

Розділ 3. ВНУТРІШНІ СИЛИ ТА МЕТОДИ ЇХ ВИЗНАЧЕННЯ

Тема 3.1. Поняття про зусилля. Метод перерізів

З точки зору механіки суцільного середовища тверде тіло є сукупністю матеріальних точок, які взаємодіють між собою, і сили цієї взаємодії – сили притягання і відштовхування – дозволяють утримувати тіло як єдине ціле.

При навантажуванні тіло деформується, а значить точки, з яких воно складається, змінюють взаємне розташування. У в'язях, що зусібіч оточують дану точку, виникають сили опору цьому зміщенню.

Матеріал тіла завжди опирається будь якій спробі його деформування, і величина цього опору визначається фізико-механічними властивостями матеріалу

Отже в тілі завжди присутні *внутрішні сили* як сили взаємодії між часточками тіла. Очевидно, що в ненавантаженому тілі і після його навантаження величина цих сил буде різна. В опорі матеріалів розглядають лише ті додаткові внутрішні сили, які виникають після навантаження тіла, і називають їх *зусиллями*.

Зусилля – це внутрішні сили, які виникають у в'язях, що оточують дану точку тіла, при його навантажуванні

Для визначення зусиль користуються *методом перерізів*.

Розглянемо тверде тіло, навантажене зрівноваженою системою сил (рис. 3.1 а).

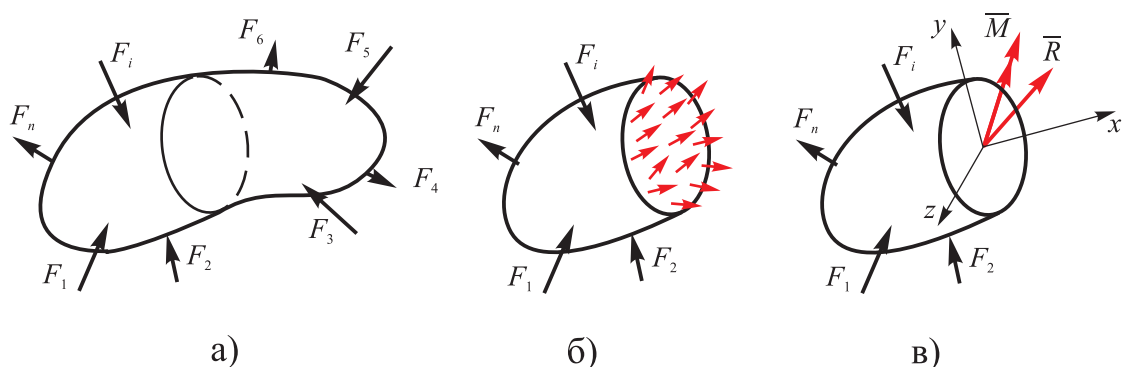


Рис. 3.1 До методу перерізів при визначенні зусиль: зрівноважене тверде тіло (а); частина тіла з розподіленим зусиллям у перерізі (б) та його головним вектором та головним моментом (в)

Оскільки тіло знаходиться в рівновазі, то й будь-яка частина його перебуває у рівновазі. Очевидно, що коли розітнути тіло уявною площиною і розглянути одну його частину (рис. 3.1 б), то, щоб рівновага її не порушилася, потрібно в перерізі передбачити сили, розподілені за певним законом. Ці сили характеризують дію однієї частини тіла на іншу і з'являються у перерізі внаслідок розтину внутрішніх в'язей, що поєднували дві частини тіла (згідно з принципом звільнення від в'язей, сформульованим у теоретичній механіці).

Поверхня перерізу є зовнішньою для частини тіла. Тому за допомогою методу перерізів внутрішні сили переводяться до розряду зовнішніх для частини тіла.

Для оцінки міцнісної надійності тіла нам необхідно знати зусилля в кожній точці розглядуваного перерізу, проте, користуючись лише умовами рівноваги частини тіла, ми цю задачу розв'язати не зможемо, оскільки закон розподілу зусиль у перерізі нам не відомий. Цей закон залежить від форми тіла, характеру, величини і розташування зовнішніх сил.

Разом з тим зусилля, розподілені в перерізі, можуть бути представлені у вигляді їх головного вектора \bar{R} і головного моменту \bar{M} (рис. 3.1 в), прикладених у центрі ваги перерізу.

Головний вектор та головний момент зусиль, розподілених в перерізі можна знайти з рівнянь рівноваги для частини тіла, що розглядається. Проте ці рівняння справедливі для абсолютно твердого тіла, коли точки прикладання та напрямки зовнішніх сил, прикладених до тіла, є незмінними в системі координат, пов'язаних з цим тілом. В загальному випадку деформованого тіла ця умова не виконується. Але на підставі гіпотези про малість деформацій переміщеннями точок прикладання навантажень та зміною їх напрямків можна знехтувати, а значить можна користуватися рівняннями статички, отриманими для абсолютно твердого тіла.

Отже, склавши шість рівнянь рівноваги для частини тіла, можна знайти шість компонент внутрішніх зусиль, а значить і самі вектори \bar{R} і \bar{M} .

Примітка 3.1. Внутрішні сили за принципом дії і протидії завжди взаємні. Тобто для визначення векторів \bar{R} і \bar{M} байдуже, рівновага якої частини тіла розглядатиметься – лівої чи правої (рис. 3.1 а).

3.1.1. Зусилля в стержнях

Подамо головний вектор і головний момент зусиль в перерізі у вигляді складових проекцій на осі X, Y, Z (рис. 3.2): $\bar{R}\{N, Q_y, Q_z\}$; $\bar{M}\{M_{кр}, M_y, M_z\}$.

У випадку стержня для означення компонент головного вектора і головного моменту використовують спеціальні терміни:

N – *поздовжня сила*, тобто компонента головного вектора, яка діє вздовж осі X , нормальній до перерізу стержня;

Q_y і Q_z в – *поперечні сили*, тобто компоненти головного вектора, які збігаються з поперечними осями перерізу Y і Z відповідно;

$M_{кр}$ – *крутний момент*, тобто компонента головного моменту, яка діє в площині перерізу (відносно осі X);
 M_y і M_z – *згинальні моменти*, тобто компоненти головного моменту, які діють відносно осей Y і Z відповідно.

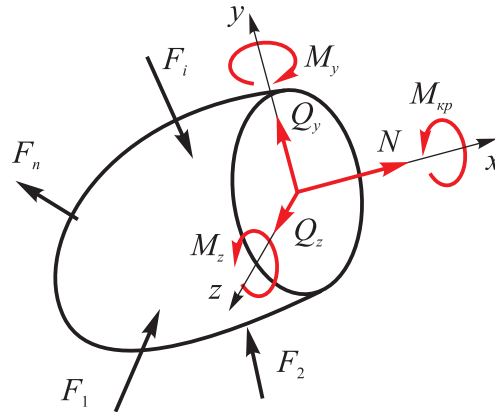


Рис. 3.2 Частина стержня з компонентами головного вектора і головного моменту зусиль в перерізі

Умови рівноваги для частини стержня запишемо у вигляді рівнянь відносно невідомих компонент внутрішніх зусиль, беручи до уваги, що кожна з цих компонент зрівноважує проекції зовнішніх сил на відповідні осі або моменти цих сил відносно відповідних осей:

$$\begin{aligned}
 N &= \sum_{i=1}^n (F_x)_i; & Q_y &= \sum_{i=1}^n (F_y)_i; & Q_z &= \sum_{i=1}^n (F_z)_i; \\
 M_{кр} &= \sum_{i=1}^n M_x(F_i); & M_y &= \sum_{i=1}^n M_y(F_i); & M_z &= \sum_{i=1}^n M_z(F_i).
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

У відповідності до перелічених компонент внутрішніх зусиль для стержнів введена класифікація видів їх деформацій.

Чистий розтяг або *чистий стиск* – має місце, коли на деякій частині стержня в його поперечних перерізах виникає тільки поздовжня сила N .

Зріз стержня має місце, коли на деякій його частині в поперечних перерізах виникають тільки поперечні сили Q_y і (або) Q_z .

Чисте кручення має місце, коли на деякій частині стержня в його поперечних перерізах виникає тільки крутний момент $M_{кр}$.

Чистий згин має місце, коли на деякій частині стержня в його поперечних перерізах виникає тільки згинальний момент M_y або M_z . При цьому, якщо

моменти діють у одній площині, що збігається площиною згину осі стержня, то згин називають *плоским*.

Плоский поперечний згин має місце, коли крім згинальних моментів у перерізах діє також поперечна сила.

Будь-які інші типи деформацій стержнів можна отримати накладанням вказаних найпростіших, наприклад згин з крученням, розтяг зі згином і т.п.

Тема 3.2. Епюри внутрішніх зусиль для стержнів

В загальному випадку при переході від перерізу до перерізу зусилля в стержні змінюються, і судять про характер їх зміни за допомогою *епюр*.

Епюрою називають графік зміни даної компоненти внутрішнього зусилля по довжині стержня

3.2.1. Загальні зауваження та порядок побудови епюр

Вісь, на якій будується епюра, називається *базовою лінією* або *базою*. Вона завжди повторює вісь стержня.

Ординати епюри відкладають від бази по перпендикуляру. Вони в масштабі відповідають значенням внутрішніх зусиль в перерізах, обчислених за рівняннями статички з використанням методу перерізів.

Будують епюри в такій послідовності.

1. Зображають розрахункову схему стержня та базові лінії епюр.
2. За потреби визначають реакції опор стержня.
3. Розбивають стержень на *ділянки*. Ділянка – це частина стержня, на якій внутрішні зусилля змінюються за одним законом. Границі ділянок збігаються з точками прикладання зосереджених навантажень, а також з початком і кінцем розподіленого навантаження В межах ділянки закон зміни розподіленого навантаження сталий.
4. Користуючись методом перерізів, послідовно на кожній ділянці складають умови рівноваги відігнутої частини стержня у вигляді рівнянь відносно невідомих зусиль. Зусилля при цьому розглядаються як функції положення перерізу вздовж осі стержня.

Примітка 3.2. Перед тим, як записати рівняння рівноваги, для кожної ділянки обов'язково слід вказувати межі зміни координати перерізу вздовж осі стержня відносно вибраної точки відліку.

5. За цими рівняннями будують графіки в межах кожної ділянки стержня і, як результат, отримують епюру.

На епюрах часто наносять штрихування у вигляді ліній, перпендикулярних до бази. Крім того, на епюрах проставляють значення зусиль біля ординат у характерних точках, наприклад в місцях зламів, розривів (стрибків) на епюрах, в місцях екстремумів. Безпосередньо на епюрі вказується також знак зусилля, який проставляється у кружку.

Приклад 3.1 Побудувати епюри зусиль для круглого східчастого стержня (рис. 3.3) у двох випадках навантаження: 1 – без врахування власної ваги стержня; 2 – з урахуванням власної ваги стержня. Діаметр нижньої частини стержня $d_1 = 0,1$ м; верхньої – $d_2 = 0,2$ м. Питома вага матеріалу стержня $\gamma = 7,65 \cdot 10^4$ Н/м³.

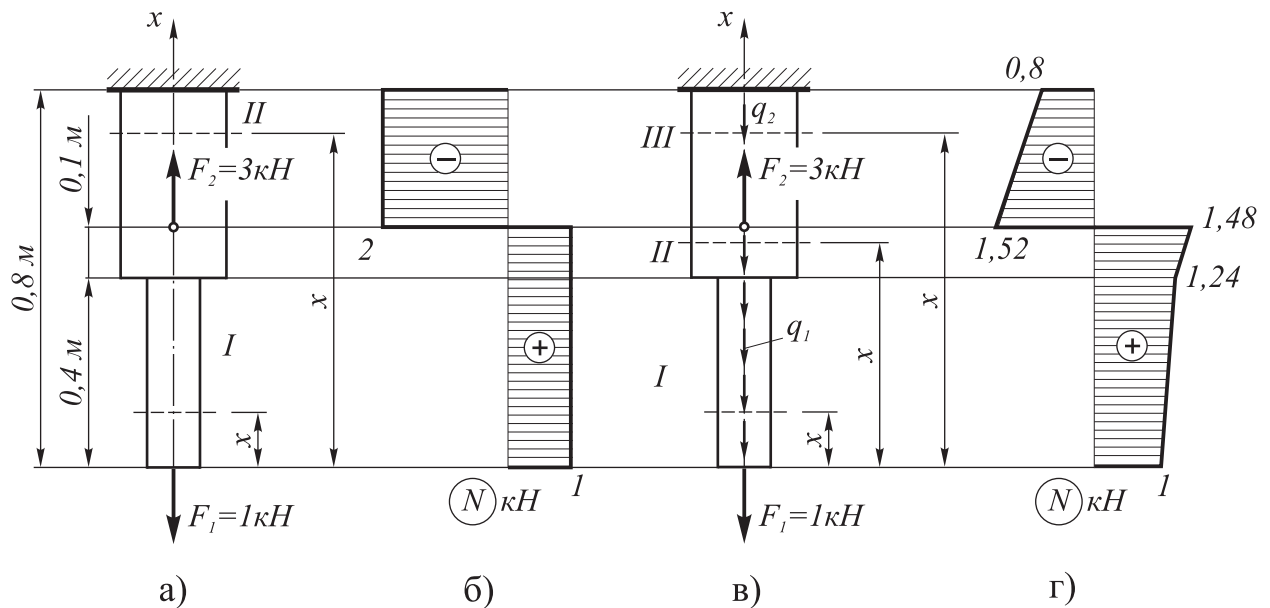


Рис. 3.3 Розрахункова схема стержня (а) та епюра поздовжніх сил (б), побудовані без врахування власної ваги стержня та розрахункова схема (в) і епюра (г), побудовані з урахуванням власної ваги стержня

1. Побудова епюр внутрішніх зусиль без урахування власної ваги стержня.

Згідно з розрахунковою схемою, стержень жорстко зацелений верхнім кінцем. На цій підставі робимо висновок, що потреби у визначенні опорних реакцій немає, оскільки зусилля в будь-якому перерізі можна знайти з умови рівноваги тієї частини стержня, що не містить опори, тобто – нижньої.

Розбиваємо стержень на ділянки. Їх дві, і обмежені вони точками прикладання зосереджених сил.

В межах кожної ділянки проводимо перерізи. Щоб записати умови рівноваги для відітнутих частин стержня, вибираємо систему координат з початком на його вільному кінці. Положення перерізів на кожній ділянці відлікуватимемо від цієї точки (див рис. 3.3 а).

Аналіз навантажень, прикладених до відітнутих частин стержня як на першій, так і на другій ділянках, показує, що маємо лінійну систему сил, які діють вздовж осі X. Тобто в перерізах виникатимуть лише поздовжні сили N, а значить стержень знаходиться в умовах чистого розтягання-стискування.

Перш ніж записувати рівняння рівноваги, слід домовитись про правило знаків для поздовжньої сили.

Поздовжня сила вважається додатною, якщо навантаження, що її викликає, розтягає стержень. Якщо навантаження стискає стержень, то поздовжня сила – від’ємна

Отже, для першої ділянки:

$$I. \quad 0 \leq x \leq 0,5 \text{ м}$$

$$N(x) = F_1 = 1 \text{ кН}.$$

Для другої ділянки:

$$II. \quad 0,5 \text{ м} \leq x \leq 0,8 \text{ м}$$

$$N(x) = F_1 - F_2 = 1 - 3 = -2 \text{ кН}.$$

Як бачимо, поздовжня сила на кожній ділянці постійна. Причому на першій ділянці стержень розтягається ($N > 0$), а на другій – стискається ($N < 0$). Графік константи – пряма лінія, паралельна осі абсцис. На епюрі (рис. 3.3 б) маємо дві прямі лінії, паралельні базі, з ординатами на першій ділянці $N = 1 \text{ кН}$ і $N = -2 \text{ кН}$ на другій ділянці. В точках прикладання зосереджених сил на епюрі мають місце стрибки на величину сили в напрямку її дії. Так, в точці прикладання сили F_1 має місце стрибок (розрив) на величину цієї сили 1 кН в бік додатних значень. А в точці прикладання сили F_2 маємо стрибок, що складає в сумі 3 кН, у напрямку від’ємних значень поздовжньої сили. В опорі маємо стрибок на величину 2 кН. Значить тут має бути прикладена зосереджена сила 2 кН, яка стискає стержень. Неважко зрозуміти, що цією силою є реакція опори, яку ми попередньо не визначили.

2. Побудова епюр внутрішніх зусиль з урахуванням власної ваги стержня.

У цьому випадку до зосереджених сил F_1 і F_2 додається власна вага стержня (див. рис. 3.3 в). Сила тяжіння, як відомо, – це об’ємне навантаження, яке можна звести до лінійного, рівномірно розподіленого вздовж осі стержня в межах кожної його частини. Причому, інтенсивність його різна, оскільки діаметри, а отже й площі перерізів стержня у нижній та верхній його частинах різні. Інтенсивність навантаження власною вагою на нижній частині:

$$q_1 = \gamma A_1 = \gamma \pi d_1^2 / 4 = 7,65 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot 0,1^2 / 4 = 600,525 \text{ Н/м} = 0,6 \text{ кН/м}.$$

На верхній частині стержня:

$$q_2 = \gamma A_2 = \gamma \pi d_2^2 / 4 = 7,65 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot 0,2^2 / 4 = 2402,1 \text{ Н/м} = 2,4 \text{ кН/м}.$$

Згідно зі схемою (рис. 3.3 в), на стержні ми маємо три ділянки. Запишемо умови рівноваги для відітнутої частини стержня на кожній ділянці.

Для першої ділянки:

$$I. \quad 0 \leq x \leq 0,4 \text{ м}$$

$$N(x) = F_1 + q_1 x = 1 + 0,6x.$$

Як бачимо, епюра на першій ділянці окреслена прямою лінією. Щоб її провести, необхідно мати дві точки, наприклад ординати поздовжньої сили на границях ділянки: при $x = 0$ $N = 1 \text{ кН}$, а при $x = 0,4 \text{ м}$ $N = 1 + 0,6 \cdot 0,4 = 1,24 \text{ кН}$.

Для другої ділянки:

$$II. \quad 0,4 \text{ м} \leq x \leq 0,5 \text{ м}$$

$$N(x) = F_1 + q_1 \cdot 0,4 + q_2 (x - 0,4) = 1 + 0,6 \cdot 0,4 + 2,4x - 2,4 \cdot 0,4 = 0,28 + 2,4x.$$

При $x = 0,4 \text{ м}$ $N = 0,28 + 2,4 \cdot 0,4 = 1,24 \text{ кН}$; при $x = 0,5 \text{ м}$ $N = 0,28 + 2,4 \cdot 0,5 = 1,48 \text{ кН}$

Для третьої ділянки:

III. $0,5 \text{ м} \leq x \leq 0,8 \text{ м}$

$$N(x) = F_1 - F_2 + q_1 \cdot 0,4 + q_2 \cdot (x - 0,4) = 1 - 3 + 0,6 \cdot 0,4 - 2,4 \cdot 0,4 + 2,4x = -2,72 + 2,4x.$$

При $x = 0,5 \text{ м}$ $N = -2,72 + 2,4 \cdot 0,5 = -1,52 \text{ кН}$; при $x = 0,8 \text{ м}$ $N = -2,72 + 2,4 \cdot 0,8 = -0,8 \text{ кН}$

Епюра поздовжніх сил зображена на рис. 3.3 г.

Приклад 3.2 Побудувати епюри зусиль для стержня, навантаженого моментами, що діють у площині, перпендикулярній до осі стержня (рис. 3.4).

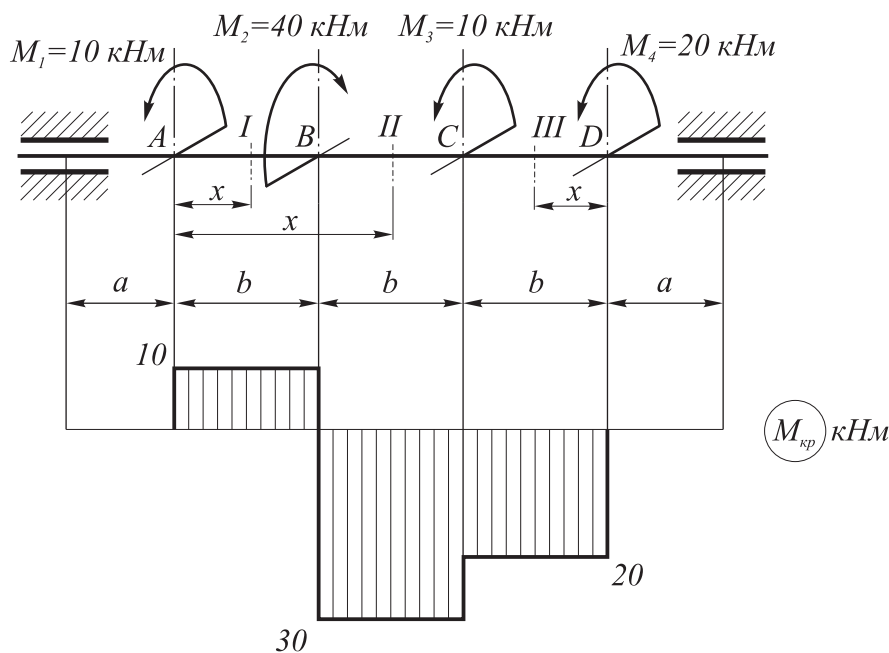


Рис. 3.4 Розрахункова схема стержня та епюра крутних моментів

Складаючи моменти, прикладені до стержня, отримаємо:

$$M_1 - M_2 + M_3 + M_4 = 10 - 40 + 10 + 20 = 0.$$

Тобто система зовнішніх сил зрівноважена, а значить стержень перебуває в стані спокою або рівномірно обертається.

Розбиваємо стержень на три ділянки. Їх границі збігаються з точками прикладання зосереджених моментів.

Поміщаємо початок відліку в точку A. Проводимо перерізи і записуємо рівняння рівноваги для відповідних частин стержня на кожній ділянці. Зі схеми навантаження видно, що з шести компонент зусиль в перерізах виникатимуть лише крутні моменти, які зрівноважують діючі зовнішні моменти. Отже стержень перебуває в умовах чистого кручення.

Примітка 3.3. Спеціального правила знаків для крутних моментів не встановлюють, лише, записуючи рівняння рівноваги, узгоджують їх у

відповідності до напрямків зовнішніх моментів. На епюрах знаки також не проставляють.

$$I. \quad 0 \leq x \leq b$$

$$M_{кр}(x) = M_1 = 10 \text{ кНм}.$$

$$II. \quad b \leq x \leq 2b$$

$$M_{кр}(x) = M_1 - M_2 = 10 - 40 = -30 \text{ кНм}.$$

На третій ділянці раціонально визначати крутний момент у перерізі, розглядаючи умову рівноваги правої частини стержня (тут прикладений тільки один момент M_3). Перенесемо початок відліку x в точку D і отримаємо такий вираз:

$$III. \quad 0 \leq x \leq b$$

$$M_{кр}(x) = -M_4 = -20 \text{ кНм}.$$

На кожній ділянці крутні моменти постійні, що й зрозуміло, адже розподілені моменти до стержня не прикладені. Епюра $M_{кр}$ зображена на рис. 3.4.

В перерізах, де прикладені зосереджені моменти, на епюрах маємо стрибки. Окремо слід звернути увагу на те, що до жодного з рівнянь рівноваги момент $M_3 = 10$ кНм не увійшов. Він щоразу відкидався разом з відповідною частиною стержня. Проте в перерізі, де він прикладений, на епюрі має місце стрибок на величину 30 кНм в напрямку його дії, що свідчить про правильність виконаних розрахунків і побудов.

3.2.2. Побудова епюр внутрішніх зусиль для прямого стержня в умовах плоского поперечного згину

Стержні, які знаходяться в умовах плоского поперечного згину, називають балками.

У будівництві, звідки цей термін прийшов, балка є окремим елементом конструкції споруди. В машинобудуванні балками називають і зубці коліс, і осі, і важелі, інші елементи машин, коли мова йде про їхні розрахункові схеми.

Залежно від типу і кількості опор балки бувають консольні (рис. 3.5 а), однопрогонні або двохопорні шарнірно оперті (рис. 3.5 б), багатопрогонні нерозрізні (рис. 3.5 в), багатопрогонні розрізні (з проміжними шарнірами) (рис. 3.5 г). Слід зазначити, що прогоном називають відстань між опорами балки.

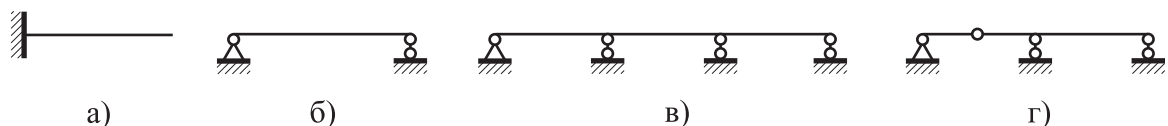


Рис. 3.5 Типи балок: а – консольна; б – однопрогонна; в) – багатопрогонна нерозрізна; г) багатопрогонна розрізна

Зупинимось на деяких особливостях, пов'язаних з побудовою епюр для балок.

3.2.2.1. Визначення опорних реакцій

За умов поперечного згину зовнішні сили, включно з реакціями опор, діють перпендикулярно до осі балки. Якби це було не так, то в перерізах балки виникали б поздовжні сили, а вони при поперечному згині відсутні. Таким чином, на балку діє плоска система паралельних сил, яка підлягає двом умовам рівноваги: сума проєкцій всіх сил на вісь, перпендикулярну до осі балки, дорівнює нулю і сума моментів всіх сил відносно деякої точки площини дорівнює нулю.

Цими умовами і користуються при визначенні опорних реакцій.

Приклад 3.3 Визначити опорні реакції для двоопорної шарнірно опертої балки (рис. 3.6).

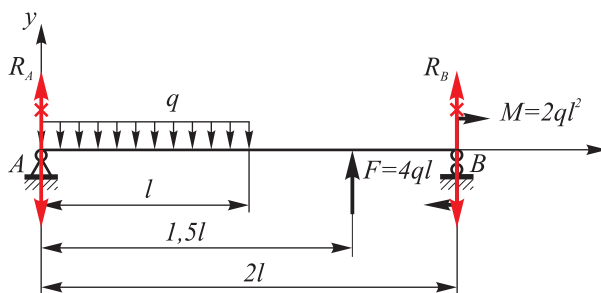


Рис. 3.6 До визначення опорних реакцій балки

Найраціональніше визначати реакції в шарнірних опорах з рівнянь рівноваги моментів зовнішніх сил відносно кожної з опор. При цьому слід дотримуватись такої послідовності:

- прикласти опорні реакції в довільних напрямках;
- скласти рівняння рівноваги моментів відносно опор, з яких визначити реакції (якщо реакція вийде від'ємною, то слід поміняти її напрямок на протилежний, і надалі реакцію вважати додатною);

- завершити розрахунок перевіркою правильності визначення реакцій, для чого можна скористатися умовою рівності нулю суми проєкцій сил на вертикальну вісь Y.

Зауваження 1. Знак моменту призначають, як прийнято у теоретичній механіці – додатний момент діє проти годинникової стрілки. Силу вважають додатною, коли її напрямок збігається з напрямком вибраної осі.

Зауваження 2 Якщо до балки прикладене розподілене навантаження, то, при визначенні моменту цього навантаження відносно деякої точки, його замінюють рівнодійною, яка, як відомо, дорівнює площі епюри навантаження і прикладена в центрі ваги цієї епюри.

Визначимо тепер опорні реакції балки (рис. 3.6), користуючись наведеними рекомендаціями.

Прикладемо реакції в опорах A і B, попередньо спрямувавши їх угору. Записуємо умови рівноваги моментів відносно кожної з опор, звідки знаходимо реакції:

$$\sum M_A = -ql \cdot 0,5l + F \cdot 1,5l + R_B \cdot 2l - M = 0;$$

$$R_B = \frac{0,5ql^2 - 6ql^2 + 2ql^2}{2l} = -1,75ql;$$

$$\sum M_B = -R_A \cdot 2l + ql \cdot 1,5l - F \cdot 0,5l - M = 0;$$

$$R_A = \frac{1,5ql^2 - 2ql^2 - 2ql^2}{2l} = -1,25ql.$$

Обидві реакції вийшли від'ємними. Тому на розрахунковій схемі змінюємо їх напрямки на протилежні. Після цього робимо перевірку:

$$\sum Y = -R_A - ql + F - R_B = -1,25ql - ql + 4ql - 1,75ql = 0.$$

Перевірка показала, що опорні реакції знайдені правильно.

Жодних проблем при визначенні опорних реакцій у розглянутому прикладі не виникло, оскільки їх кількість не перевищувала кількості рівнянь рівноваги, з яких вони знаходились (маємо дві реакції і два рівняння рівноваги для системи паралельних сил). Такі задачі називаються *статично визначними*.

Проте задача з визначення опорних реакцій може бути статично невизначною. Дійсно, якщо ми додавимо принаймні ще одну опору, перетворивши нашу балку в багатопробіжну нерозрізну, отримаємо три невідомі реакції. Кількість рівнянь рівноваги ж залишилось незмінною, тобто маємо два рівняння. Задача стала *статично невизначною*. З методами розв'язання таких задач ми познайомимось пізніше.

Ступінь статичної невизначеності нерозрізної багатопробіжної балки можна зменшити, поставивши проміжний шарнір (рис. 3.5 г). При цьому до наявних умов рівноваги додаються умови рівності нулю суми моментів сил, що лежать по один бік від шарніру, відносно центру цього шарніру.

3.2.2.2. Диференціальні залежності між компонентами зусиль при поперечному згині

Розглянемо зрівноважений стержень, що перебуває в умовах плоского поперечного згину (рис. 3.7 а). Виділимо елемент цього стержня довжиною dx . На нього діють зовнішнє розподілене навантаження інтенсивністю $q(x)$, яке, через малість елемента, можна вважати рівномірно розподіленим, та внутрішні зусилля в перерізах A і B (рис. 3.7 б).

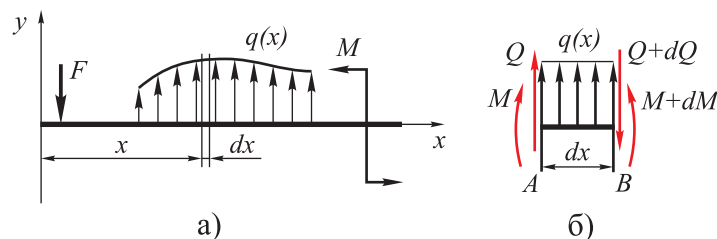


Рис. 3.7 Стержень в умовах плоского поперечного згину:
а – схема навантаження; б – елемент стержня під дією зовнішніх та внутрішніх сил

Запишемо рівняння рівноваги елемента стержня:

$$\sum Y = Q + qdx - (Q + dQ) = 0; \quad (3.2)$$

$$\Sigma M_B = Qdx + qdx \frac{dx}{2} + M - (M + dM) = 0. \quad (3.3)$$

З рівняння (3.2) отримаємо залежність між поперечною силою в перерізі та інтенсивністю навантаження:

$$q = \frac{dQ}{dx}. \quad (3.4)$$

Нехтуючи в рівнянні (3.3) добутком $qdx \frac{dx}{2}$ як величиною другого порядку малості, та беручи до уваги співвідношення (3.4), отримаємо диференціальні залежності між зусиллями при поперечному згині:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{dM}{dx} \\ q &= \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Згідно з отриманими залежностями, між епюрами розподілу навантаження, поперечної сили та моменту існують такі ж залежності, як і між графіками функції та її похідної, відомими з математичного аналізу. Це значно полегшує побудову епюр внутрішніх зусиль та дає надійний інструмент для перевірки правильності виконаних побудов.

3.2.2.3. Правило знаків для поперечної сили і згинального моменту в балці

Поперечна сила в перерізі вважається додатною, якщо зовнішнє навантаження, що її викликає, намагається повернути частину балки відносно перерізу за годинниковою стрілкою. Якщо ж цей поворот відбувається проти годинникової стрілки, то поперечна сила вважається від'ємною.

Еюра моментів, як правило, будується на стиснених волокнах. Тоді у перерізі балки згинальний момент вважається додатним, якщо навантаження, яке його викликає, деформує балку таким чином, що стискаються верхні волокна. Якщо ж стискаються нижні волокна балки, то згинальний момент вважається від'ємним.

На рис. 3.8 показані приклади визначення знаків внутрішніх зусиль в перерізах балки згідно зі сформульованими правилами (знаки зусиль вказані на епюрах).

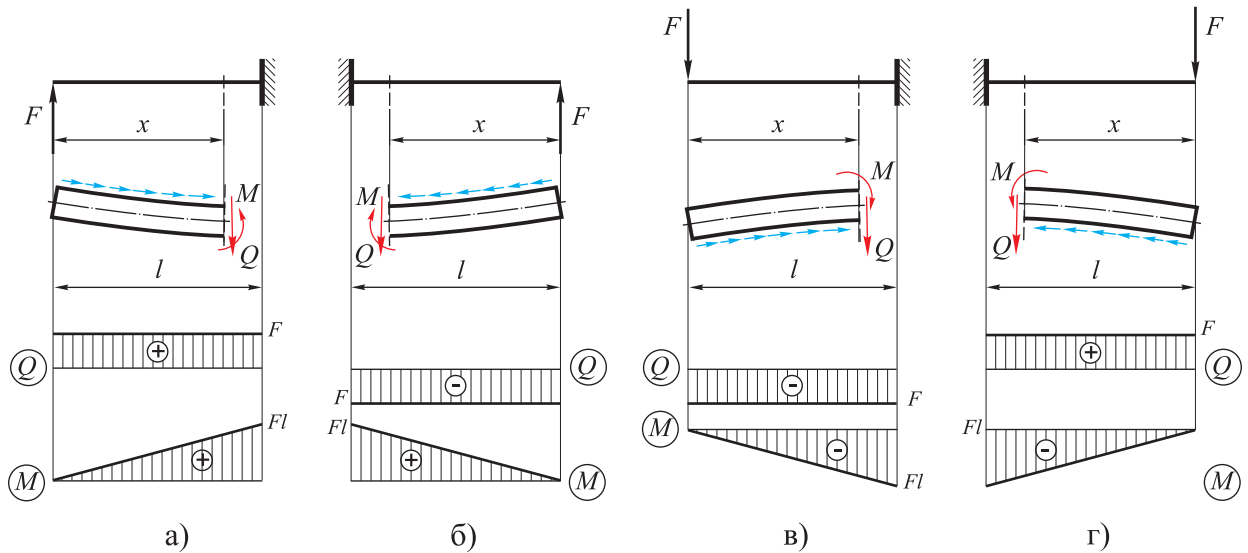


Рис. 3.8 До визначення знаків внутрішніх зусиль у перерізах консольної жорстко защемленої балки: а, б – стиснені верхні волокна; в, г – стиснені нижні волокна.

Приклад 3.4 Застосувавши сформульовані правила знаків, для консольної жорстко защемленої балки (рис. 3.8 а), визначити внутрішні зусилля та побудувати їх епюри.

Оскільки балка консольна жорстко защемлена, необхідності у визначенні опорних реакцій немає. Балка має одну ділянку, в межах якої проводимо переріз на відстані x від вільного кінця.

Вкажемо границі ділянки та запишемо умови рівноваги відітнутої частини балки. При цьому врахуємо знаки зусиль згідно з прийнятими правилами:

- поперечна сила в перерізі $Q > 0$, оскільки сила F намагається обертати частину балки відносно перерізу за годинниковою стрілкою;
- згинальний момент у перерізі теж додатний, оскільки момент сили F , згинаючи балку, стискає верхні волокна.

$$I. 0 \leq x \leq l$$

$$Q(x) = F;$$

$$M(x) = Fx.$$

Згідно з рівнянням рівноваги поперечна сила постійна по всій довжині балки, а згинальний момент змінюється за лінійним законом. Його епюру зображаємо прямою лінією, провівши її через кінці ординат, що відповідають значенням моментів на границях ділянки: при $x = 0$ $M = 0$; при $x = l$ $M = Fl$.

Для решти схем, зображених на рис. 3.8, епюри побудовані за схожою методикою.

Слід відзначити, що ніякого фізичного змісту за сформульованими правилами знаків для внутрішніх зусиль при поперечному згині немає. Проте ці правила дозволяють при побудові епюр скористатися властивостями та взаємозалежностями графіків функції та її похідної, які в математичному аналізі пов'язані з правою системою координат.

Пригадаємо деякі з цих властивостей. Для ілюстрації скористаємось епюрами Q і M , представленими на рис. 3.8, пам'ятаючи, що, згідно з диференціальними залежностями між зусиллями при згині (3.5), еюра згинальних моментів M є графіком функції, а еюра поперечних сил Q – графіком її похідної.

1. Якщо похідна в даному інтервалі додатна, то функція зростає (рис. 3.8 а і г), а якщо від'ємна – то спадає (рис. 3.8 б і в).
2. Графік функції завжди є лінією вищого порядку у порівнянні з графіком її похідної. Так, на рис. 3.8 епюри моментів окреслені похилими прямими лініями, а епюри поперечних сил – прямі, паралельні базам, тобто константи.
3. Якщо графік похідної перетинає вісь абсцис ($Q=0$), то на графіку функції – екстремум.
4. Розрив на графіку похідної відповідає зламу на графіку функції

Детальніше особливості епюр Q і M розглянемо в наступному пункті.