

## Лекція №17

## Тема 11.4. Розрахунки на міцність при плоскому поперечному згинанні

## 11.4.1. Основна умова міцності

На практиці у більшості випадків поперечного згинання небезпечними є найвіддаленіші від нейтральної лінії точки перерізу стержня. Це, зокрема, показано й у прикладі 11.3. В таких випадках розрахунки на міцність обмежують тільки дослідженням максимальних нормальних напружень в небезпечному перерізі з використанням умови міцності (11.18), яку називають *основною умовою міцності* при згинанні:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma]. \quad (11.26)$$

Перевірний розрахунок ведуть у такій послідовності:

1. Будують епюри внутрішніх зусиль в стержні і знаходять небезпечний переріз, в якому діє максимальний за абсолютною величиною згинальний момент  $M_{\max}$ .
2. Обчислюють або знаходять з довідників момент опору перерізу  $W$  відносно нейтральної лінії.
3. Користуючись умовою (11.26), перевіряють стержень на міцність.

При виконанні проектувального розрахунку за основною умовою міцності знаходять необхідний момент опору перерізу

$$W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}, \quad (11.27)$$

а потім знаходять вже всі необхідні розміри перерізу.

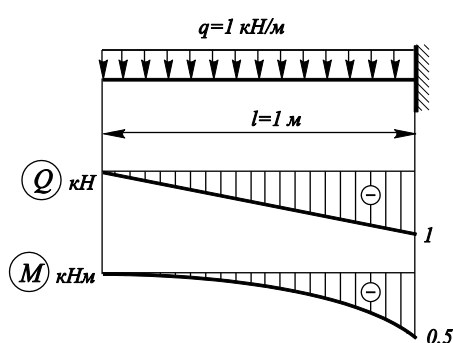


Рис. 11.13. До прикладу 11.4

**Приклад 11.4.** Перевірити на міцність чавунну балку (рис. 11.13), попередньо розташувавши її переріз у вигляді рівностороннього трикутника відносно нейтральної лінії найоптимальнішим чином. Сторона трикутника  $b=50$  мм. Допустимі напруження матеріалу балки на стиск  $[\sigma]_{\text{ст}} = 160$  МПа; на розтяг –  $[\sigma]_{\text{р}} = 40$  МПа.

Найбільші нормальні напруження в перерізі діють у найвіддаленішій від нейтральної лінії точці. Для трикутника ця точка є його вершиною.

Оскільки чавун, з якого виготовлена балка, краще опирається стисканню, то правильним буде розмістити переріз відносно осі  $z$  (нейтральної лінії) таким чином, щоб вершина знаходилась у зоні дії стисних напружень. Згідно зі схемою навантаження у балці при згинанні стискаються нижні волокна. Тому розмістити переріз слід вершиною донизу, як показано на рис. 11.14.

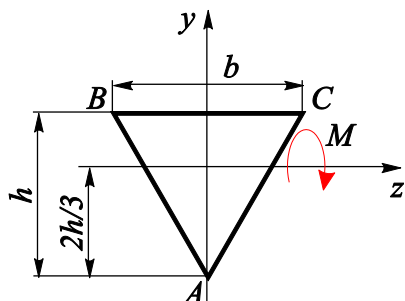


Рис. 11.14. Переріз балки

Небезпечний переріз балки знаходиться в защемленні, де діє максимальний згинальний момент  $M_{\max} = 0,25 \text{ кН} \cdot \text{м}$ . Для визначення напружень у небезпечних точках необхідно обчислити величину головного центрального моменту інерції перерізу. Для трикутника  $I_z = bh^3/36$ . Згідно з умовою  $b = 50 \text{ мм}$ ;  $h = b \cos 30^\circ = 50 \cdot 0,866 = 43,3 \text{ мм}$ . Тоді

$$I_z = 50 \cdot 43,3^3 / 36 = 112763,72 \text{ мм}^4.$$

Відстані до крайніх точок перерізу:

$$y_A = 2h/3 = 2 \cdot 43,3/3 = 28,87 \text{ мм};$$

$$y_{BC} = h/3 = 43,3/3 = 14,43 \text{ мм}$$

Перевіримо на міцність точку  $A$ :

$$|\sigma| = \frac{M_{\max}}{I_z} y_A = \frac{2,5 \cdot 10^5}{112763,72} 28,87 = 64,01 \text{ МПа} < [\sigma]_{\text{ст}} = 160 \text{ МПа}.$$

Перевіримо на міцність точки сторони  $BC$ :

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{I_z} y_{BC} = \frac{2,5 \cdot 10^5}{112763,72} 14,43 = 32,00 \text{ МПа} < [\sigma]_{\text{р}} = 40 \text{ МПа}.$$

Як бачимо, основна умова міцності для балки як за напруженнями розтягу, так і за напруженнями стиску виконується.

**Зауваження.** З отриманих результатів видно, що коли б точка  $A$  перерізу перебувала в зоні дії напружень розтягу, тобто коли переріз був би зорієнтований вершиною догори по відношенню до нейтральної лінії, то умова міцності тоді б не виконувалася:

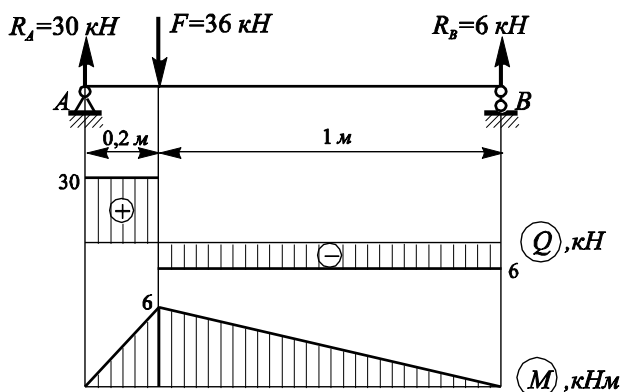
$$\sigma = \frac{M_{\max}}{I_z} y_A = \frac{2,5 \cdot 10^5}{112763,72} 28,87 = 64,01 \text{ МПа} > [\sigma]_{\text{р}} = 40 \text{ МПа}.$$

## Тема 11.4.2. Повна перевірка стержнів на міцність при поперечному згинанні

На практиці існують випадки, коли знехтувати дією поперечних сил в розрахунках на міцність не можна. Це стосується балок з тонкими високими перерізами, наприклад тавровими, двотавровими і т.п., в яких виникають одночасно великі згинальні моменти і поперечні сили. Є й інші випадки, зокрема коли згинається відносно коротка балка. Тоді в ній можуть виникати значні поперечні сили при невеликих згинальних моментах, і небезпечними можуть стати точки, що належать нейтральному шару.

Для таких випадків необхідна повна перевірка стержня на міцність за методикою, викладеною у темі 11.3.

Що стосується проектувального розрахунку, то його проводять за основною умовою міцності для нормальних напружень (11.27), але обов'язково після цього виконують повну перевірку спроектованого стержня на міцність в усіх потенційно небезпечних його точках.



**Приклад 11.5** Дібрати двотавровий переріз сталеві балки (рис. 11.15) з допустимими напруженнями  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ ;  $[\tau] = 100 \text{ МПа}$  та провести повну перевірку балки на міцність.

За основною умовою міцності (11.27) знайдемо момент опору перерізу:

$$W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{6 \cdot 10^6}{160} = 37500 \text{ мм}^3 = 37,5 \text{ см}^3.$$

Рис. 11.15. До прикладу 11.5

Згідно з додатком 1 [1], найближчий більший момент опору, у порівнянні зі знайденим, має двотавр №10. Випишемо з таблиць сортаментів деякі з його геометричних характеристик для подальшого використання при повній перевірці балки на міцність;

- осьовий момент інерції перерізу  $I_z = 198 \text{ см}^4$ ;
- осьовий момент опору перерізу  $W_z = 39,7 \text{ см}^3$ ;
- статичний момент половини площі перерізу відносно осі  $z$   $S_z = 23,0 \text{ см}^3$ ;

Щоби провести повну перевірку на міцність, зобразимо у масштабі двотавровий переріз (рис. 11.15 а) та побудуємо епюри розподілу нормальних і дотичних напружень по висоті перерізу, попередньо обчисливши величини цих напружень у кількох характерних його точках.

Для спрощення обчислень представимо полицю двотавра у вигляді прямокутника з розмірами сторін  $b = 55 \text{ мм}$  і  $h = t = 7,2 \text{ мм}$  (рис. 11.15 б). Через малість товщини полиці  $t$  така заміна не вплине суттєво на результати розрахунків напруженого стану в області, прилеглої до полиці двотавра.

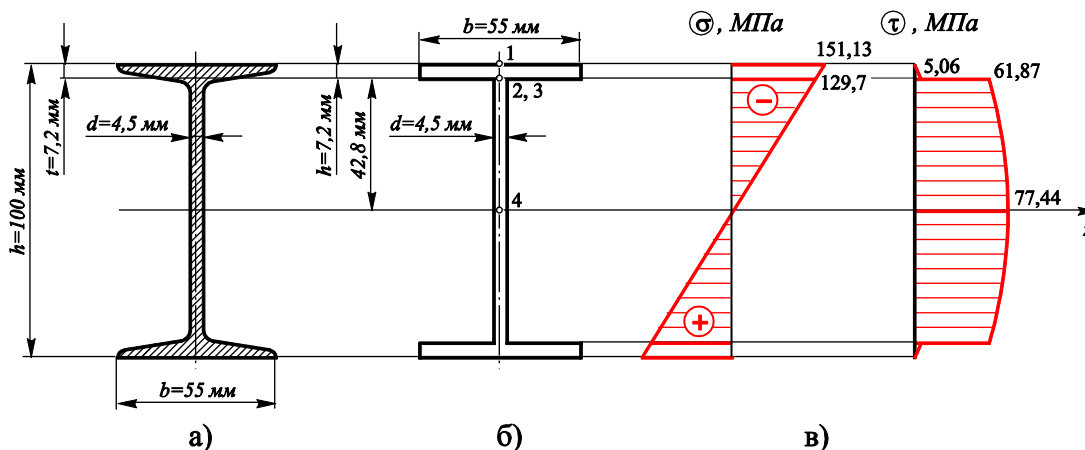


Рис. 11.16. Двотавровий переріз балки (а) і (б) та епюри розподілу напружень по його висоті (в)

**Точка 1.**  $\sigma^{(1)} = \frac{M}{W} = \frac{6 \cdot 10^6}{39700} = 151,13 \text{ МПа}; \tau = 0.$

**Точка 2.** Ця точка належить полиці двотавра.

$$\sigma^{(2)} = \frac{M}{I_z} y_2 = \frac{6 \cdot 10^6}{198 \cdot 10^4} 42,8 = 129,7 \text{ МПа}.$$

Обчислимо дотичні напруження в цій точці.

**Зауваження 1.** Полиця двотавра відноситься до перерізів, для яких припущення щодо розподілу дотичних напружень, сформульованих Журавським, не виконуються, оскільки тут  $h/b = 7,2/55 = 0,13 \ll 2$ . Проте ми знехтуємо цим застереженням і обчислимо дотичне напруження за вказаною формулою, щоб оцінити лише якісну картину розподілу дотичних напружень по висоті двотавра. Як далі буде показано, точка 2 не відноситься до потенційно небезпечних.

Статичний момент площі, розташованої вище рівня точки 2, тобто полиці

$$S_z^{(2)} = S_z^{(3)} = 7,2 \cdot 55 \cdot (42,8 + 3,6) = 18374,4 \text{ мм}^3.$$

Тоді

$$\tau^{(2)} = \frac{QS_z^{(2)}}{b^{(2)}I_z} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 18374,4}{55 \cdot 198 \cdot 10^4} = 5,06 \text{ МПа}.$$

**Точка 3.** Ця точка належить стояку двотавра.

$$\sigma^{(3)} = \sigma^{(2)} = 129,7 \text{ МПа}$$

$$\tau^{(3)} = \frac{QS_z^{(3)}}{b^{(3)}I_z} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 18374,4}{4,5 \cdot 198 \cdot 10^4} = 61,87 \text{ МПа}.$$

**Точка 4.**  $\sigma^{(4)} = 0; \tau^{(4)} = \tau_{\max} = \frac{QS_z}{b^{(4)}I_z} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 23 \cdot 10^3}{4,5 \cdot 198 \cdot 10^4} = 77,44 \text{ МПа}$

За отриманими результатами будемо епюри розподілу напружень по висоті двотавра (рис. 11.15 в).

Проведемо перевірку міцності балки в потенційно небезпечних точках перерізу. Згідно з епюрами напружень – це точки 1, 3 і 4.

**Точка 1.**  $\sigma^{(1)} = 151,13 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа}; \tau = 0$ . Умова міцності виконується.

**Точка 3.**  $\sigma^{(2)} = 129,7 \text{ МПа}; \tau^{(3)} = 61,87 \text{ МПа}$ . Розрахункове напруження за четвертою теорією міцності:

$$\sigma_p^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{129,7^2 + 3 \cdot 61,87^2} = 168,24 \text{ МПа} > 160 \text{ МПа}.$$

Умова міцності не виконується.

**Точка 4.**  $\sigma^{(4)} = 0; \tau^{(4)} = 77,44 \text{ МПа} < 100 \text{ МПа}$ .

Як бачимо, небезпечною тут є точка 3.

**Зауваження 2.** При аналізі міцнісної надійності конструкцій допускається перевантаження їх елементів, але не більш як на 5% від величини допустимого напруження. Тут принагідно нагадати, що запас міцності передбачає зменшення граничних напружень до

величини допустимих для пластичних матеріалів на 50% ( $n_T = 1,5$ ), а для крихких – на 150 – 200% ( $n_B = 2,5 \div 3$ ).

Перевантаження точки 3 складає  $\frac{168,24 - 160}{160} 100\% = 5,15\% > 5\%$ , що неприйнятно.

Тому проектувальний розрахунок, проведений за основною умовою міцності, не є остаточним. На практиці йдуть шляхом послідовного добору профілів з більшими розмірами, допоки умова міцності у небезпечній точці виконуватиметься.

Вибираємо двотавр №12 з такими геометричними характеристиками:

- осьовий момент інерції перерізу  $I_z = 350 \text{ см}^4$ ;
- висота  $h = 120 \text{ мм}$ ;
- ширина полиці  $b = 64 \text{ мм}$ ;
- товщина полиці  $t = 7,3 \text{ мм}$ ;
- товщина стояка  $d = 4,8 \text{ мм}$ .

Тоді для точки 3 маємо:

$$\sigma^{(3)} = \frac{M}{I_z} y_3 = \frac{6 \cdot 10^6}{350 \cdot 10^4} 52,7 = 90,34 \text{ МПа};$$

$$\tau^{(3)} = \frac{QS_z^{(3)}}{b^{(3)} I_z} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot [64 \cdot 7,3(60 - 3,65)]}{4,8 \cdot 350 \cdot 10^4} = 47,01 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_p^{IV} = \sqrt{90,34^2 + 3 \cdot 47,01^2} = 121,62 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа}.$$

Умова міцності виконується.

### Тема 11.4.3. Вибір раціональної форми перерізу стержня при згині

У проектувальних розрахунках з використанням умови міцності (11.27) знаходять необхідний момент опору перерізу. При цьому форма перерізу може бути будь-яка. Скориставшись даними та розв'язком прикладу 11.5, визначимо, які розміри матимуть прямокутний та круглий перерізи балки (рис. 11.17).

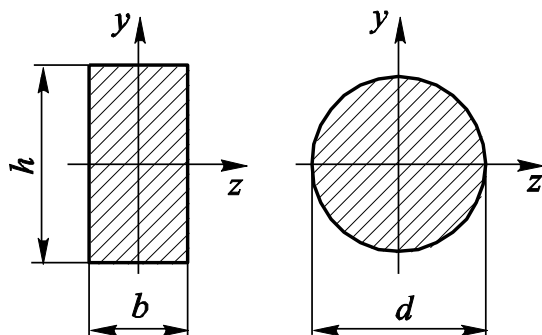


Рис. 11.17. До прикладу 11.6

**Приклад 11.6** Дібрати прямокутний, зі співвідношенням сторін  $h/b = 2$ , і круглий перерізи (рис. 11.17) сталеві балки (рис. 11.15), та порівняти ваги цих балок з вагою балки двотаврового перерізу.

Для прямокутного перерізу

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{2}{3} b^3 = 37500 \text{ мм}^3. \text{ Звідси}$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 37500}{2}} = 38,31 \text{ мм}; \quad h = 2b = 2 \cdot 38,31 = 76,62 \text{ мм}.$$

Для круглого перерізу  $W_z = \frac{\pi d^3}{32} = 37500 \text{ мм}^3$ . Звідси

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 37500}{\pi}} = 72,56 \text{ мм}.$$

Очевидно, що три перерізи з однаковим моментом опору відносно осі  $z$  мають різну площу, а значить і різну вагу матимуть балки: ваги одного погонного метра кожної балки відносяться як площі їх поперечних перерізів. Маємо такі площі перерізів:

- двотавр №12 –  $A_{ов} = 1470 \text{ мм}^2$ ;
- прямокутник –  $A_{пр} = bh = 38,31 \cdot 76,62 = 2935,31 \text{ мм}^2$ ;
- круг –  $A_{кр} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 72,56^2}{4} = 4135,08 \text{ мм}^2$ .

Тоді

$$G_{ов} : G_{пр} : G_{кр} = A_{ов} : A_{пр} : A_{кр} = 1470 : 2935,31 : 4135,08 = 1 : 2 : 2,81.$$

Як бачимо, у розглянутому прикладі вага балки з прямокутним перерізом удвічі перевищує вагу двотаврової балки, а з круглим перерізом – майже втричі. Ця різниця була би ще більшою, якщо б ми розглядали балку з двотавровим перерізом №10, який, згідно з розв'язком для прикладу 11.5, виявився перевантаженим всього лише на 5,15%. Різниця у вагах двотаврової і круглої балок може досягати чотирьох разів.

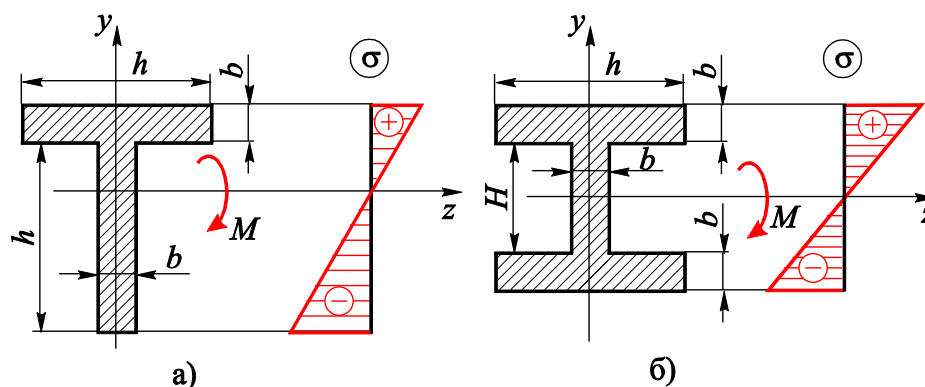
Отже, робимо висновок, що, з точки зору матеріалоемності, найраціональнішим перерізом стержня в умовах згинання є двотавр. Інші форми перерізів використовують, виходячи з інших міркувань. Наприклад осі, що працюють на згин, мають круглі перерізи, і така форма є найраціональнішою з точки зору особливостей їх конструкції, технології виготовлення та умов роботи.

Однак, сформульовані висновки мають сенс лише для стержнів, виготовлених з пластичних матеріалів. Справа в тому, що у розглянутих прикладах мова йшла про симетричні відносно нейтральної лінії перерізи. Оскільки пластичний матеріал однаково опирається розтяганням і стисканню, то важливо, щоб у крайніх точках перерізу діяли однакові за модулем напруження, що забезпечить мінімальні його розміри. Це характерно якраз для симетричних перерізів.

Інша справа, коли матеріал стержня крихкий і має різний опір розтяганням і стисканню. Тоді половина симетричного перерізу виявиться суттєво недовантаженою. І таку форму перерізу вважати раціональною не можна. Цієї особливості ми вже торкнулись, розглядаючи балку з перерізом у вигляді рівностороннього трикутника (див. приклад 11.4). Можна стверджувати, що раціональним для балок з таких матеріалів буде переріз, несиметричний відносно нейтральної лінії. Причому, більш віддалена від нейтральної лінії точка

перерізу має перебувати в полі дії напружень того знаку, опір матеріалу яким більший. Наприклад, замість двотаврового перерізу слід використовувати тавровий.

**Приклад 11.7** Балка виготовлена з сірого чавуну з допустимими напруженнями на стиск  $[\sigma]_{\text{ст}} = 120 \text{ МПа}$ , на розтяг –  $[\sigma]_{\text{р}} = 30 \text{ МПа}$ . Згинальний момент у небезпечному перерізі балки  $M_{\text{max}} = 0,6 \text{ кН} \cdot \text{м}$ . Дібрати тавровий переріз балки зі співвідношенням розмірів  $h = 5b$  (рис. 11.18 а). Визначити необхідну висоту стояка двотаврового перерізу  $H$  (рис. 11.18 б), який забезпечить задану вантажопідйомність балки. Розміри полиць і товщина стояка двотавра такі ж, як і у таврового перерізу. Порівняти ваги одного погонного метра балок.

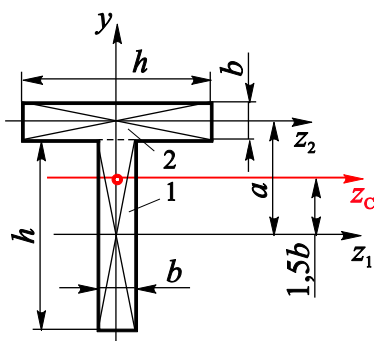


**Рис. 11.18.** Тавровий (а) і двотавровий (б) перерізи балки та епюри розподілу напружень по їх висоті

Тавровий переріз розташуємо таким чином, щоб максимальні напруження були стисними (рис. 11.18 б), оскільки матеріал балки краще опирається стиску.

1. Визначимо геометричні розміри таврового перерізу. Для цього спочатку визначимо координату центра ваги тавра вздовж осі  $y$ .

Розіб'ємо переріз на два прямокутники (рис. 11.19). Шукатимемо положення центру ваги у допоміжній системі координатних осей  $z_1Oy_1$ .



**Рис.11.19.** Тавровий переріз

$$y_C = \frac{aA_2}{A_1 + A_2} = \frac{(0,5h + 0,5b)bh}{2bh} = \frac{3b \cdot 5b^2}{10b^2} = 1,5b.$$

Момент інерції відносно осі  $z_C$ :

$$I_z = \frac{bh^3}{12} + (1,5b)^2 bh + \frac{hb^3}{12} + (a - 1,5b)^2 bh =$$

$$= \frac{125b^4}{12} + 11,25b^4 + \frac{5b^4}{12} + 11,25b^4 = \frac{400}{12} b^4.$$

Знайдемо розмір  $b$  з умови міцності для найвіддаленішої точки перерізу, що належить стояку, і де діють стисні напруження.

$$|\sigma_{\max}| = \frac{M}{I_z} y_{\max}^{(-)} = \frac{0,6 \cdot 10^6 \cdot 12}{400b^4} (0,5 \cdot 5b + 1,5b) = \frac{72000}{b^3} \leq [\sigma]_{cm}.$$

$$\text{Звідси } b \geq \sqrt[3]{\frac{72000}{[\sigma]_{cm}}} = \sqrt[3]{\frac{72000}{120}} = 8,43 \text{ мм}.$$

Перевіримо на міцність другу крайню точку перерізу, що належить полиці, і в якій діють напруження розтягу:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I_z} y_{\max}^{(+)} = \frac{0,6 \cdot 10^6 \cdot 12}{400b^4} (0,5b + 1,5b) = \frac{36000}{b^3} = \frac{36000}{8,43^3} = 60,09 \text{ МПа} > [\sigma]_p = 30 \text{ МПа}.$$

Оскільки умова міцності не виконується, то повторимо розрахунок розміру  $b$ , виходячи з допустимого напруження на розтяг:

$$\frac{36000}{b^3} \leq [\sigma]_p.$$

$$\text{Звідси } b \geq \sqrt[3]{\frac{36000}{[\sigma]_p}} = \sqrt[3]{\frac{36000}{30}} = 10,63 \text{ мм і, відповідно, } h = 5 \cdot 10,63 = 53,15 \text{ мм}.$$

2. Визначимо висоту стояка  $H$  двотаврового перерізу.

За основною умовою міцності (11.27) необхідний момент опору двотаврового перерізу

$$W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]_p} = \frac{0,6 \cdot 10^6}{30} = 2 \cdot 10^4 \text{ мм}^3.$$

З іншого боку

$$\begin{aligned} W = W_z &= \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{1}{0,5H + b} \left\{ \frac{bH^3}{12} + 2 \left[ \frac{hb^3}{12} + \left( \frac{H}{2} + \frac{b}{2} \right)^2 hb \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{0,5H + b} \left\{ \frac{bH^3}{12} + 2 \left[ \frac{5b^4}{12} + \left( \frac{H}{2} + \frac{b}{2} \right)^2 5b^2 \right] \right\} = 2 \cdot 10^4 \text{ мм}^3. \end{aligned}$$

Після необхідних перетворень отримуємо кубічне рівняння відносно  $H$ :

$$H^3 + 32H^2 - 45H - 191 = 0.$$

**Зауваження 1.** Для зручності обчислень вимірність довжини була переведена в сантиметри, а коефіцієнти і вільний член округлені до цілих чисел.

Додатний корінь цього рівняння є шуканою висотою стояка:  $H = 3,06 \text{ см} = 30,6 \text{ мм}$ .

3. Порівняємо ваги одного погонного метра таврової і двотаврової балок. Площа таврового перерізу складає  $A_m = 2bh = 2 \cdot 10,63 \cdot 53,15 = 1129,97 \text{ мм}^2$ ; двотаврового перерізу –  $A_{\text{дв}} = 2bh + bH = 2 \cdot 10,63 \cdot 53,15 + 10,63 \cdot 30,6 = 1455,25 \text{ мм}^2$ . Тоді

$$G_m : G_{\text{дв}} = A_m : A_{\text{дв}} = 1129,97 : 1455,25 = 1 : 1,29.$$

Як бачимо, балка з двотавровим перерізом за однакової вантажопідйомності на 30% важча від балки з тавровим перерізом.



Проте в задачі вибору раціонального перерізу не все так однозначно. Наприклад, ту ж двотаврову балку, розглянуту в попередньому прикладі, можна спроектувати, поклавши іншу умову: співвідношення сторін полиць і стояка двотавра такі, як і у тавра –  $h = 5b$ , і знайти ці розміри треба з умови міцності двотавра. Проведемо такий розрахунок.

### Приклад 11.7 (Продовження)

1. Визначимо геометричні розміри двотаврового перерізу, виходячи з нової умови їх вибору.

Оскільки в цьому випадку висота стояка пов'язана з його товщиною, то вираз для моменту опору матиме такий вигляд:

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{1}{0,5h+b} \left\{ \frac{bh^3}{12} + 2 \left[ \frac{hb^3}{12} + \left( \frac{h}{2} + \frac{b}{2} \right)^2 hb \right] \right\} = \frac{1}{3,5b} \left\{ \frac{125b^4}{12} + 2 \left[ \frac{5b^4}{12} + (3b)^2 5b^2 \right] \right\} = 28,93b^3.$$

Отже, виходячи з умови міцності двотавра (див. п. 2 прикладу 11.6),  
 $b = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 10^4}{28,93}} = 8,84 \text{ мм}$ . Тоді  $h = 5 \cdot 8,84 = 44,2 \text{ мм}$ .

Порівняємо тепер ваги балок. Площа двотаврового перерізу складає  
 $A_{\text{дв}} = 3bh = 3 \cdot 8,84 \cdot 44,2 = 1172,18 \text{ мм}^2$ . Тоді

$$G_m : G_{\text{дв}} = A_m : A_{\text{дв}} = 1129,97 : 1172,18 = 1 : 1,04.$$

Тобто, різниця в вазі складає всього 4%.

**Зауваження 2.** Відмінність між першим і другим варіантами полягає в тому, що ми спочатку задали як обов'язкову умову однакові розміри полиць і товщини стояків тавра і двотавра, а в другому варіанті спроектували двотавр з таким, як і у тавра, співвідношенням сторін полиць і стояка, не пов'язуючи жодною умовою самі їх розміри. І виходить, що за першим варіантом безумовно тавр є більш раціональним перерізом для балки, а за другим варіантом особливої різниці, з точки зору вантажопідйомності і матеріалоємності балки, між двома перерізами немає. Аналіз переваг і недоліків отриманих перерізів можна продовжити, якщо одним з критеріїв оцінки їх раціональності будуть, наприклад, габаритні розміри перерізів.

З наведеного прикладу добре видно, який широкий простір для вибору оптимальних рішень має проектувальник при розв'язанні практичних задач. І тільки за ним прийняття правильного технічного рішення, яке можливе лише за умови глибоких знань, широкої ерудиції та здорової інтуїції, що базується на досвіді.

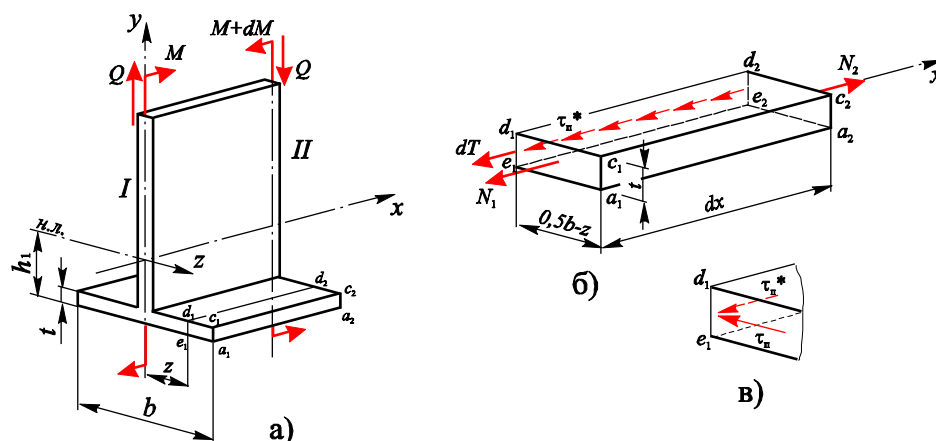
## Тема 11.5. Згинання тонкостінних профілів

### 11.5.1. Дотичні напруження в тонкостінних профілях

Прикладами тонкостінних профілів можуть служити прокатні профілі: двотаври, таври, швелери і т.п. Більшість з них мають стояки і полиці. І коли мова йде про розподіл дотичних напружень, то вже відзначалось, що у стояках або стінках – тонких високих прямокутниках – вони розподіляються у

відповідності з припущеннями, сформульованим Журавським (див. тему 11.2). У полицях цей розподіл має зовсім інший характер.

Щоб проаналізувати закон розподілу дотичних напружень у полицях, розглянемо консольну балку, зображену на рис. 11.6, яка має тавровий переріз. Виділимо двома суміжними перерізами *I* і *II* елемент балки  $dx$  (рис. 11.20 а). В обох перерізах діють, згідно з епюрою  $Q$  (рис. 11.6), однакові за величиною поперечні сили і різні згинальні моменти:  $M$  (переріз *I*) і  $M+dM$  (переріз *II*).



**Рис. 11.20.** До визначення дотичних напружень в полицях тонкостінних профілів: а – схема навантажування елемента балки; б – схема навантажування елемента полиці; в – дотичні напруження у гранях елемента полиці

Виділимо з полиці елемент  $a_1c_1d_1e_1a_2c_2d_2e_2$ , як показано на рис. 11.20 а, і розглянемо умову його рівноваги, спроектувавши всі сили, що діють у його гранях, на вісь  $x$ .

Проаналізуємо сили, що діють у гранях виділеного елемента. По-перше, грані елемента, що належать бічній поверхні полиці, вільні від навантаження і жодних зусиль тут не виникає. По-друге, у гранях  $a_1c_1d_1e_1$  і  $a_2c_2d_2e_2$  діють поздовжні сили, пов'язані з нормальними напруженнями, що виникають тут при згинанні. Проте через приріст моменту ці сили різні за величиною: у грані  $a_1c_1d_1e_1$   $N_1 = N$ , а у грані  $a_2c_2d_2e_2$   $N_2 = N + dN$ . Щоб зрівноважити ці сили, у грані  $d_1e_1d_2e_2$  має діяти сила в напрямку осі  $x$ , тобто по дотичній до грані. Позначивши цю силу через  $dT$ , запишемо умову рівноваги в такому вигляді:

$$\sum X = -N_1 - dT + N_2 = -N - dT + N + dN = 0.$$

Звідси

$$dT = dN, \tag{11.28}$$

Оскільки  $dN = N_2 - N_1$ , де  $N_1$  і  $N_2$  визначаються за формулами (11.12) і (11.13), отриманими в темі 11.2, то

$$dT = dN = \frac{M + dM}{I_z} S_z(y) - \frac{M}{I_z} S_z(y) = \frac{dM}{I_z} S_z(y), \quad (11.29)$$

Тут  $S_z(y)$  – статичний момент площі  $a_1 c_1 d_1 e_1$  відносно нейтральної лінії перерізу і є функцією координати  $z$  (див. рис. 11.20 а). Для нашого прикладу  $S_z(y) = t(0,5b - z)(h_1 - 0,5t)$ .

З іншого боку, сила  $dT$  пов'язана з дотичними напруженнями  $\tau_{\Pi}^*$ , що діють у цій грані (рис. 11.20 б). Вважаючи, що через малість товщини полиці напруження розподілені однорідно, запишемо:

$$dT = \tau_{\Pi}^* t dx. \quad (11.30)$$

Прирівнюючи праві частини виразів (11.29) і (11.30), отримаємо:

$$\tau_{\Pi}^* t dx = \frac{dM}{I_z} S_z(y).$$

Звідси  $\tau_{\Pi}^* = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{S_z(y)}{t I_z}$ .

За законом парності дотичних напружень у грані  $a_1 c_1 d_1 e_1$  діють такі ж за величиною і спрямовані до спільного ребра  $d_1 e_1$  дотичні напруження  $\tau_{\Pi}$  (рис. 11.20 в).

Таким чином, дотичні напруження в полиці на лінії  $d_1 e_1$ , що знаходиться на відстані  $z$  від головної центральної осі інерції перерізу  $y$ , обчислюють за формулою:

$$\tau_{\Pi} = \frac{Q S_z(y)}{t I_z}. \quad (11.31)$$

Тут враховано, що  $Q = dM/dx$ .

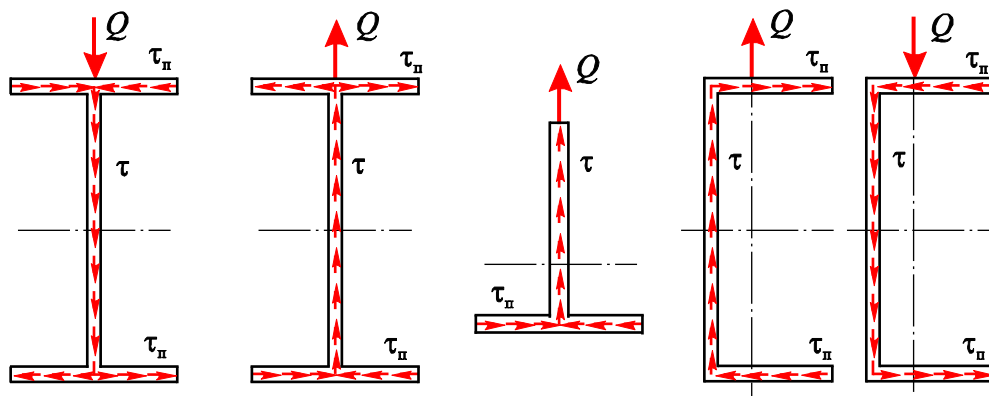
Отже можна остаточно сформулювати припущення щодо характеру розподілу дотичних напружень у полицях:

1. В усіх точках полиці дотичні напруження  $\tau_{\Pi}$  паралельні середній лінії полиці, тобто спрямовані перпендикулярно до напрямку поперечної сили  $Q$  в перерізі.

2. В усіх точках довільної лінії  $d_1 e_1$  дотичні напруження однакові, тобто постійні по товщині полиці, і залежать лише від відстані  $z$  до головної центральної осі інерції перерізу.

**Примітка 11.3.** Безумовно, що у полицях в напрямку, паралельному до поперечної сили  $Q$ , також діють дотичні напруження, але їх величина нехтовно мала, в чому ми вже пересвідчилися, розв'язуючи приклад 11.5.

Дотичні напруження  $\tau_{II}$  в полицях завжди утворюють єдиний потік з напруженнями  $\tau$  у стояках (стінках) тонкостінного профілю (Рис. 11.21).

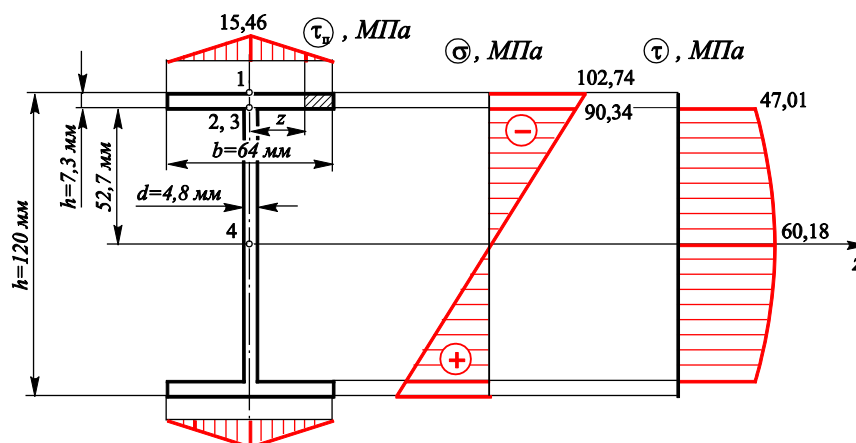


**Рис. 11.21.** Розподіл дотичних напружень у полицях та стояках тонкостінних профілів при поперечному згинанні

Встановивши характер розподілу дотичних напружень в полицях і отримавши розрахункові формули для їх обчислення, можемо тепер повернутися до прикладу 11.5 та уточнити напружений стан двотаврової балки в небезпечному перерізі.

**Приклад 11.5 (Продовження)**

За результатами проектувального та перевірного розрахунків був дібраний двотавр №12, при цьому небезпечною точкою виявилася точка 3 стояка в місті його з'єднання з полицею. Зобразимо в масштабі вказаний профіль у схематизованому вигляді (рис. 11.22).



**Рис. 11.22.** Двотавровий переріз балки та епюри розподілу напружень по його висоті

Оскільки для цього перерізу напруження в усіх вказаних точках по висоті двотавра не обчислювались, то зробимо це зараз.

**Точка 1.**  $\sigma^{(1)} = \frac{M}{W} = \frac{6 \cdot 10^6}{58400} = 102,74 \text{ МПа}.$

Дотичні напруження в цій точці знайдемо за формулою (11.31), маючи на увазі, що по товщині полиці вони незмінні.

Для довільної точки полиці на відстані  $z$  від вертикальної осі (рис. 11.22) отримаємо:

$$\tau_{\parallel} = \frac{QS_z(y)}{tI_z} = \frac{Q}{tI_z} t \left( \frac{b}{2} - z \right) \left( \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = \frac{30 \cdot 10^3}{350 \cdot 10^4} \left( \frac{64}{2} - z \right) \left( \frac{120}{2} - \frac{7,3}{2} \right) = 0,483(32 - z).$$

Як бачимо, дотичні напруження  $\tau_{\parallel}$  по довжині полиці змінюються за лінійним законом. В крайніх точках полиці, коли  $z = 0,5b$ ,  $\tau_{\parallel} = 0$ . Максимальні дотичні напруження діють посередині полиці при  $z = 0$ :  $\tau_{\parallel \max} = 0,483 \cdot 32 = 15,46$  МПа. Епюри розподілу напружень у полицях зображені на рис. 11.22.

Отже, в точці 1 має місце плоский напружений стан. Розрахункове напруження за четвертою теорією міцності

$$\sigma_p^{IV} = \sqrt{102,74^2 + 3 \cdot 15,46^2} = 106,17 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа}.$$

**Точка 2.** Ця точка належить полиці двотавра. Дотичні напруження  $\tau_{\parallel}$  тут такі ж, як у точці 1. Нормальні напруження  $\sigma^{(2)} = \frac{M}{I_z} y_2 = \frac{6 \cdot 10^6}{350 \cdot 10^4} 52,7 = 90,34$  МПа, менші, ніж у точці 1, а значить і розрахункові напруження будуть меншими. Тобто немає сенсу перевіряти цю точку на міцність.

**Точка 3.** Ця точка належить стояку двотавра і всі необхідні розрахунки для неї, як для небезпечної точки перерізу, вже були проведені. Для порівняння наведемо знайдені значення напружень в цій точці:  $\sigma^{(3)} = \sigma^{(2)} = 90,34$  МПа;  $\tau^{(3)} = 47,01$  МПа;  $\sigma_p^{IV} = 121,62$  МПа  $< 160$  МПа.

**Точка 4.**  $\sigma^{(4)} = 0$ ;  $\tau^{(4)} = \tau_{\max} = \frac{QS_z}{dI_z} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 33,7 \cdot 10^3}{4,8 \cdot 350 \cdot 10^4} = 60,18$  МПа  $< 100$  МПа.

Як бачимо, умови міцності виконуються для всіх потенційно небезпечних точок перерізу.

Окремо треба відзначити, що навіть після уточненого розрахунку дотичних напружень в полиці (точки 1 і 2) небезпечною точкою перерізу залишилася точка 3.

## 11.5.2. Поняття про центр згинання

В тонкостінних незамкнених профілях при поперечному згинанні дотичні напруження, утворюючи неперервний потік в елементах перерізу (рис.11.21), можуть впливати на характер деформації балки. Щоб з'ясувати, як саме цей вплив проявляється, розглянемо консольні жорстко защемлені балки двотаврового і швелерного перерізів, зображені на рис 11.23.

Перерізи балок з діючими в них дотичними напруженнями показані на рис. 11.24. Замінивши дотичні напруження відповідними зусиллями  $Q$  і  $T$ , бачимо, що у двотавровому перерізі (рис. 11.24 а), який має дві осі симетрії, у полицях зусилля  $T$  взаємно зрівноважені. Поперечна сила  $Q$ , зведена до головної центральної осі  $y$ , зрівноважує зовнішню силу  $F$ , і, як наслідок, балка перебуває в умовах плоского поперечного згинання.

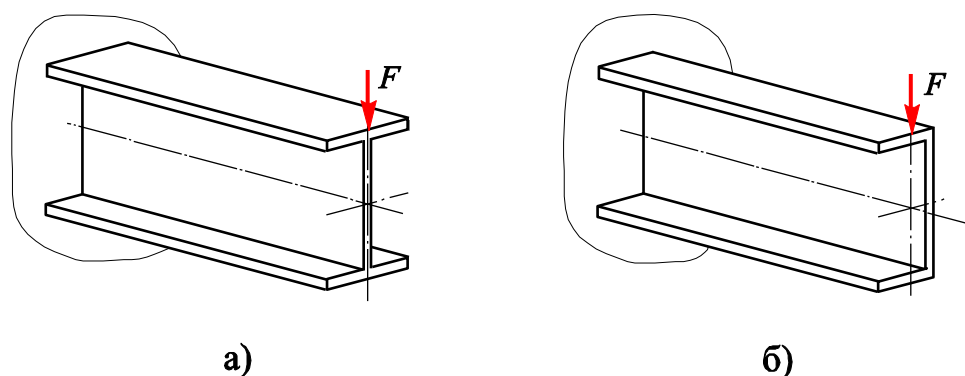


Рис. 11.23. Консольні жорстко защемлені балки двотаврового (а) і швелерного (б) перерізів

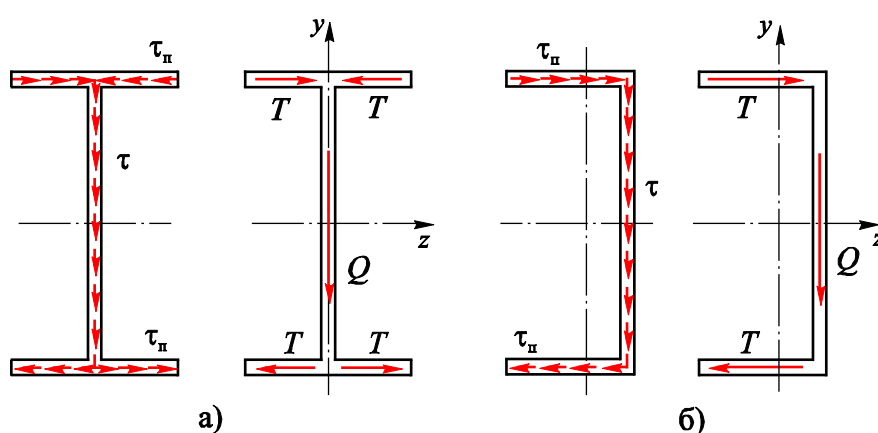


Рис. 11.24. Перерізи двотаврової (а) і швелерної (б) балок з діючими в них зусиллями

У швелера зусилля в полицях утворюють пару сил, момент якої є ні чим іншим, як крутним моментом в перерізі. Тобто швелерна балка, крім згинання, сприйматиме ще й деформацію кручення. Таким чином, сформульована раніше умова виникнення плоского поперечного згинання стержня, згідно з якою силова лінія в перерізі має збігатися з однією з головних центральних осей інерції, у випадку тонкостінних профілів справедлива лише для перерізів з двома осями симетрії, наприклад для двотаврового перерізу. В іншому разі згинання супроводжуватиметься крученням.

На рис. 11.25 показані двотаврова і швелерна балки (рис. 11.23) у zdeформованому стані.

У випадку з швелером суть проблеми полягає у виборі точки зведення внутрішніх сил в перерізі балки. Свого часу в якості такої точки був вибраний центр ваги перерізу. Але при цьому, як бачимо, може виникати неврівноважений момент дотичних сил.

Щоб уникнути кручення при згинанні балок тонкостінного профілю, слід вибрати іншу точку перерізу для зведення сил, відносно якої момент дотичних зусиль дорівнюватиме нулю. І саме через цю точку має проходити площина дії навантаження. Ця точка називається *центром згинання*.

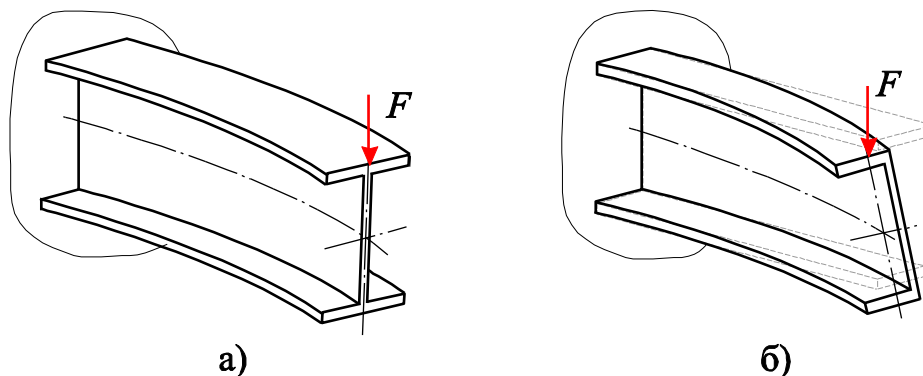


Рис. 11.25. Двотаврова (а) і швелерна (б) балки у здеформованому стані

В перерізах з двома осями симетрії центр згинання збігається з центром ваги перерізу. Що стосується перерізів з однією віссю симетрії, то положення центру згинання легко знайти з умови, що  $M_{кр}=0$ .

Розглянемо швелерний переріз, зусилля в якому представлені поперечною силою  $Q$  і моментом пари дотичних сил у полицях  $M_T = T(h-t)$  (рис. 11.26 а). Тут  $T$  – зусилля в полиці (рис.11.24 б).

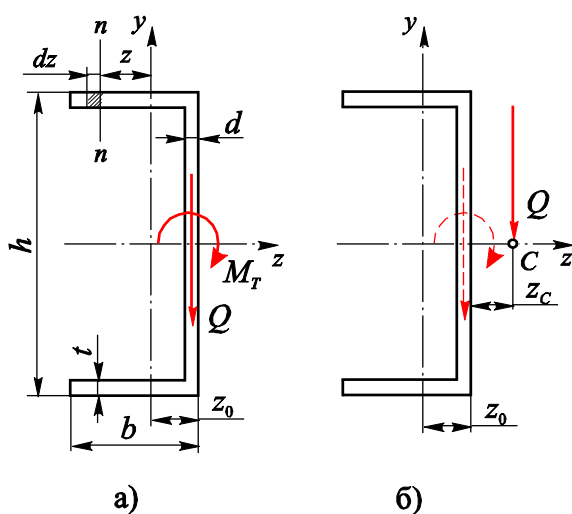


Рис. 11.26. Вихідна (а) і зведена (б) система сил в перерізі

Припустимо, що точка  $C$  – центр згинання. Тоді, згідно з означенням

$$\sum M_C = M_{кр} = Q\left(\frac{d}{2} + z_c\right) - T(h-t) = 0.$$

Звідси

$$z_c = \frac{T}{Q}(h-t) - \frac{d}{2}. \quad (11.32)$$

На елемент полиці  $dz$  діє елементарна дотична сила  $dT = \tau_{II}tdz$ .

$$\text{Звідси } T = t \int_{-(z_0-d)}^{b-z_0} \tau_{II} dz.$$

Напруження в полиці, згідно з (11.31),

$$\tau_{II} = \frac{QS_z(y)}{tI_z}.$$

Тут статичний момент частини полиці швелера, що знаходиться зліва від лінії  $mn$ , відносно осі  $z$  (див. рис. 11.26 а) дорівнюватиме:

$$S_z = t(b - z_0 - z) \frac{h-t}{2}.$$

Тоді

$$T = Q \frac{t(h-t)}{2I} \int_{-(z_0-d)}^{b-z_0} (b - z_0 - z) dz = \frac{Qt(h-t)(h-d)^2}{4I}$$

Підставляючи отриманий вираз в (11.32), знаходимо:

$$z_c = \frac{t(h-t)^2(b-d)^2}{4I} - \frac{d}{2}. \quad (11.33)$$

Таким чином, швелерна балка перебуватиме в умовах плоского згину, якщо діючі на неї сили лежатимуть у площині, яка проходить через знайдений центр згинання  $C$  паралельно осі  $y$ . В іншому разі її згин супроводжуватиметься крученням. На рис. 11.27 зображений один з можливих способів практичної реалізації навантаження швелерної балки у центрі згинання, коли до стінки швелера приварена опорна площадка.

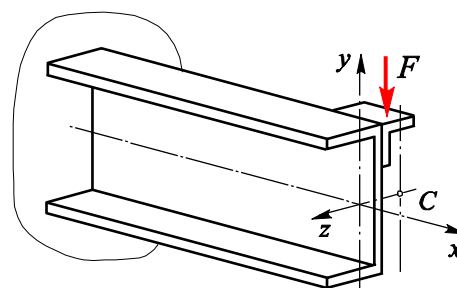


Рис. Схема навантаження швелерної балки у центрі згинання

**Приклад 11.8** Знайти положення центру згинання профілю у вигляді рівнобокого кутника, навантаженого поперечною силою  $Q$  (рис. 11.28 а) [3].

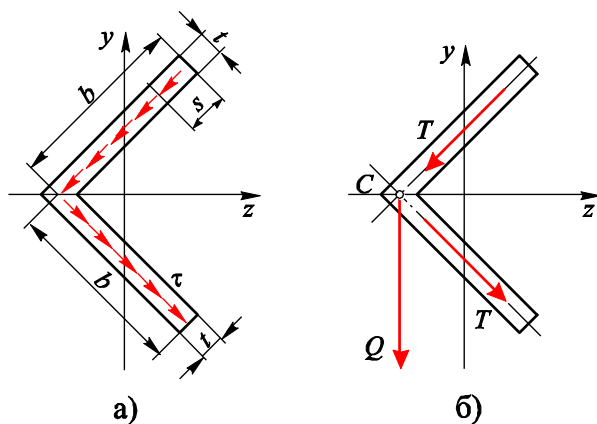


Рис. 11.28. До прикладу 11.8

Осі  $y$  і  $z$  є головними центральними осями інерції перерізу. Дотичні напруження в полицях на відстані  $s$  від краю складають

$$\tau = \frac{QS_z}{tI_z}.$$

Тут статичний момент частини полиці довжиною  $s$  відносно осі  $z$ , враховуючи, що вона нахилена до цієї осі під кутом  $45^\circ$ ,

$$S_z = \frac{st}{\sqrt{2}} \left( b - \frac{s}{2} \right).$$

Момент інерції рівнобокого кутника

$$I_z = \frac{b^3 t}{3}$$



Тоді

$$\tau = \frac{3sQ}{\sqrt{2}b^3t} \left( b - \frac{s}{2} \right).$$

З отриманого виразу бачимо, що дотичні напруження є квадратичною функцією від відстані  $s$  і досягають максимального значення при  $s = b$ :

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2\sqrt{2}bt}.$$

Сумарна поперечна сила у кожній полиці (рис. 11.28 б) дорівнює

$$T = \int_0^b \tau t ds = \frac{3Q}{\sqrt{2}b^3} \int_0^b \left( bs - \frac{s^2}{2} \right) ds = \frac{Q}{\sqrt{2}}.$$

Спроектувавши сили  $T$  на вісь  $y$ , бачимо, що сума їх проекцій дорівнює  $Q$ . Тобто поперечна сила  $Q$  в перерізі є рівнодійною дотичних сил  $T$  в полицях рівнобокого кутника:

$$\vec{Q} = \vec{T} + \vec{T}.$$

Більше того, вона, як сумарний вектор, проходить через точку перетину ліній дії двох сил  $T$ , відносно якої ці сили моменту не створюють. Звідси виходить, що центр згинання лежить в місці перетину полиць, тобто в точці  $C$ .