Лекція №15

Тема 10.2 Кручення стержнів некруглого перерізу

Визначення напружень у стержнях з некруглим перерізом при крученні є досить складною задачею, яка методами опору матеріалів не розв'язується. Причина полягає в тому, що для таких стержнів не виконується гіпотеза плоских перерізів, яка значно спрощує цю задачу для круглого стержня. Поперечні перерізи в закрученому некруглому стержні суттєво викривлюються (депланують), і закон розподілу напружень в перерізі ускладнюється. Напруження стають функціями не однієї змінної – радіуса ρ, як у випадку з круглим перерізом, а вже двох координат точки перерізу. При визначенні кутів зсуву потрібно враховувати не лише взаємний поворот перерізів, але й місцевий перекіс, пов'язаний з викривленням перерізу.

10.2.1. Особливості розподілу дотичних напружень в некруглих перерізах стержня при крученні

Зробимо деякі загальні зауваження стосовно законів розподілу напружень в перерізі.

– *Дотичні напруження поблизу контуру перерізу спрямовані по дотичній до контуру.*

В цьому легко переконатися, якщо припустити, що це твердження хибне. Тоді напруження τ мало би бути спрямованими під кутом до контуру (див. рис. 10.8).

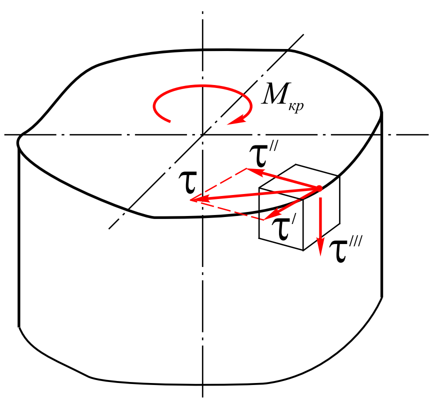


Рис. 10.8. Дотичні напруження на контурі перерізу

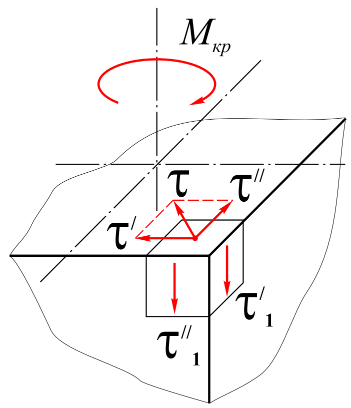


Рис. 10.9. Дотичні напруження у зовнішніх кутах перерізу

Розкладемо це напруження на дві складові: по дотичній до контуру (τ') і вздовж нормалі (τ''). За законом парності дотичних напружень на ортогональній грані має діяти напруження $\tau''' = \tau''$. Але ця грань належить бічній поверхні стержня, яка вільна від навантаження, а значить і напруження на ній відсутні. Отже $\tau''' = \tau'' = 0$.

Тобто дотичні напруження поблизу контуру спрямоване по дотичній до контуру, що й треба було довести.

– *У випадку, коли поперечний переріз має зовнішні кути, то в них дотичні напруження відсутні.*

Це твердження, як і в попередньому випадку, доведемо від протилежного. Припустимо, що поблизу кутової точки перерізу діє напруження τ (рис. 10.9). Розкладемо це напруження по сторонах кута. За законом парності дотичних напружень по гранях елемента, які належать бічній поверхні стержня, також діють напруження $\tau_1' = \tau'$ і $\tau_1'' = \tau''$. Оскільки бічна поверхня стержня вільна від навантаження, то напруження $\tau_1' = \tau_1'' = 0$, а значить і $\tau' = \tau'' = \tau = 0$.

Тобто дотичні напруження поблизу зовнішнього кута в поперечному перерізі відсутні, що й треба було довести.

10.2.2. Кручення стержня прямокутного перерізу

Беручи до уваги особливості розподілу напружень в не круглих перерізах стержня при крученні, досить просто зобразити якісну картину такого розподілу як по периметру, так і вздовж головних центральних осей інерції (рис. 10.10).

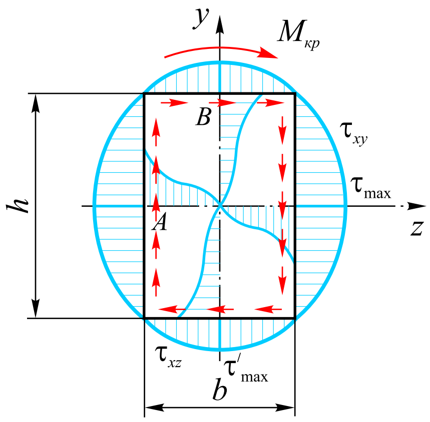


Рис. 10.10. Епюри розподілу дотичних напружень в стержні прямокутного перерізу при крученні

В точках A і B діють максимальні дотичні напруження τ_{max} і τ'_{max} відповідно.

В розрахунках на міцність і жорсткість стержнів з некруглим перерізом користуються готовими формулами, отриманими методами теорії пружності.

Для стержня з прямокутним перерізом ці формули подібні до тих, за якими розраховують круглі стержні:

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_к}; \qquad (10.18)$$

$$\theta = \frac{M_{кр}}{GI_к}. \qquad (10.19)$$

Тут $I_к$ і $W_к$ – геометричні характеристики, які умовно називають *моментами інерції при крученні* і *моментами опору при крученні*. Їх вимірність $мм^4$ і $мм^3$ відповідно.

Для прямокутного перерізу

$$I_к = \beta m b^4; \qquad (10.20)$$

$$W_к = \alpha m b^3; \tag{10.21}$$

$$\tau'_{\max} = \eta \tau_{\max}. \tag{10.22}$$

Умова міцності стержня:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{\alpha m b^3} \le [\tau]. \tag{10.23}$$

Умова жорсткості:

$$\theta_{\max} = \frac{M_{кр}}{G\beta m b^4} \cdot \frac{180}{\pi} \le [\theta]. \tag{10.24}$$

Тут коефіцієнти α, β, η залежать від співвідношення $m = \frac{h}{b}$ і наводяться в довідниках з опору матеріалів.

При $m \ge 4$ ці коефіцієнти можна знайти за формулою:

$$\alpha = \beta = \frac{m - 0,63}{3}.$$

Для вузьких прямокутних перерізів, коли $m > 10$, $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$.

Тоді геометричні характеристики знаходять як

$$I_к = \frac{hb^3}{3}; \tag{10.25}$$

$$W_к = \frac{hb^2}{3}. \tag{10.26}$$

Приклад 10.3 *Знайти за умовою міцності розміри прямокутного перерізу стержня, в якому діє крутний момент $M_{кр} = 200\ Н \cdot м$, якщо співвідношення його сторін $m = h/b = 2$. Знайти також відносний кут закручування стержня, вважаючи, що крутний момент по довжині постійний. Матеріал стержня – сталь 35. Коефіцієнт запасу міцності $n_Т = 1,5$.*

Знайдемо допустиме напруження. Для сталі 35, *згідно з додатком* 4 [1], $\tau_Т = 190$ *МПа. Тоді*

$$\left[\tau\right]=\frac{\tau_T}{n_T}=\frac{190}{1,5}=127\ МПа.$$

Для заданого співвідношення сторін прямокутного перерізу $m=2$ *з таблиці* 13 [1] *коефіцієнти* $\alpha=0,246$ *і* $\beta=0,229$.

З умови міцності (10.23) *знаходимо:*

$$b\geq\sqrt[3]{\frac{M_{кр}}{\alpha m\left[\tau\right]}}=\sqrt[3]{\frac{200\cdot10^3}{0,246\cdot2\cdot127}}=14,74\ мм.$$

Тоді $h=mb=2\cdot14,74=29,48\ мм$.

Відносний кут закручування стержня, згідно з формулою (10.24)*,*

$$\theta=\frac{M_{кр}}{G\beta mb^4}=\frac{200\cdot10^3}{8\cdot10^4\cdot0,229\cdot2\cdot14,74^4}=0,116\cdot10^{-3}$$

10.2.3. Кручення складних незамкнених профілів

Розглянемо деякий незамкнений переріз, який складається з кількох простих елементів, для яких легко визначити $I_{кi}$ і $W_{кi}$ (рис. 10.11).

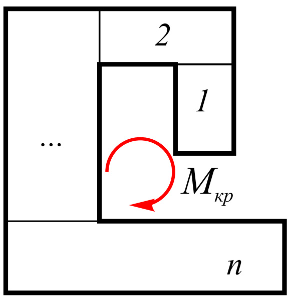


Рис. 10.11. Складний незамкнений переріз

Для всього перерізу:

$$I_к=I_{к_1}+I_{к_2}+\ldots+I_{к_n}=\sum_{i=1}^{n}I_{к_i}. \qquad (10.27)$$

Припустимо, що на кожний *i*-й елемент діє якась *i*-та частина $M_{кр}$. Тоді

$$M_{кр}=M_{кр_1}+M_{кр_2}+\ldots+M_{кр_n}=\sum_{i=1}^{n}M_{кр_i}. \qquad (10.28)$$

А кут закручування для всього перерізу і окремих його елементів однаковий:

$$\theta=\theta_1=\theta_2=\ldots=\theta_n.$$

Виразимо θ через $M_{кр}$:

$$\frac{M_{кр}}{GI_к}=\frac{M_{кр_1}}{GI_{к_1}}=\frac{M_{кр_2}}{GI_{к_2}}=\ldots=\frac{M_{кр_n}}{GI_{к_n}}. \qquad (10.29)$$

Звідси

$$M_{кр_1}=M_{кр}\frac{I_{к_1}}{I_к};\ M_{кр_2}=M_{кр}\frac{I_{к_2}}{I_к};\ \ldots;\ M_{кр_n}=M_{кр}\frac{I_{к_n}}{I_к}.$$

Як бачимо, крутний момент в перерізі розподіляється між складовими елементами пропорційно їх жорсткостям.

Найбільше дотичне напруження для кожного *i*-го елемента:

$$\tau_{\max_i} = \frac{M_{крi}}{W_{к_i}} = \frac{M_{кр}}{W_{к_i}}\left(\frac{I_{к_i}}{I_к}\right) = \frac{M_{кр}}{I_к}\left(\frac{I_{к_i}}{W_{к_i}}\right).$$

Найбільше дотичне напруження виникатиме в елементі, для якого відношення $I_{к_i}/W_{к_i}$ набуває найбільшого значення:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{I_к}\left(\frac{I_{к_i}}{W_{к_i}}\right)_{\max}. \qquad (10.30)$$

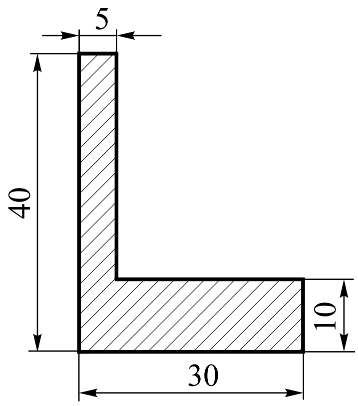


Рис. 10.12. *До прикладу* 10.4

Приклад 10.4 *Визначити найбільші дотичні напруження та відносний кут закручування перерізу сталевого стержня (рис.* 10.12*) за дії крутного моменту* $M_{кр} = 200\ Н \cdot м$. *Встановити, чи впливає на результат обчислень спосіб розбиття перерізу на елементи.*

Максимальні дотичні напруження в перерізі:

$$\tau_{\max} = M_{кр}/W_к,$$

де

$$W_к = \frac{I_к}{\left(I_{к_i}/W_{к_i}\right)_{\max}}.$$

*І, згідно з (*10.27*),*

$$I_к = \sum_{i=1}^{n} I_{к_i}$$

Розіб'ємо переріз на складові двома способами (рис. 10.13*).*

***Спосіб* 1** *(рис. 10.13 а).*

Для елемента І маємо: $h_1 = 30\ мм$; $b_1 = 5\ мм$; $h_1/b_1 = 6$. *Згідно з табл.. 13* [1] $\alpha_1 = 0,299$; $\beta_1 = 0,299$.

Тоді $W_{к_1} = \alpha_1 h_1 b_1^2 = 0,299 \cdot 30 \cdot 5^2 = 224,25$ *мм*^{3}*;* $I_{к_1} = \beta_1 h_1 b_1^3 = 0,299 \cdot 30 \cdot 5^3 = 1121,25$ *мм*^{4}*;*

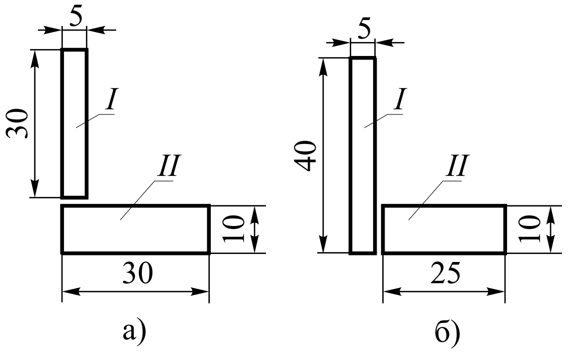


Рис. 10.13. *Розбиття перерізу на складові: спосіб* 1 *(а) і спосіб* 2 *(б)*

$$\frac{I_{к_1}}{W_{к_1}} = \frac{1121,25}{224,25} = 5 \text{ мм}.$$

Для елемента II маємо: $h_2 = 30$ *мм;* $b_2 = 10$ *мм;* $h_2/b_2 = 3$*;* $\alpha_1 = 0,267$*;* $\beta_1 = 0,263$.

Тоді

$W_{к_2} = \alpha_2 h_2 b_2^2 = 0,267 \cdot 30 \cdot 10^2 = 801$ *мм*^{3}*;*

$I_{к_2} = \beta_2 h_2 b_2^3 = 0,263 \cdot 30 \cdot 10^3 = 7890$ *мм*^{4}*;*

$$\frac{I_{к_2}}{W_{к_2}} = \frac{7890}{801} = 9,85 \text{ мм}.$$

Отже,

$I_к = I_{к_1} + I_{к_2} = 1121,25 + 7890 = 9011,25$ *мм*^{4}.

Співвідношення $I_{к_i}/W_{к_i}$ *більше для елемента II, а значить найбільше напруження виникатиме посередині його довших сторін:*

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{I_к}\left(\frac{I_{к_i}}{W_{к_i}}\right)_{\max} = \frac{200 \cdot 10^3}{9011,25} 9,85 = 218,6 \text{ МПа}.$$

Відносний кут закручування

$$\theta = \frac{M_{кр}}{GI_к} = \frac{200 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 9011,25} = 2,77 \cdot 10^{-4}.$$

***Спосіб* 2.**

Для елемента I маємо: $h_1 = 40$ *мм;* $b_1 = 5$ *мм;* $h_1/b_1 = 8$*;* $\alpha_1 = 0,307$*;* $\beta_1 = 0,307$. *Тоді* $W_{к_1} = \alpha_1 h_1 b_1^2 = 0,307 \cdot 40 \cdot 5^2 = 307$ *мм*^{3}*;* $I_{к_1} = \beta_1 h_1 b_1^3 = 0,307 \cdot 40 \cdot 5^3 = 1535$ *мм*^{4}.

Для елемента II маємо: $h_2 = 25$ *мм;* $b_2 = 10$ *мм;* $h_2/b_2 = 2,5$*;* $\alpha_1 = 0,256$*;* $\beta_1 = 0,249$. *Тоді* $W_{к_2} = \alpha_2 h_2 b_2^2 = 0,256 \cdot 25 \cdot 10^2 = 640$ *мм*^{3}*;* $I_{к_2} = \beta_2 h_2 b_2^3 = 0,249 \cdot 25 \cdot 10^3 = 6225$ *мм*^{4}*;*

Момент інерції перерізу $I_к = I_{к_1} + I_{к_2} = 1535 + 6225 = 7760$ *мм*^{4}

Маємо такі співвідношення: $\dfrac{I_{к_1}}{W_{к_1}} = \dfrac{1535}{307} = 5$ *мм;* $\dfrac{I_{к_2}}{W_{к_2}} = \dfrac{6225}{640} = 9,73$ *мм*.

Співвідношення $I_{к_i}/W_{к_i}$ *знову-таки більше для елемента II, а значить тут діятимуть найбільші напруження:*

$$\tau_{\max} = \frac{200 \cdot 10^3}{7760} 9,73 = 250,8 \text{ МПа}.$$

Відносний кут закручування

$$\theta = \frac{200 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 7760} = 3,22 \cdot 10^{-4}.$$

Як бачимо, спосіб розбивки перерізу на складові впливає на результати розрахунків. Ці розбіжності зокрема складають:

– *для моментів інерції*

$$\frac{I_к^{(1)}}{I_к^{(2)}} = \frac{9011{,}25}{7760} = 1{,}16\,;$$

– *для напружень*

$$\frac{\tau_{\max}^{(1)}}{\tau_{\max}^{(2)}} = \frac{218{,}6}{250{,}8} = 0{,}816\,;$$

– *для відносних кутів закручування*

$$\frac{\theta^{(1)}}{\theta^{(2)}} = \frac{2{,}77 \cdot 10^{-4}}{3{,}22 \cdot 10^{-4}} = 0{,}86\,.$$

Отриманий результат свідчить про недосконалість методу розрахунку стержня складного незамкненого профілю на кручення в рамках опору матеріалів. Тому, коли виникає необхідність у більш точному аналізі напружено-деформованого стану таких стержнів, слід користуватися методами теорії пружності.

Зауваження 1. *Слід відзначити, що навіть за низької точності розрахунків напружень і деформацій, представлений метод можна вважати цілком прийнятним для оцінки міцності в межах прийнятих в опорі матеріалів запасів міцності.*

Зауваження 2. *Задовільну точність розрахунку напружень і деформацій розглянутим методом можна отримати для перерізів, що складаються з тонкостінних елементів.*

10.2.4. Кручення тонкостінних профілів

До тонкостінних відносять профілі, в яких товщина стінки будь-якого з елементів, що складають даний профіль, набагато менша від інших характерних розмірі цих елементів. В машинобудуванні, літако- та суднобудуванні, гірничій справі, будівництві, інших галузях техніки та промисловості такі профілі набули великого поширення і їх потрібно розраховувати на міцність та жорсткість, в тому числі і при крученні.

Розрізняють відкриті та замкнені тонкостінні профілі, методи розрахунків яких на міцність і жорсткість відрізняються.

10.2.4.1. Відкриті профілі

До відкритих або незамкнених тонкостінних профілів відносяться, наприклад, прокатні профілі: кутники, швелери, таври, двотаври та ін.

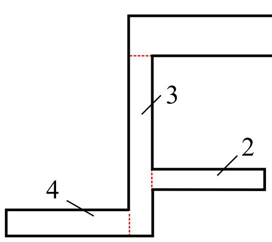


Рис. 10.14. Відкритий тонкостінний профіль

Розглянемо довільний тонкостінний незамкнений профіль (рис. 10.14). Він складається з прямокутників. Як правило, для прямокутних елементів тонкостінних профілів співвідношення їх сторін $h/b > 10$. А значить для них коефіцієнти $\alpha = \beta = 1/3$. Позначаючи товщину стінки грецькою літерою δ, згідно з формулами (10.25), (10.26), отримаємо:

$$I_{к_i} = \frac{h_i \delta_i^3}{3}; \;\; W_{к_i} = \frac{h_i \delta_i^2}{3}.$$

Тоді $\dfrac{I_{к_i}}{W_{к_i}} = \delta_i$, формула (10.30) для максимальних дотичних напружень набуває вигляду

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{I_к} \delta_{\max}. \tag{10.31}$$

Тут $I_к = \dfrac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} h_i \delta_i^3$.

Згідно з формулою (10.31) найбільші дотичні напруження в незамкнених тонкостінних профілях виникають в елементі з найбільшою товщиною стінки.

Відносний кут закручування знаходять за формулою (10.19).

Розглянемо тепер приклад, в якому стержень з прикладу 10.4 матиме тонкостінний профіль (рис. 10.15).

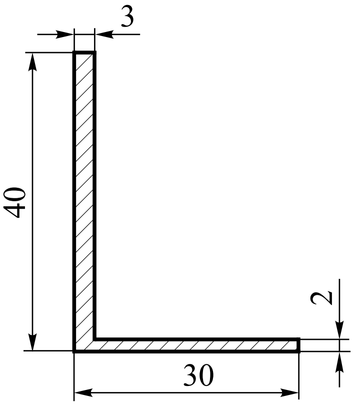


Рис. 10.15 *До прикладу* 10.5

Приклад 10.5 *Див. умову до прикладу* 10.4.

Розіб'ємо переріз на складові двома способами (рис. 10.16*). Слід зауважити, що в цьому випадку спосіб розбиття впливатиме лише на величину моменту інерції перерізу* $I_к$.

***Спосіб* 1** *(рис. 10.16 а).*

Для елемента I маємо: $h_1 = 38$ *мм*; $\delta_1 = 3$ *мм*; $h_1/\delta_1 = 12,67$; $\alpha_1 = \beta_1 = 1/3$.

Тоді $I_{к_1} = \beta_1 h_1 \delta_1^3 = \dfrac{38 \cdot 3^3}{3} = 342$ *мм*^{4};

Для елемента II маємо: $h_2 = 30$ *мм*; $\delta_2 = 2$ *мм*; $h_2/b_2 = 15$; $\alpha_1 = \beta_1 = 1/3$.

Тоді $I_{к_2} = \beta_2 h_2 \delta_2^3 = \dfrac{30 \cdot 2^3}{3} = 80$ *мм*^{4};

Остаточно $I_к = I_{к_1} + I_{к_2} = 342 + 80 = 422$ *мм*^{4}.

***Спосіб* 2**.

Для елемента I маємо: $h_1 = 40$ *мм*; $\delta_1 = 3$ *мм*; $h_1/\delta_1 = 13,33$;. $\alpha_1 = \beta_1 = 1/3$.

Тоді; $I_{к_1} = \beta_1 h_1 \delta_1^3 = \dfrac{40 \cdot 3^3}{3} = 360$ *мм*^{4}.

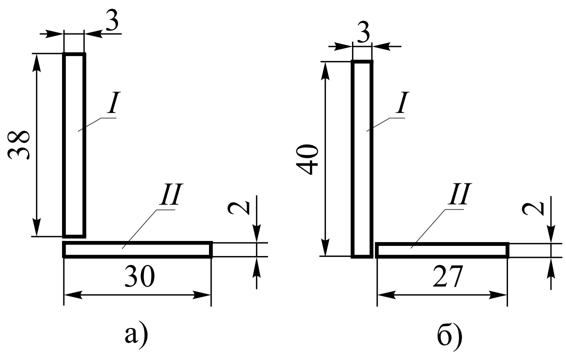


Рис. 10.16. *Розбиття перерізу на складові: спосіб* 1 *(а) і спосіб* 2 *(б)*

Для елемента II маємо: $h_2 = 27$ *мм*; $\delta_2 = 2$ *мм*; $h_2/\delta_2 = 13,5$; $\alpha_1 = \beta_1 = 1/3$.

Тоді $I_{\kappa_2} = \beta_2 h_2 \delta_2^3 = \dfrac{27 \cdot 2^3}{3} = 72\ мм^4$ *;*

Момент інерції перерізу $I_\kappa = I_{\kappa_1} + I_{\kappa_2} = 360 + 72 = 432\ мм^4$.

Максимальні дотичні напруження для І-го і ІІ-го способу розбиття відповідно дорівнюють:

$$\tau_{\max_{\mathrm{I}}} = \frac{M_{кр}}{I_{\kappa_{\mathrm{II}}}}\delta_{\max} = \frac{200 \cdot 10^3}{422} 3 = 1421{,}8\ МПа\ ;$$

$$\tau_{\max_{\mathrm{II}}} = \frac{M_{кр}}{I_{\kappa_{\mathrm{II}}}}\delta_{\max} = \frac{200 \cdot 10^3}{432} 3 = 1388{,}9\ МПа\ .$$

Відносний кут закручування

$$\theta_{\mathrm{I}} = \frac{M_{кр}}{GI_{\kappa_{\mathrm{I}}}} = \frac{200 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 422} = 59{,}2 \cdot 10^{-4}.$$

$$\theta_{\mathrm{II}} = \frac{M_{кр}}{GI_{\kappa_{\mathrm{II}}}} = \frac{200 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 432} = 57{,}8 \cdot 10^{-4}$$

Отже, маємо такі розходження:

– *для моментів інерції*

$$\frac{I_\kappa^{(1)}}{I_\kappa^{(2)}} = \frac{422}{432} = 0{,}98;$$

– *для напружень*

$$\frac{\tau_{\max}^{(1)}}{\tau_{\max}^{(2)}} = \frac{1421{,}8}{1388{,}9} = 1{,}02;$$

– *для відносних кутів закручування*

$$\frac{\theta^{(1)}}{\theta^{(2)}} = \frac{59{,}2 \cdot 10^{-4}}{57{,}8 \cdot 10^{-4}} = 1{,}02.$$

Як бачимо, у порівнянні з прикладом 10.4 *розходження в результатах зовсім незначні.*

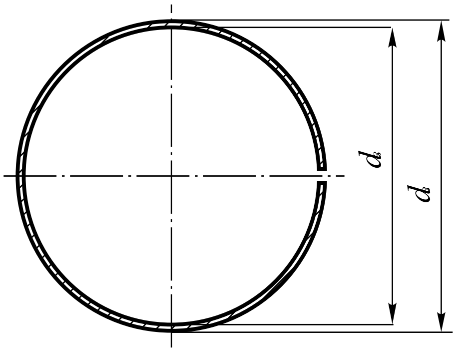


Рис. 10.17. *До прикладу* 10.6

Приклад 10.6 *Визначити найбільші дотичні напруження та абсолютний кут закручування між торцями сталевої тонкостінної труби довжиною* 0,5 *м, розрізаної вздовж твірної (рис.* 10.17*), під дією крутного моменту* $M_{кр} = 60\ Н \cdot м$*, якщо зовнішній діаметр труби* $d_з = 100\ мм$*, а внутрішній –* $d_в = 94\ мм$ *.*

Момент інерції перерізу розрізаної труби при крученні знайдемо як для його розгортки, тобто прямокутника, зважаючи на те, що товщина труби постійна:

$$I_к = \frac{1}{3} s\delta^3 .$$

Тут s – довжина серединної лінії труби:

$$s = 0,5\pi\left(d_з + d_в\right) = 0,5\pi\left(100 + 94\right) = 304,73 \ мм .$$

Тоді

$$I_к = \frac{304,73 \cdot 3^3}{3} = 2742,61 \ мм^4 .$$

*Максимальні дотичні напруження знайдемо за формулою (*10.31*):*

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{I_к}\delta_{\max} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 3}{2742,61} = 65,63 \ МПа .$$

*Знайдемо за формулою (*10.19*) відносний кут закручування труби, взявши для сталі модуль зсуву* $G = 8 \cdot 10^4$ *МПа :*

$$\theta = \frac{M_{кр}}{GI_к} = \frac{60 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 2742,61} = 2,73 \cdot 10^{-4} \ \frac{рад}{мм} .$$

Тоді абсолютний кут закручування між торцевими перерізами труби складає $\varphi = \theta \cdot l = 2,73 \cdot 10^{-4} \cdot 500 = 0,137$ рад *або* $\varphi = \frac{180 \cdot 0,137}{\pi} = 7,85°$

10.2.4.2. Замкнені профілі

Розглянемо стержень довільного замкненого профілю (рис. 10.18 а), який скручується моментом $M_{кр}$. Оскільки товщина його стінки мала, то можна вважати, що дотичні напруження по товщині розподілені рівномірно.

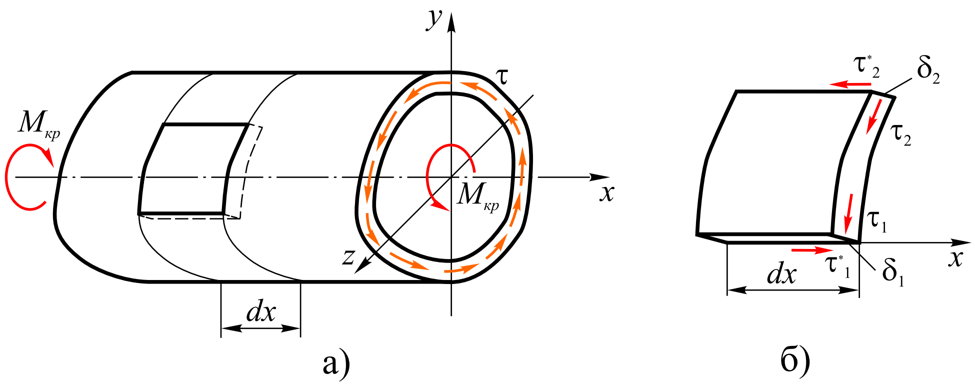


Рис. 10.18. Замкнений профіль: а) схема навантаження; б) напружений стан елемента стержня

Виріжмо елемент стержня двома суміжними площинами на відстані dx та ще двома площинами вздовж твірної, та зобразимо його у збільшеному вигляді (рис. 10.18 б). На гранях елемента, що належать поперечним перерізам, діють змінні вздовж периметру дотичні напруження τ_1 і τ_2. На горизонтальних гранях, у відповідності до закону парності дотичних напружень діятимуть відповідно напруження $\tau_1^* = \tau_1$ і $\tau_2^* = \tau_2$. За умовою рівноваги $\sum X = 0$. Тобто

$$\tau_1^* \delta_1 dz - \tau_2^* \delta_2 dz = 0. \qquad (10.32)$$

Або

$$\tau_1^* \delta_1 = \tau_2^* \delta_2 = \tau\delta = Const. \qquad (10.33)$$

Тепер розглянемо поперечний переріз стержня (рис. 10.19).

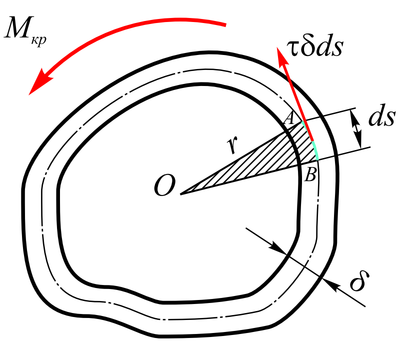


Рис. 10.19. Поперечний переріз стержня

Штрих-пунктирною лінією позначена серединна лінія стінки профілю, яка є геометричним місцем точок, що лежать на однаковій відстані від зовнішньої і внутрішньої поверхонь профілю. Сила, прикладена в деякій точці серединної лінії профілю, створює момент відносно осі стержня

$$dM_{кр} = \tau\delta ds \cdot r.$$

Тут r – відстань від осі стержня до точки на серединній лінії.

Розглянемо трикутник OAB. Його площа $d\omega = \frac{1}{2} ds \cdot r$. Тоді

$$dM_{кр} = 2\tau\delta d\omega.$$

Інтегруючи, знаходимо:

$$M_{кр} = 2\tau\delta\omega,$$

де ω – площа фігури, обмежена серединною лінією профілю. Звідси

$$\tau = \frac{M_{кр}}{2\delta\omega}.$$

Максимальні напруження в замкненому профілі виникатимуть там, де профіль має найменшу товщину (*тут слід нагадати, що для незамкнених профілів найбільші напруження виникають в місці, де товщина профілю найбільша*).

Отже, умова міцності для замкненого тонкостінного профілю:

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{2\omega\delta_{min}} \le [\tau]. \qquad (10.34)$$

Визначимо абсолютний кут закручування стержня. Для цього скористаємось співвідношенням для потенціальної енергії деформації стержня. Оскільки при чистому крученні в точках стержня має місце чистий зсув, то, згідно з формулою (9.13), для елемента об'ємом $dV = dx\delta ds$ маємо

$$dU = \frac{\tau^2}{2G} dx\delta ds,$$

а для всього стержня

$$U = \frac{l}{2G}\int \tau^2 \delta ds = \frac{l}{2G}\int (\tau\delta)^2 \frac{ds}{\delta} = \frac{(\tau\delta)^2 l}{2G}\oint \frac{ds}{\delta}.$$

Враховуючи, що $\tau\delta = \frac{M_{кр}}{2\omega}$, отримаємо

$$U = \frac{M_{кр}^2 l}{8\omega^2 G}\oint \frac{ds}{\delta}. \tag{10.35}$$

З іншого боку

$$U = \frac{M_{кр}\varphi}{2}. \tag{10.36}$$

Прирівнюючи праві частини отриманих виразів, знаходимо

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{4G\omega^2}\oint \frac{ds}{\delta}, \tag{10.37}$$

а відносний кут закручування

$$\theta = \frac{M_{кр}}{4G\omega^2}\oint \frac{ds}{\delta}. \tag{10.38}$$

Для циліндричного тонкостінного стержня, коли $r = Const$ і $\delta = Const$, $\omega = \pi r^2$, $\oint ds = 2\pi r$, напруження дорівнюватимуть:

$$\tau = \frac{M_{кр}}{2\pi r^2 \delta}. \tag{10.39}$$

Відносний кут закручування

$$\theta = \frac{M_{кр}}{2\pi r^3 \delta G}. \tag{10.40}$$

Приклад 10.7 *Скориставшись даними прикладу 10.6, знайти найбільші дотичні напруження і відносний кут закручування суцільної тонкостінної труби (без поздовжнього розрізу) та порівняти отримані результати.*

*Дотичні напруження в стінці труби знайдемо за формулою (*10.39*). Середній радіус труби* $r = 0,5\frac{\left(d_з + d_в\right)}{2} = 0,25\left(100 + 94\right) = 48,5$ *мм, а товщина стінки* $\delta = 3$ *мм. Тоді*

$$\tau = \frac{M_{кр}}{2\pi r^2 \delta} = \frac{60 \cdot 10^3}{2\pi \cdot 48,5^2 \cdot 3} = 1,35 \text{ МПа}.$$

*Відносний кут закручування, згідно з формулою (*10.40*), складає*

$$\theta = \frac{M_{кр}}{2\pi r^3 \delta G} = \frac{60 \cdot 10^3}{2\pi \cdot 48,5^3 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 10^4} = 3,49 \cdot 10^{-7} \ \frac{рад}{мм}.$$

Порівняємо значення напружень і деформації у суцільній трубі і у трубі, розрізаній вздовж твірної:

$$\frac{\tau'}{\tau''} = \frac{65,63}{1,35} = 48,61; \qquad \frac{\theta'}{\theta''} = \frac{2,73 \cdot 10^{-4}}{3,49 \cdot 10^{-7}} = 0,78 \cdot 10^3$$

Як бачимо, напруження в розрізаній трубі перевищують напруження в суцільній майже у 50 разів, а відносний кут закручування більший на три порядки.

10.3. Потенціальна енергія деформації стержня при крученні

Вираз (10.36) для потенціальної енергії деформації при чистому крученні справедливий за умови, що робота крутного моменту на кутах закручування стержня, представлена правою частиною цього рівняння, повністю переходить в потенціальну енергію його деформації. Для елемента стержня довжиною dx отримаємо:

$$dU = \frac{M_{кр} d\varphi}{2}. \tag{10.41}$$

Згідно з законом Гука в абсолютних величинах для круглого стержня (10.13) для елемента стержня довжиною dx можна записати:

$$d\varphi = \frac{M_{кр} dx}{GI_p}. \tag{10.42}$$

тоді $dU = \dfrac{M_{кр}^2 dx}{2GI_p}$, а для всього стержня

$$U = \int_l \frac{M_{кр}^2 dx}{2GI_p}. \tag{10.43}$$

Для стержня некруглого перерізу

$$U = \int_l \frac{M_{кр}^2 dx}{2GI_к}. \tag{10.44}$$

10.4. Розрахунок гвинтових циліндричних пружин з малим кроком

Гвинтові циліндричні пружини є одними з найпоширеніших в техніці видів пружних елементів, які зазнають дії стисних або розтягальних навантажень. Найчастіше їх навивають з круглого дроту з постійним кутом нахилу витків.

Розглянемо гвинтову циліндричну пружину з середнім радіусом витка R, яка розтягається силою F (рис. 10.20).

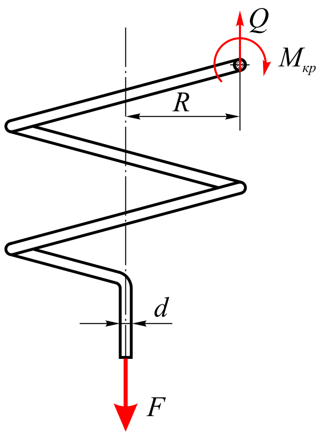


Рис. 10.20. Схема навантажування витка пружини

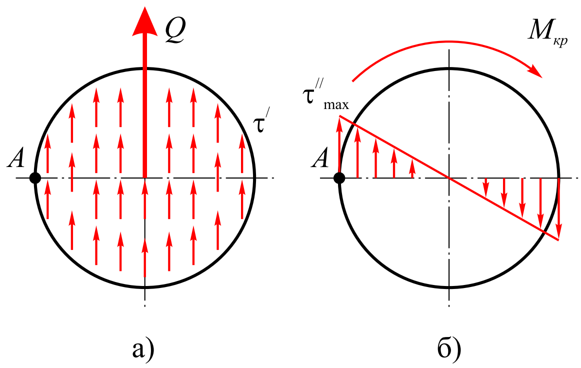


Рис. 10.21. Напружений стан в перерізі витка пружини: а – від зрізу; б – від кручення

Як видно з рисунка, дріт, з якого навита пружина, працює на зріз і одночасно на кручення. Тут $Q = F$ і $M_{кр} = FR$. Насправді дріт також згинається. Проте при малих кутах нахилу витка, тобто для пружин з малим кроком, згином можна знехтувати.

Отже, в перерізі дроту діють дві групи дотичних напружень: від зрізу τ' і від кручення τ'' (рис. 10.21).

Від зрізу дотичні напруження розподіляються в перерізі рівномірно. Їх величину можна визначити за формулою

$$\tau' = \frac{Q}{A} = \frac{4F}{\pi d^2}. \tag{10.45}$$

Максимальні дотичні напруження при крученні виникають на контурі перерізу:

$$\tau''_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p} = \frac{16FR}{\pi d^3}. \tag{10.46}$$

Виходячи з закону розподілу дотичних напружень в перерізі (рис. 10.21), робимо висновок, що небезпечною точкою є точка на внутрішньому радіусі витка пружини – точка *A*, де дотичні напруження для обох груп збігаються за напрямком. Отже найбільше дотичне напруження в перерізі знайдемо як суму:

$$\tau_{\max} = \tau' + \tau''_{\max} = \frac{4F}{\pi d^2} + \frac{16FR}{\pi d^3}$$

або

$$\tau_{\max} = \frac{16FR}{\pi d^3}\left(1 + \frac{d}{4R}\right). \tag{10.47}$$

В пружинах великого середнього радіуса, навитих з тонкого дроту, для яких справедливе співвідношення $d/4R \ll 1$, напруження τ'' від кручення набагато більші від напружень від зрізу τ'. Тому такі пружини розраховують лише на кручення дроту, нехтуючи зрізом:

$$\tau_{\max} \approx \frac{16FR}{\pi d^3}. \tag{10.48}$$

Осьову деформацію пружини визначають, також враховуючи тільки деформацію кручення витка. Виділимо з пружини елемент витка довжиною *ds* (рис. 10.22). Вважаючи переріз витка *A* нерухомим, визначимо кут, на який повернеться відносно нього переріз *B* під дією крутного моменту:

$$d\varphi = \frac{M_{кр} ds}{G I_p}.$$

Внаслідок повороту відрізок BO' повернеться на той-самий кут $d\varphi$, зайнявши положення BO''. Відрізок $O'O''$ характеризує осьову деформацію пружини внаслідок закручування елемента витка *ds*:

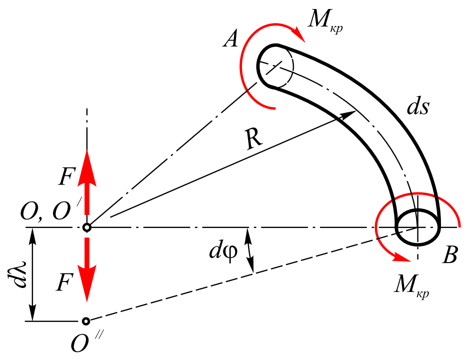


Рис. 10.22. Схема деформації елемента витка пружини

$$O'O'' = d\lambda \approx Rd\varphi .$$

Переміщення нижнього кінця пружини відносного верхнього, яке визначається величиною кута закручування всього стержня, з якого навита пружина, знайдемо як

$$\lambda = \int_s Rd\varphi = R\int_s \frac{M_{кр}ds}{GI_p} = \frac{M_{кр}R}{GI_p}\int_s ds$$

Загальна довжина всіх витків пружини.

$$\int_s ds = 2\pi Rn ,$$

де n – кількість витків пружини. Тоді

$$\lambda = \frac{M_{кр}R}{GI_p}2\pi Rn .$$

Враховуючи, що $M_{кр} = FR$, а $I_p = \dfrac{\pi d^4}{32}$, остаточно знаходимо:

$$\lambda = \frac{64FR^3n}{Gd^4} . \tag{10.49}$$

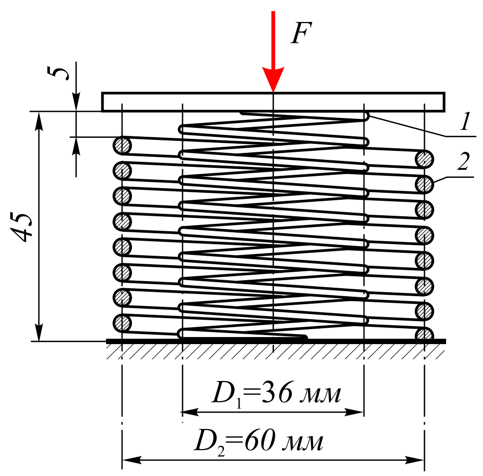


Рис. 10.23. *До прикладу* 10.8

Приклад 10.8 *Визначити, яку силу F треба прикласти до абсолютно жорсткої плити (рис. 10.23), щоб відстань між нею і опорою склала 35 мм. Визначити також найбільші дотичні напруження, які при цьому виникатимуть в обох пружинах. Діаметри дротів, з яких навиті пружини, складають $d_1 = 1{,}5$ мм і $d_2 = 3$ мм, а кількість їх витків відповідно $n_1 = 10$ і $n_2 = 8$. Матеріал пружин – сталь.*

Виходячи зі схеми навантаження, робимо висновок, що переміщення плити, пов'язане з деформацією пружин, можна розглядати в два етапи: спочатку деформується тільки пружина 1, а потім деформуються обидві пружини одночасно. Сумарне переміщення плити, згідно з умовою задачі, складає 45–35=10 *мм.*

На першому етапі, коли перша пружина стискається на 5 *мм, в ній виникає сила, яка, згідно з формулою* (10.49), *дорівнюватиме*

$$F_1' = \frac{\lambda_1' G d_1^4}{64\left(0,5D_1\right)^3 n_1} = \frac{5\cdot 8\cdot 10^4\cdot 1,5^4}{64\left(0,5\cdot 36\right)^3\cdot 10} = 0,542\ H\ .$$

На другому етапі деформація пружин має скласти 5 *мм. Оскільки при цьому система стає статично невизначуваною, розглянемо її статичну, геометричну та фізичну сторони.*

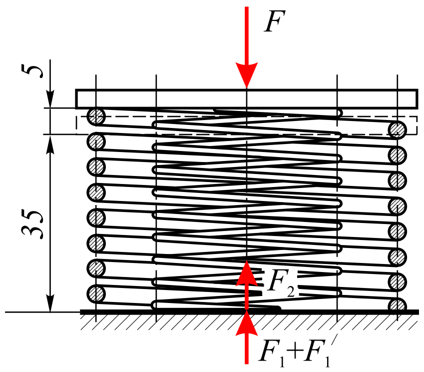


Рис. 10.24. *До прикладу* 10.8

I. ***Статичний бік задачі***. *Рівняння рівноваги, згідно зі схемою (рис.* 10.24*), має вигляд:*

$$F = F_1' + F_1 + F_2\,.$$

Тут сила F_1 *– додаткова сила, що виникає в першій пружині при її деформуванні на другому етапі спільно з пружиною* 2.

II. ***Геометричний бік задачі***. *Деформація пружин однакова, тому*

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 5\ мм\,.$$

III. ***Фізичний бік задачі***. *Згідно з формулою* (10.49)

$$\lambda_1 = \frac{64F_1\left(0,5D_1\right)^3 n_1}{Gd_1^4}\,,\quad \lambda_2 = \frac{64F_2\left(0,5D_2\right)^3 n_2}{Gd_2^4}\,.$$

IV. ***Синтез***.

$$F_1 = \frac{\lambda_1 G d_1^4}{64\left(0,5D_1\right)^3 n_1} = \frac{5\cdot 8\cdot 10^4\cdot 1,5^4}{64\left(0,5\cdot 36\right)^3\cdot 10} = 0,542\ H\ .$$

$$F_2 = \frac{\lambda_2 G d_2^4}{64\left(0,5D_2\right)^3 n_2} = \frac{5\cdot 8\cdot 10^4\cdot 3^4}{64\left(0,5\cdot 60\right)^3\cdot 8} = 2,344\ H\ .$$

Тоді $F = 0,542 + 0,542 + 2,344 = 3,428\ H$.

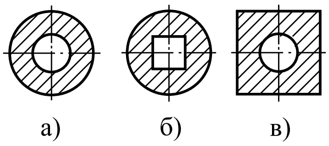
*Максимальні дотичні напруження в пружинах знайдемо за формулою (*10.48*).*

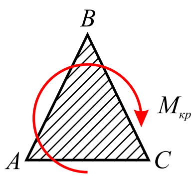
$$\tau_{\max_1} = \frac{16\left(F_1' + F_1\right)\left(0,5D_1\right)}{\pi d_1^3} = \frac{16\cdot 1,084\cdot 0,5\cdot 36}{\pi\cdot 1,5^3} = 29,44\ МПа\,;$$

$$\tau_{\max_2} = \frac{16F_2\left(0,5D_2\right)}{\pi d_2^3} = \frac{16\cdot 2,344\cdot 0,5\cdot 60}{\pi\cdot 3^3} = 13,26\ МПа$$

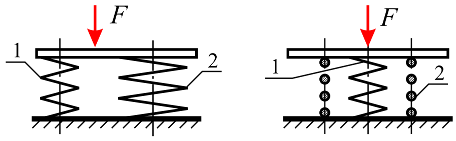
Питання для самоперевірки знань

1. Коли має місце чисте кручення стержня?
2. Запишіть інтегральне рівняння рівноваги стержня для умов чистого кручення.

3. Якою гіпотезою користуються при складанні геометричних рівнянь для круглого стержня в умовах чистого кручення? Сформулюйте цю гіпотезу.
4. Чи змінюється довжина круглого стержня при чистому крученні?
5. Який вид напруженого стану реалізується в стержні при чистому крученні?
6. Де знаходиться небезпечна точка перерізу круглого стержня при крученні?
7. Запишіть умову міцності круглого стержня при крученні.
8. Границя текучості матеріалу $\sigma_Т = 240$ МПа, границя міцності – $\sigma_В = 550$ МПа, залишкове видовження після розриву складає $\delta = 18\%$. Чому дорівнює допустиме дотичне напруження?
9. Модуль пружності матеріалу за розтягання $E = 2 \cdot 10^5$ *МПа*, коефіцієнт поперечної деформації $\mu = 0,25$. Знайдіть величину модуля зсуву G матеріалу.
10. Круглий сталевий стержень діаметром $d = 20$ мм скручується моментом $M_{кр} = 100$ Н·м. Перевірте стержень на міцність, якщо границя текучості матеріалу $\sigma_Т = 240$ МПа.
11. Визначте реальний коефіцієнт запасу стержня, розглянутого в п. 10.
12. Чому дорівнюють найбільші нормальні напруження в цьому стержні?
13. Запишіть вираз для закону Гука в абсолютних величинах для чистого кручення стержня.
14. Сталевий стержень завдовжки 1 *м* має діаметр $d = 20$ *мм*. Яку жорсткість має стержень при крученні?
15. Якої довжини має бути стержень (див. п. 14), щоб його жорсткість не змінилась, коли виготовити його порожнистим з внутрішнім діаметром $d_{вн} = 5$ *мм*?
16. Відносний кут закручування стержня складає $\vartheta = 2\frac{рад}{м}$. На скільки градусів повернуться його перерізи один відносно одного, якщо відстані між ними 0,5 м?
17. Запишіть умову жорсткості круглого стержня при крученні.
18. Визначте потенціальну енергію деформації стержня, розглянутого в п. 10, що припадає на одиницю його довжини.
19. 

В якому стержні поперечні перерізи залишаються плоскими при крученні: а, б чи в?
20. 

Чому дорівнюють дотичні напруження в точках A, B і C трикутного перерізу стержня при крученні?
21. Як спрямовані напруження на контурі перерізу стержня при крученні?
22. Згідно з яким законом можна обґрунтувати напрям напружень на контурі перерізу при крученні: законом Гука, законом парності дотичних напружень чи третім законом Ньютона?
23. Чому дорівнює момент інерції при крученні стержня прямокутного перерізу?
24. Запишіть вираз для моменту опору прямокутного перерізу стержня при крученні, якщо співвідношення його сторін $h/b > 10$.
25. В яких точках тонкостінного незамкненого профілю діють максимальні дотичні напруження при крученні?
26. Де діють максимальні дотичні напруження в замкненому тонкостінному профілі при крученні?

27. Запишіть формули для визначення дотичних напружень і відносного кута закручування в тонкостінній циліндричній трубці при крученні.
28. Де в циліндричній гвинтовій пружині знаходяться небезпечні точки при її розтяганні або стисканні?
29. Запишіть умови міцності і жорсткості для циліндричної гвинтової пружини з малим кроком.
30. 

а) б)

Яка з зображених пружинних систем є статично невизначуваною: а, б чи обидві?