сегмента користуватимусь формулами, наведеними в [2], табл. 1.

2. Для визначення положення центру ваги перерізу на осі Y_c виберемо в якості допоміжних осей центральні осі круга Y_c-Z_I .

Згідно з рис. 2.17 відстані між віссю Z_I круга і центральними осями інших частин перерізу складають: для прямокутника – $y_{C_{II}} = 17,991$ мм; для кругового сегмента –

$y_{C_{III}} = 27,625$ мм. Площі фігур відповідно дорівнюють:

$$- A_I = \pi d^2/4 = \pi \cdot 60^2/4 = 2827,433 \text{ мм}^2;$$

$$- A_{II} = bh = 30 \cdot 15,981 = 479,43 \text{ мм}^2;$$

$$- A_{III} = 0,5r^2(2\alpha - \sin 2\alpha) = 0,5 \cdot 30^2(1,047 - 0,866) = 81,45 \text{ мм}^2.$$

За формулою (2.7), з урахування знаків площ і ординат, отримаємо

$$y_{C_{III}} = \frac{y_{C_I} A_I - y_{C_{II}} A_{II} - y_{C_{III}} A_{III}}{A_I - A_{II} - A_{III}} = \frac{0 \cdot 2827,433 - 17,991 \cdot 479,43 - 27,625 \cdot 81,45}{2827,433 - 479,43 - 81,45} = -4,798 \text{ мм}.$$

Оскільки вісь Y_c є віссю симетрії, то знайдені центральні осі перерізу Y_c-Z_c є головними центральними осями інерції.

3. Моменти інерції перерізу відносно головних центральних осей Y_c-Z_c знайдемо як суму моментів інерції окремих його частин відносно цих осей:

$$I_u = I_{z_c} = I_{z_I}^C - I_{z_{II}}^C - I_{z_{III}}^C;$$

$$I_v = I_{y_c} = I_{y_I}^C - I_{y_{II}}^C - I_{y_{III}}^C.$$

Щоб знайти їх величини, скористаємося формулами паралельного переносу (2.29).

Знайдемо моменти інерції кожної частини перерізу відносно їх власних центральних осей:

$$- \text{для круга } I_{z_I} = I_{y_I} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 60^4}{64} = 636172,512 \text{ мм}^4;$$

- для прямокутника

$$I_{zII} = \frac{bh^3}{12} = \frac{30 \cdot 15,981^3}{12} = 10203,563 \text{ мм}^4; \quad I_{yII} = \frac{hb^3}{12} = \frac{15,981 \cdot 30^3}{12} = 35957,25 \text{ мм}^4.$$

– для кругового сегмента момент інерції відносно діаметра (це вісь Z_I на рис. 2.17), згідно з [2],

$$I_{zI}^{III} = \frac{r^4}{8} (2\alpha - \sin 2\alpha \cos 2\alpha) = \frac{30^4}{8} (1,047 - 0,866 \cdot 0,5) = 62167,5 \text{ мм}^4.$$

Тоді момент інерції відносно центральної осі Z_{III}

$$I_{zIII} = I_{zI}^{III} - y_{CIII}^2 A_{III} = 62167,5 - 27,625^2 \cdot 81,45 = 9,696 \text{ мм}^4;$$

$$I_{yIII} = \frac{r^4}{8} \left(2\alpha - \sin 2\alpha - \frac{4}{3} \cos \alpha \sin^3 \alpha \right) =$$

$$\frac{30^4}{8} \left(1,047 - 0,866 - \frac{4}{3} \cdot 0,866 \cdot 0,125 \right) = 3712,5 \text{ мм}^4.$$

Відстані між центральними осями окремих частин перерізу і центральною віссю всього перерізу Z_C (див. рис. 2.17): $a_I = 4,798 \text{ мм}$; $a_{II} = 22,789 \text{ мм}$; $a_{III} = 32,423 \text{ мм}$. А осі Y тут збігаються.

Моменти інерції відносно головних центральних осей Y_C-Z_C :

$$I_{zI}^C = I_{zI} + a_I^2 A = 636172,512 + 4,798^2 \cdot 2827,433 = 701262,293 \text{ мм}^4;$$

$$I_{zII}^C = I_{zII} + a_{II}^2 A = 10203,563 + 22,789^2 \cdot 479,43 = 259190,030 \text{ мм}^4;$$

$$I_{zIII}^C = I_{zIII} + a_{III}^2 A_{III} = 9,696 + 32,423^2 \cdot 81,45 = 85634,084 \text{ мм}^4.$$

$$I_{yI}^C = I_{yI} = 636172,512 \text{ мм}^4;$$

$$I_{yII}^C = I_{yII} = 35957,25 \text{ мм}^4;$$

$$I_{yIII}^C = I_{yIII} = 3712,5 \text{ мм}^4.$$

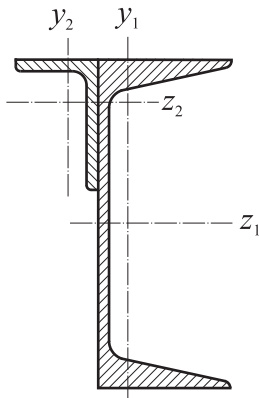
Головні центральні моменти інерції перерізу стержня:

$$I_u = I_{zC} = I_{zI}^C - I_{zII}^C - I_{zIII}^C = 701262,292 - 259190,030 - 85634,084 = 346438,178 \text{ мм}^4;$$

$$I_v = I_{yC} = I_{yI}^C - I_{yII}^C - I_{yIII}^C = 636172,512 - 35957,25 - 3712,5 = 596502,762 \text{ мм}^4.$$

Головні радіуси інерції:

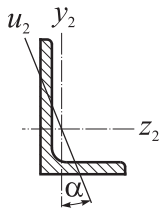
$$i_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}} = \sqrt{\frac{346438,178}{2266,553}} = 12,363 \text{ мм}; \quad i_v = \sqrt{\frac{I_v}{A}} = \sqrt{\frac{596502,762}{2266,553}} = 16,223 \text{ мм}.$$



Приклад 2.12 Визначити головні центральні моменти інерції перерізу, зображеного на рис. 2.19, що складається з швелера №14 та нерівного кутника 56×36×5.

Рис. 2.19 Переріз, складений з прокатних профілів

1. З таблиць сортаментів прокатної сталі випишемо геометричні характеристики профілів, що складають заданий переріз, позначивши їх у відповідності з осями, вказаними на рис. 2.19 та 2.20.



I. Швелер №14: $A_I = 15,7 \text{ см}^2$; $I_{z_I} = 489 \text{ см}^4$; $I_{y_I} = 45,1 \text{ см}^4$.

II. Кутник 56×36×5: $A_{II} = 4,41 \text{ см}^2$; $I_{z_{II}} = I_{z_2} = 13,8 \text{ см}^4$;

$I_{y_{II}} = I_{y_2} = 4,48 \text{ см}^4$; $I_{u_{2\min}} = 2,66 \text{ см}^4$; кут нахилу осі u ,

Рис. 2.20 Кутник $\text{tg}\alpha = 0,404$ ($\alpha = 22^\circ$).

Для подальших розрахунків нам необхідно знати відцентровий момент інерції кутника відносно осей, паралельних полицям. Знайдемо його відносно осей Y_2-Z_2 (рис. 2.20) за допомогою формули повороту головних осей (2.26):

$$I_{z_2y_2} = \frac{I_{y_2} - I_{z_2}}{2} \text{tg}2\alpha = \frac{4,48 - 13,8}{2} \text{tg}44^\circ = -4,66 \cdot 0,9657 = -4,50 \text{ см}^4.$$

У перерізі (рис. 2.19) кутник розвернутий відносно осей Y_2-Z_2 на 180° . Згідно з формулою (2.23) величина і знак відцентрового моменту за такого повороту осей залишаються незмінними, тобто $I_{z_2y_2} = I_{z_{II}y_{II}}$.

2. Зобразимо заданий переріз у збільшеному масштабі (рис. 2.21).

Визначимо положення центру ваги перерізу, вибравши у якості допоміжної систему головних центральних осей швелера Y_I-Z_I :

$$z_C = \frac{z_{C_{II}} A_{II}}{A_I + A_{II}} = \frac{-2,54 \cdot 4,41}{15,7 + 4,41} = -0,56 \text{ см};$$

$$y_C = \frac{y_{C_{II}} A_{II}}{A_I + A_{II}} = \frac{5,14 \cdot 4,41}{15,7 + 4,41} = 1,13 \text{ см}.$$

Тут $z_{C_{II}}$ та $y_{C_{II}}$ – відстані від центру ваги кутника до центральних осей швелера Y_I та Z_I відповідно.

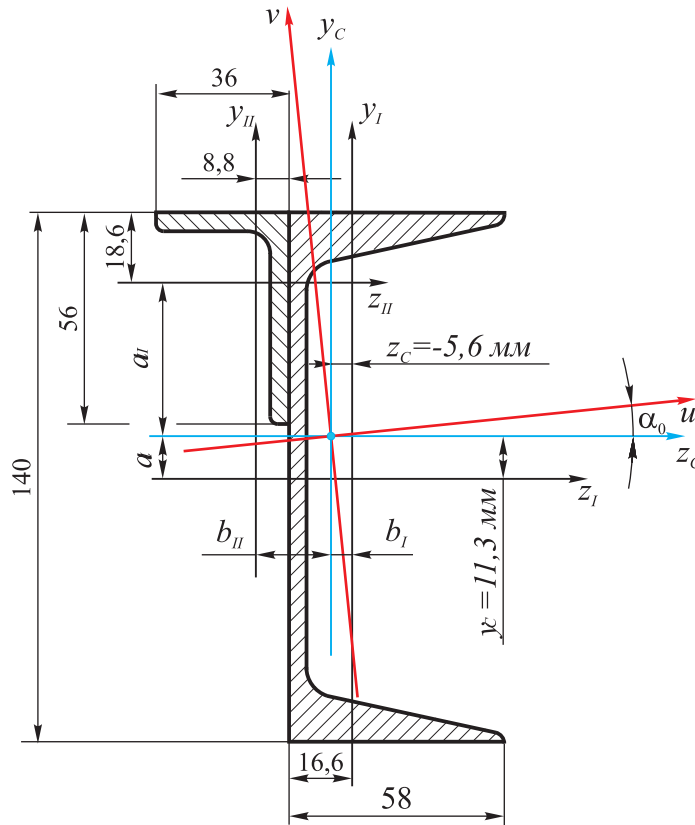


Рис. 2.21 До визначення геометричних характеристик складного несиметричного перерізу

3. Проведемо проміжну систему центральних осей Y_C-Z_C , та визначимо осьові та відцентровий моменти інерції перерізу відносно цих осей:

$$I_{z_C} = I_{z_I} + a_I^2 A_I + I_{z_{II}} + a_{II}^2 A_{II} = 489 + 1,13^2 \cdot 15,7 + 13,8 + 4,01^2 \cdot 4,41 = 593,76 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_C} = I_{y_I} + b_I^2 A_I + I_{y_{II}} + b_{II}^2 A_{II} = 45,1 + 0,56^2 \cdot 15,7 + 4,48 + 1,98^2 \cdot 4,41 = 71,79 \text{ см}^4;$$

$$I_{z_C y_C} = I_{z_I y_I} + a_I b_I A_I + I_{z_{II} y_{II}} + a_{II} b_{II} A_{II} = 0 + 1,13(-0,56)15,7 - 4,5 + (-4,01)1,98 \cdot 4,41 = -49,44 \text{ см}^4.$$

4. Визначимо положення головних центральних осей інерції та величини головних центральних моментів інерції.

Кут нахилу головних центральних осей інерції перерізу до проміжних центральних осей Y_C-Z_C знайдемо за формулою (2.26):

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{z_C y_C}}{I_{y_C} - I_{z_C}} = \frac{2 \cdot (-49,44)}{71,79 - 593,76} = 0,1894.$$

Отже кут нахилу $\alpha_0 = 5,36^\circ$.

Вкажемо головні осі на рис. 2.21. Оскільки кут α_0 додатний, то відкладаємо його від осі Z_C проти годинникової стрілки, а, оскільки $\alpha_0 < 45^\circ$, отриману вісь позначаємо u згідно з правилом, сформульованим у темі 2.6.

Головні центральні моменти інерції визначаємо за формулами (2.29), беручи в цих виразах перед коренем квадратним верхні знаки, оскільки $I_{z_C} > I_{y_C}$:


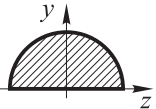
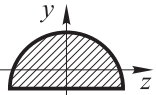
$$I_u = \frac{1}{2} \left[(I_{z_C} + I_{y_C}) + \sqrt{(I_{z_C} - I_{y_C})^2 + 4I_{z_C y_C}^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[(593,76 + 71,79) + \sqrt{(593,76 - 71,79)^2 + 4 \cdot 49,44^2} \right] = 598,40 \text{ см}^4;$$

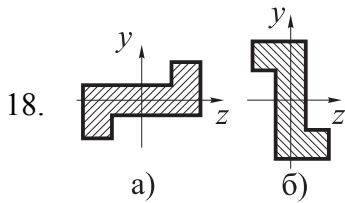
$$I_v = \frac{1}{2} \left[(I_{z_C} + I_{y_C}) - \sqrt{(I_{z_C} - I_{y_C})^2 + 4I_{z_C y_C}^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[(593,76 + 71,79) - \sqrt{(593,76 - 71,79)^2 + 4 \cdot 49,44^2} \right] = 67,15 \text{ см}^4;$$

Питання для самоперевірки знань

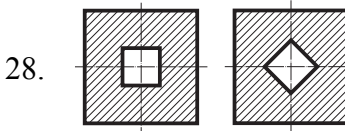
- Що називається статичним моментом площі відносно деякої осі?
- Коли площу фігури та статичний момент вважають від'ємними?
- Як визначити статичний момент площі перерізу, що складається з простих геометричних фігур?
- Чому дорівнює статичний момент площі фігури відносно центральної осі?
- Як знайти положення центру ваги довільної фігури?
- Як знайти положення центру ваги перерізу, що складається з простих геометричних фігур?
- Де знаходиться центр ваги перерізу, що має принаймні дві осі симетрії?
- Де знаходиться центр ваги перерізу, що має одну вісь симетрії?
-  Де знаходиться центр ваги фігури, що складається з двох півкіл?
- Що називається осьовим моментом інерції площі фігури?
- Що називається полярним моментом інерції площі фігури?
- Що називається відцентровим моментом інерції площі фігури?
- Чому дорівнює момент інерції півкруга відносно діаметра, на який він опирається?
-  Чи відрізняються моменти інерції півкруга відносно вказаних осей.
-  Чи відрізняються моменти інерції півкруга відносно центральних осей. Якщо так, то відносно якої осі момент інерції більший?
- Як пов'язані моменти інерції фігури відносно двох взаємно перпендикулярних координатних осей з полярним моментом інерції відносно початку координат?

17. Відносно якої сторони момент інерції прямокутного рівнобедреного трикутника більший: відносно катета чи гіпотенузи?

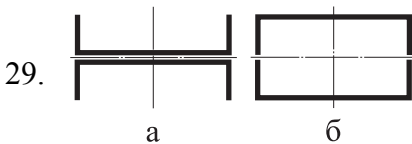


18. Який знак має відцентровий момент інерції перерізу відносно вказаних осей у двох випадках його розташування.

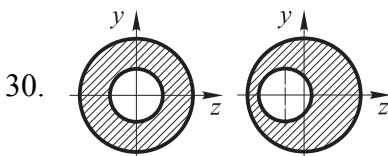
19. Як знайти момент інерції фігури відносно осі, паралельної центральній, якщо момент інерції відносно центральної осі відомий?
 20. Як знайти момент інерції фігури відносно центральної осі, якщо відомий момент інерції відносно осі, паралельної центральній?
 21. Чи зміниться полярний момент інерції перерізу при повороті системи координатних осей відносно її початку на певний кут.
 22. Які моменти інерції фігури називаються головними центральними?
 23. Вказати, скільки пар головних центральних осей має рівносторонній трикутник.
 24. Відносно яких осей відцентровий момент інерції дорівнює нулю?
 25. Відносно яких осей моменти інерції набувають екстремальних значень?
 26. Який напрямок повороту координатних осей відносно їх початку вважається додатним при визначенні моментів інерції?
 27. Як обчислити радіус інерції фігури відносно певної осі?



28. Чи зміниться головний центральний радіус інерції перерізу, якщо квадратний отвір розвернути на 45° .



29. 1) Чи відрізняються моменти інерції перерізів, складених з однакових швелерів, відносно вертикальної осі.
 2) Чи відрізняються моменти інерції перерізів відносно горизонтальної осі?
 Якщо так, то вкажіть, для якого перерізу момент інерції більший.



30. Для якого з перерізів момент інерції відносно вертикальної осі Y менший? Чи відрізняються величини відцентрових моментів цих перерізів відносно осей, вказаних на рисунку.