

Лекція №12

Розділ 7. РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ І ЖОРСТКІСТЬ СТЕРЖНІВ ЗА РОЗТЯГАННЯ І СТИСКАННЯ

Тема 7.1 Умови міцності і жорсткості стержнів за розтягання і стискання

Розтягання і стискання стержня – це той вид деформації, за якого реальний стержень і зразок для випробувань на розтягання або стискання знаходяться в однакових умовах навантаження, що дозволяє напряму порівнювати діючі напруження в стержні з допустимими, отриманими за результатами експерименту (див. тему 5.3, умова (5.12)).

Скориставшись формулою для визначення напружень у стержні за розтягання або стискання (6.5), умову міцності, запишемо у вигляді

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]. \quad (7.1)$$

Розглянемо основні види розрахунків, які можна проводити з використанням умови міцності.

1. За відомими розмірами деталі перевірити, чи витримає вона задане навантаження, порівнявши діючі напруження в небезпечній точці з допустимими для даного матеріалу (*перевірний розрахунок*).

2. За відомими навантаженнями для заданого матеріалу знаходять безпечні розміри деталі (*проектувальний розрахунок*). Умова міцності (7.1) при цьому набуває виду:

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]}. \quad (7.2)$$

3. За відомими розмірами, матеріалом деталі та схемою навантаження знаходять допустиму величину навантаження:

$$N \leq [\sigma] A. \quad (7.3)$$

Щоб перевірити деталь на жорсткість, тобто встановити, чи знаходиться її деформація за діючого навантаження в допустимих межах, користуються умовою жорсткості, яка за розтягання та стискання, з урахуванням формули (6.8), матиме такий вигляд:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(x) dx}{EA(x)} \leq [\Delta l]. \quad (7.4)$$

Тут Δl – зміна довжини деталі; $[\Delta l]$ – допустиме її значення.

За допомогою умови жорсткості (7.4) можна проводити розрахунки, аналогічні до розрахунків з використанням умови міцності. Проте, як уже відзначалося в темі 5.3 (примітка 5.2), розрахунок на жорсткість, як правило, є перевірним. Основний розрахунок проводять за умовою міцності.

Тема 7.2 Розрахунки на міцність і жорсткість статично визначуваних стержнів

Якщо невідомі сили з системи сил, прикладених до тіла, можна визначити з умов рівноваги, то така система називається *статично визначуваною*.

Особливості розрахунків таких систем на міцність і жорсткість розглянемо на кількох прикладах.

Приклад 7.1 Перевірити на міцність елементи стержневої системи (рис. 7.1) при навантаженні її силою $F=15$ кН, якщо площі перерізів стержнів $A_1=60$ мм² (стержень АВ) і $A_2=80$ мм² (стержень АС), а їх довжини відповідно $l_1=l_2=1$ м. Матеріал стержня АВ – сталь 45, а стержня АС – бронза БрА5 (твердий стан). Визначити також вертикальне і горизонтальне переміщення вузла А. Шарнірні з'єднання в системі вважати ідеальними.

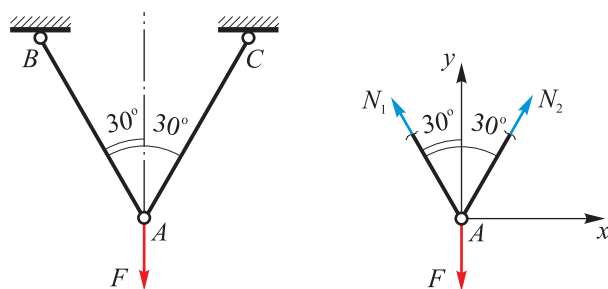


Рис. 7.1. До прикладу 7.1

Знайдемо зусилля в стержнях системи. Оскільки шарніри ідеальні, в перерізах стержня виникатимуть лише поздовжні сили N_1 і N_2 (рис. 7.1).

Для системи сил, що сходиться в одній точці, маємо дві умови рівноваги:

$$\sum X = -N_1 \sin 30^\circ + N_2 \sin 30^\circ = 0;$$

$$\sum Y = -F + N_1 \cos 30^\circ + N_2 \cos 30^\circ = 0.$$

З першого рівняння маємо: $N_1 = N_2$.

Підставляючи отримане співвідношення в друге рівняння, знаходимо:

$$2N_1 \cos 30^\circ = F.$$

Звідси $N_1 = N_2 = F/\sqrt{3} = 15/\sqrt{3} = 8,66$ кН.

Знайдемо допустимі напруження для матеріалів стержнів, скориставшись даними, наведеними в [1], додатки 4 і 7. Для сталі 45 ($\delta = 16\%$) $[\sigma] = \sigma_T / n_T = 360 / 1,5 = 240 \text{ МПа}$; для алюмінієвої бронзи у твердому стані ($\delta = 4\%$) $[\sigma] = \sigma_B / n_B = 400 / 2,5 = 160 \text{ МПа}$.

Перевіряємо стержні на міцність:

– стержень АВ

$$\sigma = \frac{N_1}{A_1} = \frac{8660}{60} = 144,33 \text{ МПа} < [\sigma] = 240 \text{ МПа};$$

– стержень СВ

$$\sigma = \frac{N_2}{A_2} = \frac{8660}{80} = 108,25 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Отже, для обох елементів підвіски умови міцності виконуються.

Визначимо вертикальне та горизонтальне переміщення вузла А стержневої системи.

Приріст довжини кожного стержня складає

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} = \frac{8660 \cdot 1000}{2 \cdot 10^5 \cdot 60} = 0,722 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} = \frac{8660 \cdot 1000}{1,05 \cdot 10^5 \cdot 80} = 1,031 \text{ мм}.$$

Зобразимо систему в zdeформованому стані (рис. 7.2 а). Проекції повного переміщення вузла А (δ) на осі стержнів (u_1 і u_2) через малість деформацій можна вважати такими, що дорівнюють видовженням стержнів: $u_1 = \Delta l_1$ і $u_2 = \Delta l_2$.

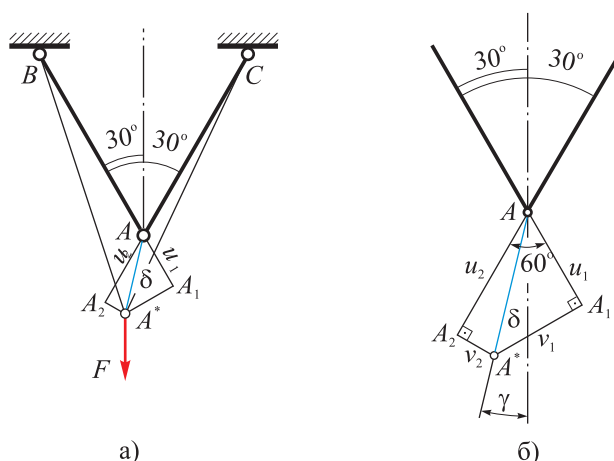


Рис. 7.2. Стержнева система у zdeформованому стані (а) та картина переміщень (б)

На рис. 7.2 б показана картина переміщень у збільшеному масштабі. Сумарне переміщення вузла А знайдемо як геометричну суму відрізків $\delta = \sqrt{u_1^2 + v_1^2} = \sqrt{u_2^2 + v_2^2}$. Відрізки v_1 і v_2 можна визначити проектуючи $AA^* = \delta$, вірніше його компоненти, на осі стержнів:

$$u_1 = u_2 \cos 60^\circ + v_2 \sin 60^\circ;$$

$$u_2 = u_1 \cos 60^\circ + v_1 \sin 60^\circ.$$

Звідси $v_1 = 0,774$ мм ; $v_2 = 0,238$ мм .

$$\text{Сумарне переміщення } \delta = \sqrt{0,722^2 + 0,774^2} = 1,058 \text{ мм}.$$

Щоб знайти вертикальне зміщення вузла A , потрібно спроектувати відрізок $AA^* = \delta$ на вертикальну вісь. Кут між ними $\gamma = 30^\circ - \arctg \frac{v_2}{u_2} = 30^\circ - \arctg \frac{0,238}{1,031} = 30^\circ - 13^\circ = 17^\circ$.

Отже $\Delta^6 = \delta \cos 17^\circ = 1,058 \cdot 0,956 = 1,012$ мм . Відповідно горизонтальне зміщення $\Delta^2 = \delta \sin 17^\circ = 1,058 \cdot 0,292 = 0,309$ мм .

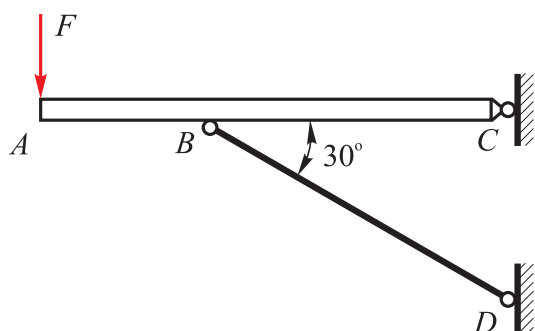


Рис. 7.3. До прикладу 7.2

Приклад 7.2 Визначити діаметр сталевого стержня BD (рис. 7.3), що утримує в горизонтальному положенні абсолютно жорстку балку AC , якщо допустиме напруження матеріалу стержня $[\sigma] = 160$ МПа, а допустиме опускання точки A балки під дією навантаження $F = 2$ кН – 3 мм. Розміри балки задані: $l_{AB} = 0,5$ м, $l_{BC} = 1,0$ м. Шарнірні з'єднання в системі вважати ідеальними.

Зусилля в стержні BD знайдемо з умови рівноваги моментів відносно шарніра C (рис. 7.4 а):

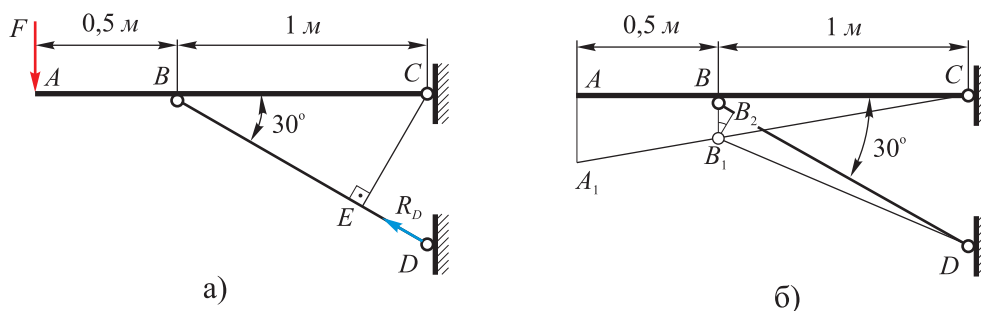


Рис. 7.4. Схема навантаження системи (а) та картина переміщень (б)

$$\sum M_C = F \cdot AC - R_D \cdot CE = 0$$

Звідси

$$R_D = F \frac{AC}{CE} = 2 \frac{1,5}{1 \cdot \sin 30^\circ} = 6 \text{ кН}.$$

Стержень BD перебуває в умовах чистого стискання. Поздовжня сила $N_{BD} = R_D = 6$ кН . Користуючись умовою міцності (7.2), знаходимо:

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]} = \frac{6000}{160} = 37,5 \text{ мм}^2.$$

Знайдемо величину вертикального переміщення точки A балки. Для цього скористаємося картиною переміщень системи, яка зображена на рис. 7.4 б (оскільки балка абсолютно жорстка, то вона повертатиметься відносно шарніра C без будь-яких змін розмірів і форми). Для пропорційних відрізків можна записати:

$$\frac{AA_1}{AC} = \frac{BB_1}{BC} \text{ або } AA_1 = BB_1 \frac{AC}{BC} = BB_1 \frac{1,5}{1} = 1,5BB_1.$$

З $\triangle BB_1V_2$ знаходимо, що $BB_1 = \frac{BB_2}{\sin 30^\circ} = 0,5BB_2$. Довжина відрізка BB_2 в масштабі дорівнює абсолютній деформації стержня BD (через малість деформацій дугу V_1V_2 ми замінили перпендикуляром). Враховуючи, що модуль пружності для сталі $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, знаходимо:

$$\Delta l_{BD} = \frac{N_{BD} l_{BD}}{EA} = \frac{N_{BD} l_{BC}}{EA \sin 30^\circ} = \frac{6000 \cdot 1000}{2 \cdot 10^5 \cdot 37,5 \cdot 0,5} = 1,6 \text{ мм}.$$

Отже $BB_1 = 0,5 \cdot 1,6 = 0,8$ мм. Звідси $AA_1 = 1,5 \cdot 0,8 = 1,2$ мм.

Знайдене вертикальне переміщення менше від заданої допустимої його величини.

Знаючи мінімально допустиму площу поперечного перерізу стержня, визначимо діаметр стержня:

$$d = \sqrt{4A/\pi} = \sqrt{4 \cdot 37,5/\pi} = 6,91 \text{ мм}.$$

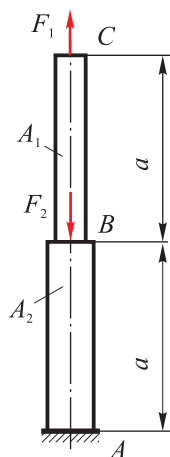


Рис. 7.5. До прикладу 7.3

Приклад 7.3 Якими мають бути максимально допустимі сили F_1 і F_2 (рис. 7.5), щоб стержень був рівномірним? Матеріал стержня – сталь 20. Площі поперечних перерізів $A_1 = 30 \text{ мм}^2$, $A_2 = 40 \text{ мм}^2$. Залишаючи знайдену силу F_1 незмінною, визначити, за якої сили F_2^* переміщення вільного кінця стержня дорівнюватиме нулю? Перевірити, чи буде забезпечена міцність стержня в цьому випадку.

Зауваження. Рівномірним стержнем або стержнем однакового опору називають стержень, запаси міцності якого в небезпечних точках у будь-якому перерізі однакові.

Стержень має дві ділянки. На ділянці AC діють напруження розтягу, викликані силою F_1 . Допустиме напруження для сталі 20, згідно з додатком 4 [1], $[\sigma]_p = \sigma_T / n_T = 250/1,5 \approx 167$ МПа. Допустиме значення сили F_1 знайдемо з умови міцності (7.3):

$$F_1 = N_{CB} \leq [\sigma]_p \cdot A_1 = 167 \cdot 30 = 5010 \text{ Н}.$$

Оскільки сила F_2 діє на стиск, то рівномірним стержень може бути лише за умови, коли напруження на ділянці BA матимуть протилежний знак по відношенню до напружень на ділянці CB і також дорівнюватимуть допустимим. Сталь, як відомо, однаково опирається розтяганню і стисканню, тобто величина допустимих напружень відома: $|\sigma]_c| = [\sigma]_p = 167 \text{ МПа}$. Отже

$$F_1 - F_2 = 5010 - F_2 = N_{BA} \leq [\sigma]_c \cdot A_2 = -167 \cdot 40 = -6680 \text{ Н}.$$

Звідси $F_2 = 5010 + 6680 = 11690 \text{ Н}$.

Визначимо, якою має бути сила F_2^* , щоб переміщення вільного кінця стержня дорівнювало нулю. За цієї умови сумарне видовження стержня $\Delta l = 0$, або, згідно зі схемою (рис. 7.5),

$$\Delta l = \Delta l_{CB} + \Delta l_{BA} = \frac{N_{CB} l_{CB}}{EA_1} + \frac{N_{BA} l_{BA}}{EA_2} = \frac{F_1 a}{EA_1} + \frac{(F_1 - F_2^*) a}{EA_2} = 0.$$

Звідси $F_2^* = F_1 \left(1 + \frac{A_2}{A_1}\right) = 5010 \left(1 + \frac{40}{30}\right) = 11690 \text{ Н}$.

Як бачимо, сила F_2^* така ж, як і сила F_2 , знайдена за умовою рівномірності, тобто міцність буде забезпечена.

Зауваження. Такий результат нами отриманий тільки тому, що довжини ділянок стержня однакові. В іншому випадку величини сил F_2^* і F_2 відрізнятимуться.

Тема 7.3 Розрахунки на міцність і жорсткість статично невизначуваних стержнів

В статично невизначуваних конструкціях кількість невідомих сил перевищує кількість рівнянь рівноваги, з яких вони визначаються.

7.3.1. Поняття про надлишкові в'язі

Статична невизначеність пов'язана з присутністю в системі так-званих „зайвих” або надлишкових в'язей.

На рис. 7.6 зображений брус, який утримується за допомогою шарніру A та двох пружних стержнів BC і BD .

Якщо шарніри вважати ідеальними, то на брус накладено чотири в'язі: дві у нерухомому шарнірі і дві у вигляді стержнів. Відповідно підлягають визначенню чотири невідомих реакції з боку вказаних в'язей. Проте для плоскої системи сил маємо всього три рівняння рівноваги. Отже задача – статично невизначувана.

Очевидно, що для забезпечення рівноваги системи крім шарніра A досить було б і одного стержня. Тут очевидно є одна надлишкова в'язь.

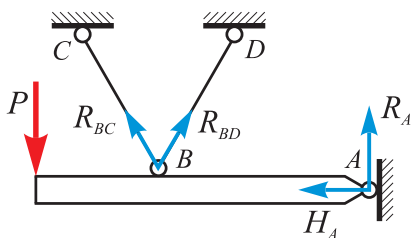


Рис. 7.6 Один раз статично невизначувана система

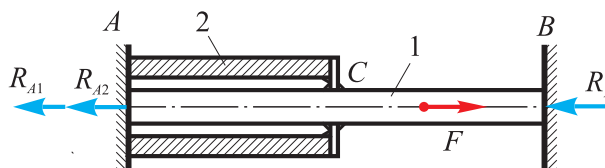


Рис. 7.7 Двічі статично невизначувана система

Для характеристики статично невизначуваних систем вводять поняття *ступеня статичної невизначеності*. Його знаходять як різницю між кількістю невідомих сил і кількістю рівнянь рівноваги. Так, ступінь статичної невизначеності зображеної на рис. 7.6 системи складає $n = 4 - 3 = 1$. В цьому випадку кажуть, що система один раз статично невизначувана.

Величина ступеня статичної невизначеності збігається з кількістю надлишкових в'язей у системі.

Ще один приклад статично невизначуваної системи наведений на рис. 7.7. Центральний стержень 1 жорстко з'єднаний з обоймою 2 в перерізі C і закріплений в опорах A і B. Обойма в свою чергу закріплена в опорі A. Опорні реакції, які взагалі-то є розподіленими в опорних перерізах навантаженнями, представлені у вигляді рівнодійних сил, зведених до спільної центральної осі конструкції. Тобто, разом з силою F вони утворюють лінійну систему сил, для якої існує лише одна умова рівноваги: сума всіх сил, що діють вздовж однієї осі, дорівнює нулю. Враховуючи, що визначенню підлягають три невідомі сили R_{A1} , R_{A2} і R_B , ступінь статичної невизначеності $n = 3 - 1 = 2$. Маємо двічі статично невизначувану систему. І це означає, що в системі присутні дві надлишкові в'язі.

Слід відзначити, що надлишкові в'язі є „зайвими” лише з точки зору умов статичності: їх вилучення не призведе до порушення рівноваги системи. Їх присутність, як правило, пов'язана із забезпеченням міцності та жорсткості конструкції. З цієї точки зору надлишкові в'язі, як правило, є далеко не „зайвими”.

7.3.2. Порядок розв'язання статично невизначуваних систем

Слід нагадати, що з поняттям статичної невизначуваності ми вже зустрічались при розв'язанні інтегральних рівнянь рівноваги для стержня (див. теми 5.1 та 6.1). Тоді був сформульований і загальний порядок її розкриття, за яким слід послідовно розглядати статичну, геометричну і фізичну сторони задачі та здійснити їх синтез.

Розкриття статичної невизначеності стержневих систем проводять в тій же послідовності, наповнюючи три сторони задачі відповідним конкретним змістом.

1. **Статичний бік задачі.** Складають рівняння рівноваги відітнутої частини конструкції, які містять невідомі навантаження чи зусилля.

2. **Геометричний бік задачі.** Розглядають систему у здеформованому вигляді і встановлюють залежність між деформаціями або переміщеннями окремих її елементів. Отримані рівняння називають *рівняннями сумісності деформацій*.

Примітка 7.1. У статично невизначуваних конструкціях деформації одних елементів неможливі без деформації інших, тобто елементи системи деформуються сумісно. Звідси й назва рівнянь.

3. **Фізичний бік задачі.** Користуючись законом Гука, виражають деформації елементів через шукані зусилля. В разі зміни температури до деформацій, які викликаються зусиллями, добавляють ще й *температурні* або *теплові* деформації.

4. **Синтез.** Спільне розв'язання отриманої системи рівнянь

Розглянемо приклади розв'язання статично невизначуваних систем.

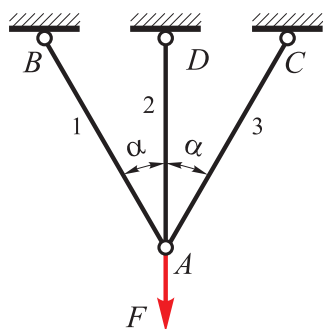


Рис. 7.8. До прикладу 7.4

Приклад 7.4 Стержнева система (рис. 7.8), навантажена силою F , симетрична відносно вертикальної осі, тобто бічні стержні 1 і 3 мають однакову довжину та площі перерізів, нахилені під однаковими кутами α до вертикалі та виготовлені з одного матеріалу, наприклад міді. Середній стержень 2 – сталевий. Знайти зусилля N_1 , N_2 , N_3 в стержнях та дібрати допустимі площі їх перерізів A_1 , A_2 , A_3 , вважаючи допустимі напруження $[\sigma]_M$ для міді і $[\sigma]_C$ для сталі заданими.

Вважатимемо шарніри, якими зв'язані стержні в системі, ідеальними. Тоді при навантажуванні системи вертикальною силою F в них виникатимуть лише поздовжні зусилля. Щоб визначити ці зусилля, відріжемо довільним перерізом частину конструкції, що містить шарнір A , та розглянемо умови її рівноваги. Схема навантаження вузла A показана на рис. 7.9.

Тут три невідомих зусилля N_1 , N_2 і N_3 . Кількість рівнянь рівноваги для плоскої системи сил, що сходяться в одній точці, – два. Отже маємо статично невизначувану систему, ступінь невизначеності якої складає $n = 3 - 2 = 1$.

І. **Статичний бік задачі.** Запишемо рівняння рівноваги вузла A :

$$\begin{aligned}\sum X &= -N_1 \sin \alpha + N_3 \sin \alpha = 0; \\ \sum Y &= N_1 \cos \alpha + N_2 + N_3 \cos \alpha - F = 0.\end{aligned}$$

Згідно з першим рівнянням $N_1 = N_3$. Тоді друге рівняння набуває вигляду:

$$2N_1 \cos \alpha + N_2 = F. \quad (1)$$

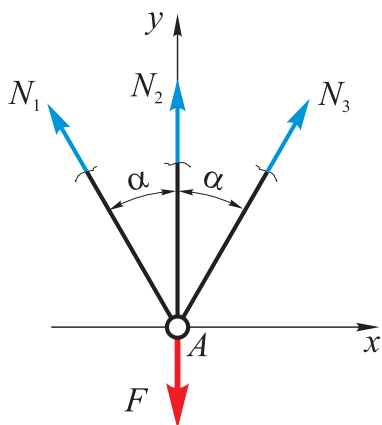


Рис. 7.9. Схема навантажування вузла A

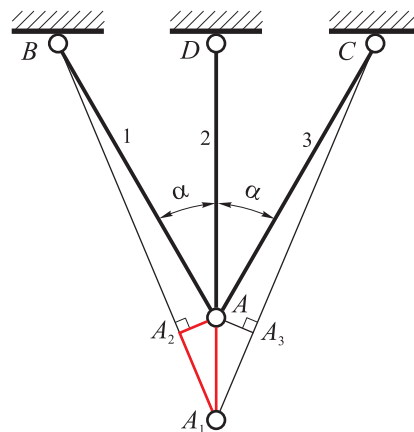


Рис. 7.10. Картина переміщень вузла A

II. **Геометричний бік задачі.** Оскільки має місце геометрична і силова симетрія системи ($N_1 = N_3$), а також беручи до уваги, що бічні стержні виготовлені з однакового матеріалу, робимо висновок, що деформуються ці стержні однаково. Як наслідок, матиме місце лише вертикальне переміщення вузла A.

На рис. 7.10 показана система у zdeформованому стані, коли всі стержні видовжуються. Приріст довжини стержня 2 відповідає в масштабі відрізка AA₁. Видовження бічних стержнів знайдемо, якщо з точок B і C радіусами BA і CA проведемо дуги через точку A до перетину з осями цих стержнів після деформації.

Користуючись гіпотезою про малість деформацій, введемо такі спрощення:

- дуги замінимо перпендикулярами, встановленими з точки A до осей стержнів 1 і 3 в новому положенні. Тоді їх видовження відповідатимуть у масштабі відрізкам A₁A₂ і A₁A₃;
- зміною кутів між стержнями знехтуємо.

Розглянемо прямокутний трикутник AA₁A₂. Згідно з рис. 7.10 $A_1A_2 = A_1A \cos \alpha$. Тобто рівняння сумісності деформацій виглядатимуть так:

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 = \Delta l_2 \cos \alpha. \quad (2)$$

III. **Фізичний бік задачі.** Виразимо видовження через зусилля, скориставшись законом Гука в абсолютних величинах для розтягання:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_M A_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_C A_2}. \quad (3)$$

IV. **Синтез.** Підставимо вирази (3) у (2):

$$\frac{N_1 l_1}{E_M A_1} = \frac{N_2 l_2}{E_C A_2} \cos \alpha.$$

Звідси

$$N_1 = N_2 \frac{E_M A_1 l_2}{E_C A_2 l_1} \cos \alpha = N_2 \frac{E_M A_1}{E_C A_2} \cos^2 \alpha. \quad (4)$$

Розв'язуючи спільно (4) і (1), знаходимо:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = \frac{F \frac{E_M A_1}{E_C A_2} \cos^2 \alpha}{1 + 2 \frac{E_M A_1}{E_C A_2} \cos^3 \alpha}; \\ N_2 = \frac{F}{1 + 2 \frac{E_M A_1}{E_C A_2} \cos^3 \alpha}. \end{array} \right. \quad (5)$$

Якщо площі поперечних перерізів стержнів відомі, то знайти зусилля чи виконати перевірений розрахунок нескладно. Коли ж виконується проектувальний розрахунок, то слід задатися співвідношенням площ $A_1/A_2 = k$. Це дозволить знайти зусилля N_1 і N_2 . А потім з умов міцності знаходять одну з площ, наприклад $A_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma]_M}$, а другу знаходять зі співвідношення $A_2 = A_1/k$. Після цього слід обов'язково перевірити другий стержень на міцність. Якщо умова міцності не виконується, то розрахунок слід повторити: спочатку з умови міцності визначити площу другого стержня $A_2 \geq \frac{N_2}{[\sigma]_C}$, а площу першого – зі співвідношення $A_1 = A_2 k$, при цьому, перевіряти його на міцність уже не потрібно, адже знайдена площа буде гарантовано більшою, ніж та, що була знайдена за першої спроби.

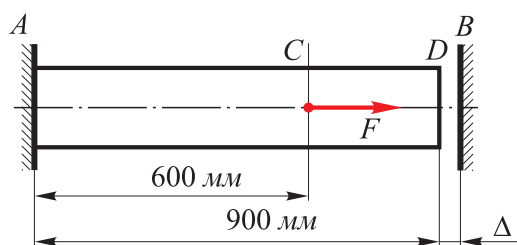


Рис. 7.11. До прикладу 7.5

Приклад 7.5 Для стержня АВ побудувати епюри зусиль і напружень та визначити запас міцності. Побудувати також епюру переміщень його перерізів відносно опори А (рис. 7.11), якщо сила $F = 10$ кН, площа перерізу $A = 100$ мм², а матеріал стержня – сталь 30. Величина зазору $\Delta = 0,1$ мм.

Спочатку порівняємо величини переміщення торцевого перерізу стержня λ_D під дією сили F і зазору Δ , щоб зробити висновок щодо статичної визначності задачі. Враховуючи, що на ділянці АС поздовжня сила $N_{AC} = F = 10$ кН, отримаємо:

$$\lambda_D = \Delta l_{AC} = \frac{N_{AC} l_{AC}}{EA} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 600}{2 \cdot 10^5 \cdot 100} = 0,3 \text{ мм}.$$

Отже, $\lambda_D > \Delta$. Після перекриття зазору на стержень діятимуть реакції обох опор, і задача стає статично невизначною. Ступінь статичної невизначеності $n = 2 - 1 = 1$.

Розрахункова схема стержня зображена на рис. 7.12 а.

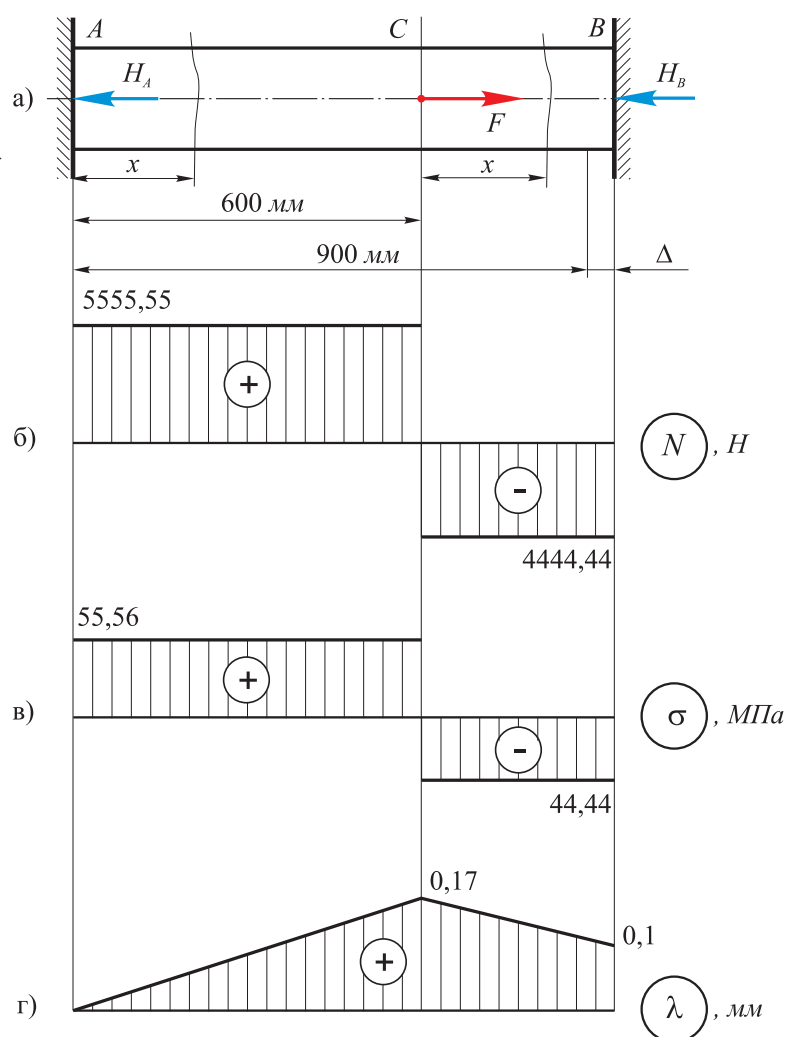


Рис. 7.12. Розрахункова схема (а) та епюри сил (б), напружень (в) і переміщень (г) для стержня

I. **Статичний бік задачі.** Запишемо рівняння рівноваги:

$$\sum X = -H_A + F - H_B = 0. \quad (1)$$

II. **Геометричний бік задачі.** Сумарне видовження стержня дорівнює величині зазору:

$$\Delta l = \Delta l_{AC} + \Delta l_{CB} = \Delta. \quad (2)$$

III. **Фізичний бік задачі.** За законом Гука видовження ділянок знаходимо як

$$\begin{aligned} \Delta l_{AC} &= \frac{N_{AC} l_{AC}}{EA} = \frac{H_A l_{AC}}{EA}; \\ \Delta l_{CB} &= \frac{N_{CB} l_{CB}}{EA} = -\frac{H_B l_{CB}}{EA}. \end{aligned} \quad (3)$$

IV. **Синтез.** Підставляємо (3) у (2):

$$\frac{H_A l_{AC}}{EA} - \frac{H_B l_{CB}}{EA} = \Delta.$$

Враховуючи (1), запишемо:

$$H_A l_{AC} + (H_A - F) l_{CB} = EA \Delta.$$

Звідси

$$H_A = \frac{EA \Delta + F l_{CB}}{l_{AB}} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 100 \cdot 0,1 + 10 \cdot 10^3 \cdot 300}{900} = 5555,56 \text{ Н};$$

$$H_B = -H_A + F = -5555,56 + 10000 = 4444,44 \text{ кН}.$$

Епюра поздовжніх сил зображена на рис. 7.12 б.

Знайдемо величини напружень на кожній ділянці та побудуємо епюру напружень (рис. 7.12 в).

$$\sigma_{AC} = \frac{N_{AC}}{A} = \frac{5555,56}{100} = 55,56 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{CB} = \frac{N_{CB}}{A} = \frac{4444,44}{100} = 44,44 \text{ МПа}.$$

Оскільки матеріал стержня – сталь, яка однаково опирається розтяганню і стисканню, то запас міцності визначатимемо за максимальним за абсолютною величиною напруженням $\sigma_{AC} = 55,56 \text{ МПа}$ і границею текучості. Для сталі 30, згідно з додатком 4 [1],

$\sigma_T = 300 \text{ МПа}$. Тоді коефіцієнт запасу міцності стержня $n_T = \frac{300}{55,56} = 5,4$. Враховуючи, що

для сталі стандартний коефіцієнт запасу складає $[n_T] = 1,5$, робимо висновок про суттєве недовантаження стержня.

Побудуємо епюру переміщень перерізів стержня відносно опори А (рис. 7.12 г). Враховуючи, що ці переміщення визначаються деформаціями відповідних ділянок стержня, запишемо:

Ділянка АС ($0 < x < 0,6 \text{ м}$):

$$\lambda_{x-A} = \Delta l(x) = \frac{N_{AC} x}{EA}.$$

Переміщення перерізу С відносно А

$$\lambda_{C-A} = \frac{N_{AC} l_{AC}}{EA} = \frac{5555,56 \cdot 600}{2 \cdot 10^5 \cdot 100} = 0,17 \text{ мм}$$

Ділянка СВ ($0 < x < 0,3 \text{ м}$):

$$\lambda_{x-A} = \lambda_{C-A} + \Delta l(x) = \lambda_{C-A} + \frac{N_{CB} x}{EA}.$$

Переміщення перерізу В відносно А

$$\lambda_{B-A} = \lambda_{C-A} + \frac{N_{CB} l_{CB}}{EA} = 0,17 - \frac{4444,44 \cdot 300}{2 \cdot 10^5 \cdot 100} = 0,17 - 0,07 = 0,1 \text{ мм}$$

Як бачимо, переміщення λ_{B-A} дорівнює величині заданого зазору Δ , що свідчить про правильність проведених розрахунків.

Знайдені переміщення у відповідних перерізах стержня відкладаємо у вигляді ординат від базової лінії епюри λ і сполучаємо їх кінці прямими лініями, адже залежності $\lambda(x)$ – лінійні.

7.3.3. Особливості статично невизначуваних систем

7.3.3.1. Залежність величин зусиль від співвідношень жорсткостей елементів системи

Розподіл зусиль в елементах статично невизначуваних систем залежить від співвідношення їх жорсткостей. Змінюючи ці співвідношення, можна будь-яким чином змінювати і розподіл зусиль в елементах системи.

В якості ілюстрації розглянемо стержневу систему (див. прикладі 7.4). Припустимо, що площа другого стержня нескінченно велика у порівнянні з площами інших стержнів: $A_2 \rightarrow \infty$. Тоді, згідно з виразами (5) для визначення зусиль, $N_1 = 0$, а $N_2 = F$. Коли припустити, що $A_1 \rightarrow \infty$ і $A_3 \rightarrow \infty$, то $N_2 = 0$, а $N_1 = F/2 \cos \alpha$.

Зусилля в стержнях статично невизначуваної системи розподіляються пропорційно до їх жорсткостей.

7.3.3.2. Чутливість до зміни температури

В статично визначуваних системах зміна температури не призводить, звісно, до виникнення додаткових зусиль. Так стержень, зображений на рис. 7.13, у разі зміни температури отримає приріст довжини за рахунок теплового розширення, але жодних зусиль у його перерізах при цьому не виникне.

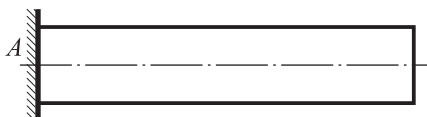


Рис. 7.13 Статично визначуваний стержень

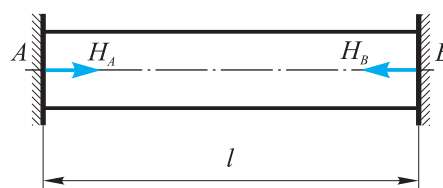


Рис. 7.14 Статично невизначуваний стержень

Жорстко защебивши стержень з правого торця (рис. 7.14), ми отримаємо статично невизначувану систему. Припустимо, що температура стержня зросла ($t > t_0$). Спроба теплового розширення викличе реакції з боку опор. В стержні виникає поздовжня стисна сила. Знайдемо напруження, які в цьому випадку називають *температурними* або *тепловими*.

I. **Статичний бік задачі.** Запишемо умову рівноваги стержня:

$$\sum X = H_A - H_B = 0.$$

Звідси $H_A = H_B = H$.

II. **Геометричний бік задачі.** Оскільки опори абсолютно жорсткі, то видовження стержня $\Delta l = 0$. Іншими словами, теплове видовження стержня компенсується силовою деформацією, яка викликається реакціями опор. Умову сумісності деформації запишемо так:

$$\Delta l = \Delta l_H + \Delta l_t = 0.$$

III. **Фізичний бік задачі.** Силова деформація за законом Гука

$$\Delta l_N = \frac{Nl}{EA} = -\frac{Hl}{EA},$$

а теплове видовження

$$\Delta l_t = \alpha l(t - t_0)$$

Тут α – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу стержня.

IV. **Синтез.** Розв'язуючи спільно отримані рівняння, знаходимо:

$$H = \alpha EA(t - t_0),$$

При цьому напруження

$$\sigma = \frac{N}{A} = -\frac{H}{A} = -\alpha E(t - t_0). \quad (7.5)$$

Приклад 7.6 Знайти напруження в рейці взимку та влітку за температурного діапазону $t = \pm 30^\circ\text{C}$, якщо укладання колії відбувалось у міжсезоння за температури $t = 10^\circ\text{C}$. Модуль пружності матеріалу рейки $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, а коефіцієнт лінійного розширення $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$.

Скориставшись рівнянням (7.5), знаходимо максимальні напруження:

- влітку $\sigma = -125 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^5 (30 - 10) = -50$ МПа;
- взимку $\sigma = -125 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^5 (-30 - 10) = 100$ МПа.

7.3.3.3. Чутливість до неточності виготовлення елементів системи

При виготовленні спряжених елементів конструкцій можливі неточності. Ці неточності в статично визначуваних системах після їх складання не призводять до виникнення зусиль в елементах. В цьому легко переконатись на прикладі стержневої системи (рис. 7.15), де пунктиром зображена система після складання, коли стержень AC виготовлений з відхиленням δ від проектної довжини. Система складається без будь-яких деформацій, а отже й зусиль. Єдиним негативним наслідком є невідповідність отриманої геометричної форми конструкції проектній (на рисунку проектна форма зображена суцільними лініями).

В статично невизначуваних системах в подібній ситуації неможливо провести складання, не піддаючи елементи деформаціям. Як наслідок, в елементах виникають зусилля, які називають *монтажними*.

Розглянемо приклад стержневої статично невизначуваної системи, представленої на рис. 7.8 (приклад 7.4), в якій центральний стержень 2 виготовлений коротшим від проектної довжини (рис. 7.16).

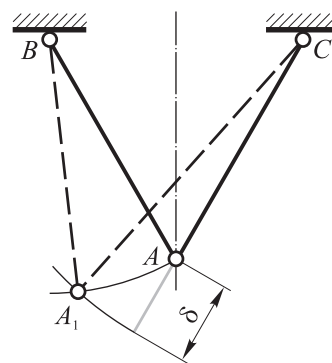


Рис. 7.15 Статично визначувана система після складання

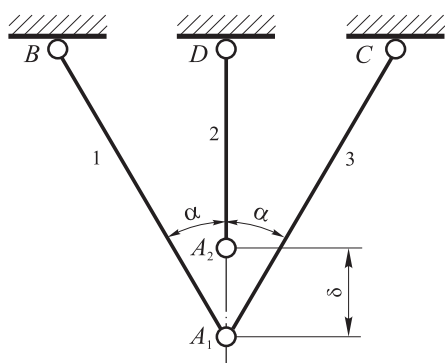


Рис. 7.16. До прикладу 7.7

Приклад 7.7 Визначити монтажні зусилля та напруження в стержнях системи після складання (рис. 7.16), якщо бічні стержні 1 і 3 мають однакову довжину $l_1=l_3$ та площі перерізів $A_1=A_3$, нахилені під однаковими кутами α до вертикалі та виготовлені з одного матеріалу, наприклад міді. Середній стержень 2 – сталевий. Площа його перерізу A_2 , а довжина l_2 .

Очевидно, що коли величина δ незначна, то, приклавши деяке зусилля, можна скласти систему. При цьому бічні стержні слід стиснути, а центральний стержень – розтягнути. Вузол A після складання займе деяке проміжне положення (рис. 7.17), а в стержнях діятимуть залишкові монтажні зусилля (рис. 7.18).

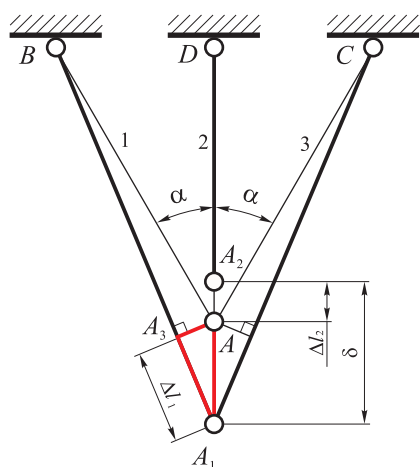


Рис. 7.17. Система після складання

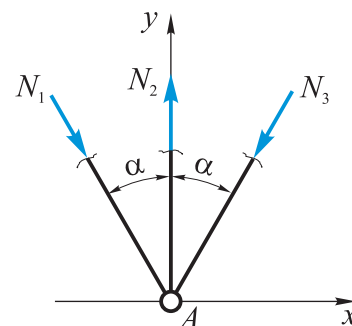


Рис. 7.18. Схема навантаження вузла

Невідомих зусиль маємо три, а рівнянь рівноваги – два. Отже ступінь статичної невизначеності $n = 3 - 2 = 1$.

I. **Статичний бік задачі.** Запишемо рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned}\sum X &= N_1 \sin \alpha - N_3 \sin \alpha = 0; \\ \sum Y &= N_1 \cos \alpha - N_2 + N_3 \cos \alpha = 0.\end{aligned}$$

Звідси

$$N_1 = N_3 = \frac{N_2}{2 \cos \alpha} \quad (1)$$

II. **Геометричний бік задачі.** Згідно з рис. 7.17 з $\triangle AA_1A_3$ маємо $A_1A_3 = AA_1 \cos \alpha$. На основі цього співвідношення з урахуванням масштабу запишемо рівняння сумісності деформацій:

$$\Delta l_1 = (\delta - \Delta l_2) \cos \alpha,$$

або

$$\delta = \frac{\Delta l_1}{\cos \alpha} + \Delta l_2 \quad (2)$$

III. **Фізичний бік задачі.** За законом Гука

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_2}{E_M A_1 \cos \alpha}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_C A_2} \quad (3)$$

У формулі для Δl_1 відсутній знак “-”, оскільки укорочення стержня 1 уже враховане на кресленні (див. рис. 7.17).

IV. **Синтез.** Підставляємо (3) у (2):

$$\frac{N_1 l_2}{E_M A_1 \cos^2 \alpha} + \frac{N_2 l_2}{E_C A_2} = \delta.$$

З урахуванням (1) отримаємо:

$$\begin{cases} N_2 = \frac{\delta}{l_2} \frac{1}{\frac{1}{E_C A_2} + \frac{1}{2E_M A_1 \cos^3 \alpha}}; \\ N_1 = \frac{N_2}{2 \cos \alpha}. \end{cases} \quad (4)$$

Знаючи зусилля та площі перерізів стержнів, легко знаходимо й напруження:

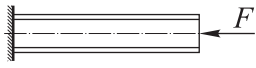
$$\sigma^{(1)} = \frac{N_1}{A_1}; \quad \sigma^{(2)} = \frac{N_2}{A_2} \quad (5)$$

Зауваження. З урахуванням (4) можна констатувати, що в області пружних деформацій існує пряма пропорційна залежність між зусиллями чи напруженнями в системі і величиною неточності виготовлення її елементів. Це явище в техніці часто використовується з користю: створюючи умисно залишкові напруження в елементі протилежного знака до тих напружень, що виникатимуть в процесі експлуатації, ми тим самим створюємо резерв міцності та збільшуємо несучу здатність елемента.

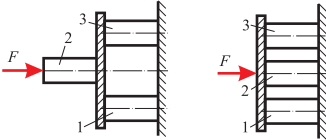
Питання для самоперевірки знань

1. Які напруження називаються допустимими?
2. Границя текучості матеріалу $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$, границя міцності – $\sigma_B = 550 \text{ МПа}$, залишкове видовження після розриву складає $\delta = 18\%$.
3. Запишіть умову міцності стержня за розтягання і стискання.
4. Перелічіть основні види розрахунків, які проводять за допомогою умови міцності.

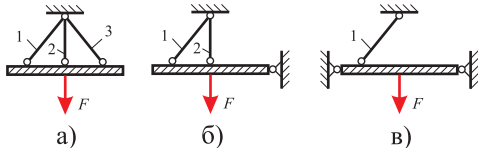
Сталевий стержень двотаврового перерізу (№16) площею

5.  $A = 20,2 \text{ см}^2$ стискається силою $F = 300 \text{ кН}$. Перевірте стержень на міцність, якщо границя текучості матеріалу $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$.

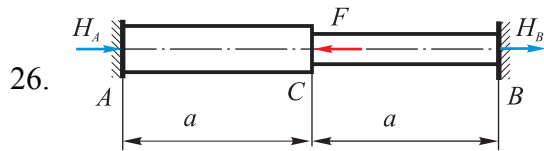
6. Визначте реальний коефіцієнт запасу стержня, розглянутого в п. 5.
7. Знайдіть площу, за якої запас міцності стержня (див. п. 5) відповідав би стандартному для сталі.
8. Знайдіть величину сили, за якої в стержні (див. п. 5) напруження досягнуть границі міцності $\sigma_B = 410 \text{ МПа}$.
9. Запишіть умову жорсткості стержня за розтягання і стискання.
10. Перелічіть основні види розрахунків, які проводять за допомогою умови жорсткості.
11. Яким в інженерній практиці, як правило, є розрахунок на жорсткість: проектувальним чи перевірним?
12. Яка система називається статично визначуваною?
13. Яка система називається статично невизначуваною?
14. Які в'язі називають «зайвими» або надлишковими?
15. З якою метою вводять надлишкові в'язі в конструкцію?

16.  Яка з двох систем є статично невизначуваною: а) чи б)?

17. Як обчислюється ступінь статичної невизначеності системи?

18.  Чи відносяться наведені стержневі системи, що утримують абсолютно жорстку балку, до статично невизначених? Якщо так, то які вони мають ступені статичної невизначеності?

19. Ступінь статичної невизначеності конструкції $n = 3$. Яка кількість надлишкових в'язей накладена на систему?
20. Сформулюйте порядок, в якому має розкриватись статична невизначеність конструкції?
21. В чому полягає статичний бік задачі при розкритті статичної невизначеності?
22. Розкрийте суть геометричної сторони задачі?
23. Чому геометричні рівняння називаються рівняннями сумісності деформацій?
24. Яка гіпотеза опору матеріалів використовується для запису геометричних рівнянь?
25. Які величини пов'язані фізичними рівняннями? На якому законі вони базуються?



Виходячи з особливостей статично невизначуваних систем, дайте відповідь, яка з опорних реакцій більша: H_A чи H_B ?

27. Які напруження називають тепловими?
28. Чи виникають теплові напруження в статично визначуваних конструкціях?
29. Які напруження називають монтажними?
30. Наведіть приклади використання монтажних зусиль в конструкції з користю для її роботоздатності.