Лекція №5

3.2.2.4. Особливості епюр поперечних сил і згинальних моментів

Перш, ніж сформулювати особливості епюр при поперечному згині, розглянемо кілька типових прикладів, які дозволять нам ці особливості проілюструвати.

Приклад 3.9 *Побудувати епюри Q і M для однопрогонної балки, навантаженої зосередженою силою F=10 кН (рис. 3.9).*

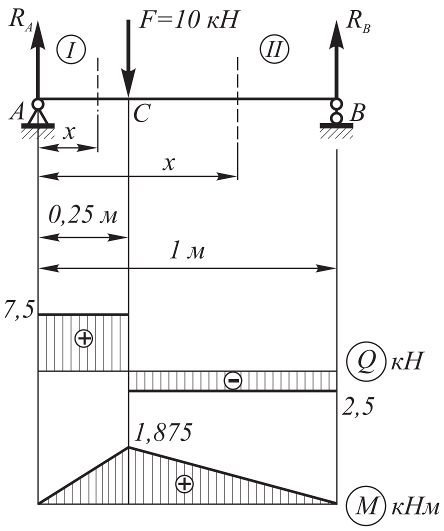

Рис. 3.9 Шарнірно оперта однопрогонна балка (*до прикладу* 3.9)

Знайдемо опорні реакції з умов рівноваги моментів відносно опор.

$$\sum M_A = -F \cdot 0,25 + R_B \cdot 1 = 0;$$
$$R_B = 10 \cdot 0,25 = 2,5 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = F \cdot 0,75 - R_A \cdot 1 = 0;$$
$$R_A = 10 \cdot 0,75 = 7,5 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum Y = R_A - F + R_B = 7,5 - 10 + 2,5 = 0.$$

Розбиваємо балку на ділянки. На кожній ділянці проводимо перерізи і записуємо умови рівноваги для лівих частин балки.

$I.\ \ 0 \le x \le 0,25$ *м*

$$Q(x) = R_A = 7,5 \text{ кН};$$
$$M(x) = R_A x = 7,5x.$$

При $x = 0$ $M = 0$ *; при* $x = 0,25$ *м* $M = 1,875$ *кНм*

$II.\ \ 0,25$ *м* $\le x \le 1$ *м*

$$Q(x) = R_A - F = 7,5 - 10 = -2,5 \text{ кН};$$
$$M(x) = R_A x - F(x - 0,25) = 7,5x - 10(x - 0,25) = 2,5 - 2,5x.$$

При $x = 0,25$ *м* $M = 1,875$ *кНм ; при* $x = 1$ *м* $M = 0$.

За отриманими даними будуємо епюри Q і M.

Приклад 3.10 *Побудувати епюри Q і M для однопрогонної балки, навантаженої зосередженим моментом M=*20 *кНм (рис.* 3.10*).*

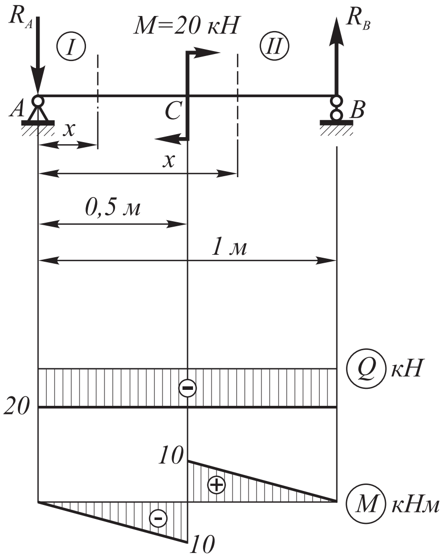

Рис. 3.10 Шарнірно оперта однопрогонна балка (*до прикладу* 3.10)

Знайдемо опорні реакції.

$$\sum M_A = -M + R_B \cdot 1 = 0;$$
$$R_B = 20\ кН;$$

$$\sum M_B = R_A \cdot 1 - M = 0;$$
$$R_A = 20\ кН.$$

Перевірка:

$$\sum Y = R_A - R_B = 20 - 20 = 0.$$

Розбиваємо балку на ділянки. На кожній ділянці проводимо перерізи і записуємо умови рівноваги для лівих частин балки.

I. $0 \le x \le 0,5\ м$

$$Q(x) = -R_A = -20\ кН;$$
$$M(x) = -R_A x = -20x.$$

При $x = 0$ $M = 0$*; при* $x = 0,5\ м$ $M = -10\ кНм$.

II. $0,5\ м \le x \le 1\ м$

$$Q(x) = -R_A = -20\ кН;$$
$$M(x) = -R_A x + M = 20x - 20.$$

При $x = 0,5\ м$ $M = 10\ кНм$*; при* $x = 1\ м$ $M = 0$.

За отриманими даними будуємо епюри Q і M.

В обох прикладах поперечні сили на ділянках балок – величини сталі. Їх епюри окреслені прямим, паралельними базам (див. рис. 3.9 *і* 3.10*). Згинальні моменти – лінійні функції довжини, а епюри – прямі лінії. Їх проводимо через кінці ординат, обчислених на границях ділянок і відкладених від базових ліній у вибраному масштабі.*

Приклад 3.11 *Побудувати епюри Q і M для однопрогонної балки, на яку діє рівномірно розподілене навантаження з інтенсивністю q=*10 *кН/м (рис.* 3.11*).*

В даному випадку опорні реакції необов'язково визначати з умов рівноваги балки. Оскільки рівнодійна рівномірно розподіленого навантаження прикладена посередині прогону (проходить через центр ваги епюри навантаження, яка є прямокутником), а її величина дорівнює площі цього прямокутника ql, тобто добутку інтенсивності на довжину лінії розподілу, то очевидно, що $R_A = R_B = ql/2$.

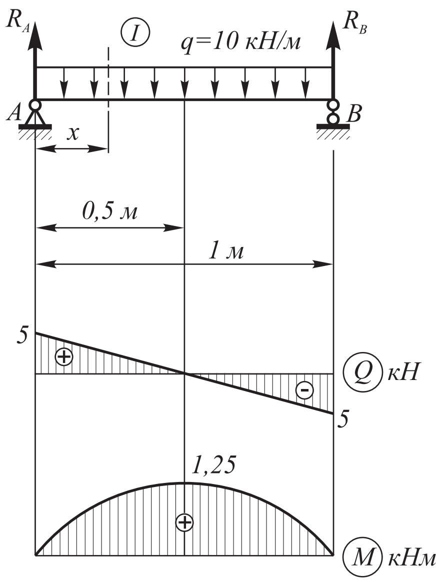

Рис. 3.11 Шарнірно оперта однопрогонна балка (*до прикладу* 3.11)

Балка має лише одну ділянку АВ. Проводимо переріз і записуємо умову рівноваги для лівої частини балки.

$$I.\ 0 \le x \le 1\ м$$

$$Q(x) = R_A - qx = 5 - 10x;$$

$$M(x) = R_A x - qx\frac{x}{2} = 5x - 5x^2.$$

Тут рівнодійна рівномірно розподіленого навантаження на ділянці довжиною x дорівнює площі прямокутника зі сторонами x і q. Прикладена рівнодійна в центрі ваги прямокутника, тобто на відстані $x/2$ *від перерізу.*

При $x = 0$ $Q = 5\ кН$, $M = 0$; *при* $x = 1\ м$ $Q = -5\ кН$, $M = 0$.

Згідно з першим рівнянням поперечна сила змінюється за лінійним законом і її епюра окреслюється прямою лінією, що пройде через кінці знайдених на границях ділянки ординат сили.

Епюра моментів, згідно з другим рівнянням, є параболою. Причому опуклість параболи має бути спрямованою вгору, адже інтенсивність сили q, згідно з диференціальними залежностями (3.5), є другою похідною від згинального моменту M, а знак її від'ємний, бо q діє вниз, тобто проти додатного напрямку вертикальної осі.

Епюра поперечних сил перетинає базову лінію, тобто в цьому перерізі $Q = 0$. *Оскільки епюра сил є графіком похідної по відношенню до епюри моментів, то на епюрі M тут має бути екстремум. З епюри Q видно, що переріз цей розташований посередині прогону. Отже* $M\big|_{x=0,5\ м} = 5\cdot 0,5 - 5(0,5)^2 = 1,25\ кНм.$

Зауваження 1. *В загальному випадку положення перерізу, де момент набуває екстремального значення, знаходять, прирівнявши до нуля вираз для поперечної сили на ділянці, де має місце екстремум. Для прикладу, який розглядається, маємо:*

$$Q(x) = R_A - qx = 0.\ \textit{Звідси}\ x = \frac{R_A}{q} = \frac{5}{10} = 0,5\ м.$$

Тобто екстремум моменту дійсно має місце посередині прогону.

Епюру моментів будуємо по трьох точки: дві з них – це кінці ординат моментів на границях ділянки, а третя – у перерізі, де має місце екстремальне його значення.

Сформулюємо основні особливості епюр поперечних сил і згинальних моментів

1. Якщо до балки в деякому перерізі прикладена зовнішня зосереджена сила, то на епюрі поперечних сил *Q* в цьому перерізі має місце стрибок на величину прикладеної сили у напрямку її дії, а на епюрі згинальних моментів *M* – злам, вістря якого спрямоване назустріч силі (див. рис. 3.9).

Примітка 3.4. ***Усі особливості епюр поперечних сил і згинальних моментів формулюються для правої системи координат.***

2. В перерізі, де на балку діє зосереджений момент, на епюрі M має місце стрибок на величину прикладеного моменту у напрямку його дії (віті епюри до і після стрибка мають бути паралельними, якщо в цьому ж перерізі не прикладена зовнішня зосереджена сила). На епюрі Q при цьому жодних змін не спостерігається (див. рис. 3.10).

3. В шарнірній кінцевій опорі згинальний момент завжди відсутній (див. приклад 3.9 – 3.11: опори A і B), за винятком випадку, коли там прикладений зовнішній момент.

4. На ділянках балки, вільних від розподіленого навантаження, епюра поперечних сил Q окреслюється прямою, паралельною базі (графік константи), а епюра згинальних моментів M – прямою похилою лінією, що узгоджується з диференціальними залежностями між цими епюрами (див. приклади 3.9 і 3.10).

5. Якщо на ділянці балки діє рівномірно розподілене навантаження, то епюра Q окреслюється прямою похилою лінією, а епюра M – квадратичною параболою, опуклість якої спрямована назустріч інтенсивності розподіленого навантаження (див. приклад 3.11).

6. Якщо епюра Q на ділянці додатна, то тут епюра M зліва направо зростає, а якщо від'ємна – то спадає.

7. В перерізах, де епюра Q перетинає базу ($Q=0$), на епюрі М має місце екстремум (див. приклад 3.11).

Розглянемо ще кілька прикладів побудови епюр для балок

Приклад 3.5 *Побудувати епюри Q і M для жорстко защемленої консольної балки (рис. 3.12).*

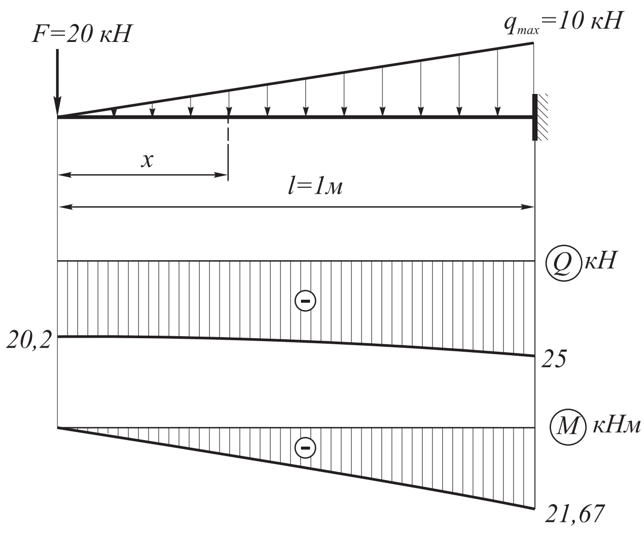

Рис. 3.12 Консольна балка з нерівномірно розподіленим навантаженням

Балка має одну ділянку. Обираємо початок відліку x на вільному кінці і записуємо рівняння рівноваги для лівої частини балки:

I. $0 \le x \le 1\ м$

$$Q(x) = -F - \frac{1}{2}\cdot\frac{q_{\max}}{l}x\cdot x = -20-5x^2;$$

$$M(x) = -Fx - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{q_{\max}}{l}x^2\right)\frac{1}{3}x = -20x-\frac{5}{3}x^3.$$

Тут рівнодійна розподіленого навантаження на ділянці довжиною x дорівнює площі трикутника зі сторонами x і $q(x)=\frac{q_{\max}}{l}x$. *Прикладена рівнодійна в центрі ваги цього трикутника, тобто на відстані* $x/3$ *від перерізу.*

Епюра сили Q, згідно з рівнянням рівноваги, є квадратичною параболою, причому, монотонно спадаючою (без екстремумів), бо розподілене навантаження, будучи похідною від сили Q, не змінює знаку. Те ж саме стосується і епюри M, для якої епюра Q є графіком похідної. Епюра M є кривою третього порядку. На епюрі M маємо опуклість, спрямовану назустріч інтенсивності розподіленого навантаження.

Бачимо також, що в перерізі, де прикладена зосереджена сила F, має місце стрибок на епюрі сил

Проведений аналіз з використанням диференціальних залежностей при згині (3.5) підтвердив правильність виконаних розрахунків і побудов.

Приклад 3.13 *Побудувати епюри Q і M для шарнірно опертої двоопорної балки з консольною частиною (рис.* 3.13*)*

Знайдемо опорні реакції з умов рівноваги моментів відносно опор.

$$\sum M_A = -F \cdot l + ql \cdot 0,5l + R_B \cdot l - M = 0;$$

$$R_B = \frac{-0,5ql^2 + 0,8ql^2 + 4ql^2}{l} = 4,3ql;$$

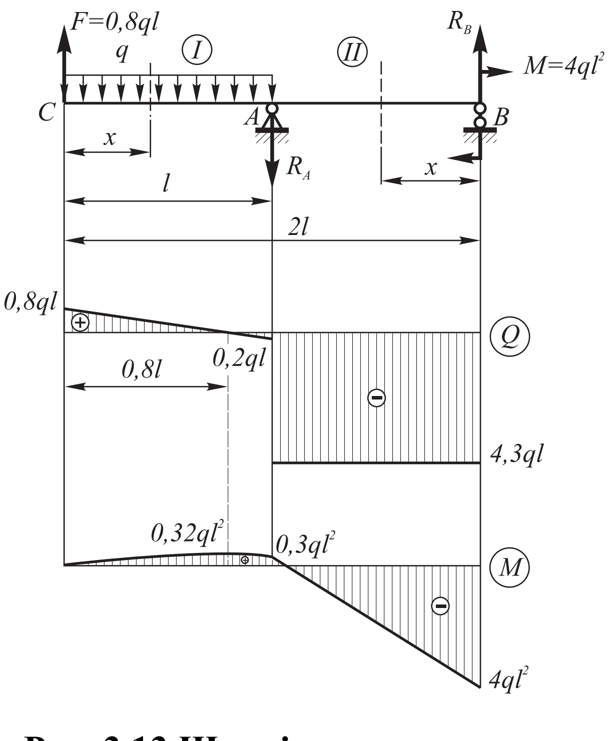

Рис. 3.13 Шарнірно оперта двоопорна нерозрізна балка з консольною частиною

$$\sum M_B = -F \cdot 2l + ql \cdot 1,5l + R_A \cdot l - M = 0;$$

$$R_A = \frac{1,6ql^2 - 1,5ql^2 + 4ql^2}{l} = 4,1ql.$$

Перевірка:

$$\sum Y = F - ql - R_A + R_B = 0,8ql - ql - 4,1ql + 4,3ql = 0.$$

Балка має дві ділянки. На першій ділянці (CA) проведемо переріз і розглянемо умови рівноваги лівої частини балки.

I. $0 \le x \le l$ м

$$Q(x) = F - qx = 0,8ql - qx;$$

$$M(x) = Fx - \frac{qx^2}{2} = 0,8qlx - 0,5qx^2.$$

На другій ділянці (AB) розглянемо умови рівноваги частини балки, розташованої справа від перерізу.

II. $0 \le x \le l$

$$Q(x) = -R_B = -4,3ql;$$

$$M(x) = R_B x - M = 4,3qlx - 4ql^2.$$

Будуємо епюри на кожній ділянці, користуючись отриманими рівняннями рівноваги.

На першій ділянці епюра поперечних сил – пряма лінія. Знайдемо значення сили на границях ділянки: при $x = 0$ $Q = 0,8ql$*; при* $x = l$ $Q = 0,8ql - ql = -0,2ql$*. Відкладаємо від базової лінії в певному масштабі відповідні ординати і будуємо епюру (див. рис.* 3.13*).*

На другій ділянці поперечна сила – константа: $Q = -4,3ql$. *Будуємо епюру як пряму, паралельну базі.*

На першій ділянці епюра згинальних моментів, згідно з рівнянням для моментів, окреслена параболою, опуклість якої спрямована назустріч інтенсивності розподіленого навантаження. Оскільки поперечна сила на цій ділянці змінює знак, то має місце екстремум на епюрі моментів. Абсцису екстремуму знайдемо, прирівнявши вираз для поперечної сили на першій ділянці до нуля: $Q(x) = 0,8ql - qx = 0$. *Звідси* $x = 0,8l$. *Щоб побудувати епюру моментів у вигляді параболи, нам вистачить трьох ординат: на границях ділянки і в місці екстремуму. Таким чином, при* $x = 0$ $M = 0$; *при* $x = 0,8l$ $M = 0,32ql^2$; *при* $x = l$ $M = 0,3ql^2$.

На другій ділянці епюра згинальних моментів – пряма лінія. Будуємо її, знайшовши попередньо значення моментів на границях ділянки: при $x = 0$ $M = 4ql^2$; *при* $x = l$ $M = 0,3ql^2$.

Порівнюючи епюри поперечних сил і згинальних моментів, бачимо, що коли епюра сил – пряма лінія, епюра моментів – парабола (перша ділянка), а коли епюра сил – константа, епюра моментів – похила пряма лінія (друга ділянка). На ділянках балки, де сила додатна, момент зліва направо зростає, а де сила від'ємна, там момент спадає. Отже, диференціальні залежності виконуються. Крім того, в перерізах, де на балку діють зосереджені сили, на епюрі сил маємо стрибки, величина яких дорівнює прикладеній силі, а напрямки стрибків відповідають знакам сил. Наприклад, в перерізі, де прикладена реакція $R_A = 4,1ql$, *має місце стрибок* $\Delta Q = 4,3ql - 0,2ql = 4,1ql$, *причому стрибок відбувається у напрямку від'ємних значень сили, якщо рухатися вздовж базової лінії зліва направо. Це відповідає знаку сили, яка від'ємна, бо реакція* R_A *діє проти годинникової стрілки відносно перерізів, що знаходяться справа від її лінії дії.*

В перерізі, де до балки прикладений зосереджений зовнішній момент (опора В), на епюрі моментів має місце стрибок на величину цього моменту у напрямку стиснених волокон, тобто – вниз.

Проведений аналіз підтвердив правильність побудови епюр.

Приклад 3.14 *Побудувати епюри Q і M для шарнірно опертої двопрогонної розрізної балки (рис.* 3.14*)*

Визначимо спочатку реакцію в опорі С з умови рівності нулю суми моментів сил відносно шарніру Е, розташованих справа від нього:

$$\sum M_E = q \cdot 0,5l \cdot 0,25l - R_C \cdot 0,5l = 0;$$

$$R_C = \frac{q \cdot 0,5l \cdot 0,25l}{0,5l} = 0,25ql;$$

Решту реакцій знайдемо з умов рівноваги моментів відносно опор А і В.

$$\sum M_A = -M + R_B \cdot l + ql \cdot 1,5l - R_C \cdot 2l + = 0;$$

$$R_B = \frac{3ql^2 - 1,5ql^2 + 0,5ql^2}{l} = 2ql;$$

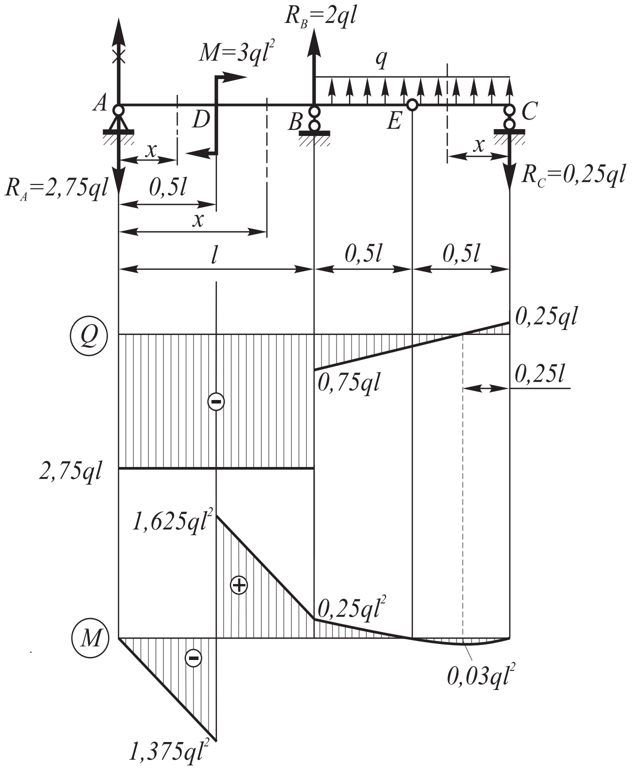

Рис. 3.14 Шарнірно оперта двопрогонна розрізна балка

$$\sum M_B = -M - R_A \cdot l + ql \cdot 0,5l - R_C \cdot l = 0;$$

$$R_A = \frac{-3ql^2 + 0,5ql^2 - 0,25ql^2}{l} = -2,75ql;$$

Відкоригувавши напрямок реакції R_A у відповідності до отриманого в результаті обчислень знаку, виконаємо перевірку правильності проведених розрахунків:

$$\sum Y = -R_A + R_B - ql + R_c =$$
$$= -2,75ql + 2ql + ql - 0,25ql = 0$$

Беручи до уваги, що шарнір не вносить жодних особливостей у принцип поділу балки на ділянки, виділяємо три ділянки: AD, DB і BC.

На кожній ділянці проводимо переріз і записуємо рівняння рівноваги для вказаних частин балки (див. рис. 3.14*).*

I. $0 \le x \le 0,5l$

$$Q(x) = -R_A = -2,75ql;$$
$$M(x) = -R_A x = -2,75qlx.$$

II. $0,5 \le x \le l$

$$Q(x) = -R_A = -2,75ql;$$
$$M(x) = -R_A x + M = -2,75qlx + 3ql^2.$$

III. $0 \le x \le l$

$$Q(x) = R_C - qx = 0,25ql - qx;$$
$$M(x) = -R_C x + \frac{qx^2}{2} = -0,25qlx + \frac{qx^2}{2}.$$

Будуємо епюру поперечних сил. На першій і другій ділянках $Q(x) = -2,75ql$*. На третій ділянці, де діє рівномірно розподілене навантаження, маємо похилу пряму, для побудови якої знаходимо, що при* $x=0$ $Q = 0,25ql$*, а при* $x = l$ $Q = 0,25ql - ql = -0,75ql$.

Епюра моментів на першій і другій ділянках – прямі лінії, які на границях ділянок проходять через такі ординати: на першій ділянці при $x=0$ $M=0$*; при* $x = 0,5l$ $M = -2,75ql \cdot 0,5l = -1,375ql^2$*; на другій ділянці при* $x = 0,5l$ $M = -2,75ql \cdot 0,5l + 3ql^2 = 1,625ql^2$*; при* $x = l$ $M = -2,75ql \cdot l + 3ql^2 = 0,25ql^2$*. На третій ділянці маємо параболу з опуклістю вниз (назустріч інтенсивності розподіленого навантаження). Оскільки епюра сил перетинає базу, то в цьому місці маємо екстремум на епюрі моментів. Знайдемо абсцису екстремуму:* $Q = R_C - qx = 0,25ql - qx = 0$*. Звідси*

$x = 0,25l$. *Тоді* $M_{\max} = -0,25ql \cdot 0,25l + \dfrac{q(0,25l)^2}{2} = -0,03125ql^2$. *За умовою епюра пройде через проміжний шарнір E. Ще дві ординати моменту знайдемо на границях ділянки: при* $x = 0$ $M = 0$*; при* $x = l$ $M = -0,25ql^2 + 0,5ql^2 = 0,25ql^2$.

Перевірку правильності побудови епюр пропонується провести самостійно.

3.2.3. Побудова епюр внутрішніх зусиль для плоских рам

Рамою називають стержень з ламаною віссю.

Обмежимось розглядом особливостей побудови епюр для плоских рам, що складаються з прямолінійних частин.

До особливостей побудови епюр внутрішніх зусиль для рам слід віднести такі:

1) в загальному випадку в перерізах плоскої рами виникають три внутрішніх зусилля: поздовжня сила *N*, поперечна сила *Q* та згинальний момент *M*, а значить будувати потрібно три епюри;
2) при визначенні зусиль користуються *правилами знаків*, які були сформульовані раніше для розтягу-стиску та поперечного згину (лише знак згинального моменту спеціально не встановлюється, а керуються тим, які волокна стиснені, вибираючи знак моменту на власний розсуд);
3) ординати зусиль в певному масштабі відкладають від базової лінії, яка формою повторює ламану вісь стержня.

Розглянемо приклади побудови епюр внутрішніх зусиль для плоских рам.

Приклад 3.15 *Побудувати епюри N, Q і M для плоскої рами, жорстко защемленої в перерізі D (рис. 3.15)*

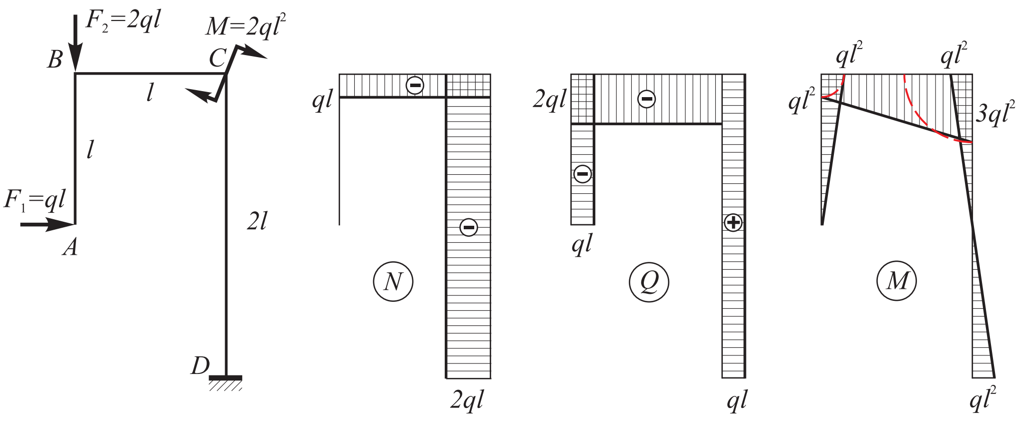

Рис. 3.15 Жорстко защемлена плоска рама

На раму діють лише зосереджені навантаження. Нехтуючи власною вагою стержнів, робимо висновок, що всі епюри будуть окреслені прямими лініями. Це значно полегшує побудову епюр, оскільки можна не записувати рівнянь рівноваги для частини рами, відітнутої *довільно проведеним перерізом, як це ми робили для балок. Досить визначити величини зусиль у характерних перерізах (на границях ділянок, до яких відносяться також точки зламів осі стержня).*

Оскільки рама має одну опору, то визначати реакцій у ній ми не будемо, а всі обчислення вестимемо, рухаючись від вільного кінця, відкидаючи ту частину стержня, що містить опору.

Побудуємо спочатку епюру поздовжніх сил N.

На ділянці АВ $N = 0$*, адже з боку вільного кінця навантажень, які б проектувались на вісь цієї ділянки, немає. На ділянці ВС і СD діють стисні сили* $N = -F_1 = -ql$ *і* $N = -F_2 = -2ql$ *відповідно. За отриманими даними будуємо епюру N.*

Примітка 3.5. ***Додатні ординати на епюрах поздовжніх і поперечних сил для рам прийнято відкладати з зовнішнього боку її контуру. Якщо конфігурація рами не дозволяє однозначно визначити її зовнішню частину, тоді відкладають ординати на власний розсуд, обов'язково вказуючи знак сили.***

Будуємо епюру поперечних сил.

На ділянці АВ вздовж поперечної осі з боку вільного кінця діє сила F_1*, яка намагається обертати частину рами, розташовану нижче від умовно проведеного довільного перерізу, проти годинникової стрілки. Тобто в будь-якому перерізі на цій ділянці діє поперечна сила* $Q = -F_1 = -ql$*. На ділянці ВС діє сила* $Q = -F_2 = -2ql$*. А на ділянці CD – поперечна сила* $Q = F_1 = ql$*. Тут знак сили знаходимо, перенісши силу* F_1 *паралельно самій собі в точку С. Тоді відносно довільного перерізу на цій ділянці сила* F_1 *обертатиме частину рами за годинниковою стрілкою. Відклавши в масштабі отримані ординати, будуємо епюру поперечних сил.*

Епюру згинальних моментів будуємо, визначаючи їх значення на границях ділянок рами. Вважатимемо момент додатним, коли він стискатиме зовнішні волокна стержнів рами.

На ділянці АВ маємо: в точці А $M_A = 0$*; в точці В* $M_B = -F_1 \cdot l = -ql^2$.

На ділянці ВС: в точці В $M_B = -F_1 \cdot l = -ql^2$*; в точці С* $M_C = -F_1 \cdot l - F_2 \cdot l = -ql^2 - 2ql^2 = -3ql^2$.

На ділянці CD: в точці С $M_C = -F_1 \cdot l - F_2 \cdot l + M = -ql^2 - 2ql^2 + 2ql^2 = -ql^2$*; в точці D* $M_D = F_1 \cdot l - F_2 \cdot l + M = ql^2 - 2ql^2 + 2ql^2 = ql^2$.

Зауваження 1. *При визначенні знака згинального моменту від дії сили* F_1 *в перерізах стояка CD слід брати до уваги, в якому напрямку діє момент сили* F_1 *відносно даного перерізу, і в якому напрямку при цьому згинається стержень. Це дає можливість безпомилково визначати, які волокна стиснені, а які розтягнені. Так, відносно точки С момент сили* F_1 *діє проти годинникової стрілки, згинаючи стержень вліво, тобто стисненими є ліві волокна стержня і, відповідно, внутрішні волокна рами. Тому згинальний момент, викликаний силою* F_1*, у виразі для* M_C *взятий зі знаком мінус. А відносно точки D момент сили* F_1 *діє за годинниковою стрілкою, згинаючи стержень вправо, тобто стисненими є праві волокна стержня і, відповідно, зовнішні волокна рами. Тому згинальний момент від сили* F_1 *у виразі для* M_D *взятий зі знаком плюс.*

За отриманими даними будуємо епюру згинальних моментів, відкладаючи отримані ординати в бік стиснених волокон.

Примітка 3.6. ***Слід звернути увагу, що в точках зламів рами моменти на суміжних стержнях однакові і підлягають правилу циркульного переносу (точка C на рис. 3.15). Якщо ж у цій точці прикладений зосереджений момент, то різниця ординат на стержнях дорівнює величині цього моменту (точка D на рис. 3.15), що рівнозначно стрибку на епюрі моментів для прямого стержня.***

На епюрі згинальних моментів (рис. 3.15) циркульний перенос позначений дугами червоного кольору.

Приклад 3.16 *Побудувати епюри N, Q і M для двоопорної шарнірно опертої рами (рис. 3.16)*

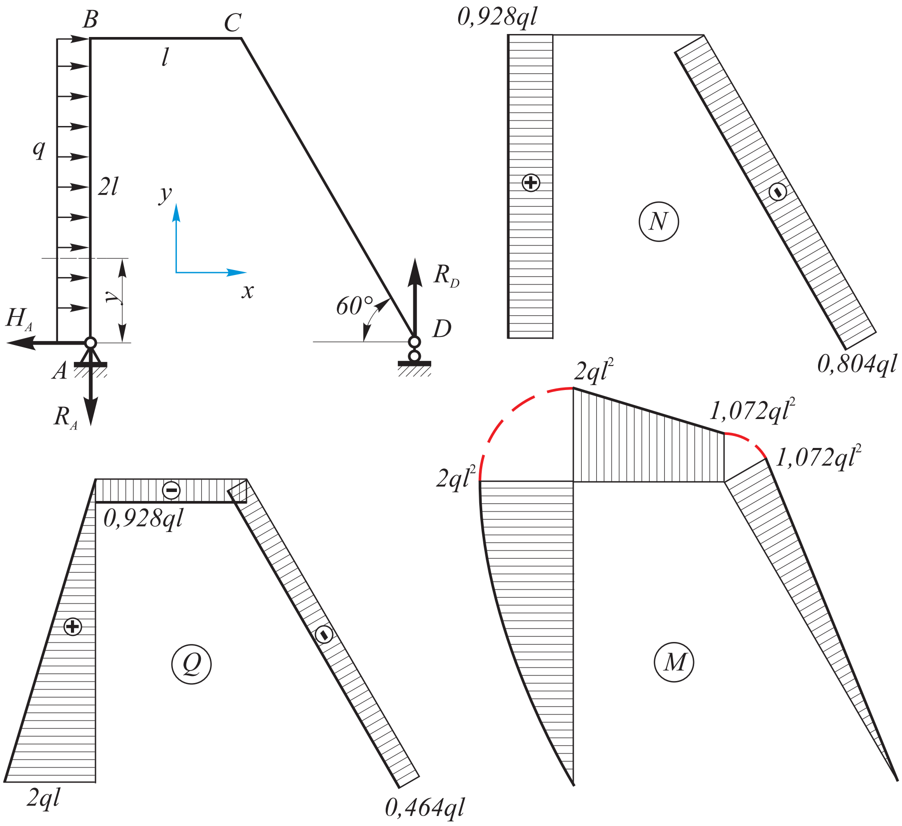

Рис. 3.16 Двоопорна рама

Знайдемо реакції в опорах з умов рівноваги рами.

$$\sum X = 2ql - H_A = 0 .$$

Звідси $H_A = 2ql$.

$$\sum M_A = -2ql \cdot l + R_D \left(l + 2l \cdot \text{tg}30° \right) = -2ql^2 + R_D \cdot 2{,}155l = 0 .$$

Звідси $R_D = 0{,}928ql$.

$$\sum Y = -R_A + R_D = -R_A + 0{,}928ql = 0 .$$

Звідси $R_A = 0{,}928ql$.

Побудуємо епюри внутрішніх сил.

На ділянці АВ діє поздовжня сила розтягу $N = R_A = 0{,}928ql$ *. На ділянці ВС поздовжня сила відсутня, оскільки, з умови рівноваги сил для лівої частини рами в проекції на вісь стержня ВС, в довільному перерізі маємо* $N = H_A - 2ql = 2ql - 2ql = 0$*. На ділянці CD поздовжня сила в довільному перерізі має зрівноважити проекцію сили* R_D *на вісь стержня CD. Отже* $N = -R_D \cos 30° = -0{,}928ql \cdot 0{,}866 = -0{,}804ql$ *.*

За отриманими даними будуємо епюру N.

Поперечна сила на ділянці АВ окреслюється похилою прямою, адже тут діє розподілене навантаження. Для її побудови знайдемо значення Q в перерізах А і В з умови рівноваги нижньої частини стояка АВ, якщо розрізати раму уявним перерізом на цій ділянці. В цьому випадку слід записати умову рівноваги, бо може статися, що в проміжному перерізі буде екстремум моменту і його положення треба буде визначати:

$$Q(y) = H_A - qy = 2ql - qy = q(2l - y)$$

При $y = 0$ $Q_A = 2ql$ *; при* $y = 2l$ $Q_B = 0$.

На ділянці ВС поперечна сила $Q = -R_A = -0{,}928ql$ *.*

На ділянці CD поперечна сила в довільному перерізі зрівноважує проекцію сили R_D *на поперечну вісь стержня, якщо розглядати рівновагу правої частини рами відносно цього перерізу:* $Q = -R_D \sin 30° = -0{,}928ql \sin 30° = -0{,}464ql$ *.*

За отриманими даними будуємо епюру Q.

Епюра згинального моменту М на ділянці АВ описується квадратичною параболою. екстремуму в проміжному перерізі тут не буде, оскільки епюра Q перетинає базу на границі ділянки в перерізі В. Тому знаходимо значення моменту лише на границях ділянки. В перерізі А $M_A = 0$ *; в перерізі В* $M_B = H_A \cdot 2l - 2ql^2 = 2ql \cdot 2l - 2ql^2 = 2ql^2$ *. Опуклість на епюрі, як відомо, спрямована назустріч інтенсивності розподіленого навантаження.*

На ділянці ВС епюра моментів – пряма похила лінія. Знайдемо значення моментів на границях ділянки, розглядаючи рівновагу лівої частини рами відносно умовного перерізі: в перерізі В $M_B = 2ql^2$ *(згідно з правилом циркульного переносу); в перерізі С* $M_C = H_A \cdot 2l - 2ql^2 - R_A l = 4ql^2 - 2ql^2 - 0{,}928ql^2 = 1{,}072ql^2$ *.*

На ділянці CD епюра М також окреслюватиметься прямою лінією. Ординати згинального моменту на границях цієї ділянки знайдемо, розглядаючи умову рівноваги правої частини рами відносно деякого умовного перерізу на цій ділянці. В перерізі D $M_D = 0$ *; в перерізі С* $M_C = R_D \cdot 2l\mathrm{tg}30° = 0{,}928ql \cdot 1{,}155l = 1{,}072ql^2$ *. Як бачимо, в перерізі С на ділянках ВС і CD моменти однакові, тобто правило циркульного переносу в точці зламу осі рами виконується.*

Будуємо епюру моментів на стиснених волокнах.

3.2.4. Особливості побудови епюр внутрішніх зусиль для криволінійних стержнів

Епюри внутрішніх зусиль для криволінійних стержнів обмежені кривими лініями, незалежно від типу навантаження. Тому, щоб точніше відобразити контур епюри, зусилля визначають не лише на границях ділянок чи в місцях екстремумів, як це було для прямих стержнів, а й у проміжних перерізах ділянок.

Примітка 3.7. ***Правило знаків для внутрішніх зусиль у криволінійних стержнях приймається таким, як для рам.***

Приклад 3.17 *Побудувати епюри N, Q і M для консольного жорстко защемленого стержня (рис. 3.17), вісь якого є дугою кола.*

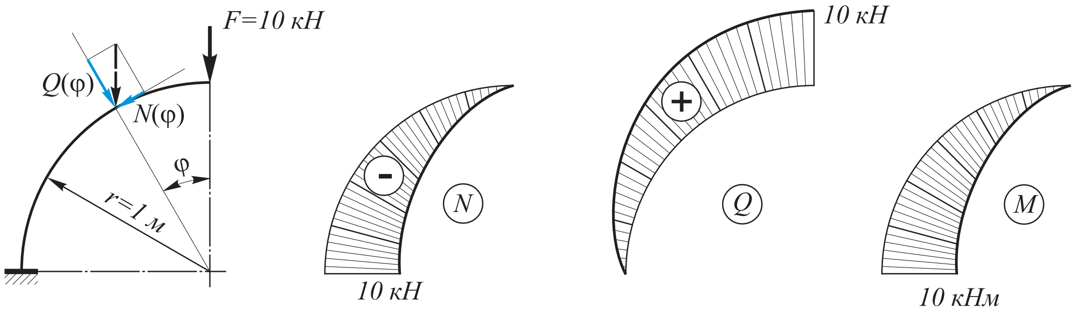

Рис. 3.17 Консольний криволінійний стержень

Стержень має одну ділянку. Задамо положення довільного перерізу у полярній системі координат і, йдучи від вільного кінця, запишемо вирази для внутрішніх зусиль в перерізі, користуючись умовами рівноваги правої частини стержня.

$$0 \le \varphi \le \pi/2$$
$$N(\varphi) = -F\sin\varphi;$$
$$Q(\varphi) = F\cos\varphi;$$
$$M(\varphi) = -Fr\sin\varphi.$$

Побудуємо епюри, визначивши зусилля для ряду послідовних положень перерізу. Дані обчислень зведені до табл. 3.1

***Табл* 3.1. Значення зусиль у перерізах криволінійного стержня (до прикладу 3.17)**

Зусилля	**Значення кута φ, град.**						
	0	15	30	45	60	75	90
***N*(φ),** *кН*	0	-2,588	-5	-7,071	-8,660	-9,659	-10
***Q*(φ),** *кН*	10	9,659	8,660	7,071	5	2,588	0
***M*(φ),** *кНм*	0	-2,588	-5	-7,071	-8,660	-9,659	-10

Епюри будуємо, відкладаючи в масштабі у відповідних перерізах ординати зусиль вздовж нормалі до базової лінії, яка в даному прикладі є чвертю кола, тобто вздовж радіуса.

Диференціальні залежності при згині криволінійних стержнів дещо відрізняються від тих, що були отримані для прямого стержня. Виведення цих залежностей можна знайти в [1, 2]. Тут наводимо їх без виводу:

$$\frac{dN}{d\varphi} = -Q\,; \quad \frac{dQ}{d\varphi} = N + qr\,; \qquad \frac{dM}{d\varphi} = Qr\,. \tag{3.6}$$

Приклад 3.18 *Побудувати епюри N, Q і M для двоопорного шарнірно опертого стержня, який складається з прямолінійної частини та криволінійної у вигляді дуги півкола (рис. 3.18).*

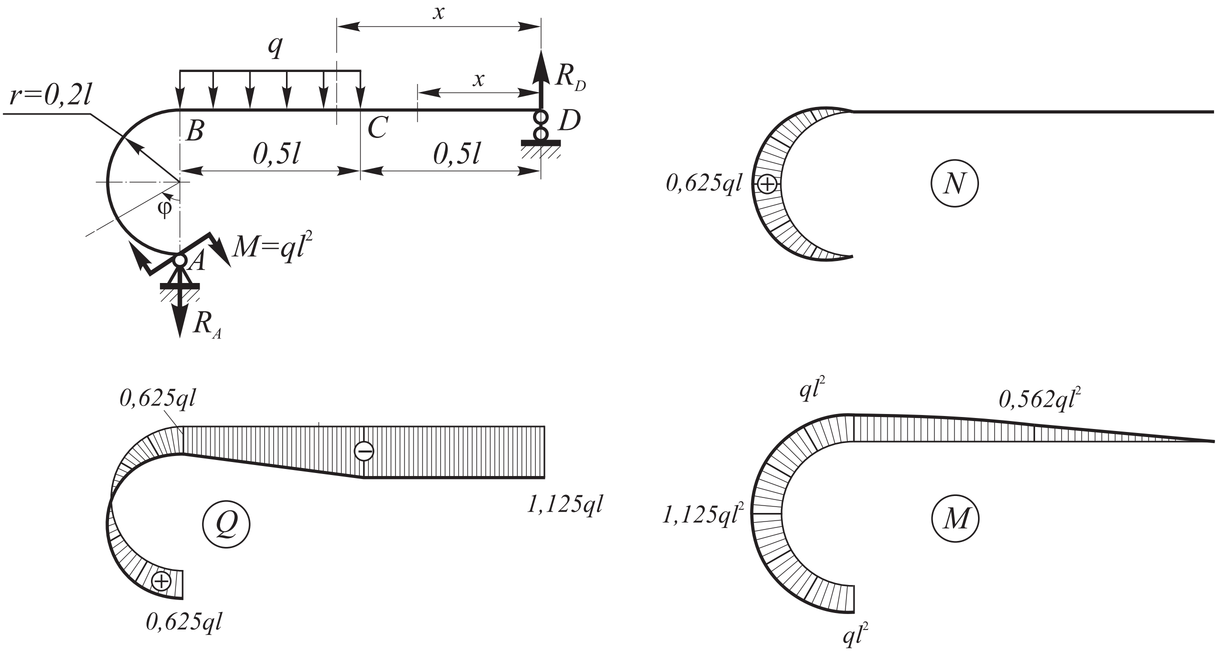

Рис. 3.18 Шарнірно опертий двоопорний стержень з криволінійною частиною

Тут ми маємо лише вертикально спрямовані реакції в опорах, оскільки в горизонтальному напрямку зовнішні сили не діють. Знайдемо їх з умов рівноваги моментів відносно опор:

$$\sum M_A = -M - 0,5ql \cdot 0,25l + R_D l = 0.$$

Звідси $R_D = \dfrac{ql^2 + 0,125ql^2}{l} = 1,125ql$.

$$\sum M_D = -M + R_A l + 0,5ql \cdot 0,75l = 0.$$

Звідси $R_A = \dfrac{ql^2 - 0,375ql}{l} = 0,625ql$.

Перевірка:

$$\sum Y = -R_A - 0,5ql + R_D = -0,625ql - 0,5ql + 1,125ql = 0.$$

Розбиваємо стержень на три ділянки: криволінійну AB та дві прямолінійні BC та CD.

Почнемо побудову епюр з криволінійної ділянки AB. Щоб записати умови рівноваги відносно зусиль у довільному перерізі, положення якого в полярних координатах визначається кутом φ, *(див. рис.* 3.18*), скористаємося схемою, зображеною на рис.* 3.19.

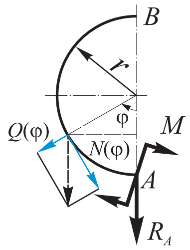

Рис. 3.19 До прикладу 3.18

Ділянка AB: $0 \le \varphi \le \pi$.

$N(\varphi) = R_A \sin\varphi = 0,625ql \sin\varphi;$

$Q(\varphi) = R_A \cos\varphi = 0,625ql \cos\varphi;$

$M(\varphi) = R_A r \sin\varphi + M = 0,125ql^2 \sin\varphi + ql^2 =$

$= ql^2 (0,125 \sin\varphi + 1).$

Для побудови епюр складемо таблицю 3.2 зі значеннями зусиль для ряду послідовних положень перерізу.

***Табл.* 3.2. Значення зусиль у перерізах криволінійної ділянки стержня (до прикладу 3.18)**

Зусилля	**Значення кута φ, град.**						
	0	30	60	90	120	150	180
N(φ)	0	0,312*ql*	0,541*ql*	0,625*ql*	0,541*ql*	0,312*ql*	0
Q(φ)	0,625*ql*	0,541*ql*	0,312*ql*	0	-0,312*ql*	-0,541*ql*	-0,625*ql*
M(φ)	ql^2	1,062ql^2	1,108ql^2	1,125 ql^2	1,108ql^2	1,062ql^2	ql^2

На прямолінійній частині стержня методика побудови епюр така ж, як і для балок.

Ділянка DC: $0 \le x \le 0,5l$.

$N(x) = 0;$

$Q(x) = -R_D = -1,125ql;$

$M(x) = R_D x = 1,125qlx.$

При $x = 0$ $M = 0$*; при* $x = 0,5l$ $M = 0,562ql^2$.

Ділянка CB: $0,5l \le x \le l$.

$N(x) = 0;$

$Q(x) = -R_D + q(x - 0,5l) = q(x - 1,625l);$

$$M(x) = R_D x - \frac{1}{2} q (x - 0,5l)^2 = 1,125qlx - 0,5q(x - 0,5l)^2.$$

При $x = 0,5l$ $Q = -1,125ql$ *і* $M = 0,562ql^2$*; при* $x = l$ $Q = -0,625ql$ *і* $M = ql^2$.

На ділянці CB діє розподілене навантаження, тому епюра моментів окреслена параболою. Оскільки сила Q в межах ділянки знаку не змінює, то екстремуму моменту немає і знайдених значень зусиль для побудови епюр достатньо.

*Для перевірки правильності виконаних побудов скористаємось диференціальними залежностями: для криволінійної частини стержня – це співвідношення (*3.6*), а для прямолінійної частини – (*3.5*).*

Так, в перерізах A і B на криволінійній ділянці, де поздовжня сила N дорівнює нулю, поперечна сила набуває максимальних значень, при цьому сила N додатна в межах всієї *ділянки, а сила Q монотонно спадає . В перерізі, де* $Q=0$*, на епюрах N і M мають місце екстремуми. Це повністю узгоджується з залежностями (3.6).*

На ділянці BC епюра сил – похила пряма лінія, а епюра моментів – парабола, опуклість якої спрямована назустріч розподіленому навантаженню. На ділянці CD епюра сил – константа, а епюра моментів – пряма лінія. В межах обох ділянок поперечна сила Q від'ємна, і згинальний момент монотонно спадає зліва направо до нуля. Це узгоджується з залежностями (3.5).

Крім того, в перерізах A і D, де прикладені зовнішні зосереджені сили перпендикулярно до осі стержня, на епюрі Q мають місце стрибки в напрямку дії цих навантажень. В перерізі A прикладений зосереджений момент, тому на епюрі M бачимо стрибок на величину цього моменту у напрямку його дії.

Проведена перевірка вказує на правильність виконаних розрахунків і побудов.