

Лекція №6

3.2.5. Побудова епюр внутрішніх зусиль у загальному випадку навантаження стержня

В загальному випадку в перерізах стержня при його навантажуванні можуть одразу виникати всі шість компонент внутрішніх зусиль: N , Q_y , Q_z , $M_{кр}$, M_y , M_z . Як правило це має місце в просторових стержнях, тобто стержнях, осі яких є просторовими лініями. Такий результат ми можемо отримати і в плоскому стержні, навантаживши його просторовою системою сил.

Перш ніж познайомитись з методикою побудови епюр для таких стержнів, нагадаємо правила визначення моментів відносно довільних осей, сформульовані у курсі теоретичної механіки, якими далі будемо користуватися.

Момент сили відносно осі дорівнює моменту проекції цієї сили на площину, перпендикулярну до осі, відносно точки перетину осі з площиною.

Сила не створює моменту відносно осі у двох випадках: коли вона її перетинає (плече сили дорівнює нулю), і коли вона їй паралельна (на площину, перпендикулярну до осі, сила проектується в точку).

Зупинимось на деяких особливостях, які слід мати на увазі при побудові епюр для просторових стержнів.

1. Осі в перерізі стержня вибирають таким чином, щоб вісь X збігалася з віссю стержня або була їй дотична, а поперечні осі Y і Z утворювали праву систему координат.
2. Знаки зусиль вибирають за такими правилами:
 - поздовжня сила в перерізі додатна, коли навантаження розтягає стержень;
 - поперечна сила додатна, коли напрямок навантаження збігається з напрямком відповідної осі в перерізі;
 - для крутного моменту, як і у випадку прямого стержня, знак не встановлюється;
 - епюри згинальних моментів завжди будують на стиснених волокнах.
3. Як правило епюри будують в аксонометрії, відкладаючи ординати зусиль по нормалі до базової лінії, що повторює вісь стержня.
4. Епюри поперечних сил будують у площинах, які ці сили утворюють з віссю x , а епюри згинальних моментів – у площинах їх дії.

Приклад 3.19 Побудувати епюри внутрішніх зусиль для просторового стержня, що складається з прямолінійної та криволінійної – у вигляді чверті кола – частин (рис. 3.20). $R = 0,5 \text{ м}$; $l = 0,5 \text{ м}$.

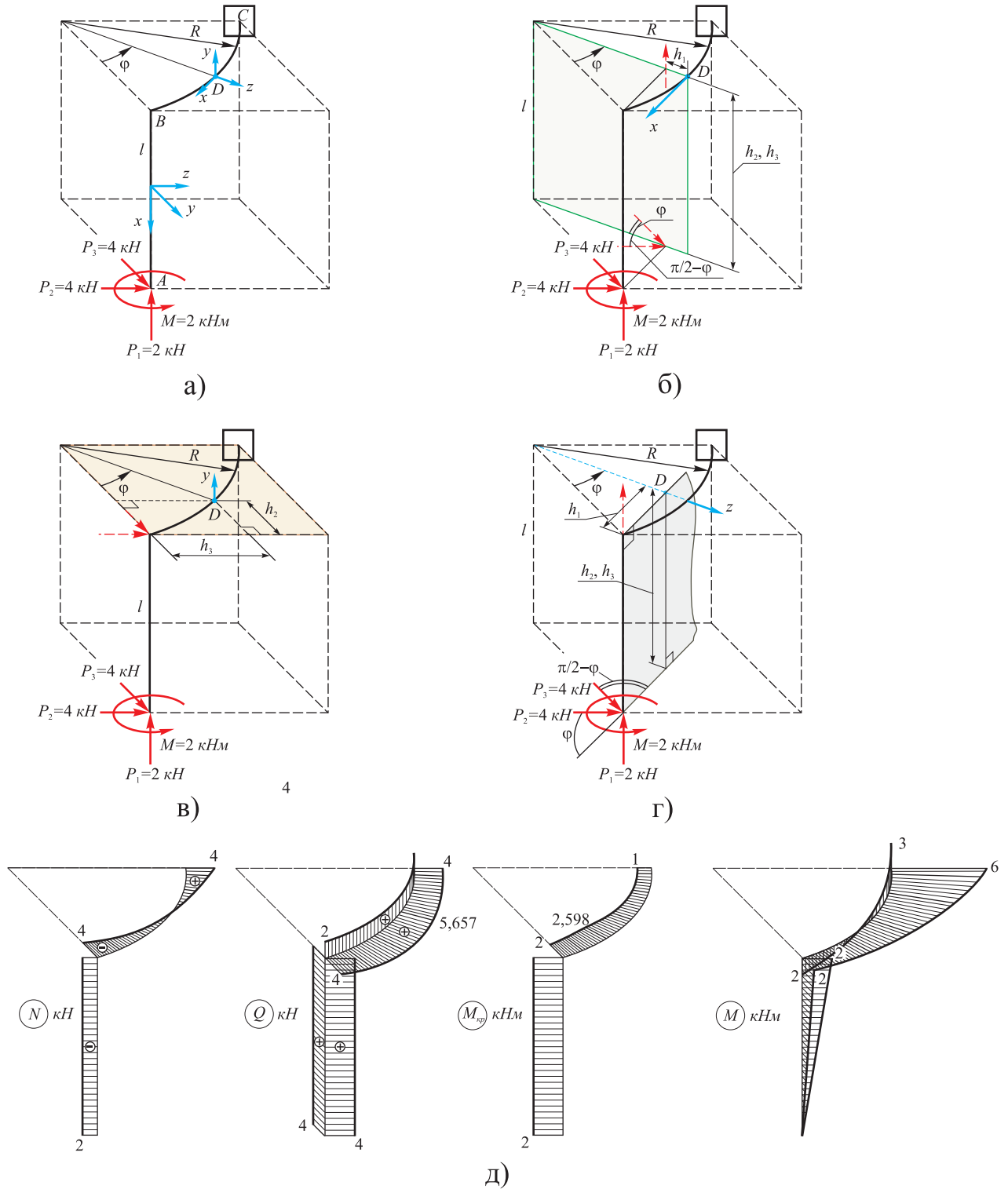


Рис. 3.20 Просторовий стержень: а – г – розрахункові схеми; д – епюри зусиль (до прикладу 3.19)

Стержень має дві ділянки: прямолінійну АВ і у вигляді дуги кола ВС. Оскільки стержень жорстко заземлений одним кінцем, то опорних реакцій визначати не будемо, будуючи епюри від вільного кінця стержня.

Зауваження 1. Для прямолінійної ділянки записувати рівняння рівноваги потреби не має. Обмежимося визначенням компонент зусиль на її границях.

Ділянка АВ.

Тут, згідно з розрахунковою схемою (див. рис. 3.20 а), поздовжня сила, поперечні сили та крутний момент є константами. З урахуванням знаків зусиль маємо: $N = -2 \text{ кН}$; $Q_y = 4 \text{ кН}$; $Q_z = 4 \text{ кН}$; $M_{кр} = 2 \text{ кНм}$.

Згинальні моменти (це моменти відносно осей Y і Z в перерізі) створюються силами P_2 і P_3 і їх епюри – прямі лінії, нахилені у відповідних площинах до базової лінії. Маємо: в перерізі А $M_y = 0$ і $M_z = 0$; у перерізі В $M_y = P_2 l = 4 \cdot 0,5 = 2 \text{ кНм}$, $M_z = P_3 l = 4 \cdot 0,5 = 2 \text{ кНм}$.

Ділянка ВС.

За умовою вісь цієї частини стержня є дугою кола. Тому для визначення зусиль у довільному перерізі необхідно записати рівняння рівноваги для частини стержня та скласти таблицю значень зусиль для ряду послідовних положень перерізу, що задаються кутом φ (див. рис. 3.20), як це робилося для плоского кривого стержня.

Для запису рівнянь рівноваги скористаємося схемами, зображеними на рис. 3.20 б, в і г, які дають більш чітке уявлення про взаємне розташування осей в перерізі, площин, їм перпендикулярних, та діючих навантажень.

Вирази для поздовжніх та поперечних сил запишемо, проектуючи сили на відповідні осі, а вирази для моментів відносно цих осей запишемо, проектуючи сили на площини, зображені на схемах. Плечі проекцій сил P_1 , P_2 , P_3 відносно точок перетину осей з цими площинами позначені на схемах як h_1 , h_2 , h_3 відповідно.

$$0 \leq \varphi \leq \pi/2$$

$$N(\varphi) = -P_2 \sin(\pi/2 - \varphi) + P_3 \sin \varphi = -P_2 \cos \varphi + P_3 \sin \varphi;$$

$$Q_y(\varphi) = P_1;$$

$$Q_z(\varphi) = P_2 \sin \varphi + P_3 \sin(\pi/2 - \varphi) = P_2 \sin \varphi + P_3 \cos \varphi;$$

$$M_{кр}(\varphi) = M_x = P_1 h_1 - P_2 h_2 \cos(\pi/2 - \varphi) - P_3 h_3 \cos \varphi = P_1 R(1 - \cos \varphi) - (P_2 \sin \varphi + P_3 \cos \varphi) l;$$

$$M_y(\varphi) = P_2 h_2 + P_3 h_3 + M = P_2 R(1 - \cos \varphi) + P_3 R \sin \varphi + M;$$

$$M_z(\varphi) = P_1 h_1 - P_2 h_2 \cos \varphi + P_3 h_3 \cos(\pi/2 - \varphi) = P_1 R \sin \varphi - P_2 l \cos \varphi + P_3 l \sin \varphi.$$

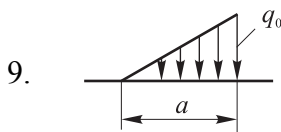
Табл 3.3. Значення зусиль у перерізах криволінійної ділянки стержня (до прикладу 3.19)

Зусилля	Значення кута φ , град.						
	0	15	30	45	60	75	90
$N(\varphi), \text{кН}$	-4,0	-2,828	-1,464	0	1,464	2,828	4,0
$Q_y(\varphi), \text{кН}$	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0
$Q_z(\varphi), \text{кН}$	4	4,899	5,464	5,657	5,464	4,899	4
$M_{кр}(\varphi), \text{кНм}$	-2	-2,415	-2,598	-2,535	-2,232	-1,709	-1
$M_y(\varphi), \text{кНм}$	2	2,586	3,134	4,0	4,732	5,214	6
$M_z(\varphi), \text{кНм}$	-2	-1,166	-0,232	0,707	1,598	2,380	3

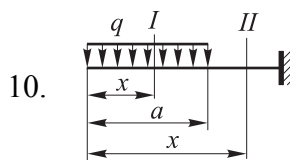
За отриманими даними будуємо епюри зусиль, які зображені на рис. 3.20 д.

Питання для самоперевірки знань

1. Які сили в опорі матеріалів називають внутрішніми силами або зусиллями?
2. В чому полягає суть методу перерізів при визначенні зусиль?
3. Яка гіпотеза опору матеріалів дозволяє скористатися методами теоретичної механіки при визначенні зусиль в перерізі?
4. Перелічіть компоненти головного вектора і головного моменту внутрішніх зусиль в поперечному перерізі стержня.
5. Скільки рівнянь рівноваги слід записати для частини тіла, навантаженого просторовою системою сил, щоб визначити компоненти зусиль в перерізі? Що це за рівняння?
6. Скільки рівнянь рівноваги слід записати для прямого стержня, навантаженого плоскою системою сил, щоб визначити компоненти зусиль в перерізі?
7. Як визначити момент сили відносно довільної осі?
8. Як знайти плече сили відносно деякої точки площини?

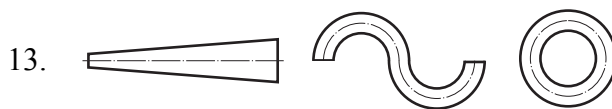


Чому дорівнює величина рівнодійної розподіленого навантаження? Де знаходиться точка її прикладання?



Для якого з перерізів: *I* чи *II* вираз для згинального моменту матиме вигляд $M(x) = qa(x - 0,5a)$, а для якого $M(x) = 0,5qx^2$

11. Перелічіть найпростіші види деформацій стержнів та умови їх виникнення.
12. Що називається епюрою внутрішнього зусилля стержня?



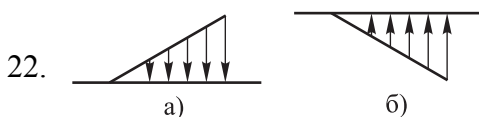
Зобразити базові лінії епюр для стержнів

14. Що називають ділянкою стержня при побудові епюр внутрішніх зусиль?
15. Коли поздовжня сила *N* в стержні вважається додатною?

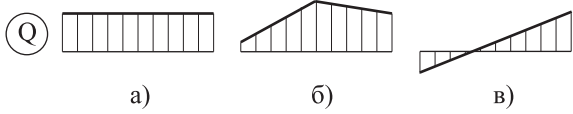


До яких типів відносяться балки, зображені на рисунку?

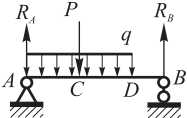
17. Яка максимальна кількість реакцій виникає в опорах кожної з балок, зображених в п. 16, при їх навантаженні?
18. Коли задача визначення опорних реакцій вважається статично визначною?
19. Для якої з балок, зображених в п. 16, задача визначення опорних реакцій при її навантаженні буде статично невизначною?
20. Який диференціальний зв'язок існує між епюрою розподілу навантаження на деякій ділянці стержня і епюрою згинальних моментів на цій ділянці?
21. Якими лініями будуть окреслені епюри поперечних сил та згинальних моментів на ділянці стержня, де діє розподілене навантаження, показане у п. 9?



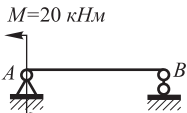
Для якого з варіантів розташування розподіленого навантаження відносно стержня матимемо на епюрі згинальних моментів опуклість, а для якого – ввігнутість?

23.  Із представлених варіантів епюр поперечних сил вказати той, для якого епюра згинальних моментів матиме екстремум.

24. Яка система координат називається правою?
 25. Для яких варіантів епюр поперечних сил (див. п. 23) епюра згинальних моментів монотонно зростатиме в правій системі координат?

26.  В яких перерізах балки матимуть місце стрибки на епюрі поперечних сил? Чи будуть стрибки на епюрі згинальних моментів?

27. В яких перерізах балки (див. п. 26) будуть злами на епюрі згинальних моментів? Чи будуть злами на епюрі поперечних сил?

28.  Чому дорівнюють згинальні моменти в опорних перерізах балки A і B? Дати відповідь, не визначаючи опорних реакцій.

29. В чому полягає правило циркульного переносу, яким користуються при побудові епюр згинальних моментів для рам?
 30. Якою системою координат користуються при побудові епюр для криволінійних стержнів?

Розділ 4. ОСНОВИ ТЕОРІЇ НАПРУЖЕНОГО І ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ

Тема 4.1. Напруження.

4.1.1. Поняття про напруження

Знайшовши компоненти внутрішніх зусиль з допомогою методу перерізів, ми, однак, ще не можемо судити про міцність тіла, адже головний вектор та головний момент внутрішніх сил – це певна фікція, що має сенс лише з точки зору дотримання умов рівноваги частини тіла. Щоб судити про міцність, нам потрібно знати зусилля в конкретній точці перерізу.

Зусилля в перерізі розподілені за певним законом. Щоб охарактеризувати цей закон, необхідно ввести для зусиль *числову міру*. Такою мірою є *напруження*.

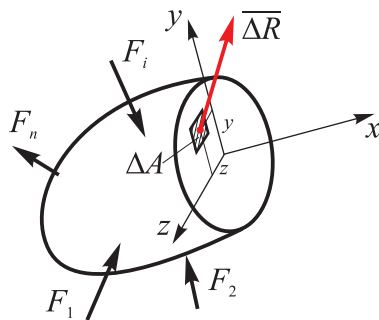


Рис. 4.1 Зусилля на площадці ΔA

Виділимо навколо деякої точки перерізу площадку ΔA (рис. 4.1), в межах якої діє зусилля ΔR .

В якості *середнього напруження на площадці ΔA* беремо відношення

$$p_c = \frac{\Delta R}{\Delta A}. \quad (4.1)$$

Зменшуючи розміри площадки до нескінченності, отримаємо

$$p = \frac{dR}{dA}. \quad (4.2)$$

Тут p – *повне напруження в точці*. Вимірність напруження – Н/м^2 (Па) або Н/мм^2 (МПа).

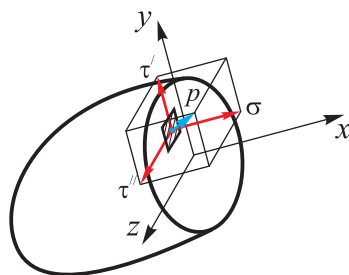


Рис. 4.2 Напруження на площадці

Напруження – це зусилля, віднесені до одиниці площі в даній точці деформованого твердого тіла.

Повне напруження можна розкласти на три складові: σ , τ' , τ'' (рис. 4.2). Тут σ – *нормальне напруження* в точці (спрямоване по нормалі до площадки); τ' , τ'' – *дотичні або тангенціальні напруження* в точці.

Якщо через точку провести іншу січну площину, то напруження p в цій самій точці загалом буде іншим, адже розтинаються інші в'язі, що оточують точку.

Сукупність напружень для множини площадок, що проходять через дану точку, утворює напружений стан тіла в точці.

4.1.2. Напружений стан в точці.

Припустимо, що є деяке тіло, навантажене довільною системою сил (рис. 4.3). Вважатимемо, що при переході від точки до точки напружений стан змінюється досить повільно, і завжди є можливість вибрати в околі точки A таку досить малу область, в якій напружений стан можна було б розглядати як *однорідний*.

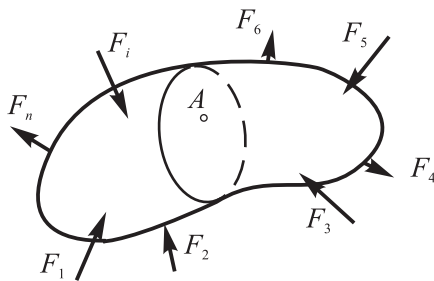


Рис. 4.3 Тверде тіло, навантажене довільною системою сил

Напружений стан називається однорідним, якщо в межах вибраної площадки (відрізка, об'єму) діють однакові напруження.

Зрозуміло, що такий підхід можливий лише в рамках прийнятої раніше гіпотези про суцільність матеріалу (див. тему 1.1.), яка допускає перехід до гранично малих об'ємів.

Виділимо в околі точки A об'єм u у вигляді нескінченно малого паралелепіпеда (рис. 4.4).

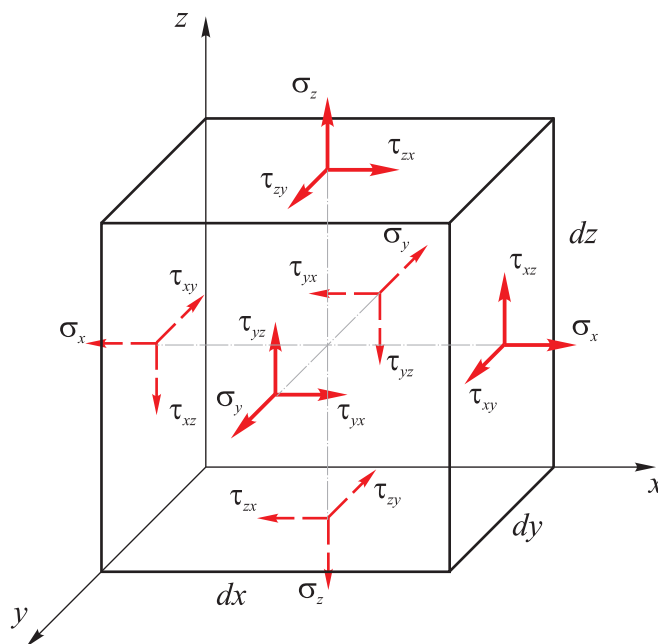


Рис. 4.4 Напруження на гранях елементарного паралелепіпеда

У граничному випадку всі грані паралелепіпеда проходять через точку A і напруження у відповідних січних площинах можуть розглядатися як напруження в точці.

Примітка 4.1. Форма нескінченно малого елемента залежить від вибраної системи координат. Так, у декартовій системі елемент має форму паралелепіпеда. За циліндричної чи сферичної систем координат елементи зручно вибирати циліндричної чи сферичної форми.

Розкладемо повні напруження, що виникають на гранях елементарного паралелепіпеда, на складові по осях. Отримаємо на кожній грані нормальні та дотичні напруження (див. рис. 4.4).

Нормальні напруження σ мають індекси, що відповідають осям X , Y , Z , яким ці напруження паралельні. Дотичні напруження τ позначають двома індексами: перший індекс відповідає осі, перпендикулярній до площадки дії дотичного напруження; другий індекс відповідає осі, якій це напруження паралельне.

До речі, орієнтація самих осей X , Y , Z відносно тіла є довільною.

Нормальні напруження вважаються додатними, коли вони діють в бік розтягу. Знак дотичних напружень не оговорюється.

Розглянемо умови рівноваги елементарного паралелепіпеда (див. рис. 4.4). На його протилежних гранях діють попарно однакові за величиною і протилежні за напрямком напруження, адже вони діють на гранях, що фактично належать одній площині. І виходить так, що напруження на одній грані, наприклад на правій, характеризує дію правої частини тіла на ліву в точці A , а напруження на лівій грані – дію лівої частини на праву в цій самій точці. А дія, як відомо, дорівнює протидії.

Сили, що діють на гранях паралелепіпеда, утворюють просторову систему сил. Перші три рівняння рівноваги – сума проєкцій сил на осі дорівнює нулю – виконуються тотожно. Тобто, маємо дев'ять незалежних компонент напружень, що діють на трьох взаємно перпендикулярних гранях елемента.

Інші три умови рівноваги – це рівність нулю суми моментів всіх сил, що діють на елемент, відносно трьох взаємно перпендикулярних осей. А саме – осей X , Y , Z .

Запишемо вираз для моментів, наприклад, відносно осі X . Відмінні від нуля моменти створюються векторами τ_{zy} і τ_{yz} . Інші моменти створюються попарно однаковими силами, що діють на однакових плечах в протилежних напрямках і тому взаємно зрівноважуються. Отже,

$$(\tau_{yz} dx dz) dy - (\tau_{zy} dx dy) dz = 0.$$

Звідси

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

Аналогічно для інших осей.

Таким чином ми отримали закон парності дотичних напружень:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{xz} = \tau_{zx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}. \quad (4.3)$$

На двох взаємно перпендикулярних площадках дотичні напруження, перпендикулярні до спільного ребра, однакові за величиною і спрямовані або до ребра, або від ребра.

З урахуванням цього закону на гранях елемента (в подальшому – площадках) діють не дев'ять, а тільки шість незалежних компонент напружень.

Визначення напружень на трьох взаємно перпендикулярних площадках, що проходять через дану точку, є першим кроком у розв'язанні задач, пов'язаних з розрахунками на міцність у загальному випадку напруженого стану.

4.1.3. Визначення напружень в площадках загального положення. Тензор напружень

Покажемо, що коли відомі шість компонент напружень у трьох взаємно перпендикулярних площадках, а саме $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ (див. рис. 4.4), то можна визначити напруження взагалі у будь-якій площадці, що проходить через дану точку.

Із напруженого тіла виділимо в околі точки A елементарний об'єм у вигляді тетраедра – чотиригранника, три грані якого збігаються з координатними площинами, а четверта утворена січною площиною загального положення (рис. 4.5).

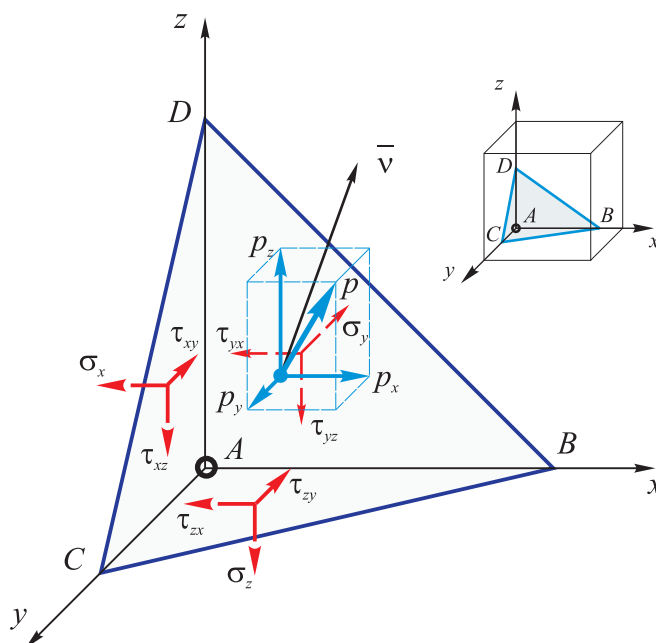


Рис. 4.5 Напруження на гранях елементарного тетраедра

Орієнтація цієї січної площини в просторі визначається спрямовуючим косинусами нормалі ν відносно осей X, Y, Z :

$$l = \cos(\widehat{x\nu}); \quad m = \cos(\widehat{y\nu}); \quad n = \cos(\widehat{z\nu}). \quad (4.4)$$

Напруження на гранях елементарного тетраедра розглядаємо як напруження в точці через малість його об'єму.

Розглянемо умови рівноваги тетраедра. Сили, що діють на гранях, знайдемо, згідно з (4.3), як добуток відповідного напруження на площу грані.

Позначимо площу грані BCD – площадки загального положення – A ; площі граней ADC, ADB і ABC – трьох взаємно перпендикулярних площадок – A_x, A_y, A_z відповідно. Тоді з умови рівності нулю суми проекцій всіх сил на осі X, Y, Z отримаємо:

$$\begin{cases} p_x A = \sigma_x A_x + \tau_{yx} A_y + \tau_{zx} A_z \\ p_y A = \tau_{xy} A_x + \sigma_y A_y + \tau_{zy} A_z \\ p_z A = \tau_{xz} A_x + \tau_{yz} A_y + \sigma_z A_z \end{cases} \quad (4.5)$$

Тут p_x, p_y, p_z – компоненти повного напруження p на площадці загального положення BCD в проекціях на осі X, Y, Z .

Розглядаючи грані ADC, ADB і ABC як проекції площадки загального положення ABC на відповідні координатні площини, можемо записати:

$$A_x = Al; \quad A_y = Am; \quad A_z = An. \quad (4.6)$$

Тоді рівняння (4.5) набувають виду

$$\begin{cases} p_x = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ p_y = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ p_z = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{cases} \quad (4.7)$$

Отже, для будь-якої площадки, положення якої задане, тобто відомі спрямовуючі косинуси нормалі ν до неї, можна знайти повне напруження p , якщо відомі компоненти повних напружень у трьох взаємно перпендикулярних площадках.

Дійсно, знаючи p_x, p_y, p_z , знайдемо

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}. \quad (4.8)$$

Пам'ятаючи, що сукупність повних напружень для множини площадок, що проходять через дану точку, складає напружений стан тіла у цій точці, робимо висновок

Напружений стан в точці деформованого тіла повністю визначається шістьма незалежними компонентами напружень у довільно вибраних трьох взаємно перпендикулярних площадках, що проходять через дану точку.

Ці компоненти, записані в певному порядку, подаються у вигляді тензора – квадратної матриці:

$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (4.9)$$

Тому кажуть також, що напружений стан тіла в точці повністю визначається *тензором напружень*.

Знаючи повне напруження p у площадці загального положення, вірніше компоненти p_x, p_y, p_z , можна знайти його нормальні та тангенціальні складові в цій площадці, що складає значний практичний інтерес. Зважаючи, що нормаль до площадки BCD ми позначили \bar{v} , нормальне напруження знайдемо як

$$\sigma_v = p_x l' + p_y m' + p_z n' \quad (4.10)$$

Що стосується тангенціальної складової повного напруження, тобто дотичного напруження в цій площадці, необхідно вказати напрямок, у якому його визначатимемо. Припустимо, нас цікавить дотичне напруження в напрямку $\bar{\mu}$ (рис. 4.6 а). Його напрямок у площадці BCD задамо спрямовуючими косинусами у вибраній системі координат X, Y, Z , позначивши їх відповідно

$$l' = \cos(\widehat{x\bar{\mu}}); \quad m' = \cos(\widehat{y\bar{\mu}}); \quad n' = \cos(\widehat{z\bar{\mu}});$$

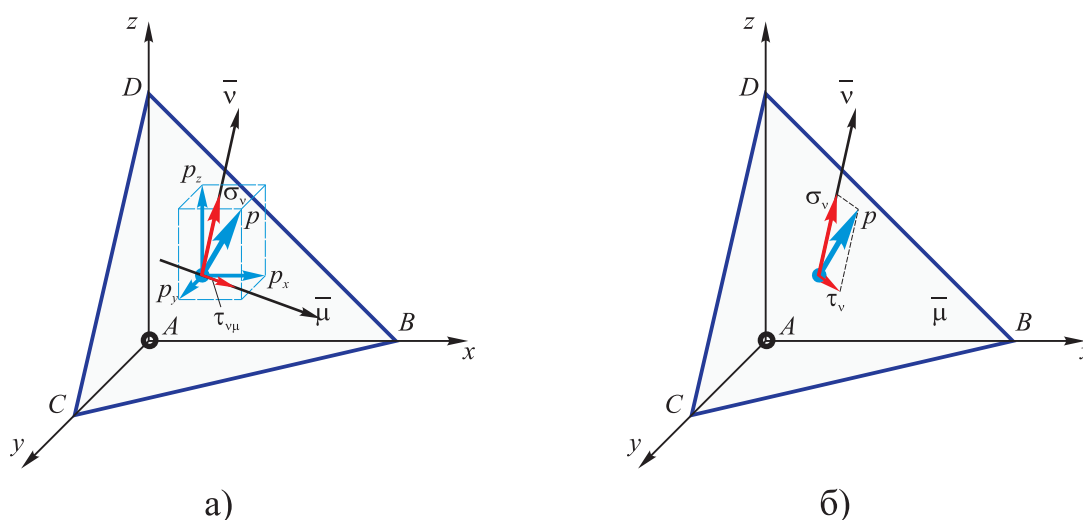


Рис. 4.6 Дотичні напруження у площадці загального положення:
а – дотичне напруження $\tau_{v\mu}$ в напрямку $\bar{\mu}$; б – повне дотичне напруження τ_v

Тоді

$$\tau_{v\mu} = p_x l' + p_y m' + p_z n' \quad (4.11)$$

Повне дотичне напруження у площадці BCD τ_v лежить у площині дії повного напруження p і нормального напруження σ_v (рис. 4.6 б) і величина його знаходиться зі співвідношення

$$\tau_v = \sqrt{p^2 - \sigma_v^2} \quad (4.12)$$

4.1.4. Головні осі та головні напруження. Види напруженого стану

Виразимо нормальне напруження на площадці загального положення через компоненти напружень у трьох взаємно перпендикулярних площадках, тобто компоненти тензора напружень в даній точці тіла. Для цього підставимо у вираз (4.10) рівняння (4.7). В результаті нескладних перетворень, з урахуванням закону парності дотичних напружень, отримаємо:

$$\sigma_v = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl \quad (4.13)$$

Аналогічно можна виразити і дотичні напруження у площадці, підставивши рівняння (4.7) у (4.11):

$$\begin{aligned} \tau_{v\mu} = & \sigma_x ll' + \sigma_y mm' + \sigma_z nn' + \tau_{xy} (lm' + ml') + \\ & + \tau_{yz} (mn' + nm') + \tau_{zx} (nm' + mn') \end{aligned} \quad (4.14)$$

Тут нормальні σ_v і дотичні $\tau_{v\mu}$ напруження є функціями спрямовуючих косинусів нормалі v до площадки загального положення. Зміна орієнтації площадки відносно вибраної системи осей X, Y, Z приведе в загальному випадку до зміни напружень в ній.

Практичний інтерес складає визначення найбільших і найменших нормальних і дотичних напружень з можливих їх значень в даній точці та положення площадок, у яких вони діють.

Перш ніж перейти до розв'язання цієї задачі, вдамося до дещо формалізованого, проте дуже наглядного представлення геометричного образу напруженого стану [4].

Подамо в рівнянні (4.13) спрямовуючі косинуси як відношення координат кінця деякого відрізка s , що за напрямком збігається з нормаллю v до площадки, до довжини цього відрізка (рис. 4.7):

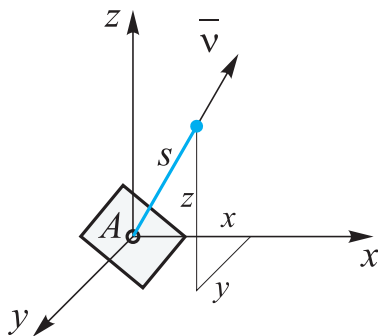


Рис. 4.7 Координати відрізка s

$$l = x/s; \quad m = y/s; \quad n = z/s.$$

Тоді

$$\sigma_v s^2 = \sigma_x x^2 + \sigma_y y^2 + \sigma_z z^2 + 2\tau_{xy} xy + 2\tau_{yz} yz + 2\tau_{zx} zx.$$

Прийнявши формально $s^2 = k/|\sigma_v|$, отримаємо

$$\sigma_x x^2 + \sigma_y y^2 + \sigma_z z^2 + 2\tau_{xy} xy + 2\tau_{yz} yz + 2\tau_{zx} zx = k. \quad (4.15)$$

Це рівняння центральної поверхні другого порядку, в якому напруження на трьох взаємно перпендикулярних площадках є коефіцієнтами, а прийнята величина k – довільною сталою, що визначає масштаб побудови.

З курсу аналітичної геометрії відомо, що повертаючи осі X, Y, Z відносно початку координат, можна досягти такого їх положення, за якого в рівнянні поверхні (4.15) члени, що містять попарні добутки координат, зникають. Це можна трактувати як той факт, що коефіцієнти при цих членах перетворюються в нуль. Оскільки коефіцієнтами є дотичні напруження на трьох взаємно перпендикулярних площадках, то робимо висновок, що через дану точку завжди можна провести такі три взаємно перпендикулярні площадки, у яких дотичні напруження $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ відсутні.

Три взаємно перпендикулярні площадки, що проходять через дану точку, в яких відсутні дотичні напруження, називаються головними площадками, осі, їм перпендикулярні, називаються головними осями напружень, а нормальні напруження, що діють в цих площадках – головними напруженнями.

Головні напруження прийнято позначати через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Правило розстановки індексів при головних напруженнях:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3, \quad (4.16)$$

Причому нерівність тут має алгебраїчний зміст.

Приклад 4.1 Позначити головні напруження, що діють на гранях елементарного паралелепіпеда (рис. 4.8).

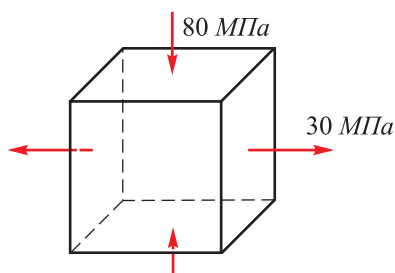


Рис. 4.8 Головні напруження
(до прикладу 4.1)

Згідно з правилом розстановки індексів (4.16), беручи до уваги правило знаків для нормальних напружень у площадці (див. п. 4.1.2), а саме, додатними вважаються напруження розтягу, а стисні напруження – від’ємні, матимемо такі головні напруження:

$$\sigma_1 = 30 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -80 \text{ МПа}$$

Припустимо тепер, що взаємно перпендикулярні грані елементарного тетраедра є головними площадками (рис. 4.9). Тоді рівняння рівноваги тетраедра (4.7) набувають виду:

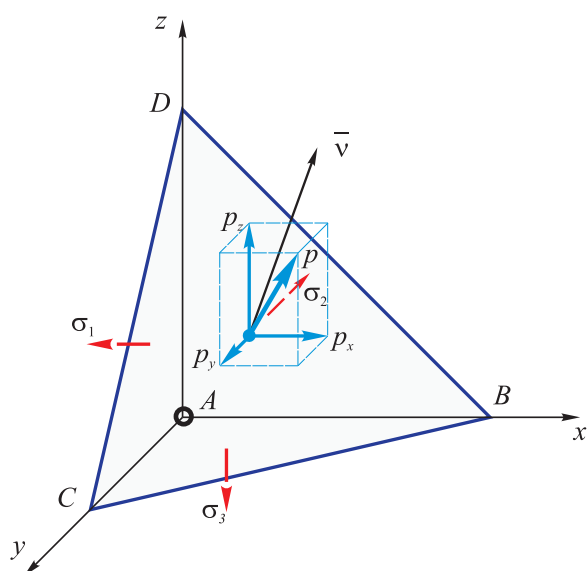


Рис. 4.9 Тетраедр, три грані якого є головними площадками

$$\begin{cases} p_x = \sigma_1 l \\ p_y = \sigma_2 m \\ p_z = \sigma_3 n \end{cases} \quad (4.17)$$

Беручи до уваги, що для спрямовуючих косинусів нормалі \bar{v} справедлива умова

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1, \quad (4.18)$$

отримаємо

$$\frac{p_x^2}{\sigma_1^2} + \frac{p_y^2}{\sigma_2^2} + \frac{p_z^2}{\sigma_3^2} = 1. \quad (4.19)$$

Тут p_x, p_y, p_z можна розглядати як координати кінця вектора повного напруження p на площадці загального положення BCD у вибраній системі координатних осей X, Y, Z (див. рис. 4.9). Робимо висновок щодо геометричного образу напруженого стану в точці.

Геометричне місце кінців вектора повного напруження в даній точці – це еліпсоїд, головними півсями якого є головні напруження $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (рис. 4.10). Він носить назву еліпсоїда напружень.

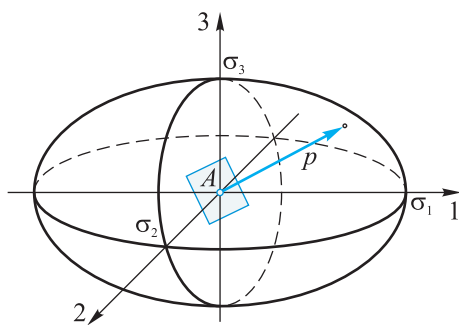


Рис. 4.10 Еліпсоїд напружень

Виходячи з даного геометричного образу, очевидно є важлива властивість головних напружень – *властивість екстремальності*:

Найбільше з головних напружень одночасно є найбільшим з можливих значень повного напруження для множини площадок, що проходять через дану точку. В той же час, найменше з головних напружень є найменшим з можливих значень повного напруження.

Справді, якщо площадку, що проходить через точку A (див. рис. 4.10), повернути таким чином, щоб вона сумістилась, наприклад, з координатною площиною 23, то вона стає головною площиною, в якій повне напруження $p = \sigma_1$.

Для головних площадок тензор напружень набуває виду:

$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}. \quad (4.20)$$

У випадку, коли всі головні напруження однакові за величиною і знаком: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_0$, то еліпсоїд перетворюється в кулю. Такий вид напруженого стану називають *всебічним рівномірним розтягом* або *стиском*. Звісно, в цьому випадку будь-яка площадка, що проходить через точку A , буде головною, а напружений стан характеризуватиметься так званим *кульовим тензором*

$$T_{\sigma_0} = \begin{vmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{vmatrix}. \quad (4.19)$$

В загальному випадку в точці виникає три головних напруження. Проте в окремих випадках деякі з головних напружень можуть бути відсутніми. За кількістю діючих головних напружень розрізняють такі *види напруженого стану*.

1. *Об'ємний* або *тривісний напружений стан* тіла в точці має місце, коли відмінні від нуля всі три головні напруження.
2. *Плоский* або *двовісний напружений стан* тіла в точці має місце, коли відмінні від нуля два головні напруження.
3. *Лінійний* або *одновісний напружений стан* тіла в точці має місце, коли відмінне від нуля одне з головних напружень.

Приклади деяких можливих варіантів напружених станів в точці тіла показані на рис. 4.11.

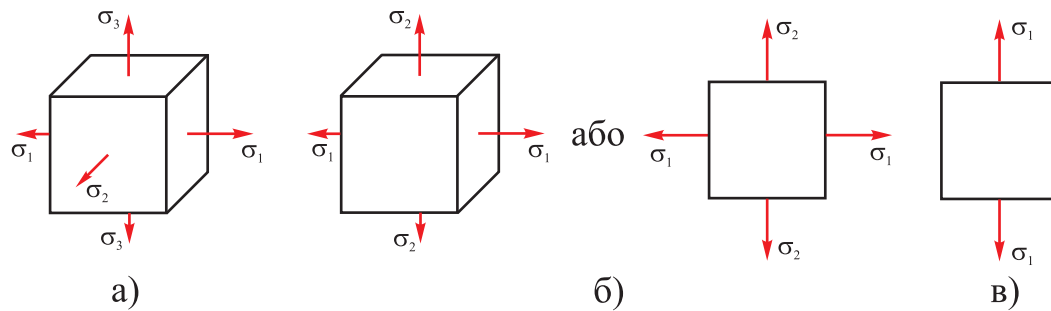


Рис. 4.11 Види напружених станів тіла в точці:
а – об’ємний або тривісний; б – плоский
або двовісний; в – лінійний або
одновісний

Будь-який напружений стан, відмінний від лінійного (об’ємний або плоский), називають *складним напруженим станом*.