

Лекція №18

Тема 11.6. Розрахунки на жорсткість при згинанні

11.6.1. Переміщення в стержнях при згинанні

Ми розглянули розрахунки стержнів на міцність при згинанні. Тепер зупинимось на розрахунках на жорсткість.

При плоскому згинанні вісь стержня викривлюється, залишаючись плоскою кривою. Свого часу при розв'язанні задачі з визначення нормальних напружень в стержні при згинанні в якості міри деформації була вибрана кривина нейтрального шару $1/\rho$ (див. тему 11.1). Але з практичної точки зору така міра є зовсім незручною, адже вимірювати кривину досить складно. Для оцінки деформації стержнів користуються такими його переміщеннями, які легко як вимірювати, так і визначати аналітично.

Розглянемо прямий стержень – консольну балку – схема навантаження якого зображена на рис.11.29. Його вісь викривлюється, при цьому переміщуються центри ваги перерізів (нагадаємо, що вісь стержня є геометричним місцем центрів ваги перерізів).

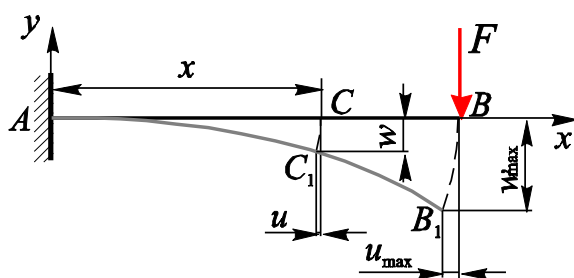


Рис. 11.29. Лінійні переміщення в балці при згинанні

Довільна точка C на осі стержня переміщується за траєкторією CC_1 . Проекцію цього переміщення на вісь y позначають w , а на вісь x – u .

Прогином w називають переміщення центру ваги поперечного перерізу стержня у напрямку, перпендикулярному до його осі.

Осьовим переміщенням називають переміщення u вздовж осі стержня.

Насправді ці два переміщення несумірні. Так, для консольної балки максимальні їх значення відносяться до довжини як $\frac{w_{\max}}{l} = \frac{1}{100}$ і $\frac{u_{\max}}{l} = \frac{1}{15000}$.

Через малість осьовим переміщенням u нехтують і вважають, що центри ваги перерізів переміщуються тільки у напрямку, перпендикулярному до початкової осі стержня (рис. 11.30 а).

Внаслідок викривлення стержня його поперечні перерізи, залишаючись плоскими, повертаються і, згідно з гіпотезою плоских перерізів, збігаються з нормаллями до осі стержня (рис. 11.30 б).

Кут θ повернутого перерізу по відношенню до його початкового положення називають кутом повороту.

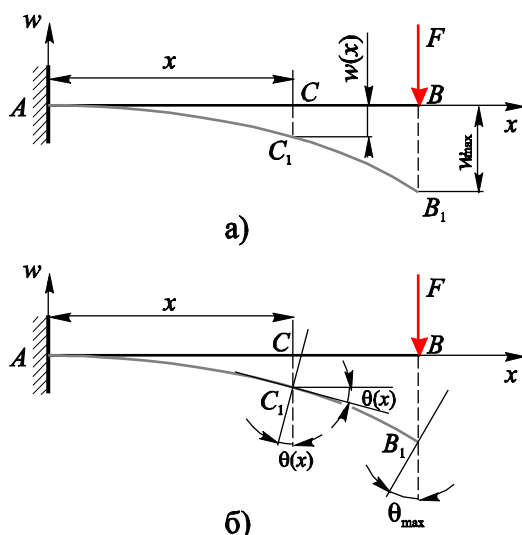


Рис. 11.30. Прогини (а) та кути поворотів перерізів (б) в балці при згинанні

Через малість θ

$$\theta(x) = \frac{dw(x)}{dx}. \quad (11.35)$$

Ми отримали диференціальну залежність між кутом повороту і прогином стержня.

11.6.2. Диференціальне рівняння пружної лінії стержня

Отже, щоб визначити деформацію стержня в його довільному перерізі, перш за все необхідно отримати рівняння пружної лінії

$$w = f(x).$$

Виходячи з фізичної природи зігнутої осі стержня, вона має бути неперервною і гладкою кривою (без розривів і зламів). А значить неперервною і гладкою має бути її перша похідна.

Встановимо залежність між кривиною осі як мірою деформації стержня і переміщеннями його перерізів при згині.

Для плоского поперечного згинання ми отримали таку формулу для кривини:

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EI(x)}. \quad (11.36)$$

З аналітичної геометрії відоме рівняння кривини плоскої кривої:

$$\frac{1}{\rho(x)} = \pm \frac{\frac{d^2 w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (11.37)$$

З враховуючи (11.36) отримаємо *точне диференціальне рівняння зігнутої осі стержня*

$$\pm \frac{\frac{d^2 w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M(x)}{EI(x)}. \quad (11.38)$$

В отриманому рівнянні слід узгодити знаки. При вибраному напрямку координатних осей w і x (рис. 11.30), кривина, як відомо, вважається додатною, якщо на графіку функції маємо ввігнутість. Порівнюючи знак згинального моменту, прийнятий для горизонтальних стержнів, зі знаком кривини (рис. 11.31), бачимо, що за вибраного напрямку координатних осей вони збігаються.

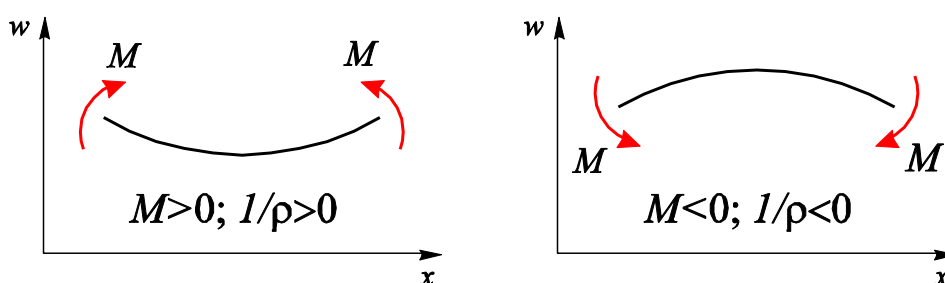


Рис. 11.31. Прогини (а) та кути поворотів перерізів (б) в балці при згинанні

Враховуючи, що $\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 = \text{tg}^2 \theta$ – величина другого порядку малості, остаточно отримаємо:

$$\boxed{\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI(x)}}. \quad (11.39)$$

Це *основне диференціальне рівняння пружної лінії*.
Інтегруючи, отримаємо:

$$\theta = \frac{dw}{dx} = \int \frac{M(x)}{EI} dx + C. \quad (11.40)$$

$$w = \int dx \int \frac{M(x)}{EI} dx + Cx + D. \quad (11.41)$$

Сталі інтегрування в отриманих рівняннях визначають з умов закріплення стержня. Так, у випадку консольної жорстко защемленої балки (рис. 11.30), для якої будь-які переміщення в закріпленні відсутні, маємо:

- при $x = 0$ $\theta = 0$, а значить і $C = 0$;
- при $x = 0$ $w = 0$, тоді і $D = 0$.

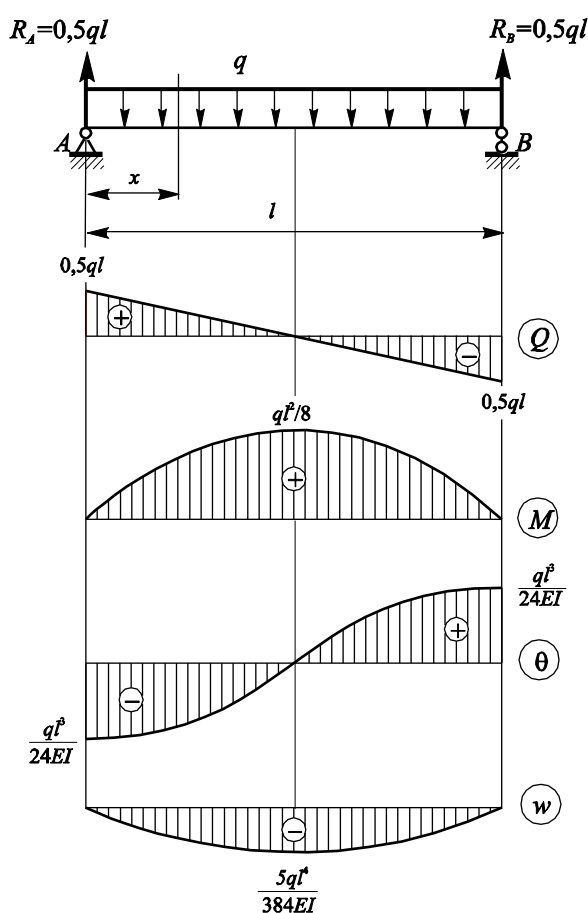


Рис. 11.32. До прикладу 11.9

Приклад 11.9. Побудувати епюри Q , M , w і θ для двоопорної шарнірно опертої балки (рис. 11.32).

Опорні реакції дорівнюють $R_A = R_B = \frac{ql}{2}$.

Запишемо вирази для поперечної сили і згинального моменту у довільному перерізі балки:

I. $0 \leq x \leq l$

$$Q(x) = R_A = \frac{ql}{2};$$

$$M(x) = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}.$$

Диференціальне рівняння пружної лінії виглядатиме так:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{1}{EI} \left(\frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} \right).$$

Інтегруючи, отримаємо

$$\theta(x) = \frac{dw}{dx} = \frac{1}{EI} \int M(x) dx = \frac{qlx^2}{4EI} - \frac{qx^3}{6EI} + C;$$

$$w(x) = \frac{1}{EI} \int \theta dx = \frac{qlx^3}{12EI} - \frac{qx^4}{24EI} + Cx + D.$$

Сталі інтегрування знайдемо з граничних умов:

- при $x = 0$ $w = 0$, звідси $D = 0$;
- при $x = l$ $w = 0$, отже $w|_{x=l} = \frac{ql^4}{12EI} - \frac{ql^4}{24EI} + Cl = 0$. Звідси $C = -\frac{ql^3}{24EI}$.

Таким чином,

$$\theta(x) = \frac{ql}{4EI}x^2 - \frac{q}{6EI}x^3 - \frac{ql^3}{24EI};$$

$$w(x) = \frac{ql}{12EI} x^3 - \frac{q}{24EI} x^4 - \frac{ql^3}{24EI} x.$$

За отриманими рівняннями будемо відповідні епюри (рис. 11.32).

Отже, інтегруючи диференціальне рівняння пружної лінії стержня, ми можемо обчислювати переміщення θ і w будь-якого перерізу. Проте цей метод стає вкрай громіздким, коли кількість ділянок стержня більша 2-х, оскільки різко зростає кількість сталих інтегрування, які підлягають визначенню.

Розглянемо двоопорну балку, навантажену в точці C зосередженою силою (рис. 11.33).

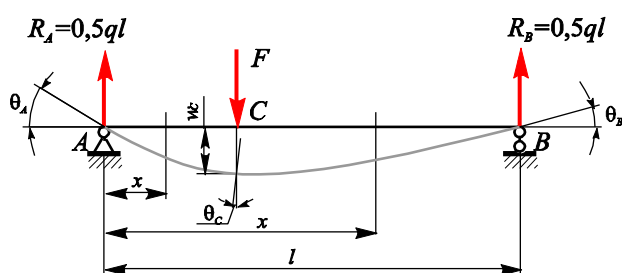


Рис. 11.33. Переміщення в двоопорній шарнірно опертій балці при згинанні

Тут маємо дві ділянки. Розглянемо кожен з них.

Ділянка AC :

$$M(x)_I = R_A x;$$

$$\theta(x)_I = \frac{1}{EI} \int M(x) dx = \frac{R_A x^2}{2EI} + C_I;$$

$$w(x)_I = \frac{R_A x^3}{6EI} + C_I x + D_I$$

Ділянка CB :

$$M(x)_{II} = R_A x - F(x - l_{AC});$$

$$\theta(x)_{II} = \frac{1}{EI} \int M(x) dx = \frac{R_A x^2}{2EI} - \frac{F(x - l_{AC})^2}{2EI} + C_{II};$$

$$w(x)_{II} = \frac{R_A x^3}{6EI} - \frac{F(x - l_{AC})^3}{6EI} + C_{II} x + D_{II}.$$

Визначенню підлягають по дві пружні сталі на кожній ділянці: C_I , D_I , і C_{II} , D_{II} . Для їх визначення крім двох умов на опорах ($w(0)=0$ і $w(l)=0$), слід скористатися умовою плавного та неперервного спряження сусідніх ділянок AC і CB в точці C . Умова полягає в рівності прогинів і кутів повороту перерізу C для обох ділянок: $\theta(l_{AC})_I = \theta(l_{AC})_{II}$ і $w(l_{AC})_I = w(l_{AC})_{II}$.

Отже, для стержня з однією ділянкою (рис. 11.32) підлягають визначенню дві сталі інтегрування. Для стержня з двома ділянками (рис. 11.33) визначати потрібно вже чотири сталі. Якщо кількість ділянок n , то інтегрування диференціальних рівнянь для всіх ділянок дає $2n$ сталих. Тобто потрібно розв'язувати систему з $2n$ рівнянь, з яких два рівняння – це граничні умови на

опорах, а ще $2(n-1)$ рівняння – це умови неперервного і плавного спряження всіх ділянок пружної лінії стержня.

Проте трудомісткий процес обчислень сталих інтегрування за допомогою певного алгоритму можна значно спростити, звівши розрахунок до визначення фактично лише двох сталих, не залежно від кількості ділянок. Метод визначення переміщень у балках, що базується на такому алгоритмі, ми далі й розглянемо.

11.6.3. Метод початкових параметрів

Покажемо, що цими двома сталими є кут повороту і прогин балки на початку координат.

Розглянемо балку, на яку діють основні типи навантажень, якими ми оперуємо. Напрямок навантажень вибрано таким чином, щоб згинальні моменти в перерізах балки були додатними (рис. 11.34 а).

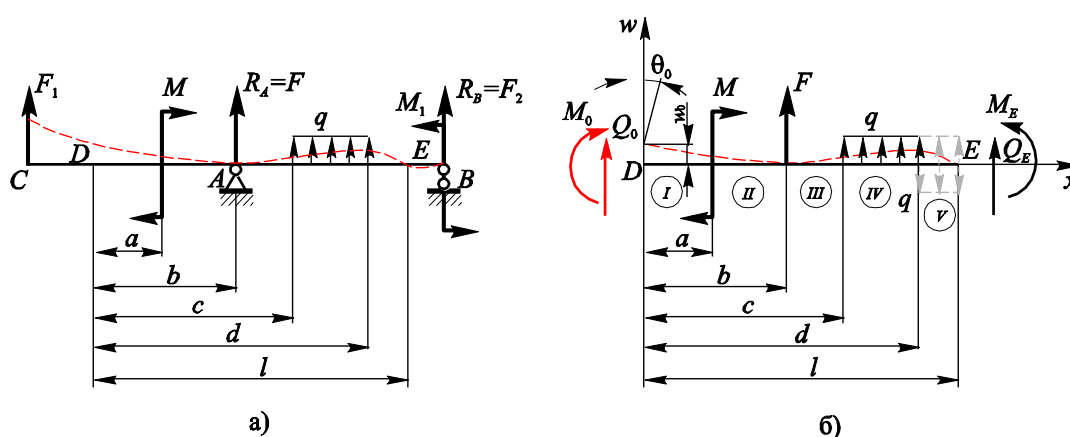


Рис. 11.34. Схема навантаження балки (а) та розрахункова схема до методу початкових параметрів (б)

Щоб звести кількість сталих інтегрування до двох, необхідно, щоб сталі на всіх ділянках балки при інтегруванні рівняння пружної лінії були однаковими. Це можливо за умов, що на кожній ділянці вирази для згинальних моментів міститимуть всі члени, які входили до виразів на попередній ділянці, а додаткові члени, що з'явилися на цій ділянці, зникатимуть на спільній границі з попередньою. Такі умови можна забезпечити, якщо записувати диференціальні рівняння пружної лінії балки, дотримуючись певного алгоритму:

1. Початок координат завжди поміщають у крайньому лівому перерізі на осі балки і в цій системі складають вирази для згинальних моментів на кожній ділянці.
2. Вирази для згинальних моментів завжди отримують з умов рівноваги для лівої частини балки. Тобто ці вирази мають включати навантаження, прикладені до балки зліва від перерізу.

3. Якщо на ліву частину балки діє зосереджений момент M , то в рівнянні його слід представити у вигляді добутку $M(x-a)^0$, де $(x-a)^0=1$. Тут a – абсциса точки прикладання моменту M (див. рис. 11.34).

4. Коли розподілене навантаження не доходить до кінця балки, його слід продовжити, прикладаючи на цій ділянці компенсуючи розподілене навантаження протилежного знаку. Ці додаткові розподілені навантаження на рис. 11.34 б зображені пунктирними лініями.

5. Інтегрують отримані диференціальні рівняння пружної лінії на ділянках балки, не розкриваючи дужок.

Розглянемо частину балки довжиною l , обмежену перерізами D і E (рис. 11.34 б). Помістимо початок координат в точку D і складемо вирази для згинальних моментів на кожній ділянці.

Ділянка I:

$$M(x) = M_0 + Q_0 x.$$

Ділянка II:

$$M(x) = M_0 + Q_0 x + M(x-a)^0.$$

Ділянка III:

$$M(x) = M_0 + Q_0 x + M(x-a)^0 + F(x-b).$$

Ділянка IV:

$$M(x) = M_0 + Q_0 x + M(x-a)^0 + F(x-b) + q \frac{(x-c)^2}{2}.$$

Ділянка V:

$$M(x) = M_0 + Q_0 x + M(x-a)^0 + F(x-b) + q \frac{(x-c)^2}{2} - q \frac{(x-d)^2}{2}.$$

Порівнюючи отримані вирази, бачимо, що вирази для моментів на кожній ділянці можна отримати з виразу на наступній, відкидаючи члени, які містять навантаження, що з'являються на цій наступній ділянці. При цьому вирази для моментів на границях кожної даної і наступної ділянки будуть однаковими. Наприклад, на границі ділянок II і III ($x=b$), отримаємо $M_{II} = M_{III} = M_0 + Q_0 x + M(x-a)^0$.

Складемо диференціальні рівняння пружної лінії на кожній ділянці, починаючи з першої.

Ділянка I:

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \frac{1}{EI} [M_0 + Q_0 x]. \quad (11.42)$$

Інтегруючи отримане рівняння двічі, отримаємо:

$$\theta(x) = \frac{dw(x)}{dx} = \frac{1}{EI} \left[M_0 x + Q_0 \frac{x^2}{2} + C_I \right]. \quad (11.43)$$

$$w(x) = \frac{1}{EI} \left[M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{6} + C_I x + D_I \right]. \quad (11.44)$$

Ділянка II:

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \frac{1}{EI} [M_0 + Q_0 x + M(x-a)^0]. \quad (11.45)$$

$$\theta(x) = \frac{dw(x)}{dx} = \frac{1}{EI} \left[M_0 x + Q_0 \frac{x^2}{2} + M(x-a) + C_{II} \right]. \quad (11.46)$$

$$w(x) = \frac{1}{EI} \left[M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{6} + M \frac{(x-a)^2}{2} + C_{II} x + D_{II} \right]. \quad (11.47)$$

Ділянка III:

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \frac{1}{EI} [M_0 + Q_0 x + M(x-a)^0 + F(x-b)]. \quad (11.48)$$

$$\theta(x) = \frac{dw(x)}{dx} = \frac{1}{EI} \left[M_0 x + Q_0 \frac{x^2}{2} + M(x-a) + F \frac{(x-b)^2}{2} + C_{III} \right]. \quad (11.49)$$

$$w(x) = \frac{1}{EI} \left[M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{6} + M \frac{(x-a)^2}{2} + F \frac{(x-b)^3}{6} + C_{III} x + D_{III} \right]. \quad (11.50)$$

Ділянка IV:

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \frac{1}{EI} \left[M_0 + Q_0 x + M(x-a)^0 + F(x-b) + q \frac{(x-c)^2}{2} \right]. \quad (11.51)$$

$$\theta(x) = \frac{dw(x)}{dx} = \frac{1}{EI} \left[M_0 x + Q_0 \frac{x^2}{2} + M(x-a) + F \frac{(x-b)^2}{2} + q \frac{(x-c)^3}{6} + C_{IV} \right]. \quad (11.52)$$

$$w(x) = \frac{1}{EI} \left[M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{6} + M \frac{(x-a)^2}{2} + F \frac{(x-b)^3}{6} + q \frac{(x-c)^4}{24} + C_{IV} x + D_{IV} \right]. \quad (11.53)$$

Ділянка V:

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \frac{1}{EI} \left[M_0 + Q_0 x + M(x-a)^0 + F(x-b) + q \frac{(x-c)^2}{2} - q \frac{(x-d)^2}{2} \right]. \quad (11.54)$$

$$\theta(x) = \frac{dw(x)}{dx} = \frac{1}{EI} \left[M_0 x + Q_0 \frac{x^2}{2} + M(x-a) + F \frac{(x-b)^2}{2} + q \frac{(x-c)^3}{6} - q \frac{(x-d)^3}{6} + C_V \right]. \quad (11.55)$$

$$w(x) = \frac{1}{EI} \left[M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{6} + M \frac{(x-a)^2}{2} + F \frac{(x-b)^3}{6} + q \frac{(x-c)^4}{24} - q \frac{(x-d)^4}{24} + C_V x + D_V \right]. \quad (11.56)$$

Поклавши умову рівності кутів повороту перерізів і прогинів на границях для сусідніх ділянок, для ділянок IV і V отримаємо, поклавши $x = d$:

$$\begin{aligned} \theta_{IV}|_{x=d} &= \frac{1}{EI} \left[M_0 d + Q_0 \frac{d^2}{2} + M(d-a) + F \frac{(d-b)^2}{2} + q \frac{(d-c)^3}{6} + C_{IV} \right] = \\ &= \theta_V|_{x=d} = \frac{1}{EI} \left[M_0 d + Q_0 \frac{d^2}{2} + M(d-a) + F \frac{(d-b)^2}{2} + q \frac{(d-c)^3}{6} - q \frac{(d-d)^3}{6} + C_V \right]. \end{aligned}$$

Звідси отримаємо

$$C_{IV} = C_V. \quad (11.57)$$

$$w_{IV}|_{x=d} = \frac{1}{EI} \left[M_0 \frac{d^2}{2} + Q_0 \frac{d^3}{6} + M \frac{(d-a)^2}{2} + F \frac{(d-b)^3}{6} + q \frac{(d-c)^4}{24} + C_{IV}d + D_{IV} \right] =$$

$$= w_V|_{x=d} = \frac{1}{EI} \left[M_0 \frac{d^2}{2} + Q_0 \frac{d^3}{6} + M \frac{(d-a)^2}{2} + F \frac{(d-b)^3}{6} + q \frac{(d-c)^4}{24} - \right.$$

$$\left. -q \frac{(d-d)^4}{24} + C_Vd + D_V \right].$$

Звідси, з урахуванням (11.57),

$$D_{IV} = D_V. \quad (11.58)$$

Провівши подібні операції для границь інших ділянок, переконуємось в рівності відповідних довільних сталих інтегрування на всіх ділянках:

$$C_I = C_{II} = C_{III} = C_{IV} = C_V = C. \quad (11.59)$$

$$D_I = D_{II} = D_{III} = D_{IV} = D_V = D. \quad (11.60)$$

Сталі C і D знайдемо з рівнянь (11.43) і (11.44), поклавши $x=0$:

$$\theta|_{x=0} = \theta_0 = \frac{C}{EI}, \quad w|_{x=0} = w_0 = \frac{D}{EI} \quad (11.61)$$

Тобто, сталі інтегрування C і D пропорційні куту повороту та прогину на початку координат.

В загальному випадку рівняння для прогинів і кутів повороту можна записати в такому вигляді:

$$w(x) = w_0 + \theta_0 x + \frac{1}{EI} \left[M_0 \frac{x^2}{2!} + Q_0 \frac{x^3}{3!} + \sum M \frac{(x-a)^2}{2!} + \sum F \frac{(x-b)^3}{3!} + \right.$$

$$\left. + \sum q \frac{(x-c)^4}{4!} - \sum q \frac{(x-d)^4}{4!} \right]. \quad (11.62)$$

$$\theta(x) = \theta_0 + \frac{1}{EI} \left[M_0 \frac{x}{1!} + Q_0 \frac{x^2}{2!} + \sum M \frac{(x-a)}{1!} + \sum F \frac{(x-b)^2}{2!} + \right.$$

$$\left. + \sum q \frac{(x-c)^3}{3!} - \sum q \frac{(x-d)^3}{3!} \right]. \quad (11.63)$$

Рівняння (11.62) називають *універсальним рівнянням пружної лінії*, а рівняння (11.63) – *універсальним рівнянням кутів повороту перерізів*.

Згинальний момент M_0 і поперечну силу Q_0 , які діють в перерізі балки, що збігається з початком координат, називають *статичними початковими параметрами*, а прогин w_0 і кут повороту θ_0 в цьому перерізі – *геометричними початковими параметрами*.

Розглянемо кілька прикладів з визначення переміщень в балках за методом початкових параметрів. Почнемо з балки на двох опорах, навантаженої рівномірно розподіленою силою, що розглядалась в прикладі 11.9, і порівняємо отримані результати.

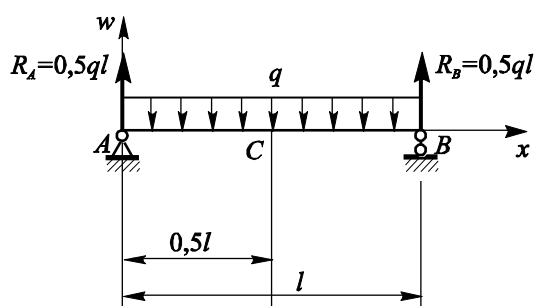


Рис. 11.35. До прикладу 11.10

Приклад 11.10. Для двоопорної шарнірно опертої балки (рис. 11. 35) визначити кути повороту опорних перерізів А і В та знайти прогин посередині між опорами.

Запишемо універсальне рівняння пружної лінії для даної балки:

$$w(x) = w_0 + \theta_0 x + \frac{1}{EI} \left[R_A \frac{x^3}{3!} - q \frac{x^4}{4!} \right].$$

Тут $w_0 = 0$, оскільки початок координат збігається з опорою. Початковий кут повороту θ_0 знайдемо з умови, що прогин на опорі В теж дорівнює нулю:

$$w|_{x=l} = \theta_0 l + \frac{1}{EI} \left[\frac{ql}{2} \frac{l^3}{3!} - \frac{ql^4}{4!} \right] = 0.$$

Звідси $\theta_0 = -\frac{ql^3}{24EI}$. Універсальне рівняння пружної лінії набуває вигляду:

$$w(x) = \frac{1}{EI} \left[-\frac{ql^3}{24} x + \frac{qlx^3}{12} - \frac{qx^4}{24} \right].$$

$$\text{Прогин посередині балки } w_C|_{x=0,5l} = \frac{1}{EI} \left[-\frac{ql^3}{24} \frac{l}{2} + \frac{ql}{12} \frac{l^3}{8} - \frac{q}{24} \frac{l^4}{16} \right] = -\frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}.$$

Обчислимо величини кутів повороту опорних перерізів

Кут повороту перерізу А балки є знайденим уже геометричним початковим параметром: $\theta_A = \theta_0 = -\frac{ql^3}{24EI}$.

Кут повороту перерізу В знайдемо за допомогою універсального рівняння кутів повороту перерізів балки:

$$\theta(x) = \theta_0 + \frac{1}{EI} \left[R_A \frac{x^2}{2!} - q \frac{x^3}{3!} \right].$$

$$\text{Отже } \theta_B|_{x=l} = -\frac{ql^3}{24EI} + \frac{1}{EI} \left[\frac{ql}{2} \frac{l^2}{2} - q \frac{l^3}{6} \right] = \frac{ql^3}{24EI}.$$

Як бачимо, отримані значення переміщень w_C , θ_A , θ_B повністю збігаються з результатами обчислень, проведеними з використанням основного диференціального рівняння пружної лінії (приклад 11.9).

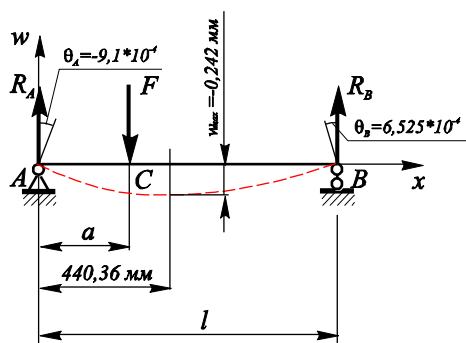


Рис. 11.36. До прикладу 11.11

Приклад 11.11. Для балки, зображеної на рис. 11. 36, визначити кути повороту перерізів на опорах А і В та знайти величину найбільшого прогину. Прийняти $F = 20$ кН, $l = 1$ м, $a = 0,25$ м. Жорсткість перерізу балки $EI = 12 \cdot 10^{11}$ Н·мм²

Знайдемо опорні реакції.

$$\sum M_A = -F \cdot 0,25 + R_B \cdot 1 = 0;$$

$$R_B = 20 \cdot 0,25 = 5 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = F \cdot 0,75 - R_A \cdot 1 = 0;$$

$$R_A = 20 \cdot 0,75 = 15 \text{ кН}.$$

$$\text{Перевірка: } \sum Y = R_A - F + R_B = 15 - 20 + 5 = 0.$$

Універсальне рівняння пружної лінії:

$$w(x) = w_0 + \theta_0 x + \frac{1}{EI} \left[R_A \frac{x^3}{3!} - F \frac{(x-a)^3}{3!} \right].$$

Універсальне рівняння кутів повороту перерізів:

$$\theta(x) = \theta_0 + \frac{1}{EI} \left[R_A \frac{x^2}{2!} - F \frac{(x-a)^2}{2!} \right].$$

Початкові геометричні параметри:

$$- w_0 = w_A = 0;$$

$$- \theta_0 \text{ знайдемо з умови, що при } x=l$$

$$w_B = \theta_0 l + \frac{1}{EI} \left[R_A \frac{l^3}{3!} - F \frac{(l-a)^3}{3!} \right] = \theta_0 \cdot 10^3 + \frac{10^{12}}{12 \cdot 10^{11}} \left[\frac{15}{6} - \frac{20 \cdot 0,422}{6} \right] = 0.$$

$$\text{Звідси } \theta_0 = -9,1 \cdot 10^{-4}.$$

Отже кути повороту перерізів на опорах:

$$- \theta_A = \theta_0 = -9,1 \cdot 10^{-4};$$

$$- \theta_B = \theta_0 + \frac{1}{EI} \left[R_A \frac{l^2}{2!} - F \frac{(l-a)^2}{2!} \right] = -9,1 \cdot 10^{-4} + \frac{10^9}{12 \cdot 10^{11}} \left[\frac{15}{2} - \frac{20 \cdot 0,5625}{2} \right] = 6,525 \cdot 10^{-4}.$$

Найбільший прогин, згідно з диференціальною залежністю між переміщеннями при згинанні $\theta(x) = \frac{dw(x)}{dx}$, буде там, де кут повороту перерізу дорівнюватиме нулю. Знайдемо абсцису екстремуму прогину з умови:

$$\theta(x) = \theta_0 + \frac{1}{EI} \left[R_A \frac{x^2}{2!} - F \frac{(x-a)^2}{2!} \right] = 0;$$

$$-9,1 \cdot 10^{-4} + \frac{10^3}{12 \cdot 10^{11}} \left[15 \frac{x^2}{2} - 20 \frac{(x-250)^2}{2} \right] = 0;$$

$$x^2 - 1000x + 68680 = 0$$

Звідси $x = 440,36 \text{ мм}$.

$$w_{\max} = -9,1 \cdot 10^{-4} \cdot 440,36 + \frac{10^3}{12 \cdot 10^{11}} \left[\frac{15 \cdot 440,36^3}{6} - \frac{20 \cdot 190,36^3}{6} \right] = -0,242 \text{ мм}$$

Приклад 11.12. Знайти прогин і кут повороту перерізу в точці С на осі консольної жорстко защемленої балки в двох варіантах її розташування відносно початку вибраної системи координат (рис. 11. 37 і 11.38).

Варіант 1.

Запишемо універсальне рівняння пружної лінії та кутів повороту перерізів для даної балки:

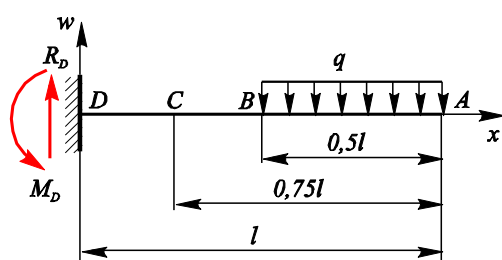


Рис. 11.37. До прикладу 11.12, варіант 1

$$w(x) = w_0 + \theta_0 x + \frac{1}{EI} \left[-M_D \frac{x^2}{2!} + R_D \frac{x^3}{3!} - q \frac{(x-0,5l)^4}{4!} \right];$$

$$\theta(x) = \theta_0 + \frac{1}{EI} \left[-M_D \frac{x}{1!} + R_D \frac{x^2}{2!} - q \frac{(x-0,5l)^3}{3!} \right].$$

Геометричні початкові параметри $w_0 = 0$ і $\theta_0 = 0$, оскільки початок координат розміщений в жорсткому защемленні балки. Статичні початкові параметри визначимо з умов рівноваги: $R_D = \frac{1}{2}ql$, $M_D = \frac{3}{8}ql^2$. Тоді прогин і кут повороту перерізу в точці С відповідно дорівнюватимуть:

$$w_C = \frac{1}{EI} \left[-\frac{3}{8} \frac{ql^2 \left(\frac{1}{4}l \right)^2}{2} + \frac{ql \left(\frac{1}{4}l \right)^3}{2 \cdot 6} \right] = -\frac{ql^4}{96EI};$$

$$\theta_C = \frac{1}{EI} \left[-\frac{3}{8} \frac{ql^2 \left(\frac{1}{4}l \right)}{1} + \frac{ql \left(\frac{1}{4}l \right)^2}{2 \cdot 2} \right] = -\frac{5ql^3}{64EI}$$

Варіант 2.

Запишемо універсальне рівняння пружної лінії та кутів повороту перерізів для даної балки з новим розташуванням відносно початку координат:

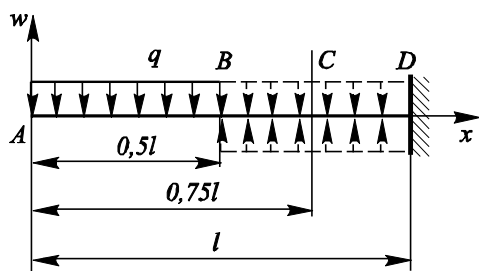


Рис. 11.38. До прикладу 11.12, варіант 2

$$w(x) = w_0 + \theta_0 x + \frac{1}{EI} \left[-q \frac{x^4}{4!} + q \frac{\left(x - \frac{l}{2}\right)^4}{4!} \right];$$

$$\theta(x) = \theta_0 + \frac{1}{EI} \left[-q \frac{x^3}{3!} + q \frac{\left(x - \frac{l}{2}\right)^3}{3!} \right].$$

Початкові геометричні параметри знайдемо з граничних умов на опорі D, будь-які переміщення відсутні:

$$\theta_D|_{x=l} = \theta_0 + \frac{1}{EI} \left[-q \frac{(l)^3}{6} + q \frac{\left(l - \frac{l}{2}\right)^3}{6} \right] = 0.$$

Звідси $\theta_0 = \theta_A = \frac{7ql^3}{48EI}$.

$$w_D|_{x=l} = w_0 + \frac{7ql^3}{48EI} l + \frac{1}{EI} \left[-q \frac{l^4}{24} + q \frac{\left(l - \frac{l}{2}\right)^4}{24} \right] = 0.$$

Звідси $w_0 = w_A = -\frac{41ql^4}{384EI}$.

Прогин і кут повороту перерізу в точці C на осі балки:

$$w_C = -\frac{41ql^4}{384EI} + \frac{7ql^3}{48EI} \frac{3l}{4} + \frac{1}{EI} \left[-q \frac{\left(\frac{3l}{4}\right)^4}{24} + q \frac{\left(\frac{3l}{4} - \frac{l}{2}\right)^4}{24} \right] = -\frac{ql^4}{96EI}.$$

$$\theta_C = \frac{7ql^3}{48EI} + \frac{1}{EI} \left[-q \frac{\left(\frac{3l}{4}\right)^3}{6} + q \frac{\left(\frac{3l}{4} - \frac{l}{2}\right)^3}{6} \right] = \frac{5ql^3}{64EI}.$$

Зауваження. Протилежні знаки кутів повороту перерізу C , отриманих за двома варіантами розв'язання задачі, пов'язані з різною орієнтацією балок відносно початку координат: за першим варіантом цей поворот відбувається за годинниковою стрілкою, тобто кут повороту від'ємний, а за другим – проти годинникової стрілки, коли кут повороту вважається додатним.

11.6.4. Умови жорсткості стержнів при згинанні.

Ці умови включають обмеження кутів повороту перерізів та прогинів стержня їх допустимими значеннями.

Абсолютне значення максимального прогину балки $|w_{\max}|$ позначають через f . Тоді умови жорсткості при згинанні набувають виду:

$$\theta \leq [\theta], \quad (11.64)$$

$$f \leq [f], \quad (11.65)$$

Тут $[\theta]$ – допустимий кут повороту перерізу; $[f]$ – допустима стріла прогину.

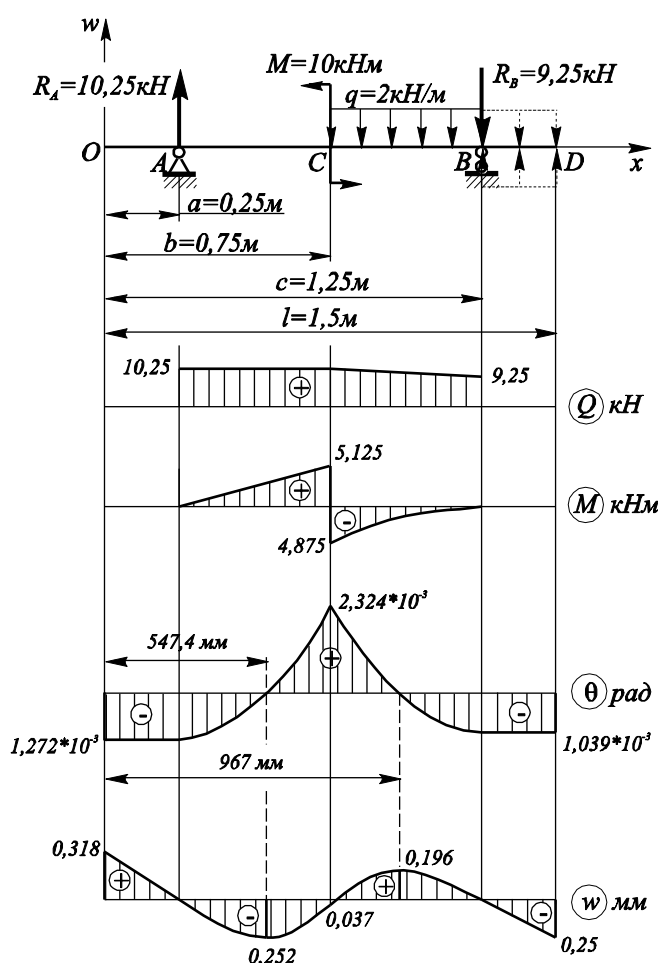


Рис. 11.39. До прикладу 11.13

Приклад 11.13. Для двоопорної шарнірно опертої балки, зображеної на рис. 11.39, побудувати епюри внутрішніх сил, дібрати квадратний переріз зі стороною a , побудувати епюри кутів повороту перерізів та прогинів, а також перевірити балку на жорсткість за кутами повороту перерізів на опорах A і B та за стрілою прогину. Прийняти $[\sigma] = 100\text{ МПа}$, $E = 2 \cdot 10^5\text{ МПа}$, $[f] = 8\text{ мм}$, $[\theta] = 0.01$

Визначимо опорні реакції.

$$\sum M_A = M - q \cdot 0.5 \cdot 0.75 - R_B \cdot 1 = 0;$$

$$\sum M_B = M + q \cdot 0.5 \cdot 0.25 - R_A \cdot 1 = 0$$

$$R_A = 10.25\text{ кН}; R_B = 9.25\text{ кН}$$

Перевірка:

$$\sum Y = R_A - q \cdot 0.5 - R_B = 10.25 - 1 - 9.25 = 0.$$

Епюри зусиль Q і M представлені на рис. 11.39.

З основної умови міцності визначимо розміри поперечного перерізу балки (за умовою задачі – квадратного):

$$W = \frac{a^3}{6} \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{5,125 \cdot 10^6}{100} = 51250 \text{ мм}^3.$$

Звідси $a \geq 67,497 \text{ мм}$. Округляючи до ближчого цілого числа, приймаємо $a = 68 \text{ мм}$.

Головний центральний момент інерції перерізу $I = \frac{a^4}{12} = \frac{68^4}{12} = 1781781,33 \text{ мм}^4$. Тоді

жорсткість перерізу $EI = 2 \cdot 10^5 \cdot 1781781,33 = 356,35 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{мм}^2$

Далі проведемо необхідні розрахунки на жорсткість, включно з побудовою епюр переміщень.

Помістивши початок координат в точці O , запишемо універсальні рівняння кутів поворотів перерізів і прогинів балки:

$$\theta(x) = \theta_0 + \frac{1}{EI} \left[R_A \frac{(x-a)^2}{2!} - M \frac{(x-b)^2}{1!} - q \frac{(x-b)^3}{3!} + q \frac{(x-c)^3}{3!} - R_B \frac{(x-c)^2}{2!} \right];$$

$$w(x) = w_0 + \theta_0 x + \frac{1}{EI} \left[R_A \frac{(x-a)^3}{3!} - M \frac{(x-b)^2}{2!} - q \frac{(x-b)^4}{4!} + q \frac{(x-c)^4}{4!} - R_B \frac{(x-c)^3}{3!} \right];$$

В опорних перерізах прогини відсутні. Тоді

$$w_A|_{x=a} = w_0 + \theta_0 a = 0;$$

$$w_B|_{x=c} = w_0 + \theta_0 c + \frac{1}{EI} \left[R_A \frac{(c-a)^3}{3!} - M \frac{(c-b)^2}{2!} - q \frac{(c-b)^4}{4!} \right] = 0;$$

Після підстановки числових значень отримаємо:

$$w_0 + \theta_0 \cdot 250 = 0;$$

$$w_0 + \theta_0 \cdot 1250 + \frac{1}{EI} \left[10,25 \cdot 10^3 \frac{(10^3)^3}{6} - 10^7 \frac{2,5 \cdot 10^5}{2} - 2 \frac{6,25 \cdot 10^{10}}{24} \right] =$$

$$= w_0 + \theta_0 \cdot 1250 + \frac{10^{12}}{EI} \left[\frac{20,5 - 15 - 0,0625}{12} \right] = w_0 + \theta_0 \cdot 1250 + \frac{10^{12}}{EI} 0,453 = 0$$

Віднімаючи від другого рівняння перше отримаємо $\theta_0 = -\frac{0,453 \cdot 10^9}{EI} = -1,272 \cdot 10^{-3}$. Тоді

$$w_0 = -250\theta_0 = 250 \cdot 1,272 \cdot 10^{-3} = 0,318 \text{ мм}.$$

Знайшовши початкові параметри, будуємо епюри переміщень.

Зауваження. Згідно з диференціальним рівнянням пружної лінії стержня і диференціальною залежністю між кутом повороту перерізу та прогином відзначимо, що по відношенню до епюри прогинів як графіка функції епюра кутів повороту є графіком похідної, а епюра згинальних моментів – графіком другої похідної. На цій підставі епюра згинальних моментів по відношенню до епюри кутів повороту як графіка функції є графіком похідної, а епюра поперечних сил – графіком другої похідної. Ці залежності дозволяють спростити процес побудови епюр переміщень та здійснити перевірку правильності виконаних побудов.

Визначимо кути повороту перерізів на опорах A і B , в точці D , а також в точці C прикладання зосередженого моменту.

$$\theta_A|_{x=a} = \theta_0 = -1,272 \cdot 10^{-3};$$

$$\begin{aligned} \theta_C|_{x=b} &= -\frac{0,453 \cdot 10^9}{EI} + \frac{1}{EI} R_A \frac{(b-a)^2}{2!} = -\frac{0,453 \cdot 10^9}{EI} + \frac{1}{EI} 10,25 \cdot 10^3 \frac{25 \cdot 10^4}{2} = \\ &= -1,272 \cdot 10^{-3} + 3,595 \cdot 10^{-3} = 2,324 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_B|_{x=c} &= \theta_0 + \frac{1}{EI} \left[R_A \frac{(c-a)^2}{2!} - M \frac{(c-b)}{1!} - q \frac{(c-b)^3}{3!} \right] = -\frac{0,453 \cdot 10^9}{EI} + \\ &+ \frac{10^9}{EI} \left[10,25 \frac{1}{2} - 10 \cdot 0,5 - 2 \frac{0,125}{6} \right] = -\frac{0,37 \cdot 10^9}{356,35 \cdot 10^9} = -1,039 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_D|_{x=l} &= \theta_0 + \frac{1}{EI} \left[R_A \frac{(l-a)^2}{2!} - M \frac{(l-b)}{1!} - q \frac{(l-b)^3}{3!} - R_B \frac{(l-c)^2}{2!} + q \frac{(l-c)^3}{3!} \right] = \\ &= -\frac{0,453 \cdot 10^9}{EI} + \frac{10^9}{EI} \left[10,25 \frac{1,5625}{2} - 10 \cdot 0,75 - 2 \frac{0,421875}{6} - \right. \\ &\left. - 9,25 \frac{0,0625}{2} + 2 \frac{0,015625}{6} \right] = -\frac{0,453 \cdot 10^9}{EI} + \frac{0,083 \cdot 10^9}{EI} = -\frac{0,370 \cdot 10^9}{356,35 \cdot 10^9} = -1,039 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Оскільки кути повороту перерізів по довжині балки змінюють знак, знайдемо абсциси перерізів, кути повороту яких дорівнюють нулю. Згідно з розрахунками ці перерізи знаходяться на ділянках AC і CB .

Ділянка AC :

$$\theta(x) = \theta_0 + \frac{1}{EI} \left[R_A \frac{(x-a)^2}{2!} \right] = -\frac{0,453 \cdot 10^9}{EI} + \frac{1}{EI} 10,25 \cdot 10^3 \frac{(x-250)^2}{2} = 0.$$

Звідси $x = 547,4$ мм.

Ділянка CB :

Положення абсциси x , за якої $\theta = 0$, можна знайти з задовільною точністю, не проводячи громіздких розрахунків для отримання та розв'язання кубічного рівняння відносно x , що матиме місце для цієї ділянки, а безпосередньо з епюри θ , провівши її уточнену побудову з використанням універсального рівняння кутів поворотів перерізів. Дані розрахунків кутів повороту на ділянці CB зведені до таблиці.

Табл. 11.1 Результати розрахунків кутів повороту перерізів на ділянці CB

x , м	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2
θ , рад.	$1,675 \cdot 10^{-3}$	$0,592 \cdot 10^{-3}$	$-0,210 \cdot 10^{-3}$	$-0,741 \cdot 10^{-3}$	$-1,005 \cdot 10^{-3}$

З урахуванням масштабу знаходимо $x = 967$ мм

Визначимо прогини балки в точках O , C , D , а також в точках, де прогини екстремальні. Прогин в точці O – це знайдений початковий прогин $w_0 = 0,318$ мм.

$$\begin{aligned}
 w_C|_{x=b} &= w_0 + \theta_0 b + \frac{1}{EI} R_A \frac{(b-a)^3}{3!} = 0,318 - 1,272 \cdot 10^{-3} \cdot 750 + \\
 &+ \frac{1}{3563562,67 \cdot 10^5} 10,25 \cdot 10^3 \frac{125 \cdot 10^6}{6} = -0,636 + 0,599 = -0,037 \text{ мм} \\
 w_D|_{x=l} &= w_0 + \theta_0 l + \frac{1}{EI} \left[R_A \frac{(l-a)^3}{3!} - M \frac{(l-b)^2}{2!} - q \frac{(l-b)^4}{4!} + q \frac{(l-c)^4}{4!} - R_B \frac{(l-c)^3}{3!} \right] = \\
 &= 0,318 - 1,272 \cdot 10^{-3} \cdot 1500 + \\
 &+ \frac{10^{12}}{3563562,67 \cdot 10^5} \left[10,25 \frac{1,25^3}{6} - 10 \frac{0,75^2}{2} - 2 \frac{0,75^4}{24} + 2 \frac{0,25^4}{24} - 9,25 \frac{0,25^3}{6} \right] = \\
 &= -1,59 + \frac{10^7}{3563562,67} [3,337 - 2,812 - 0,026 + 0,003 - 0,024] = -1,59 + 1,34 = -0,25 \text{ мм} \\
 w_{\max 1}|_{x=547,4 \text{ мм}} &= w_0 + \theta_0 \cdot 547,4 + \frac{1}{EI} R_A \frac{(547,4-a)^3}{3!} = 0,318 - 1,272 \cdot 10^{-3} \cdot 547,4 + \\
 &+ \frac{1}{3563562,67 \cdot 10^5} 10,25 \cdot 10^3 \frac{26304066,424}{6} = 0,318 - 0,696 + 0,126 = -0,252 \text{ мм} \\
 w_{\max 2}|_{x=967 \text{ мм}} &= w_0 + \theta_0 \cdot 967 + \frac{1}{EI} \left[R_A \frac{(967-a)^3}{3!} - M \frac{(967-b)^2}{2!} - q \frac{(967-b)^4}{4!} \right] = \\
 &= 0,318 - 1,272 \cdot 10^{-3} \cdot 967 + \frac{10^{12}}{3563562,67 \cdot 10^5} \left[10,25 \frac{0,717^3}{6} - 10 \frac{0,217^2}{2} - 2 \frac{0,217^4}{24} \right] = \\
 &= -0,912 + 1,108 = 0,196 \text{ мм}
 \end{aligned}$$

Перевіряємо балку на жорсткість:

- кути повороту на опорах $|\theta_A| = 1,272 \cdot 10^{-3} < [\theta] = 0,01$, $|\theta_B| = 1,039 \cdot 10^{-3} < [\theta] = 0,01$;
- стріла прогину $f = |w_{\max 1}| = 0,318 \text{ мм} < [f] = 8 \text{ мм}$.

Отже, умови жорсткості для балки виконуються.

11.6.5. Потенціальна енергія деформації стержня при згинанні

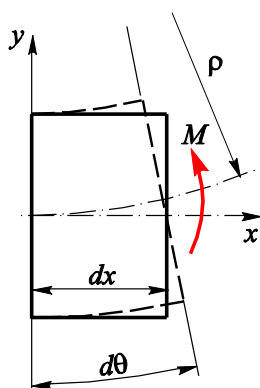


Рис. 11.40. Схема переміщень в елементі стержня при чистому згинанні

По аналогії з іншими видами навантаження при визначенні потенціальної енергії деформації при згинанні вважають, що робота згинального моменту на кутах повороту перерізів стержня повністю переходить в потенціальну енергію його деформації. Для елемента стержня довжиною dx (рис. 11.40) маємо:

$$dU = \frac{Md\theta}{2} \quad (11.66)$$

Для нейтрального шару, що проходить через вісь x , маємо умову $dx = \rho d\theta$.
Звідси

$$d\theta = \frac{dx}{\rho} \quad (11.67)$$

Тоді

$$dU = \frac{Mdx}{2\rho}. \quad (11.68)$$

Оскільки кривина нейтрального шару $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$, знаходимо

$$dU = \frac{M^2 dx}{2EI}, \quad (11.69)$$

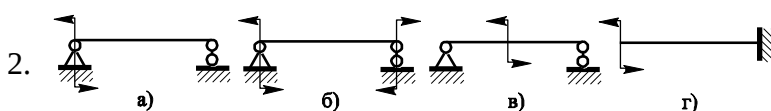
а для всього стержня

$$U = \int_l \frac{M^2 dx}{2EI}. \quad (11.70)$$

При поперечному згинанні діють також поперечні сили Q , які можуть виконувати роботу на відносних зсувах поперечних перерізів, в яких вони діють. Проте у порівнянні з роботою згинальних моментів на кутах повороту перерізів, ця робота мала і при обчисленні потенціальної енергії деформації стержня при поперечному згинанні впливом поперечних сил як правило нехтують.

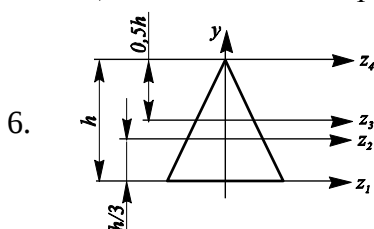
Питання для самоперевірки знань

1. Коли має місце чистий згин стержня?



Для яких з наведених схем навантаження виконуються умови чистого згинання стержня: а, б, в, г?

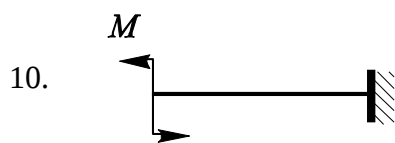
3. Запишіть інтегральне рівняння рівноваги стержня для умов чистого згинання.
4. Форму якої кривої набуває вісь стержня при чистому згинанні?
5. Що називається нейтральним шаром стержня при згині?



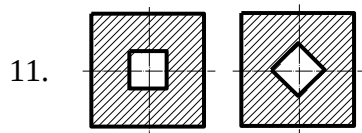
Яка із вказаних осей z буде нейтральною лінією трикутного перерізу стержня при згинанні?

7. Який вид напруженого стану реалізується в стержні при чистому згинанні?

8. Запишіть формулу Нав'є для визначення нормальних напружень в стержні при згинанні.
9. Де знаходиться небезпечна точка перерізу стержня при чистому згинанні?

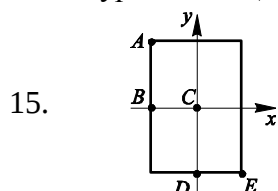


Круглий сталевий стержень діаметром $d = 20$ мм згинається моментом $M = 100$ Н·м. Перевірте стержень на міцність, якщо границя текучості матеріалу $\sigma_T = 240$ МПа.

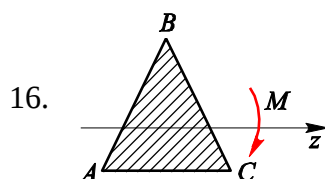


Стержень має квадратний переріз з квадратним отвором і перебуває в умовах чистого згинання. Чи відрізняється вантажопідйомність стержня для двох випадків розташування отвору відносно головних осей інерції перерізу. Відповідь обґрунтувати.

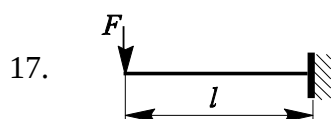
12. Які зусилля виникають в перерізі стержня за плоского поперечного згинання?
13. Запишіть формулу Журавського для визначення дотичних напружень в стержні при згинанні.
14. Сформулюйте основні припущення щодо характеру розподілу дотичних напружень в перерізі стержня при поперечному згинанні, сформульовані Журавським. Для яких перерізів ці припущення справедливі?



В яких з указаних точок перерізу стержня має місце чистий зсув при поперечному згинанні?

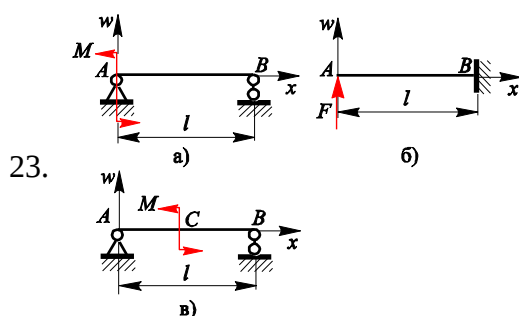


Чому дорівнюють дотичні напруження в точках А, В і С трикутного перерізу стержня при поперечному згинанні?



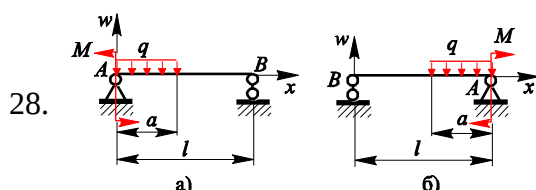
За основною умовою міцності дібрати двотавровий переріз стержня, якщо $F = 50$ кН, $l = 1$ м. Матеріал стержня – сталь 20.

18. Чому при згинанні двотавровий профіль є більш раціональним у порівнянні з рівномічним з ним квадратним перерізом.
19. Що називають центром згинання тонкостінного профілю? На прикладі швелера покажіть, де він розташований.
20. Які переміщення визначають при розрахунках стержнів на жорсткість при згинанні. Який диференціальний зв'язок між цими переміщеннями.
21. Сформулюйте правило знаків для переміщень в стержнях при згинанні.
22. Запишіть основне диференціальне рівняння пружної лінії стержня.

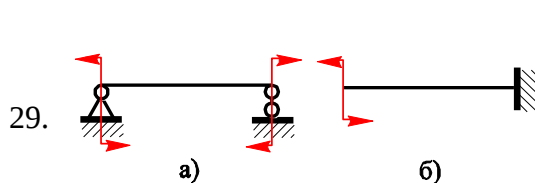


Скільки сталих інтегрування основного диференціального рівняння пружної лінії стержня підлягають визначенню для балок, зображених на рисунку.

24. Запишіть граничні умови для визначення сталих інтегрування основного диференціального рівняння пружної лінії стержня для балок, схеми яких наведені у п. 23.
25. Перелічіть початкові геометричні та статичні параметри однойменного методу визначення переміщень при згинанні.
26. Які початкові параметри відомі, а які підлягають визначенню для балок, представлених в п. 23?
27. Запишіть універсальні рівняння пружної лінії та кутів повороту перерізів в загальному вигляді.



Запишіть універсальні рівняння прогинів для балки у двох варіантах розташування її відносно початку координат.



Для заданих балок вкажіть перерізи, переміщення яких є стрілами прогинів. Вкажіть також перерізи, де кути поворотів будуть максимальними. Запишіть в загальному вигляді умови жорсткості для зазначених перерізів.

30. Обчисліть величину потенціальної енергії деформації стержнів, розглянутих в п. 10, а також в п. 17 після встановлення необхідного номера двотавра.