

Лекція №13

Розділ 8. КРИТЕРІЇ МІЦНОСТІ

Простота оцінки міцнісної надійності стержнів за чистого розтягання-стискання пов'язана з однаковими умовами навантаження реального стержня і дослідного зразка (який, до речі, теж є стержнем), з допомогою якого вивчались властивості матеріалу. Проте, найважливішим є те, що і в реальному стержні, і в зразку реалізується однаковий напружений стан – лінійний.

Можна і за інших видів навантаження проводити перевірку міцності стержня простим порівнянням діючих в ньому напружень з допустимими значеннями, отриманими за розтягання або стискання, за умови, що в небезпечних точках стержня також реалізується лінійний напружений стан.

В умовах нелінійного напруженого стану ситуація набагато складніша. Міцнісна надійність пов'язана з умовами досягнення матеріалом граничного стану, який, в свою чергу, визначається напруженим станом тіла в точці. Тобто визначається всіма діючими головними напруженнями. Встановлювати експериментально граничні значення цих напружень за довільної їх комбінації – шлях непродуктивний, а вірніше – нереальний, через значні методичні складнощі таких експериментів.

Тому вже від початку становлення механіки деформованого твердого тіла як науки учені пішли іншим шляхом – шляхом пошуків критеріїв міцності, які дозволяли б використовувати результати простих експериментів, наприклад на чисте розтягання або стискання, в розрахунках на міцність за умов складного напруженого стану.

Тема 8.1 Поняття про критерій міцності

Під критерієм міцності розуміють деяку фізичну величину, яка в умовах граничного стану матеріалу в даній точці деформованого тіла набуває одного й того ж значення, незалежно від співвідношень головних напружень.

Проблема раціонального вибору критерію зводиться до визначення деякої функції компонент тензора напружень виду

$$K = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, m_i). \quad (8.1)$$

Тут m_i — константи матеріалу, які визначаються з найпростіших випробувань.

Функція (8.1) за напружень, які відповідають граничному стану матеріалу, зберігає своє значення, що дорівнює K , незалежно від виду напруженого стану. В такому розумінні це дає нам право порівнювати лінійний і складний напружені стани. Тобто, K і є критерієм міцності.

Критерій міцності має цілком конкретну фізичну інтерпретацію: максимальне нормальне напруження, максимальна енергія формозміни і т.п.

Умова (8.1) в координатах $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ може бути представлена поверхнею, яка обмежує область безпечних напружень (рис. 8.1). Цю поверхню називають граничною.

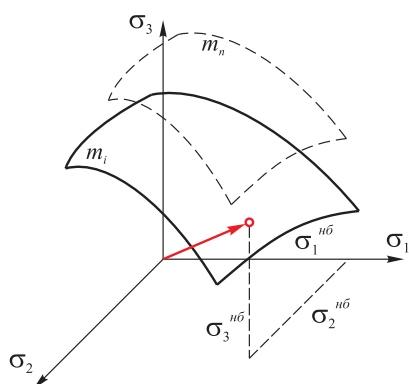


Рис. 8.1. Гранична поверхня

Гранична поверхня руйнування є геометричним місцем точок, координати яких дорівнюють границям міцності, а точки, які лежать на *граничній поверхні текучості*, відповідають границям текучості матеріалу за різних напружених станів. На рисунку граничні напруження позначені σ_1^{nb} , σ_2^{nb} , σ_3^{nb} .

В умовах плоского напруженого стану поверхня вироджується у плоску криву, яка в даному випадку називатиметься *кривою руйнування* або *кривою текучості*.

В розрахунках на міцність граничні або небезпечні напруження обмежують введенням коефіцієнту запасу міцності. В загальному випадку напруженого стану під коефіцієнтом запасу міцності слід розуміти число n , яке показує, у скільки разів слід одночасно збільшити всі компоненти тензора напружень, щоб стан матеріалу в небезпечній точці став граничним:

$$\sigma_1^{nb} = n \cdot \sigma_1; \sigma_2^{nb} = n \cdot \sigma_2; \sigma_3^{nb} = n \cdot \sigma_3. \quad (8.2)$$

Перші гіпотези про умови настання граничного стану матеріалу висловлювались ще на початку розвитку науки про міцність. У кінці XIX сторіччя вже були відомі принципові основи класичних теорій граничного стану. На сьогодні існує кілька сотень теорій міцності, які дозволяють прогнозувати міцнісну надійність широкого кола конструкційних матеріалів в найрізноманітніших умовах експлуатації. В опорі матеріалів переважно використовують п'ять класичних теорій міцності, з якими далі й познайомимось.

Тема 8.2 Класичні теорії міцності

8.2.1. Критерії руйнування

Ними користуються, коли граничним станом матеріалу є руйнування, яке відбувається шляхом відриву, викликаного дією нормальних напружень або подовжень. Такий граничний стан характерний для крихких матеріалів.

8.2.1.1. Критерій найбільших нормальних напружень (перша теорія міцності)

Ця теорія бере початок від Галілео Галілея, а формальне її обґрунтування знаходимо в роботах Ляме, Клебша, Ренкіна.

Вважається, що руйнування з утворенням тріщин в загальному випадку напруженого стану настає тоді, коли найбільше за абсолютною величиною головне напруження досягає небезпечного значення.

Як відомо, небезпечним напруженням для крихких матеріалів є границя міцності. Тоді умова настання граничного стану, або в даному випадку – умова руйнування, за цією теорією може бути записаною так:

$$\sigma_1 = \sigma_{B_p} \quad \text{або} \quad |\sigma_3| = \sigma_{B_{cm}}. \quad (8.3)$$

Тут σ_{B_p} і $\sigma_1 = \sigma_{B_{cm}}$ – границі міцності матеріалу за розтягання і стискання відповідно.

Умови міцності отримаємо в такому вигляді:

$$\sigma_1 \leq [\sigma]_p; \quad |\sigma_3| \leq [\sigma]_{cm}. \quad (8.4)$$

Отже перша класична теорія міцності з трьох головних напружень враховує тільки одне – максимальне, вважаючи, що два інших на міцність не впливають

Як показує досвід, критерій найбільших нормальних напружень придатний лише для дуже крихких матеріалів, таких як камінь, цегла, скло, бетон, кераміка. Але він зовсім непридатний для пластичних матеріалів.

8.2.1.2. Критерій найбільших лінійних деформацій (друга теорія міцності)

Ідея вибору в якості критерію міцності найбільшої лінійної деформації належить Маріотту. Узагальнена в роботах Посельє, Грасгофа, Нав'є.

Вважається, що руйнування матеріалу за складного напруженого стану настає тоді, коли найбільша за абсолютною величиною лінійна деформація $\varepsilon_{\max}$ досягає небезпечного значення $\varepsilon^{H\delta}$, яке визначається з експерименту на розтягання або стискання.

Тобто умова переходу до граничного стану така:

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon^{H\delta}. \quad (8.5)$$

Нехай

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

За чистого розтягання (лінійний напружений стан)

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E},$$

а в умовах граничного стану $\varepsilon^{nb} = \frac{\sigma^{nb}}{E}$.

Таким чином умова настання граничного стану – руйнування, коли $\sigma^{nb} = \sigma_B$, набуває вигляду:

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_B, \quad (8.6)$$

а умова міцності:

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]. \quad (8.7)$$

Даний критерій, як бачимо, дозволяє врахувати всі три головні напруження, але застосовується він вкрай рідко через значні розбіжності з результатами його експериментальної перевірки для широкого кола матеріалів. Є в теорії найбільших лінійних деформацій і цілий ряд очевидних внутрішніх протиріч, на яких ми зупинятись не будемо.

Ця теорія тут наведена виключно як данина історії розвитку науки про міцність, а для практичного застосування вона не рекомендується.

8.2.2. Критерії текучості

Початок текучості в опорі матеріалів розглядається як граничний стан для пластичних матеріалів. Звідси й назва цієї групи критеріїв міцності. Такий вид руйнування супроводжується залишковою деформацією і пов'язаний з незворотними зсувами у кристалографічних площинах, викликаних дією дотичних напружень.

8.2.2.1. Критерій найбільших дотичних напружень (третя теорія міцності)

Ця теорія була запропонована Кулоном ще у 1773 році. Стала відомою завдяки роботам Треска і Сен-Венана.

Якщо максимальне дотичне напруження в матеріалі досягає небезпечної величини, то в матеріалі настає граничний стан, незалежно від виду напруженого стану.

Оскільки мова йде про текучість матеріалу, то небезпечне напруження відповідає границі текучості τ_T . Тоді умова настання граничного стану матеріалу, або умова текучості, матиме вигляд:

$$\tau_{\max} = \tau_T. \quad (8.8)$$

Оскільки $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$, а за чистого розтягання $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2}$, умова (8.8) набуває виду:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T, \quad (8.9)$$

а умова міцності

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma], \quad (8.10)$$

Даний критерій добре перевірений експериментально і підтверджується для пластичних матеріалів, які однаково опираються розтягання і стисканню. Проте він має й суттєвий недолік: не враховується середнє за величиною головне напруження σ_2 .

8.2.2.2. Критерій питомої потенціальної енергії формозміни (четверта теорія міцності)

Вперше був запропонований Максвелом у 1856 році. Знайшов свій розвиток у роботах Губера, Мізеса, Генки.

Граничний стан – течія матеріалу – починається, коли потенціальна енергія формозміни деформованого тіла досягає своєї граничної величини, незалежно від виду напруженого стану.

$$u_\phi = u_\phi^{нб}. \quad (8.11)$$

В загальному випадку напруженого стану

$$u_\phi = \frac{1+\mu}{6E} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]. \quad (8.12)$$

За чистого розтягання

$$u_\phi = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_1^2. \quad (8.13)$$

Текучість настає, коли $\sigma_1 = \sigma_T$. Тоді умова текучості (8.11) набуває вигляду:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_T, \quad (8.14)$$

а умова міцності

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq [\sigma]. \quad (8.15)$$

Для пластичних матеріалів, які однаково опираються розтягання і стисканню, умова (8.14) збігається з експериментом на 90%.

8.2.3. Критерій Мора

Жоден з вищезгаданих критеріїв не є досконалим. Найголовніше, жоден з них не охоплює граничних станів за всіх видів напруженого стану. Що мається на увазі?

Ми умовно поділили матеріали на крихкі і пластичні. Проте встановлено, що властивості матеріалів залежать від напруженого стану. За одних співвідношень головних напружень матеріал може бути крихким, а за інших – пластичним. Так, крихкий матеріал, як, наприклад, граніт, за великих рівнів гідростатичного тиску (всебічний рівномірний стиск) набуває здатності деформуватися пластично. Навпаки, матеріали, пластичні в звичайних умовах, наприклад сталь, за всебічного рівномірного розтягання стають крихкими.

Отже, застосування в кожному окремому випадку тієї чи іншої теорії міцності має бути узгодженим з характером напруженого стану.

Створення єдиного критерію на всі випадки напружених станів – це надзвичайно складна задача. Одну з перших спроб її розв'язання здійснив Отто Мора, який опирався на припущення, що міцність в загальному випадку напруженого стану визначається величиною і знаком найбільшого σ_1 і найменшого σ_3 з головних напружень, а впливом середнього за величиною напруження σ_2 можна знехтувати. В основу його суджень був покладений експериментально встановлений факт зростання опору матеріалу при переході від зони розтягання ($\sigma_1 > 0$; $\sigma_3 > 0$) до зони стискання ($\sigma_1 < 0$; $\sigma_3 < 0$).

Теоретичне обґрунтування критерію можна знайти в літературі [1]. Тут ми його подаємо без доведення.

Умова граничного стану за теорією Мора набуває вигляду:

$$\sigma_1 - \frac{\sigma_{Tp}}{\sigma_{Tcm}} \sigma_3 = \sigma_p^{nb}, \quad (8.16)$$

або

$$\sigma_1 - \frac{\sigma_{Bp}}{\sigma_{Bcm}} \sigma_3 = \sigma_p^{nb}, \quad (8.17)$$

Тут σ_{Tp} , σ_{Tcm} і σ_{Bp} , σ_{Bcm} – границі текучості і міцності за розтягання і стискання відповідно.

Візьмемо для прикладу сталь. Якщо сталь знаходиться в умовах, близьких до всебічного рівномірного розтягання, то веде вона себе як крихкий матеріал,

коли границя текучості $\sigma_{Bp} = 0$. Тоді умова (8.16) перетворюється в умову руйнування за теорією максимальних нормальних напружень: $\sigma_1 = \sigma_p^{нб} = \sigma_{Bp}$.

В звичайних умовах сталь – пластичний матеріал, який однаково опирається розтяганню і стисканню. Тобто $\sigma_{Tp} = \sigma_{Tcm}$. Тоді умова (8.16) перетворюється в умову текучості за теорією найбільших дотичних напружень: $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T$.

Але це з області теорії. Нажаль критерій Мора не став універсальним критерієм через значні методичні труднощі в його застосуванні з одного боку, і через неврахування середнього за величиною головного напруження σ_2 з іншого.

Проте критерій Мора широко застосовується в розрахунках на міцність елементів конструкцій з так званих *напівкрихких* матеріалів, для яких границі міцності за розтягання і стискання відрізняються (чавун, високоміцні сталі і т.п.). У цьому випадку користуються або умовою руйнування (8.17), або умовою міцності

$$\sigma_1 - \frac{[\sigma]_p}{[\sigma]_{cm}} \sigma_3 \leq [\sigma]_p. \quad (8.18)$$

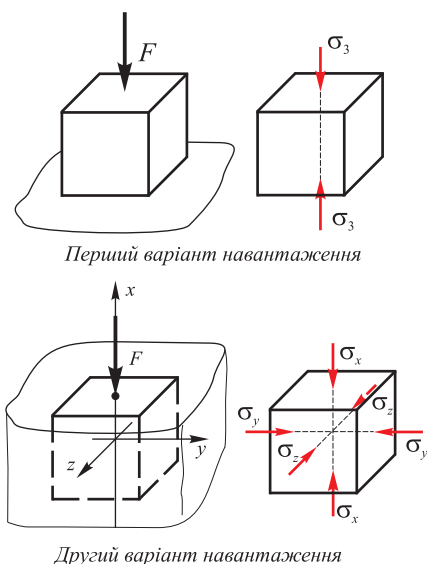


Рис. 8.2. До прикладу 8.1

Приклад 8.1 Три кубики, виготовлені зі сталі 45, бронзи БрОФ10-1 у твердому стані та сірого чавуну СЧ 12, навантажуються однаковою стисною силою $F = 20$ кН (перший варіант навантаження на рис. 8.2). Знайти сторони кубиків з умови їх рівномірності. Перевірити також, на скільки зміняться запаси міцності кубиків, коли їх помістити без зазору в отвір у абсолютно жорсткій плиті в рівень з її поверхнею (другий варіант навантаження на рис. 8.2), та навантажити їх тією ж силою $F = 20$ кН.

Перший варіант навантаження.

Розміри сторін кубика для вказаних матеріалів знайдемо з умови міцності на стиск, попередньо визначивши допустимі напруження, скориставшись довідковими даними з [1].

Для сталі 45 небезпечне напруження $\sigma_T = 360$ МПа, а допустиме – $[\sigma] = \sigma_T / n_T = 360 / 1,5 = 240$ МПа.

Для бронзи БрОФ10-1 у твердому стані ($\delta=3\%$) небезпечне напруження $\sigma_B = 300$ МПа; допустиме напруження $[\sigma] = \sigma_B / n_B = 300 / 2,5 = 120$ МПа.

Для сірого чавуну СЧ 12 при стисканні $\sigma_{B_{cm}} = 500$ МПа; допустиме напруження $[\sigma]_{cm} = \sigma_{B_{cm}} / n_B = 500 / 3 = 167$ МПа.

З умови міцності $\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma]_{cm}$ знаходимо розміри сторін кубиків.

- Для сталевих кубиків $A_c \geq 20000 / 240 = 83,33 \text{ мм}^2$. Звідси сторона кубика $a_c \geq \sqrt{A} = \sqrt{83,33} = 9,13 \text{ мм}$. Приймаємо $a_c = 9,2 \text{ мм}$
- Для бронзових кубиків $A_{бр} \geq 20000 / 120 = 166,67 \text{ мм}^2$. Звідси сторона кубика $a_{бр} \geq \sqrt{A_{бр}} = \sqrt{166,67} = 12,909 \text{ мм}$. Приймаємо $a_{бр} = 12,9 \text{ мм}$
- Для чавунних кубиків $A_{ч} \geq 20000 / 167 \approx 120 \text{ мм}^2$. Звідси сторона кубиків $a_{ч} \geq \sqrt{A_{ч}} = \sqrt{120} = 10,954 \text{ мм}$. Приймаємо $a_{ч} = 11,0 \text{ мм}$

Другий варіант навантаження.

Оскільки плита абсолютно жорстка, то поперечна деформація кубиків при їх стисканні силою F викликати стисні навантаження збоку стінок плити. А значить діятимуть у цих напрямках стисні напруження σ_y і σ_z , і кубики перебуватимуть в умовах об'ємного напруженого стану (рис. 8.2).

Напруження $\sigma_x = \frac{F}{A}$. Інші два головних напруження знайдемо з умови відсутності деформацій в напрямку стінки:

$$\begin{cases} \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] = 0; \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0. \end{cases}$$

Вважаючи матеріали кубиків ізотропними, отримаємо співвідношення для напружень:

$$\sigma_y = \sigma_z = \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_x$$

Отже, враховуючи знак сили, маємо такі головні напруження.

- Для кубика зі сталі 45 (коефіцієнт Пуассона $\mu = 0,25$ [1]):

$$\sigma_x = -\frac{20000}{9,2^2} = -236,29 \text{ МПа}; \quad \sigma_y = \sigma_z = -\frac{0,25}{1-0,25} 236,29 = -91,37 \text{ МПа}.$$

Тобто $\sigma_1 = \sigma_2 = -91,37 \text{ МПа}$, $\sigma_3 = -236,29 \text{ МПа}$.

- Для кубика із бронзи БрОФ10-1 (коефіцієнт Пуассона $\mu = 0,35$ [1]):

$$\sigma_x = -\frac{20000}{12,9^2} = -120,18 \text{ МПа}; \quad \sigma_y = \sigma_z = -\frac{0,35}{1-0,35} 120,18 = -64,71 \text{ МПа}.$$

Тобто $\sigma_1 = \sigma_2 = -64,71 \text{ МПа}$, $\sigma_3 = -120,18 \text{ МПа}$.

- Для кубика з сірого чавуну СЧ 12 (коефіцієнт Пуассона $\mu = 0,25$ [1]):

$$\sigma_x = -\frac{20000}{11^2} = -165,29 \text{ МПа}; \quad \sigma_y = \sigma_z = -\frac{0,25}{1-0,25} 165,29 = -55,10 \text{ МПа}.$$

Тобто $\sigma_1 = \sigma_2 = -55,1 \text{ МПа}$, $\sigma_3 = -165,29 \text{ МПа}$.

Примітка 8.1. Проводячи розрахунки з використанням теорій міцності, користуються поняттям розрахункового або еквівалентного напруження, що дозволяє умову міцності представляти у класичному трактуванні (див. тему 5.3, лекція 10): $\sigma_p^i \leq [\sigma]$. Тут i – індекс, що відповідає певній теорії міцності.

Визначимо розрахункові напруження за відповідними теоріями міцності для кожного матеріалу та встановимо, як зміняться коефіцієнти запасів міцності у порівнянні з чистим стисканням. Для цього порівняємо величини знайдених розрахункових напружень з допустимими для матеріалу, адже розміри сторін кубиків вибирались для напружень, що дорівнювали допустимим (не беручи до уваги виконаного округлення результатів до першого знаку після коми)

– Кубик зі сталі 45.

Оскільки сталь 45 є пластичним матеріалом, скористаємось критерієм найбільших дотичних напружень (третья теорія міцності) та критерієм питомої потенціальної енергії формозміни (четверта теорія міцності):

$$\sigma_p^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 = -91,37 + 236,29 = 144,92 \text{ МПа};$$

$$\begin{aligned} \sigma_p^{IV} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(-91,37 + 91,37)^2 + (-91,37 + 236,29)^2 + (-236,29 + 91,37)^2} = 144,92 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Отже при заданій схемі навантаження кубика розрахункові напруження за третьою та четвертою теоріями міцності збігаються (насправді за умови, що $\sigma_1 = \sigma_2$, вираз для розрахункового напруження за четвертою теорією міцності збігається з виразом для третьої теорії міцності, в чому легко переконатися). Тоді $[\sigma] / \sigma_p^{III} = [\sigma] / \sigma_p^{IV} = 240 / 144,92 = 1,65$, а це означає, що запас міцності зріс у 1,65 рази.

– Кубик із бронзи БрОФ10-1.

Бронза в твердому стані є крихким матеріалом. Скористаємось для розрахунку першою теорією міцності:

$$\sigma_p^I = |\sigma_3| = 120,18 \text{ МПа}.$$

Тоді $[\sigma] / \sigma_p^I \approx 1$, тобто запас міцності не змінився.

– Кубик з сірого чавуну СЧ 12.

Сірий чавун має різні границі міцності за розтягання і стискання, тому скористаємось теорією Мора:

$$\sigma_p^M = \sigma_1 - \frac{[\sigma]_p}{[\sigma]_{ст}} \sigma_3.$$

Знайдемо допустиме напруження для чистого розтягання.

Для сірого чавуну СЧ 12 при розтяганні $\sigma_{B_p} = 120$ МПа; допустиме напруження

$$[\sigma]_p = \frac{\sigma_{B_p}}{n_B} = \frac{120}{3} = 40 \text{ МПа}. \text{ Тоді}$$

$$\sigma_p^M = -56,11 + \frac{40}{167} 168,33 = -15,79 \text{ МПа}.$$

Отриманий результат потребує коментарів. Розрахункові напруження – це суттєво додатні величини. Знак мінус при розрахунковому напруженні свідчить про те, що матеріал перебуває у більш безпечному стані, навіть у порівнянні з не навантаженим станом, коли $\sigma_p^M = 0$. Не дивлячись на всю парадоксальність такого твердження, воно має право на існування. Пов'язаний такий результат з певними неточностями, які дає критерій Мора в області всебічного стиску, але неточності ці йдуть, як бачимо, в запас міцності. Тому на практиці від'ємний результат слід трактувати як нульовий. Тобто в нашому випадку $\sigma_p^M = 0$ і коефіцієнт запасу міцності зріс до нескінченності, адже ми отримали напружений стан, еквівалентний ненапруженому.

Питання для самоперевірки знань

1. Що потрібно знати, щоб охарактеризувати напружений стан тіла в точці? Які види напруженого стану Ви знаєте?
2. За яких умов роботи елемента конструкції його перевірка на міцність не потребує використання критеріїв міцності:
 - при чистому розтяганні – стисканні;
 - при лінійному напруженому стані;
 - при об'ємному напруженому стані;
3. Які види граничних станів можуть досягатися при статичному розтяганні зразка з маловуглецевої сталі?
4. Який граничний стан характерний для стандартних зразків із сірого чавуну при їх стисканні?
5. Що називається критерієм міцності?
6. В яких координатах будують граничну поверхню?
7. Що називають граничною поверхнею руйнування?
8. Що називають граничною поверхнею текучості?
9. Для якого виду напруженого стану будують криву руйнування або текучості?
10. Що розуміють під коефіцієнтом запасу міцності в умовах складного напруженого стану?
11. Які критерії руйнування Вам відомі?
12. Яка фізична величина є критерієм за першою класичною теорією міцності?
13. В якості якого критерію застосовують найбільші дотичні напруження в точці: руйнування чи текучості?
14. Яка фізична величина є критерієм за четвертою класичною теорією міцності?
15. Для яких матеріалів в розрахунках на міцність застосовують теорію Мора?

16. Матеріал має такі механічні характеристики: $\sigma_{\text{пл}} = 220 \text{ МПа}$; $\sigma_{\text{T}} = 250 \text{ МПа}$; $\sigma_{\text{в}} = 420 \text{ МПа}$; $\delta = 25\%$. Якою теорією міцності варто скористатись в розрахунках на міцність?
17. Який основний недолік третьої теорії міцності?
18. Пластичний матеріал перебуває в умовах всебічного рівномірного стискання: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -400 \text{ МПа}$. Чому дорівнює розрахункове напруження за третьою та за четвертою теоріями міцності?
19. Який граничний стан характерний для конструкційних матеріалів в умовах всебічного рівномірного розтягання?
20. Напружений стан в деякій точці тіла такий: $\sigma_1 = 120 \text{ МПа}$, $\sigma_2 = 20 \text{ МПа}$, $\sigma_3 = -80 \text{ МПа}$. Знайти розрахункове напруження, якщо допустимі напруження для матеріалу за стискання і розтягання знаходяться у співвідношенні $[\sigma]_{\text{ст}} = 4[\sigma]_p$.

Розділ 9. РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ СТЕРЖНІВ ПРИ ЗСУВІ (ЗРІЗІ) ТА ЗМИНАННІ

Тема 9.1 Визначення напружень при зсуві (зрізі) стержня

Стержень працює в умовах зсуву, коли з шести компонент головного вектора і головного моменту внутрішніх сил відмінні від нуля тільки поперечні сили Q_y і Q_z . Такий вид навантаження стержня з достатнім ступенем наближення можна отримати, коли до стержня з протилежних боків прикласти однакові сили, спрямовані назустріч одна одній перпендикулярно до його осі, і коли лінії їх дії проходять на досить малій відстані (рис. 9.1 а).

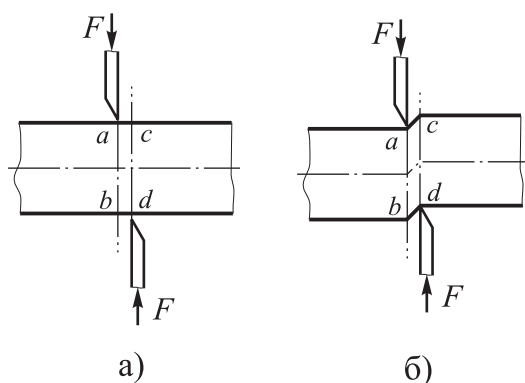


Рис. 9.1 Зріз стержня: а – різання прута ножицями; б – зріз, що супроводжується згинанням

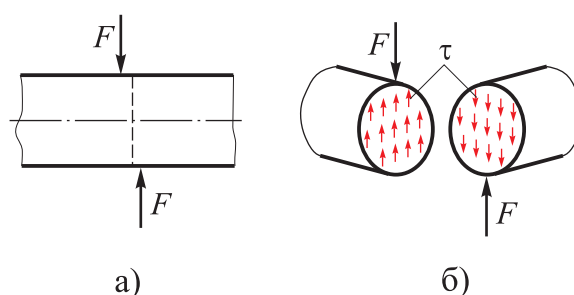


Рис. 9.2 Зріз стержня: а – схема навантажування; б – напруження в перерізі

Такий вид навантаження можливий, наприклад, при різанні прута ножицями. Проте на практиці отримати у чистому вигляді зріз (зсув) складно, оскільки він, як правило, супроводжується іншими видами деформації, найчастіше згинанням (рис. 9.1 б).

В розрахунках на зріз з метою їх спрощення користуються ідеальною схемою, тобто вважають, що жодних деформацій, крім деформації зсуву, немає.

Користуючись інтегральними рівняннями рівноваги для стержня (5.3) або (5.4), виведемо формулу для визначення напружень в стержні.

В перерізі ab поперечна сила $Q_y = F$. Опускаючи в подальшому індекси, запишемо:

$$Q = \int_A \tau dA. \quad (9.1)$$

Деформацію зсуву в чистому вигляді можна уявити як зміщення однієї частини стержня відносно іншої в поперечній площині (рис. 9.2 а) так, якби ці частини були абсолютно жорсткими. Таке уявлення про деформацію зсуву дає підстави стверджувати, що дотичні напруження в перерізі розподілені рівномірно: $\tau(y, z) = \text{Const}$. Тоді

$$Q = F = \tau A. \quad (9.3)$$

А звідси

$$\tau = \frac{F}{A}. \quad (9.4)$$

Не дивлячись на те, що припущення про рівномірний розподіл дотичних напружень в перерізі досить грубе, воно дозволяє з прийнятною точністю дуже просто розраховувати на міцність багато елементів конструкцій і деталей машин, зокрема заклепкові, гвинтові, болтові з'єднання, шпонки, зварні шви і т.п.

Тема 9.2 Практичні розрахунки на зріз і зминання

9.2.1. Розрахунки на міцність при зрізі

Умова міцності на зріз може бути записана, як:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max}}{A} \leq [\tau_{зр}]. \quad (9.5)$$

Тут $[\tau_{зр}]$ – допустиме напруження на зріз.

На відміну від чистого розтягання або стискання, допустиме напруження на зріз $[\tau_{зр}]$ залежить не тільки від матеріалу, але й від конструктивних особливостей елементів, що працюють на зріз, чи, наприклад, технології отримання зварного шва. Так для заклепок, виготовлених з однакових сталей, маємо різні допустимі напруження на зріз, залежно від способу виготовлення отвору під них: свердлінням чи продавлюванням (див. [1], додаток 11).

Познайомимося з особливостями розрахунків на зріз, розглянувши приклад.

Приклад 9.1 Знайти мінімальну кількість заклепок, щоб шов, що з'єднує два листи, витримав задане навантаження $F = 45$ кН (рис. 9.3). Дано: $d = 10$ мм, $[\tau_{зр}] = 100$ МПа.

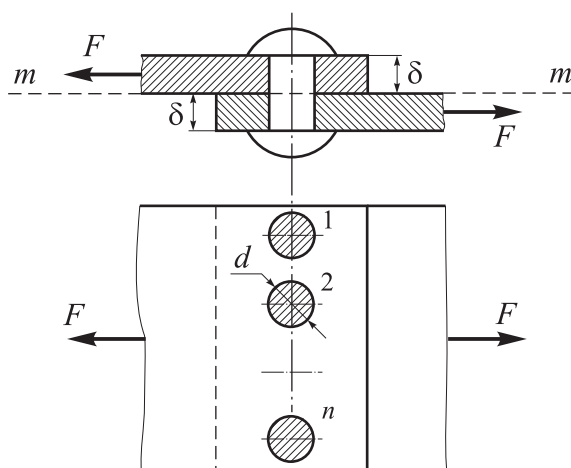


Рис. 9.3. До прикладу 9.1

Під дією сил F , які зміщують листи один відносно другого в площині $m-m$ (рис. 9.3), стержні заклепок працюють на зріз.

Вважатимемо, що ці сили рівномірно розподіляються між усіма заклепками, і поперечна сила в площині зрізу кожної заклепки $Q = F/n$, де n – кількість заклепок. Тоді умова міцності на зріз набуває вигляду:

$$\tau = \frac{F}{nA} \leq [\tau_{зр}].$$

Звідси

$$n \geq \frac{4F}{\pi d^2 [\tau_{зр}]} = \frac{4 \cdot 45 \cdot 10^3}{\pi \cdot 10^2 \cdot 100} = 5,7.$$

Приймаємо остаточно $n = 6$.

9.2.2. Розрахунки на міцність при зминанні

Слід відзначити, що навантаження, прикладені до елементів, які взаємодіють в процесі роботи, крім зрізу викликають також зминання контактуючих поверхонь. Під зминанням розуміють пластичну деформацію цих поверхонь.

На рис. 9.4 а показана епюра розподілу тиску на поверхні контакту при дії сили F .

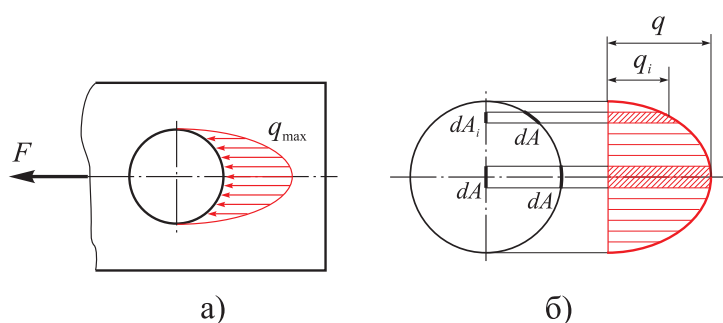


Рис. 9.4 Схема навантаження в зоні контакту:

а – епюра тиску на поверхні контакту;

б – пропорційний закон розподілу тиску

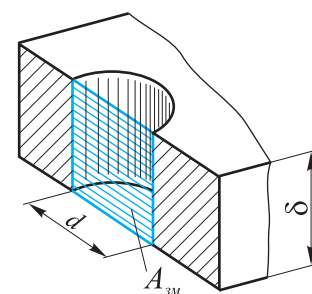


Рис. 9.5 Схема визначення площі зминання

Насправді задача визначення напружено-деформованого стану тіла в зоні контакту – це складна задача теорії пластичності. Тим не менше з достатньою точністю, в межах прийнятих запасів міцності, величину максимального напруження на поверхні контакту або *максимальне напруження зминання* $\sigma_{зм}$ можна знайти досить просто, виходячи з певних міркувань. А саме, можна припустити, по-перше, що, згідно з силовими граничними умовами на поверхні контакту, $\sigma_{зм} = q_{\max}$ (див. рис. 9.4 б). По-друге, тиск на поверхні контакту

змінюється пропорційно зміні величини проекції площадки dA бічної поверхні на діаметральну площину:

$$\frac{q_i}{q_{\max}} = \frac{dA_i}{dA}. \quad (9.6)$$

Звідси $q_i dA = q_{\max} dA_i = \text{Const}$.

Силу F можна виразити через тиск на поверхні контакту:

$$F = \int_A q_i dA = q_{\max} \int_A dA_i = q_{\max} A_{зм} = \sigma_{зм} A_{зм}. \quad (9.7)$$

Тоді

$$\sigma_{зм} = \frac{F}{A_{зм}}. \quad (9.8)$$

Тут $A_{зм}$ – площа зминання, що дорівнює проекції поверхні контакту на діаметральну площину (рис. 9.5). Для наведеного прикладу $A_{зм} = d\delta$.

Умова міцності при зминанні:

$$\sigma_{зм} = \frac{F}{A_{зм}} \leq [\sigma_{зм}]. \quad (9.9)$$

Допустиме напруження на зминання пов'язується з допустимим напруженням на стиск:

$$[\sigma_{зм}] = (2 \dots 2,5) [\sigma_{ст}].$$

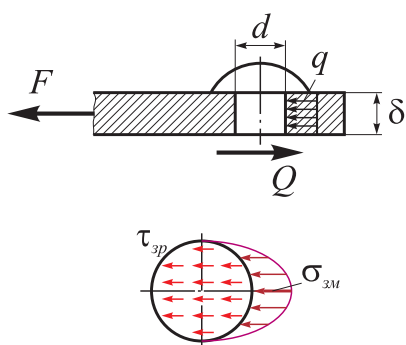


Рис. 9.6 До прикладу 9.2

Приклад 9.2 Користуючись умовою прикладу 9.1, знайти мінімальну кількість заклепок з умови міцності на зминання, якщо товщина листів $\delta = 8$ мм, а допустимі напруження зминання для матеріалу заклепок $[\sigma_{зм}]_з = 350$ МПа, а для матеріалу листа – $[\sigma_{зм}]_л = 420$ МПа.

Схема навантаження та епюри розподілу напружень в перерізі заклепки зображені на рис. 9.6.

Оскільки і для заклепок, і для листа площі зминання однакові і дорівнюють

$$A_{зм} = d\delta = 10 \cdot 8 = 80 \text{ мм}^2,$$

то мінімально допустима кількість заклепок визначатиметься з умови міцності для заклепки як слабшого елемента з'єднання з меншим допустимим напруженням зминання. Отже

$$\sigma_{зм} = \frac{F'}{A_{зм}} \leq [\sigma_{зм}]_3.$$

Тут $F' = F/n$ – сила, що припадає на одну заклепку. Тоді

$$n \geq \frac{F}{A_{зм} [\sigma_{зм}]_3} = \frac{45 \cdot 10^3}{80 \cdot 350} = 1,6.$$

Приймаємо $n = 2$.

Примітка 9.1. Розрахунки на зріз і зминання – це взаємодоповнюючі розрахунки. Якщо виконується проектувальний розрахунок, то безпечні розміри елементів чи їх мінімальна кількість визначають з умов міцності як на зріз, так і на зминання, і вибирають більший розмір (чи кількість елементів) зі знайдених.

Отже, порівнюючи результати розрахунків на зріз і зминання в наших прикладах, приймаємо мінімальну кількість заклепок $n = 6$.