

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**

для виконання домашніх контрольних і курсових робіт  
з дисципліни «Опір матеріалів» для студентів заочної форми навчання  
напряму підготовки 131 «Прикладна механіка». Частина 1.

*Затверджено Методичною радою  
Механіко-машинобудівного інституту НТУУ «КПІ»*

Київ – 2016

Методичні вказівки для виконання домашніх контрольних і курсових робіт з дисципліни «Опір матеріалів» для студентів заочної форми навчання напряму підготовки 131 «Прикладна механіка». Частина 1: / Укладачі Заховайко О.П., Бабенко А.Є., Шидловський М.С., Бабак А.М. – К.: Електронне видання, 2016. – 49 с.

Затверджено Методичною радою Механіко-машинобудівного інституту НТУУ «КПІ» ,  
протокол №     від     . 2016 р.

Укладачі: *Заховайко Олександр Панасович*, кандидат техн. наук, доц.,  
*Бабенко Андрій Єлисейович*, доктор техн. наук, проф.,  
*Шидловський Микола Сергійович*, кандидат техн. наук, ст. наук. сп.,  
*Бабак Антон Миколайович*, асистент

Рецензент: *Боронко Олег Олександрович*, доктор техн. наук, проф.

Відповідальний редактор: *Бобир Микола Іванович*, доктор техн. наук, проф.

## ЗМІСТ

|                                                           |    |
|-----------------------------------------------------------|----|
| Вступ .....                                               | 5  |
| Вказівки до вибору варіанту та до оформлення роботи ..... | 5  |
| I. ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ .....     | 6  |
| Питання для самоперевірки знань .....                     | 6  |
| Задача 1 .....                                            | 6  |
| План розв'язування задачі .....                           | 9  |
| Приклад розв'язування задачі .....                        | 9  |
| Задача 2 .....                                            | 12 |
| План розв'язування задачі .....                           | 14 |
| Приклад розв'язування задачі .....                        | 14 |
| II. РОЗТЯГ І СТИСК СТЕРЖНІВ .....                         | 17 |
| Питання для самоперевірки знань .....                     | 17 |
| Задача 3 .....                                            | 17 |
| План розв'язування задачі .....                           | 18 |
| Приклад розв'язування задачі .....                        | 18 |
| Задача 4 .....                                            | 20 |
| План розв'язування задачі .....                           | 22 |
| Приклад розв'язування задачі .....                        | 22 |
| III. ТЕОРІЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ТІЛА В ТОЧЦІ .. | 26 |
| Питання для самоперевірки знань .....                     | 26 |
| Задача 5 .....                                            | 26 |
| План розв'язування задачі .....                           | 28 |
| Приклад розв'язування задачі .....                        | 28 |
| III. КРУЧЕННЯ .....                                       | 31 |
| Питання для самоперевірки знань .....                     | 31 |
| Задача 6 .....                                            | 31 |
| План розв'язування задачі .....                           | 33 |
| Приклад розв'язування задачі .....                        | 33 |

|                                         |    |
|-----------------------------------------|----|
| II. ЗГИН ПРЯМИХ СТЕРЖНІВ .....          | 36 |
| Питання для самоперевірки знань .....   | 36 |
| Задача 7 .....                          | 36 |
| План розв'язування задачі .....         | 38 |
| Приклад розв'язування задачі .....      | 38 |
| Задача 8 .....                          | 42 |
| План розв'язування задачі .....         | 44 |
| Приклад розв'язування задачі .....      | 44 |
| Перелік рекомендованої літератури ..... | 49 |

## **ВСТУП**

Методичні вказівки містять варіанти завдань для виконання домашніх контрольних і курсових робіт з дисципліни «Опір матеріалів» для студентів заочної форми навчання напрямів підготовки 131 «Прикладна механіка».

Згідно з робочою навчальною програмою з дисципліни «Опір матеріалів» для вказаного напрямку підготовки передбачається виконання домашніх контрольних і курсових робіт, які включають типові задачі з ключових розділів програм кредитних модулів. Частина 1 методичних вказівок містить варіанти завдань, що стосуються розрахунків стержнів і стержневих систем при найпростіших видах навантажень, які, крім умов задач, містять плани їх розв'язання та питання для самоперевірки знань теоретичних положень з розділів, за якими виконуються завдання.

Досвід показує, що під час самостійного виконання домашніх контрольних і курсових робіт у студентів виникають труднощі принципового характеру, пов'язані з необхідністю застосування теоретичних знань до розв'язання конкретних практичних інженерних задач. Ця проблема особливо суттєва для студентів заочної форми навчання. Тому дані методичні вказівки містять також приклади розв'язання задач та їх оформлення, що має сприяти успішному виконанню студентами навчальної програми з опору матеріалів.

## **ВКАЗІВКИ ДО ВИБОРУ ВАРІАНТУ ТА ДО ОФОРМЛЕННЯ РОБОТИ**

Кількість завдань та їх об'єм залежить від програми для даного напрямку підготовки. Завдання видає викладач на установчих лекціях на початку кожного семестру.

Варіант завдання складається з двох цифр. Як правило, перша цифра відповідає номеру розрахункової схеми до задачі, а друга – номеру рядка в таблиці, в якій приведені необхідні числові значення. Варіант для кожного студента призначає викладач.

Перед розв'язанням задачі слід привести її розрахункову схему до остаточного вигляду у відповідності до числових даних. Так, якщо навантаження в таблиці задане з від'ємним знаком, то на схемі потрібно змінити її напрямок на протилежний і в подальшому знак «-» не враховувати. Якщо в таблиці якесь із заданих навантажень дорівнює нулю, на схемі це

навантаження має бути відсутнім, не дивлячись на те, що на вихідній схемі воно вказане. Якщо одне з навантажень на вихідній схемі відсутнє, то його слід вважати рівним нулю, навіть якщо в таблиці дане якесь його значення.

Оформляти виконане завдання слід на окремих аркушах паперу формату А4. Розв'язки мають супроводжуватися короткими коментарями, як це буде показано далі в прикладах розв'язання задач. Текст не повинен містити граматичних помилок. Всі розрахунки за формулами мають складатися з власне формули, далі підставляються числові значення з узгодженими розмірностями (які при цьому не вказуються) замість кожного члена формули, а вже потім наводиться результат обчислень та розмірність обчисленої величини. Рисунки слід виконувати в масштабі у відповідності до вимог ЄСКД, вказавши всі необхідні розміри, які використовуються в розрахунках, або які були отримані в ході розв'язання задачі.

Домашні контрольні роботи після їх виконання мають бути зареєстровані в деканаті та здані для перевірки викладачеві і подальшого захисту вчасно у відповідності до встановлених термінів.

## I. ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

### Питання для самоперевірки знань.

1. Які геометричні характеристики плоских перерізів розглядаються в опорі матеріалів?
2. Як знайти положення центру ваги складної фігури?
3. Чому дорівнює сума осьових моментів інерції відносно двох взаємно перпендикулярних осей?
4. Які осі фігури називаються головними?
5. Для яких перерізів положення головних центральних осей інерції можна знайти без обчислень?
6. Як знайти момент інерції фігури відносно осі, паралельної до центральної?
7. Який з двох моментів інерції квадратного перерізу більший: відносно центральної осі, паралельної до сторони квадрата, чи відносно осі, що збігається з діагоналлю?
8. Відносно яких центральних осей інерції перерізу моменти інерції мають екстремальні значення?

### ЗАДАЧА 1

Для вказаного на рис. 1.1 перерізу визначити головні центральні моменти та радіуси інерції. Числові дані наведені у табл. 1.1

Таблиця 1.1. Варіанти завдань для задачі 1

| Варіант | $d$ , мм | $h$ , мм | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ |
|---------|----------|----------|----------|---------|----------|
| 0       | 200      | 120      | 0,90     | 0,75    | 0,40     |
| 1       | 220      | 160      | 0,82     | 0,80    | 0,42     |
| 2       | 240      | 180      | 0,85     | 0,65    | 0,30     |
| 3       | 260      | 200      | 0,86     | 0,60    | 0,25     |
| 4       | 280      | 210      | 0,80     | 0,70    | 0,35     |
| 5       | 300      | 220      | 0,75     | 0,83    | 0,36     |
| 6       | 320      | 240      | 0,78     | 0,84    | 0,32     |
| 7       | 340      | 250      | 0,70     | 0,78    | 0,41     |
| 8       | 360      | 270      | 0,68     | 0,68    | 0,34     |
| 9       | 400      | 300      | 0,65     | 0,72    | 0,38     |

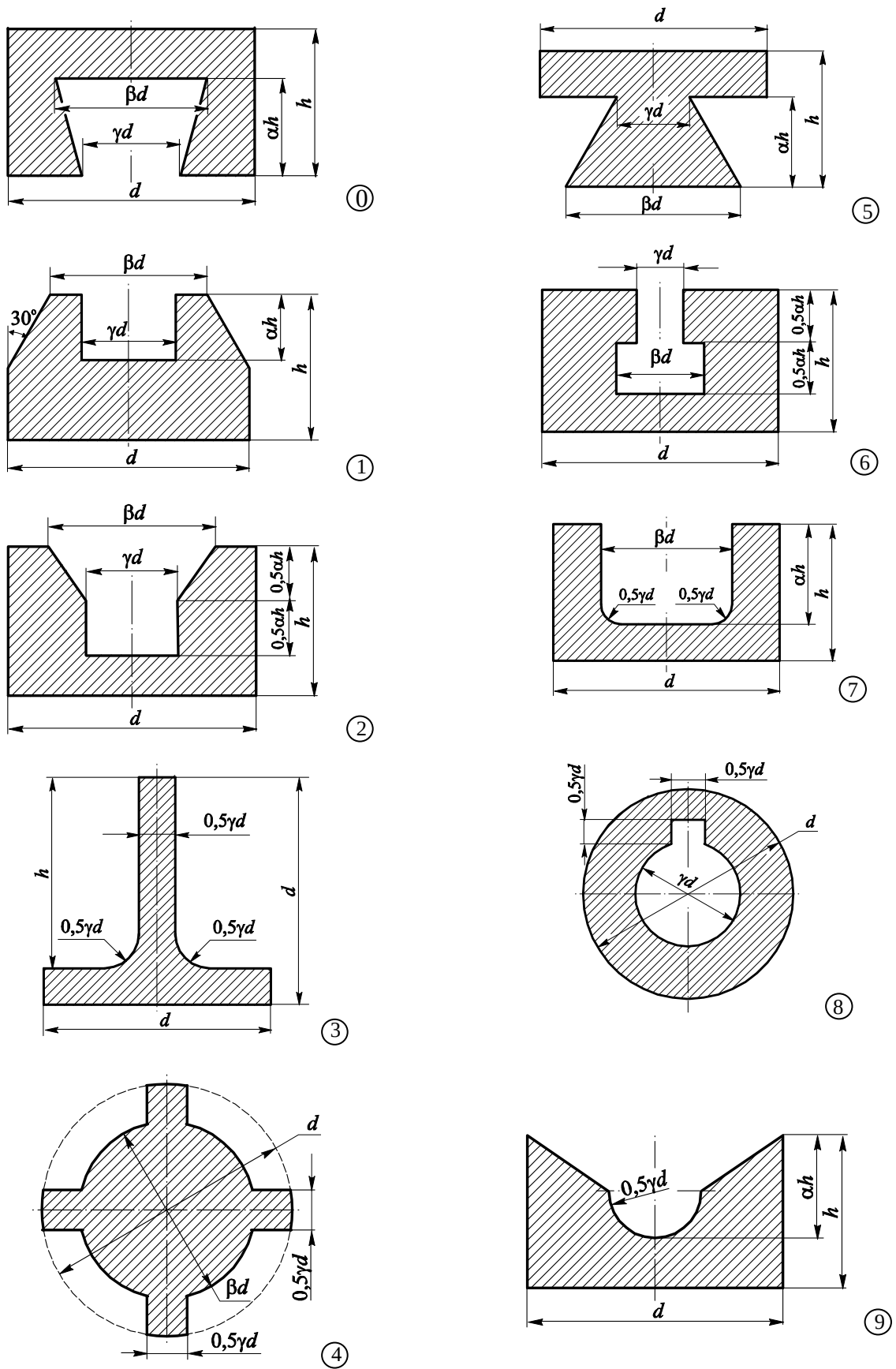


Рис. 1.1. Варіанти поперечних перерізів до задачі 1

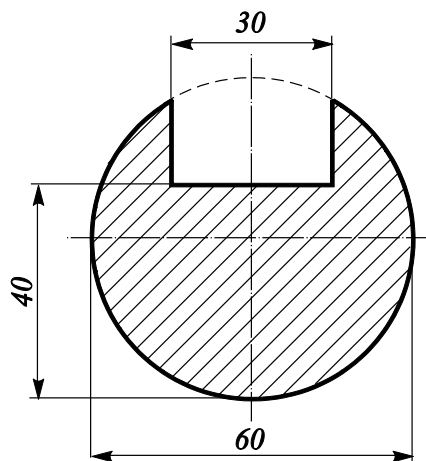


## План розв'язування задачі

1. Накреслити переріз в масштабі, проставивши усі необхідні розміри.
2. Провести допоміжні осі координат раціональним чином, враховуючи, що переріз симетричний.
3. Розбити переріз на прості фігури, провести паралельно допоміжним осям їх центральні осі.
4. Визначити положення центру ваги заданого перерізу. Провести головні центральні осі інерції. Вказати на кресленні обчислену координату центру ваги перерізу відносно допоміжної осі.
5. Визначити відстані між власними центральними осями простих фігур і головними центральними осями інерції перерізу. Вказати ці відстані на кресленні.
6. Обчислити моменти інерції перерізу відносно головних центральних осей, користуючись відомими формулами і правилами паралельного переносу.
7. Обчислити величини радіусів інерції перерізу відносно головних центральних осей.

## Приклад розв'язування задачі

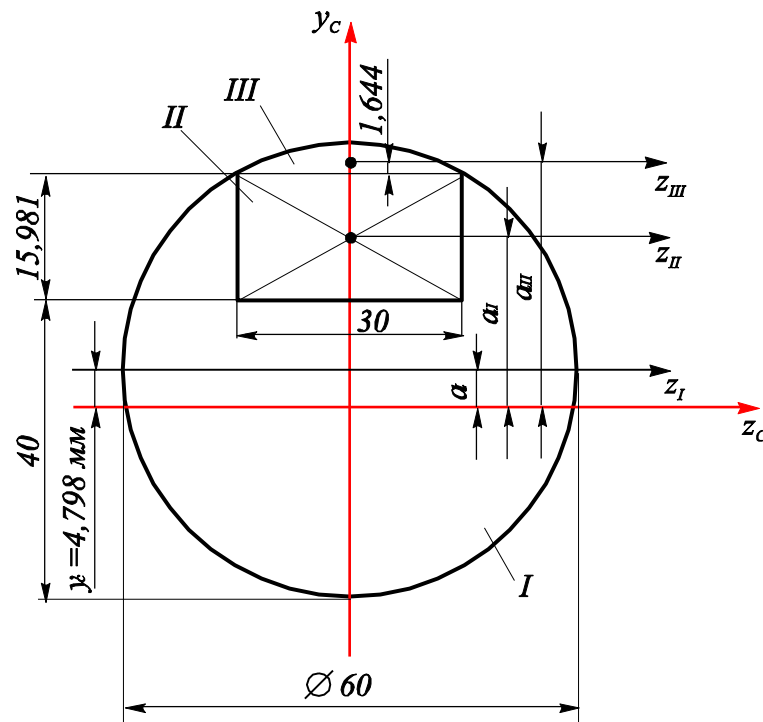
*Визначити головні центральні моменти та радіуси інерції перерізу, зображеного на рис. 1.2.*



**Рис. 1.2 Переріз стержня**

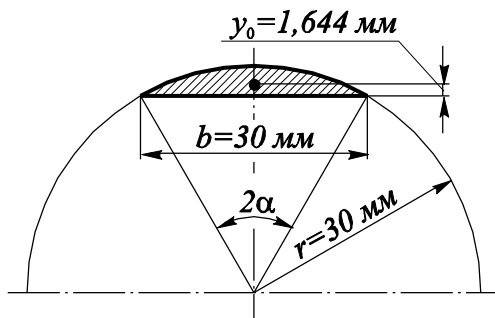
1. Зобразимо переріз у збільшеному масштабі (рис. 1.3) та розкладемо його на прості фігури: круг (I) діаметром  $d = 60$  мм, прямокутник (II) зі сторонами  $b = 30$  мм і  $h = 15,981$  мм (цей розмір знайдено шляхом нескладних обчислень) і круговий сегмент (III). Тут дві останні фігури мають від'ємну площу. Вкажемо центри ваги цих фігур і проведемо їх центральні осі.

Оскільки переріз має вертикальну вісь симетрії, причому ця вісь є також віссю симетрії для кожної з виділених фігур, то центр ваги перерізу, як і кожної з вказаних його частин, лежатиме на цій осі. Позначимо її  $Y_c$ .



**Рис. 1.3 До визначення геометричних характеристик складного симетричного перерізу**

Щоб обчислити положення центру ваги кругового сегмента відносно хорди (рис. 1.4), скористаємось формулою:



$$y_0 = r \left( \frac{4}{3} \frac{\sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} - \cos \alpha \right).$$

Тут  $\alpha = \arcsin(0,5b/r) = \arcsin(0,5 \cdot 30/30) = 30^\circ$ .

Отже

$$y_0 = 30 \left( \frac{4}{3} \cdot \frac{0,125}{1,047 - 0,866} - 0,866 \right) = 1,644 \text{ мм}$$

**Рис. 1.4 Круговий сегмент**

Тут і далі при визначенні геометричних характеристик для кругового сегмента користуватимусь формулами, наведеними в [2], табл. 1.

2. Для визначення положення центру ваги перерізу на осі  $Y_c$  виберемо в якості допоміжних осей центральні осі круга  $Y_c-Z_I$ .

Згідно з рис. 1.3 відстані між віссю  $Z_I$  круга і центральними осями інших частин перерізу складають: для прямокутника –  $y_{C_{II}} = 17,991 \text{ мм}$ ; для кругового сегмента –

$y_{C_{III}} = 27,625 \text{ мм}$ . Площі фігур відповідно дорівнюють:

$$- A_I = \pi d^2/4 = \pi \cdot 60^2/4 = 2827,433 \text{ мм}^2;$$

- $A_{II} = bh = 30 \cdot 15,981 = 479,43 \text{ мм}^2$ ;
- $A_{III} = 0,5r^2 (2\alpha - \sin 2\alpha) = 0,5 \cdot 30^2 (1,047 - 0,866) = 81,45 \text{ мм}^2$ .

За формулою (2.7), з урахування знаків площ і ординат, отримаємо

$$y_C = \frac{y_{CI} A_I - y_{CII} A_{II} - y_{CIII} A_{III}}{A_I - A_{II} - A_{III}} = \frac{0 \cdot 2827,433 - 17,991 \cdot 479,43 - 27,625 \cdot 81,45}{2827,433 - 479,43 - 81,45} = -4,798 \text{ мм}.$$

Оскільки вісь  $Y_C$  є віссю симетрії, то знайдені центральні осі перерізу  $Y_C$ -  $Z_C$  є головними центральними осями інерції.

3. Моменти інерції перерізу відносно головних центральних осей  $Y_C$ -  $Z_C$  знайдемо як суму моментів інерції окремих його частин відносно цих осей:

$$I_u = I_{z_C} = I_{z_I}^C - I_{z_{II}}^C - I_{z_{III}}^C ;$$

$$I_v = I_{y_C} = I_{y_I}^C - I_{y_{II}}^C - I_{y_{III}}^C .$$

Щоб знайти їх величини, скористаємося формулами паралельного переносу [1].

Знайдемо моменти інерції кожної частини перерізу відносно їх власних центральних осей:

- для круга  $I_{z_I} = I_{y_I} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 60^4}{64} = 636172,512 \text{ мм}^4$ ;

- для прямокутника

$$I_{z_{II}} = \frac{bh^3}{12} = \frac{30 \cdot 15,981^3}{12} = 10203,563 \text{ мм}^4 ; I_{y_{II}} = \frac{hb^3}{12} = \frac{15,981 \cdot 30^3}{12} = 35957,25 \text{ мм}^4 .$$

- для кругового сегмента момент інерції відносно діаметра (це вісь  $Z_I$  на рис. 1.3), згідно з [2],

$$I_{z_I}^{III} = \frac{r^4}{8} (2\alpha - \sin 2\alpha \cos 2\alpha) = \frac{30^4}{8} (1,047 - 0,866 \cdot 0,5) = 62167,5 \text{ мм}^4 .$$

Тоді момент інерції відносно центральної осі  $Z_{III}$

$$I_{z_{III}} = I_{z_I}^{III} - y_{CIII}^2 A_{III} = 62167,5 - 27,625^2 \cdot 81,45 = 9,696 \text{ мм}^4 ;$$

$$I_{y_{III}} = \frac{r^4}{8} \left( 2\alpha - \sin 2\alpha - \frac{4}{3} \cos \alpha \sin^3 \alpha \right) =$$

$$\frac{30^4}{8} \left( 1,047 - 0,866 - \frac{4}{3} 0,866 \cdot 0,125 \right) = 3712,5 \text{ мм}^4 .$$

Відстані між центральними осями окремих частин перерізу і центральною віссю всього перерізу  $Z_C$  (див. рис. 1.3):  $a_I = 4,798 \text{ мм}$ ;  $a_{II} = 22,789 \text{ мм}$ ;  $a_{III} = 32,423 \text{ мм}$ . А осі  $Y$  тут збігаються.

Моменти інерції відносно головних центральних осей  $Y_C$ - $Z_C$ :

$$I_{z_I}^C = I_{z_I} + a_I^2 A = 636172,512 + 4,798^2 \cdot 2827,433 = 701262,293 \text{ мм}^4 ;$$

$$I_{z_{II}}^C = I_{z_{II}} + a_{II}^2 A = 10203,563 + 22,789^2 \cdot 479,43 = 259190,030 \text{ мм}^4 ;$$

$$I_{z_{III}}^C = I_{z_{III}} + a_{III}^2 A_{III} = 9,696 + 32,423^2 \cdot 81,45 = 85634,084 \text{ мм}^4.$$

$$I_{y_I}^C = I_{y_I} = 636172,512 \text{ мм}^4;$$

$$I_{y_{II}}^C = I_{y_{II}} = 35957,25 \text{ мм}^4;$$

$$I_{y_{III}}^C = I_{y_{III}} = 3712,5 \text{ мм}^4.$$

Головні центральні моменти інерції перерізу стержня:

$$I_u = I_{z_C} = I_{z_I}^C - I_{z_{II}}^C - I_{z_{III}}^C = 701262,292 - 259190,030 - 85634,084 = 346438,178 \text{ мм}^4;$$

$$I_v = I_{y_C} = I_{y_I}^C - I_{y_{II}}^C - I_{y_{III}}^C = 636172,512 - 35957,25 - 3712,5 = 596502,762 \text{ мм}^4.$$

Головні радіуси інерції:

$$i_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}} = \sqrt{\frac{346438,178}{2266,553}} = 12,363 \text{ мм}; \quad i_v = \sqrt{\frac{I_v}{A}} = \sqrt{\frac{596502,762}{2266,553}} = 16,223 \text{ мм}.$$

## ЗАДАЧА 2

Для заданого перерізу (рис. 2.1) визначити положення головних центральних осей і величини головних центральних моментів інерції. Числові дані взяти у табл. 2.1

Таблиця 2.1. Варіанти завдань для задачі 2

| Варіант | $a$    | Розміри кутника            | Номер швелера (двотавра) |
|---------|--------|----------------------------|--------------------------|
| 0       | $0,4b$ | $56 \times 36 \times 4$    | 12                       |
| 1       | $0,5b$ | $70 \times 45 \times 5$    | 16                       |
| 2       | $0,6b$ | $90 \times 56 \times 8$    | 22а                      |
| 3       | $0,7b$ | $110 \times 70 \times 8$   | 24                       |
| 4       | $0,3b$ | $125 \times 80 \times 10$  | 24а                      |
| 5       | $0,4b$ | $140 \times 90 \times 10$  | 27                       |
| 6       | $0,5b$ | $160 \times 100 \times 14$ | 30                       |
| 7       | $0,6b$ | $180 \times 110 \times 12$ | 33                       |
| 8       | $0,7b$ | $200 \times 125 \times 16$ | 36                       |
| 9       | $0,8b$ | $250 \times 160 \times 20$ | 40                       |

**Примітка.** Всі необхідні для розв'язання задачі дані взяти з таблиць сортamentів прокатних профілів [1], [2].

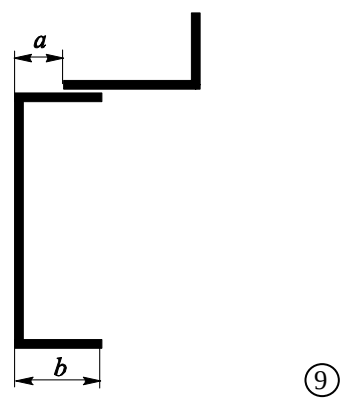
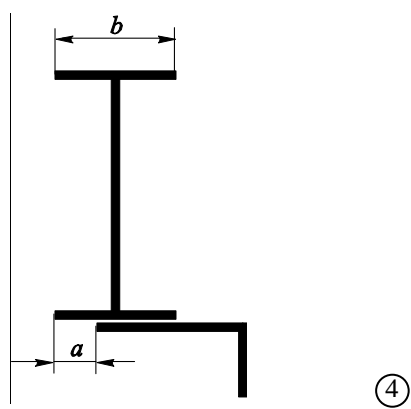
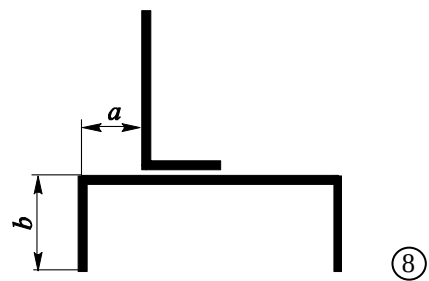
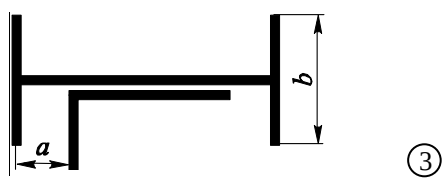
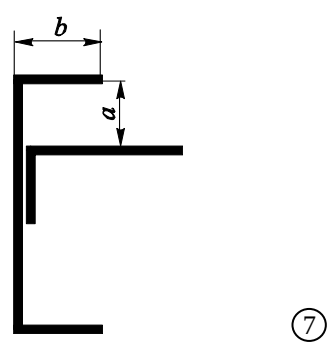
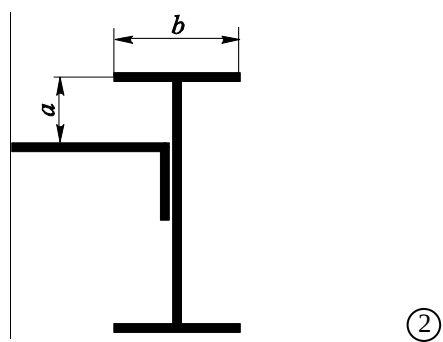
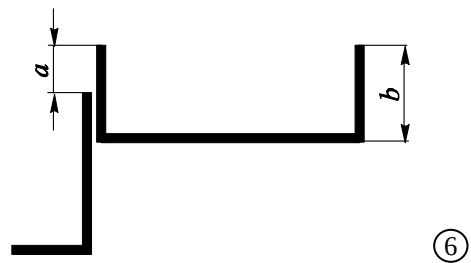
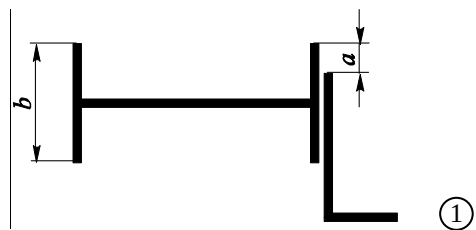
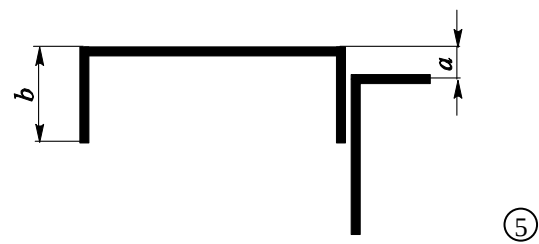
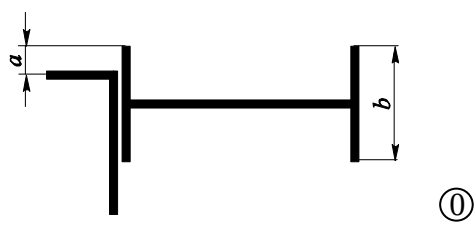


Рис. 2.1 Варіанти поперечних перерізів до задачі 2

## План розв'язування задачі

1. Накреслити переріз в масштабі, проставивши усі необхідні розміри.
2. Провести допоміжні координатні осі і проставити координати центрів ваги кожного профілю відносно вибраних осей.
3. Визначити положення центру ваги складеного перерізу, вказати на кресленні його координати і провести центральні осі паралельно допоміжним. Вказати відстані між власними центральними осями кожного профілю і центральними осями всього складеного перерізу.
4. Користуючись таблицями сортаменту прокатної сталі, застосувавши правило паралельного переносу, знайти осьові і відцентрові моменти інерції перерізу відносно його центральних осей.
5. Визначити напрямок головних центральних осей перерізу і побудувати їх на кресленні.
6. Обчислити величини головних центральних моментів інерції перерізу.

## Приклад розв'язування задачі

Визначити головні центральні моменти інерції перерізу, зображеного на рис. 2.2, що складається з швелера №14 та нерівнобокого кутника 56×36×5.

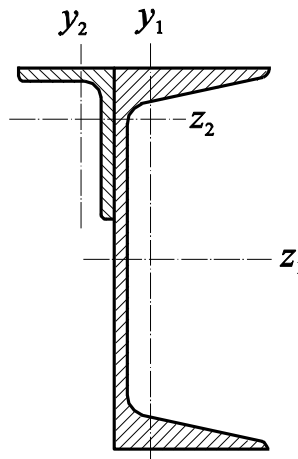


Рис. 2.2 Переріз, складений з прокатних профілів

1. З таблиць сортаментів прокатної сталі випишемо геометричні характеристики профілів, що складають заданий переріз, позначивши їх у відповідності з осями, вказаними на рис. 2.2 та 2.3.

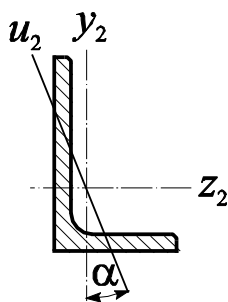


Рис. 2.3 Кутник

I. Швелер №14:  $A_I = 15,7 \text{ см}^2$ ;  $I_{Z_I} = 489 \text{ см}^4$ ;  $I_{Y_I} = 45,1 \text{ см}^4$ .

II. Кутник 56×36×5:  $A_{II} = 4,41 \text{ см}^2$ ;  $I_{Z_{II}} = I_{Z_2} = 13,8 \text{ см}^4$ ;

$I_{Y_{II}} = I_{Y_2} = 4,48 \text{ см}^4$ ;  $I_{u_{2\min}} = 2,66 \text{ см}^4$ ; кут нахилу осі  $u$ ,  
 $\text{tg} \alpha = 0,404$  ( $\alpha = 22^\circ$ ).

Для подальших розрахунків нам необхідно знати відцентровий момент інерції кутника відносно осей, паралельних полицям. Знайдемо його відносно осей  $Y_2$ - $Z_2$  (рис. 2.3) за допомогою формули повороту головних осей [1]:

$$I_{z_2 y_2} = \frac{I_{y_2} - I_{z_2}}{2} \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{4,48 - 13,8}{2} \operatorname{tg} 44^\circ = -4,66 \cdot 0,9657 = -4,50 \text{ см}^4.$$

У перерізі (рис. 2.2) кутник розвернутий відносно осей  $Y_2-Z_2$  на  $180^\circ$ . Згідно з формулою [1] величина і знак відцентрового моменту при такому повороті осей залишаються незмінними, тобто  $I_{z_2 y_2} = I_{z_{II} y_{II}}$ .

2. Зобразимо заданий переріз у збільшеному масштабі (рис. 2.4).

Визначимо положення центру ваги перерізу, вибравши у якості допоміжної систему головних центральних осей швелера  $Y_I-Z_I$ :

$$z_C = \frac{z_{C_{II}} A_{II}}{A_I + A_{II}} = \frac{-2,54 \cdot 4,41}{15,7 + 4,41} = -0,56 \text{ см}; \quad y_C = \frac{y_{C_{II}} A_{II}}{A_I + A_{II}} = \frac{5,14 \cdot 4,41}{15,7 + 4,41} = 1,13 \text{ см}.$$

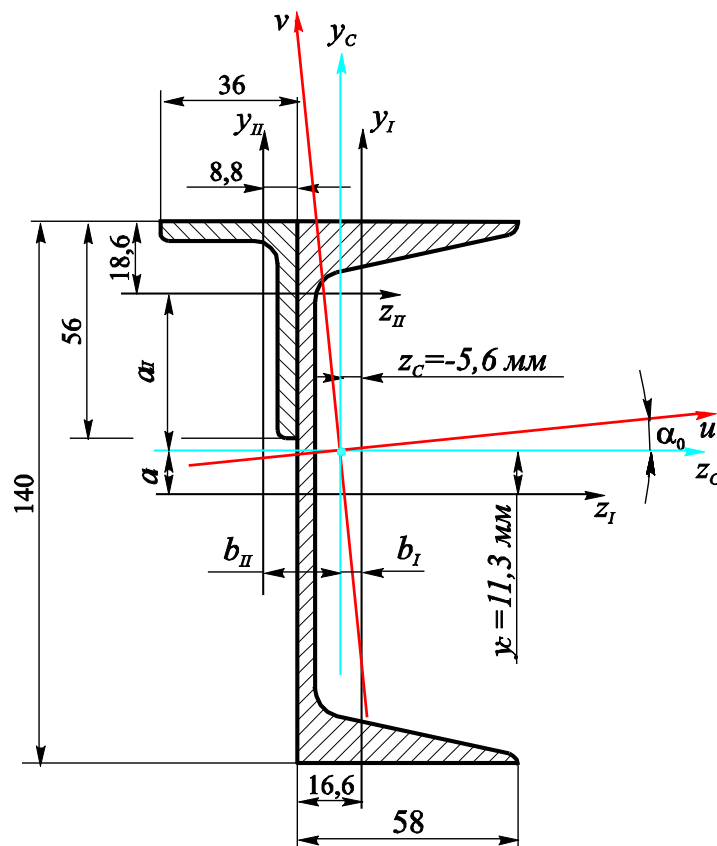
Тут  $y_{C_{II}}$  та  $z_{C_{II}}$  – відстані від центру ваги кутника до центральних осей швелера  $Y_I$  та  $Z_I$  відповідно.

3. Проведемо проміжну систему центральних осей  $Y_C-Z_C$ , та визначимо осьові та відцентровий моменти інерції перерізу відносно цих осей:

$$I_{z_C} = I_{z_I} + a_I^2 A_I + I_{z_{II}} + a_{II}^2 A_{II} = 489 + 1,13^2 \cdot 15,7 + 13,8 + 4,01^2 \cdot 4,41 = 593,76 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_C} = I_{y_I} + b_I^2 A_I + I_{y_{II}} + b_{II}^2 A_{II} = 45,1 + 0,56^2 \cdot 15,7 + 4,48 + 1,98^2 \cdot 4,41 = 71,79 \text{ см}^4;$$

$$I_{z_C y_C} = I_{z_I y_I} + a_I b_I A_I + I_{z_{II} y_{II}} + a_{II} b_{II} A_{II} = 0 + 1,13(-0,56)15,7 - 4,5 + (-4,01)1,98 \cdot 4,41 = -49,44 \text{ см}^4.$$



**Рис. 2.4 До визначення геометричних характеристик складного несиметричного перерізу**

4. Визначимо положення головних центральних осей інерції та величини головних центральних моментів інерції.

Кут нахилу головних центральних осей інерції перерізу до проміжних центральних осей  $Y_C-Z_C$  знайдемо за формулою [1]:

**Зауваження 1.** Кут  $\alpha_0$  – це кут, що за модулем не перевищує  $45^\circ$ , вказує напрямок головної осі інерції і відносно осі  $z$ . Додатний кут  $\alpha_0$  відкладаємо проти годинникової стрілки від осі  $z$ , а від’ємний – за годинниковою стрілкою.

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{z_C y_C}}{I_{y_C} - I_{z_C}} = \frac{2 \cdot (-49,44)}{71,79 - 593,76} = 0,1894.$$

Отже кут нахилу  $\alpha_0 = 5,36^\circ$ .

Вкажемо головні осі на рис. 2.4. Оскільки кут  $\alpha_0$  додатний, то відкладаємо його від осі  $Z_C$  проти годинникової стрілки, а, оскільки  $\alpha_0 < 45^\circ$ , отриману вісь позначаємо  $u$  згідно з таким правилом:

**Зауваження 2.** Віссю  $u$  позначають ту головну вісь, що складає з віссю  $Z$  кут, менший  $45^\circ$ .

Головні центральні моменти інерції визначаємо за формулами [1], беручи в цих виразах перед коренем квадратним верхні знаки, оскільки  $I_{z_C} > I_{y_C}$ :

$$\begin{aligned} I_u &= \frac{1}{2} \left[ (I_{z_C} + I_{y_C}) + \sqrt{(I_{z_C} - I_{y_C})^2 + 4I_{z_C y_C}^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ (593,76 + 71,79) + \sqrt{(593,76 - 71,79)^2 + 4 \cdot 49,44^2} \right] = 598,40 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_v &= \frac{1}{2} \left[ (I_{z_C} + I_{y_C}) - \sqrt{(I_{z_C} - I_{y_C})^2 + 4I_{z_C y_C}^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ (593,76 + 71,79) - \sqrt{(593,76 - 71,79)^2 + 4 \cdot 49,44^2} \right] = 67,15 \text{ см}^4. \end{aligned}$$



## II. РОЗТЯГ І СТИСК СТЕРЖНІВ

### Питання для самоперевірки знань.

1. У якому випадку маємо розтяг або стиск стержня?
2. Як побудувати діаграму розтягу?
3. Що називають границями пропорційності, пружності, текучості, міцності?
4. Сформулюйте закон Гука.
5. Що називаємо модулем пружності?
6. Що розуміють під коефіцієнтом поперечної деформації?
7. Що називається питомою роботою деформації?
8. Які задачі називають статично невизначуваними?
9. Сформулюйте порядок розв'язання статично невизначуваних задач.
10. Як визначити видовження стержня з урахуванням власної ваги?
11. Що називається коефіцієнтом запасу міцності?
12. Як формулюється умова міцності?

### ЗАДАЧА 3

Сталевий східчастий стержень (рис. 3.1) знаходиться під дією сили  $F$  і власної ваги. Перевірити стержень на міцність і знайти переміщення перерізу  $I-I$ . Модуль пружності матеріалу стержня  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ , питома вага  $\gamma = 78 \frac{\text{кН}}{\text{м}^3}$ , допустиме напруження  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ . Дані взяти з табл. 3.1

Таблиця 3.1. Варіанти завдань для задачі 3

| Варіант | $A, \text{мм}^2$ | $F, \text{кН}$ | $a, \text{м}$ | $b, \text{м}$ | $c, \text{м}$ |
|---------|------------------|----------------|---------------|---------------|---------------|
| 0       | 100              | 11             | 1,0           | 1,0           | 0,5           |
| 1       | 200              | 12             | 1,2           | 1,2           | 0,6           |
| 2       | 300              | 14             | 0,8           | 0,8           | 0,4           |
| 3       | 400              | 16             | 1,4           | 1,4           | 0,7           |
| 4       | 500              | 18             | 0,9           | 0,9           | 0,45          |
| 5       | 150              | 13             | 1,1           | 1,1           | 0,55          |
| 6       | 250              | 15             | 1,3           | 1,3           | 0,65          |
| 7       | 350              | 17             | 1,5           | 1,5           | 0,75          |
| 8       | 450              | 19             | 0,6           | 0,6           | 0,3           |
| 9       | 550              | 20             | 0,7           | 0,7           | 0,35          |

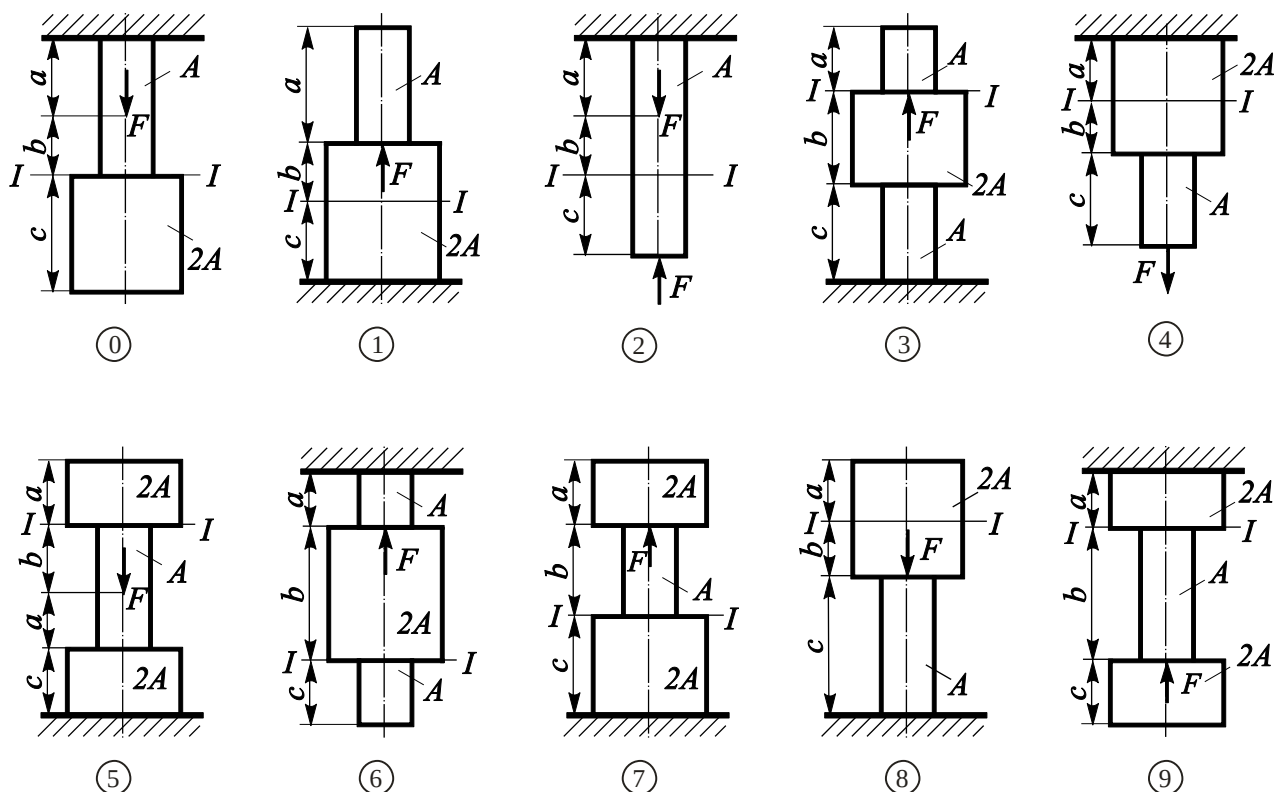


Рис. 4.1 Варіанти розрахункових схем до задачі 4

### План розв'язування задачі

1. Зобразити в масштабі креслення стержня.
2. Користуючись методом перерізів, побудувати епюри поздовжніх сил у двох випадках: з без урахуванням власної ваги стержня і з її врахуванням.
3. Побудувати також епюри напружень в стержні.
4. Визначити небезпечний переріз стержня.
5. Перевірити стержень на міцність в небезпечному перерізі. Порівняти максимальні напруження в стержні з урахуванням власної ваги і без врахування.
6. Визначити переміщення перерізу  $I-I$  без врахування власної ваги стержня.

### Приклад розв'язування задачі

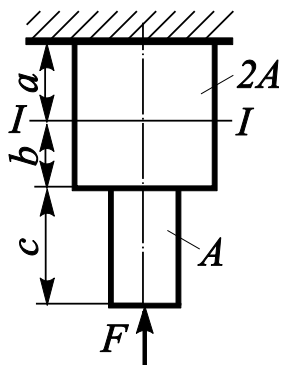


Рис. 3.2 Розрахункова схема

Дано:  $A=120 \text{ мм}^2$ ;  $a=0,6 \text{ м}$ ;  $b=0,6 \text{ м}$   $c=1,2 \text{ м}$ ,  
 $F = 10 \text{ кН}$ ,  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  $\gamma = 78 \frac{\text{кН}}{\text{м}^3}$ ,  
 $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

За вихідними даними зображаємо в масштабі розрахункову схему стержня (рис. 3.3 а) та будуємо епюри поздовжніх сил і напружень без врахування власної ваги стержня і з її врахуванням.

I. Без урахування власної ваги.

Ділянка А-С:  $0 \leq x \leq 2,4 \text{ м}.$

$$N(x) = -F = -10 \text{ кН}.$$

Напруження на відрізку АВ:  $\sigma_{A-B} = -\frac{F}{A} = -\frac{10 \cdot 10^3}{120} = -83,33 \text{ МПа}.$

Напруження на відрізку ВС:  $\sigma_{B-C} = -\frac{F}{2A} = -\frac{10 \cdot 10^3}{240} = -41,67 \text{ МПа}.$

За отриманими даними будуюмо епюри зусиль і напружень (рис. 3.2 б і в відповідно).

II. З урахування власної ваги.

Ділянка А-В:  $0 \leq x \leq 1,2 \text{ м}.$

$$N(x) = -F + \gamma Ax.$$

При  $x = 0$   $N = -10 \text{ кН}.$

При  $x = 1,2 \text{ м}$   $N = -10 + 7,8 \cdot 10^{-9} \cdot 120 \cdot 1200 = -10 + 0,0011 = -9,999 \text{ кН}$

Ділянка В-С:  $0 \leq x \leq 1,2 \text{ м}.$

$$N(x) = -F + \gamma Ac + \gamma 2Ax.$$

При  $x = 0$   $N = -10 + 0,0011 = -9,999 \text{ кН}.$

При  $x = 1,2 \text{ м}$   $N = -10 + 0,0011 + 7,8 \cdot 10^{-9} \cdot 240 \cdot 1200 = -10 + 0,0011 + 0,0022 = -9,997 \text{ кН}$

Для побудови епюри напружень визначимо їх значення в перерізах А, В, С.

Напруження в перерізі А:  $\sigma_A = -\frac{10 \cdot 10^3}{120} = -83,33 \text{ МПа}.$

Напруження в перерізі В (для відрізка АВ):  $\sigma_{B_{AB}} = -\frac{9,999 \cdot 10^3}{120} = -83,325 \text{ МПа}.$

Напруження в перерізі В (для відрізка ВС):  $\sigma_{B_{BC}} = -\frac{9,999 \cdot 10^3}{240} = -41,662 \text{ МПа}.$

Напруження в перерізі С:  $\sigma_C = -\frac{9,997 \cdot 10^3}{240} = -41,654 \text{ МПа}.$

За отриманими даними будуюмо епюри зусиль і напружень (рис. 3.2 г і д відповідно).

Як видно з епюр напружень, небезпечним перерізом стержня я без, так і з урахуванням власної ваги є переріз А, де діють максимальні напруження. Порівнюючи їх з допустимими, бачимо, що  $\sigma_A = -83,33 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа}$ , отже умова міцності виконується.

Переміщення перерізу I-I дорівнює видовженню частини стержня, розташованої вище від цього перерізу. У випадку, коли власна вага стержня не враховується, це видовження становитиме

$$\Delta l_{I-I} = \Delta l_{DC} = -\frac{10 \cdot 10^3 \cdot 600}{2 \cdot 10^5 \cdot 240} = -0,125 \text{ мм}$$

При врахуванні власної ваги визначимо переміщення перерізу, розташованого на відстані  $x$  від перерізу I-I (див. рис 3.2 е). У перерізі  $\xi$  на відріжку DC діє сила  $N(\xi) = -F + \gamma A c + \gamma 2 A b + \gamma 2 A \xi = -10 + 0,0011 + 0,0011 + 7,8 \cdot 10^{-9} \cdot 240 \xi = -9,998 + 1,872 \cdot 10^{-6} \xi$ .

За законом Гука

$$\Delta l(x) = \int_x^{600} \frac{(-9,998 + 1,872 \cdot 10^{-6} \xi) d\xi}{E 2 A} = -\frac{9,998 \cdot 10^3 \cdot (600 - x)}{2 \cdot 10^5 \cdot 240} + \frac{1,872 \cdot 10^{-6} \cdot (3,6 \cdot 10^5 - x^2)}{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 240}$$

Видовження відрізка DC знайдемо, взявши  $x=0$ :

$$\Delta l_{I-I} = -\frac{9,998 \cdot 10^3 \cdot 600}{2 \cdot 10^5 \cdot 240} + \frac{1,872 \cdot 10^{-6} \cdot 3,6 \cdot 10^5}{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 240} = -0,125 + 0,007 \cdot 10^{-6} \approx -0,125 \text{ мм}$$

**Зауваження 1.** Як показують проведені розрахунки, вплив власної ваги на міцність і жорсткість стержня заданого розміру нехтовно малий. Тому в машинобудуванні при виконанні інженерних розрахунків власною вагою стержнів в подібних випадках нехтують.

#### ЗАДАЧА 4

Абсолютно жорстка балка шарнірно прикріплена до стояка за допомогою нерухомої опори в точці і двох пружних стержнів (рис. 4.1).

1. Дібрати допустиму силу  $F$  з умови міцності максимально напруженого стержня, взявши коефіцієнт запасу міцності 1,5. Перший стержень виготовлений зі сталі 45, а другий – з твердої алюмінієвої бронзи Бр.А5.

2. Визначити, у скільки разів зміниться знайдена допустима сила  $F$ , коли обидва стержні будуть сталевими.

Таблиця 4.1. Варіанти завдань для задачі 4

| Варіант | $A_1, \text{мм}^2$ | $A_1: A_2$ | $a, \text{м}$ | $b, \text{м}$ | $c, \text{м}$ |
|---------|--------------------|------------|---------------|---------------|---------------|
| 0       | 100                | 1:2        | 1,0           | 1,5           | 0,6           |
| 1       | 200                | 1:1,5      | 1,8           | 2,0           | 0,9           |
| 2       | 300                | 1:1        | 1,5           | 1,8           | 0,5           |
| 3       | 400                | 1:3        | 2,2           | 1,0           | 0,4           |
| 4       | 500                | 1:2,5      | 2,0           | 2,2           | 0,8           |
| 5       | 150                | 1:2        | 0,75          | 1,0           | 1,2           |
| 6       | 250                | 1:1,5      | 1,2           | 1,2           | 0,3           |
| 7       | 350                | 1:1        | 0,8           | 0,6           | 0,6           |
| 8       | 450                | 1:3        | 1,6           | 2,0           | 0,5           |
| 9       | 550                | 1:2,5      | 0,6           | 0,8           | 1,0           |

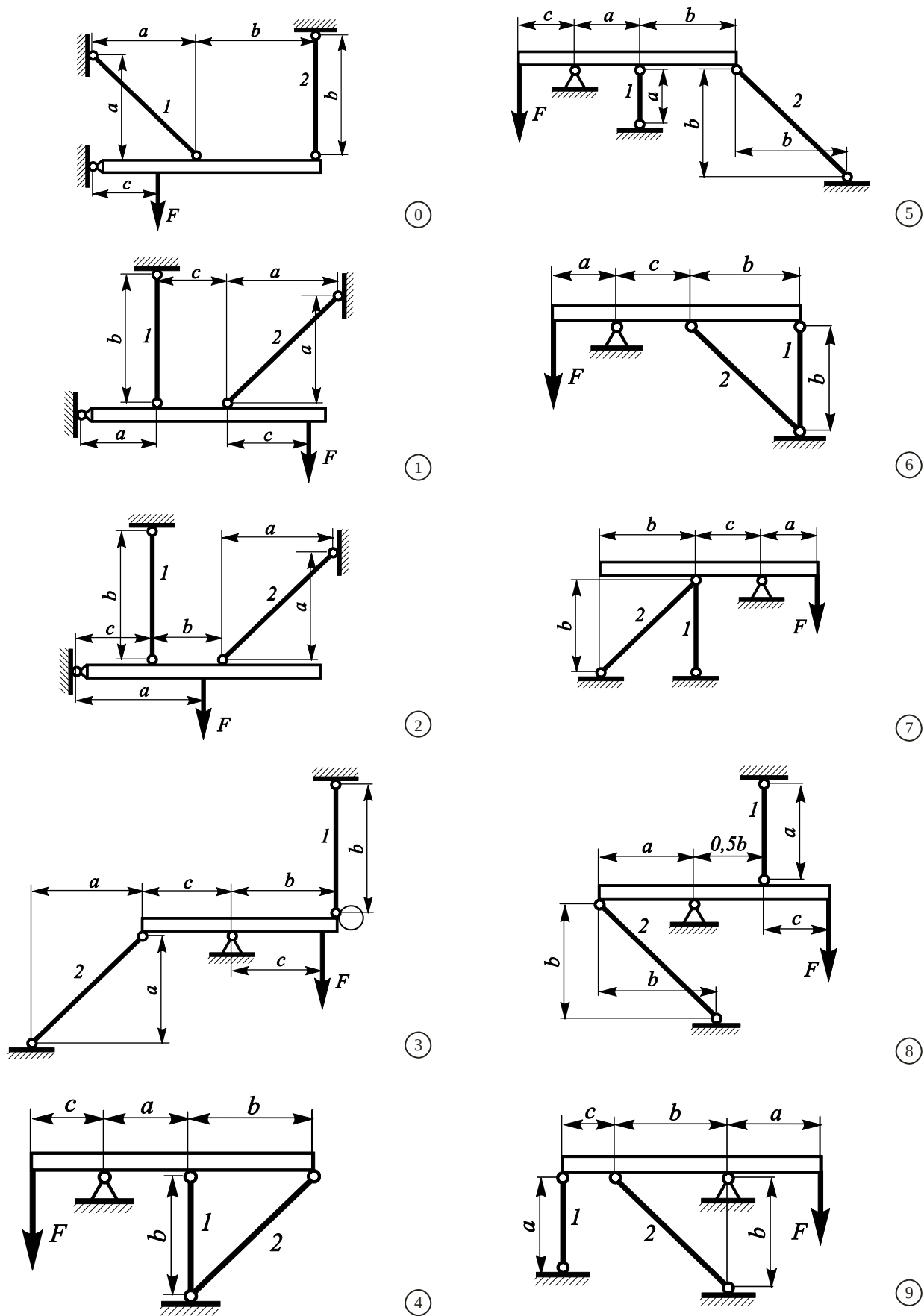
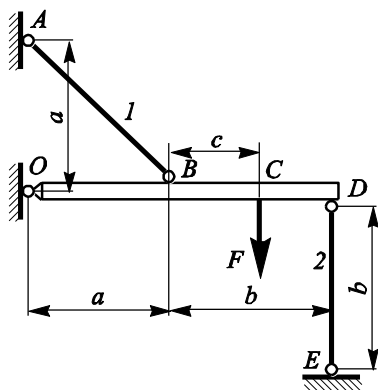


Рис. 4.1 Варіанти розрахункових схем до задачі 4

### План розв'язування задачі

1. Скласти умови рівноваги системи, використовуючи умову рівності нулю суми моментів всіх сил відносно шарнірно нерухомої опори. Встановити ступінь статичної невизначеності.
2. Розглянути геометричний бік задачі, зобразивши систему у zdeформованому вигляді. Записати співвідношення між деформаціями стержнів 1 і 2.
3. Розглянути фізичний бік задачі, виразивши за законом Гука деформації стержнів через діючі в них поздовжні сили  $N$ .
4. Розв'язати спільно рівняння рівноваги і геометрії, виразивши силу  $F$  через діючі зусилля в стержнях.
5. Розрахувати силу  $F$  з умови міцності максимально навантаженого стержня.
6. Знайти силу  $F$ , якщо обидва стержні будуть сталевими. Порівняти її з раніше визначеною.

### Приклад розв'язування задачі



**Рис. 4.2 Шарнірно-стержнева система**

Дано:  $A_1=120 \text{ мм}^2$ ;  $A_1: A_2=1:3$ ;  $a=1,4 \text{ м}$ ;  
 $b=1,6 \text{ м}$   $c=0,8 \text{ м}$ . Матеріали стержнів:  
 1 – сталь ЭИ734, 2 – бронза Бр.ОФ10-1 (м'який стан).

Щоб дібрати максимальну силу  $F$ , яку можна прикласти до балки, треба знати максимально допустимі зусилля, які можуть виникати в стержнях 1 і 2 під дією цієї сили (рис. 4.2).

Оскільки стержні в точках кріплення мають ідеальні шарніри, в них виникатимуть тільки поздовжні сили.

Причому, при заданому напрямі сили  $F$  стержень 1 буде розтягненим, а стержень 2 – стисненим. Запишемо умови міцності для обох стержнів:

$$\sigma^{(1)} = \frac{N_1}{A_1} \leq [\sigma]_p; \quad \sigma^{(2)} = \frac{N_2}{A_2} \leq [\sigma]_c,$$

де  $N_1$  і  $N_2$  – поздовжні сили в стержнях 1 і 2 відповідно;  $[\sigma]_p$  – допустиме напруження розтягу для стержня 1;  $[\sigma]_c$  – допустиме напруження стиску для стержня 2.

Користуючись довідковими таблицями, наприклад [1], знаходимо: для сталі ЭИ734  $\sigma_{0.2} = 600 \text{ МПа}$ ; для бронзи Бр.ОФ10-1  $\sigma_T = 140 \text{ МПа}$  (матеріали однаково опираються розтягу і стиску). Тоді

$$[\sigma]_p = \frac{600}{1,5} = 400 \text{ МПа}; \quad [\sigma]_c = \frac{140600}{1,5} = 93,3 \text{ МПа}$$

Допустимі значення зусиль в стержнях:

$$N_1 \leq [\sigma]_p A_1 = 400 \cdot 120 = 48 \cdot 10^3 \text{ Н}; \quad N_2 \leq [\sigma]_c A_2 = 93,3 \cdot 120 \cdot 3 = 33,6 \cdot 10^3 \text{ Н},$$

Щоб за знайденими значеннями  $N_1$  і  $N_2$  знайти допустиму силу  $F$ , розглянемо умови рівноваги балки. В загальному випадку на балку діятимуть, окрім шуканої зовнішньої сили  $F$ , реакції  $N_1$ ,  $N_2$  і опорні реакції в шарнірі  $O$  (рис. 4.3). Для балки можна скласти три умови рівноваги при чотирьох невідомих реакціях. Отже система один раз статично невизначна.

I. Статичний бік задачі.

Оскільки підлягають визначенню лише зусилля в стержнях  $N_1$  і  $N_2$ , обмежимося розглядом тільки умови рівноваги моментів сил, прикладених до балки, відносно шарніру  $O$ :

$$\sum M_O = F \cdot OC - N_1 \cdot OK - N_2 \cdot OD = 0.$$

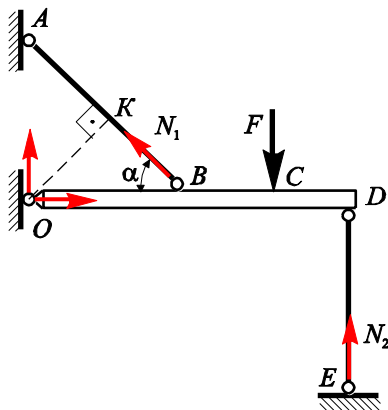


Рис. 4.3 Схема навантаження

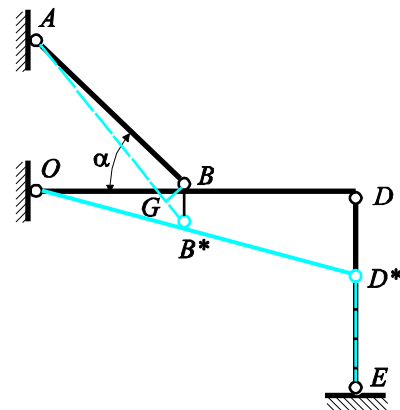


Рис. 4.4 Схема після деформації

З трикутника  $OKB$  знаходимо:

$$OK = OB \sin \alpha = 1,4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,99 \text{ м}.$$

Тоді

$$F \cdot 2,2 - N_1 \cdot 0,99 - N_2 \cdot 3 = 0. \quad (1)$$

II. Геометричний бік задачі.

Зобразимо можливий вид системи у zdeформованому стані (рис. 4.4) і знайдемо залежність між деформаціями стержнів 1 і 2. Через абсолютну жорсткість балки  $OD$  її згином можна знехтувати. Тоді внаслідок деформації стержнів балка повернеться відносно шарніру  $O$  і залишиться прямолінійною. Позначимо

$$GB^* = \Delta l_1; \quad DD^* = \Delta l_2 \quad BB^* = \frac{\Delta l_1}{\sin \alpha} \quad (\text{з } \triangle BB^*G).$$

$$\text{Оскільки } \triangle OBB^* \sim \triangle ODD^*, \text{ то } \frac{BB^*}{OB} = \frac{DD^*}{OD}. \text{ Або } \frac{\Delta l_1}{\Delta l_2 \sin \alpha} = \frac{a}{a+b}. \text{ Звідси}$$

$$\Delta l_1 = \frac{a}{a+b} \Delta l_2 \sin \alpha.$$

Після підстановки числових значень отримаємо

$$\Delta l_1 = 0,33 \Delta l_2. \quad (2)$$

III. Фізичний бік задачі.

За допомогою закону Гука виражаємо видовження стержнів через діючі в них зусилля:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2}. \quad (3)$$

Тут  $l_1$  і  $l_2$  – довжини стержнів;  $E_1 = 2,2 \cdot 10^5$  МПа – модуль пружності сталі ЭИ734;  $E_2 = 1,1 \cdot 10^5$  МПа – модуль пружності бронзи Бр.ОФ10-1.

IV. Синтез.

Підставляючи (3) у (2), отримаємо:

$$\frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} = 0,33 \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2}. \quad (4)$$

Після підстановки числових значень отримаємо залежність у такому вигляді:

$$N_1 = \frac{0,33 \cdot 1,6 \cdot 2,2 \cdot 10^5}{1,98 \cdot 1,1 \cdot 10^5 \cdot 3} = 0,18 N_2. \quad (5)$$

Після підстановки (5) в рівняння (1) отримаємо співвідношення між силою  $F$  і зусиллям в одному зі стержнів:

$$F = 1,44 N_2 \text{ або } F = 8,02 N_1.$$

Підставляючи сюди замість  $N_1$  і  $N_2$  раніше знайдені значення допустимих зусиль в стержнях, отримаємо:

$$F \leq 1,44 \cdot 33,6 \cdot 10^3 = 48,38 \cdot 10^3 \text{ Н};$$

$$F \leq 8,02 \cdot 48 \cdot 10^3 = 384,97 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Вибираємо у якості допустимого менше зі знайдених значень для сили  $F$ , тобто  $F = 48,38 \cdot 10^3 \text{ Н}$ .

Припустимо, що обидва стержні виготовлені зі сталі ЭИ734. Враховуючи, що в цьому випадку  $E_1 = E_2 = E$ , з урахуванням, що  $A_2 = 3A_1$ , співвідношення (4) набуде такого вигляду:

$$N_1^* = 0,33 \frac{N_2^* l_2}{3 l_1} = 0,33 \frac{N_2^* 1,6}{3 \cdot 1,98} = 0,09 N_2^*.$$

Підставляючи це співвідношення в (1), заходимо, що

$$F^* = 1,4 N_2^* \text{ або } F^* = 15,6 N_1^*.$$



Замість  $N_1^*$  підставляємо знайдене раніше допустиме значення зусилля для сталевого стержня 1. Допустиме зусилля для другого стержня знайдемо з умови міцності як для сталевого:  $N_2 \leq [\sigma]_c A_2 = 400 \cdot 120 \cdot 3 = 144 \cdot 10^3 \text{ Н}$ . Тоді  $F^* \leq 1,4 \cdot 144 \cdot 10^3 = 201,6 \cdot 10^3 \text{ Н}$ ;  $F^* \leq 15,6 \cdot 48 \cdot 10^3 = 748,8 \cdot 10^3 \text{ Н}$ .

Вибираємо в якості допустимої силу  $F^* = 201,6 \cdot 10^3 \text{ Н}$ , тобто замінивши бронзовий стержень 2 на сталевий, можна збільшити допустиме навантаження у  $\frac{F^*}{F} = \frac{201,6 \cdot 10^3}{48,38 \cdot 10^3} = 4,2$  рази.

### III. ТЕОРІЯ НАПРУЖНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ТІЛА В ТОЧЦІ

#### Питання для самоперевірки знань.

1. Що називається напруженням?
2. В яких одиницях вимірюються напруження в системі СІ?
3. Яку назву мають компоненти повного напруження у площадці?
4. Що слід розуміти під поняттям „напружений стан тіла в точці”?
5. В чому полягає закон парності дотичних напружень?
6. Які осі напруженого стану називають головними?
7. Які види напруженого стану ви знаєте і чим вони відрізняються?
8. У яких площадках діють максимальні дотичні напруження в точці і чому вони дорівнюють?
9. Що називають деформацією тіла?
10. Що називається абсолютною деформацією відрізка?
11. Що називається відносною лінійною деформацією тіла в точці?
12. Яку деформацію називають відносним зсувом?
13. В яких одиницях вимірюють лінійну деформацію та відносний зсув?
14. Які осі деформацій називаються головними?
15. Яка відносна деформація тіла в точці називається об'ємною?
16. Яку деформацію називають поздовжньою, а яку поперечною? Як ці деформації співвідносяться між собою?
17. Яка залежність існує між напруженнями і деформаціями твердого тіла згідно з законом Гука?
18. Назвіть пружні сталі матеріалу.
19. Що називається критерієм міцності?
20. Яка фізична величина є критерієм за першою теорією міцності?
21. В якості якого критерію застосовують найбільші дотичні напруження в точці: руйнування чи текучості?
22. Який основний недолік третьої теорії міцності?
23. Яка фізична величина є критерієм за четвертою класичною теорією міцності?
24. Для яких матеріалів в розрахунках на міцність застосовують теорію Мора?

#### ЗАДАЧА 5

Для елемента, вказаного на рис. 5.1, що знаходиться в умовах плоского напруженого стану, визначити аналітично: величину і напрямки головних напружень, максимальні дотичні напруження, головні деформації, відносну зміну об'єму, питому потенціальну енергію деформації. Перевірити елемент на міцність за відповідною для вказаного матеріалу теорією міцності (прийняти коефіцієнт запасу міцності для пластичного матеріалу  $n_T=1,5$ ; для крихкого –  $n_B=2,5$ ). Числові дані наведені у табл. 5.1

Таблиця 5.1. Варіанти завдань для задачі 5

| Варіант | $\sigma_x$ , МПа | $\sigma_y$ , МПа | $\tau_{xy}$ , МПа | Матеріал     |
|---------|------------------|------------------|-------------------|--------------|
| 0       | 20               | 100              | 50                | Сталь 45     |
| 1       | 30               | 50               | 80                | Латунь Л68   |
| 2       | 24               | 48               | 85                | Сталь 40Х    |
| 3       | 50               | 80               | 60                | Дуралюмін Д6 |
| 4       | 80               | 20               | 40                | Сталь 50     |
| 5       | 30               | 20               | 75                | Дуралюмін Д1 |
| 6       | 20               | 40               | 60                | Сталь 20     |
| 7       | 40               | 50               | 70                | Бронза БрО10 |
| 8       | 60               | 70               | 60                | Сталь 50ХН   |
| 9       | 500              | 35               | 65                | Бронза БрА5  |

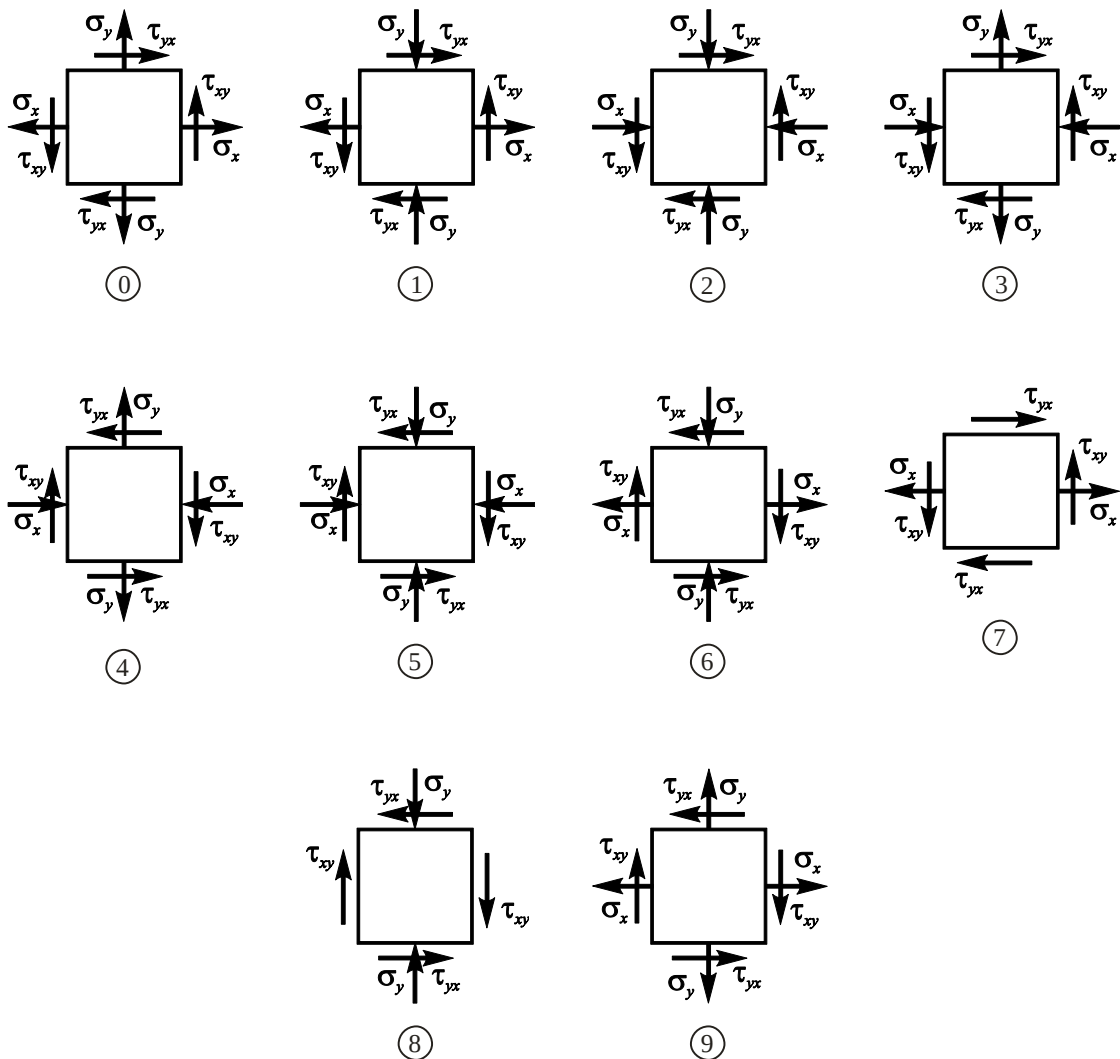
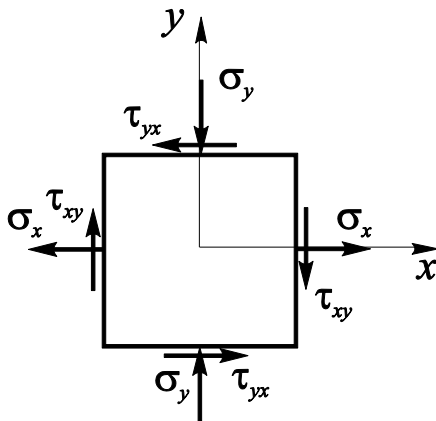


Рис. 5.1 Варіанти розрахункових схем до задачі 5

## План розв'язування задачі

1. Зобразити креслення елемента у відповідності до числових даних варіанту.
2. Виписати з довідкових таблиць усі необхідні характеристики матеріалу.
3. Знайти величини головних напружень та визначити їх напрямки. Зобразити всередині заданого елемента головні площадки і головні напруження.
4. Обчислити значення головних деформацій елемента  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  та відносну зміну об'єму  $\varepsilon_V$ .
5. Вибрати відповідно до матеріалу теорію міцності і перевірити елемент на міцність, обчисливши попередньо допустиме напруження для заданого матеріалу.

## Приклад розв'язування задачі



**Рис. 5.2** Схема елемента

Дано:  $\sigma_x = 100 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_y = 60 \text{ МПа}$ ,  
 $\tau_{xy} = 80 \text{ МПа}$ . Матеріал – сталь 30Г.

1. Зобразимо елемент у збільшеному масштабі (рис. 5.3), де в подальшому виконуватимемо всі необхідні побудови.

2. Випишемо з довідкової таблиці [1] (або будь якого іншого довідника) необхідні механічні характеристики матеріалу. Для сталі 30Г маємо:  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  $\mu = 0,25$ ,  $\sigma_T = 320 \text{ МПа}$  ( $\delta = 20\% > 5\%$ )

3. Знайдемо величину і напрямки головних напружень:

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{1}{2} \left[ \sigma_x + \sigma_y \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right] = \frac{1}{2} \left[ 100 - 60 \pm \sqrt{(100 + 60)^2 + 4 \cdot 80^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} (40 \pm 226,27) \text{ МПа}$$

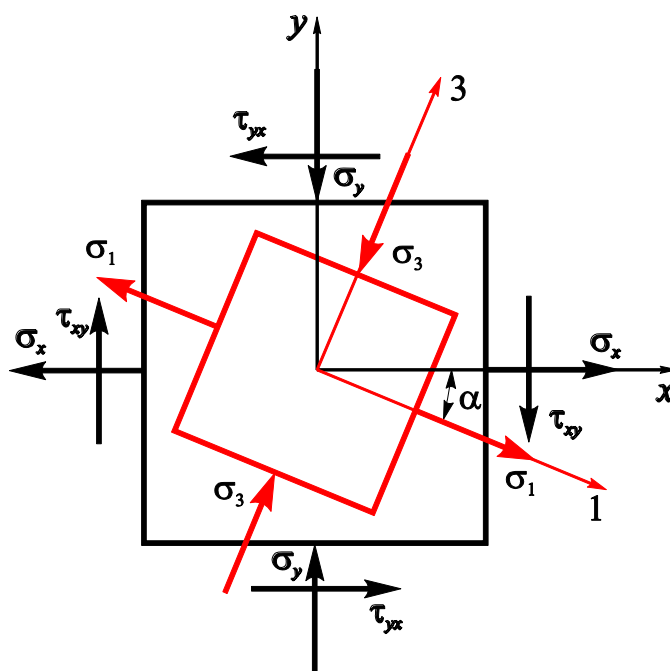
Звідси  $\sigma_1 = \sigma_{\max} = 133,135 \text{ МПа}$ ;  $\sigma_2 = 0$ ;  $\sigma_3 = \sigma_{\min} = -93,135 \text{ МПа}$ .

Перевірку правильності виконаних обчислень виконаємо, знайшовши перші інваріанти напруженого стану для неголовних і головних площадок:

$$I_{\sigma 1} = \sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3;$$

$$100 - 60 = 133,135 - 93,135.$$

Отже,  $40 \text{ МПа} = 40 \text{ МПа}$ , а значить обчислення виконані правильно.



**Рис. 5.3 Неголовні та головні площадки з діючими в них напруженнями**

Знайдемо положення головних площадок.

**Зауваження 1.** При визначенні напрямку головних напружень формулу записують у такому вигляді:  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$ . Напруження слід підставляти з урахуванням їх знаку

(нормальне напруження додатне, коли діє в бік розтягу, а дотичне напруження у площадці вважають додатним, коли воно намагається обернути елемент за годинниковою стрілкою). Потім знайдений кут відкладають від осі  $x$  проти годинникової стрілки, якщо знайдений кут – додатний, або за годинниковою стрілкою, якщо кут – від’ємний. Проведена таким чином вісь буде головною віссю, вздовж якої діє алгебраїчно більше зі знайдених головних напружень.

Отже, в нашому випадку

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{-2 \cdot 80}{100 - 60} = -1.$$

Звідси  $\alpha = -22,5^\circ$ .

Зобразимо головні площадки на схемі (рис. 5.3), беручи до уваги сформульоване зауваження 1, та вкажемо діючі у них головні напруження.

4. Обчислимо значення головних деформацій за допомогою закону Гука:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [133,135 - 0,25(0 - 93,135)] = 0,782 \cdot 10^{-3};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [0 - 0,25(-93,135 + 133,135)] = -0,05 \cdot 10^{-3};$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [-93,135 - 0,25(133,135 + 0)] = -0,632 \cdot 10^{-3}$$

Об'ємну деформацію знайдемо як суму головних деформацій:

$$\varepsilon_V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0,782 \cdot 10^{-3} - 0,05 \cdot 10^{-3} - 0,632 \cdot 10^{-3} = 0,1 \cdot 10^{-3},$$

або за законом Гука через головні напруження:

$$\varepsilon_V = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1-2 \cdot 0,25}{2 \cdot 10^5}(133,135 + 0 - 93,135) = 0,1 \cdot 10^{-3}.$$

5. Перевіримо елемент на міцність.

Оскільки сталь 30Г є пластичним матеріал, скористаємось третьою теорією міцності (критерій найбільших дотичних напружень):

$$\sigma_{екв}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma].$$

$$\text{Допустиме напруження } [\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{320}{1,5} = 213,33 \text{ МПа}$$

$$\sigma_{екв}^{III} = 133,135 + 93,135 = 226,27 \text{ МПа} > 213,33 \text{ МПа}.$$

Отже, умова міцності, як бачимо, не виконується.

## IV. КРУЧЕННЯ

### Питання для самоперевірки знань.

1. Коли має місце чисте кручення стержня?
2. Чи змінюється довжина круглого стержня при чистому крученні?
3. Який вид напруженого стану реалізується в стержні при крученні?
4. Де знаходиться небезпечна точка перерізу круглого стержня при крученні?
5. Запишіть умову міцності круглого стержня при крученні.
6. Запишіть вираз для закону Гука в абсолютних величинах для чистого кручення стержня.
7. Як знайти максимальні напруження при крученні стержня прямокутного перерізу?
8. В яких точках тонкостінного незамкненого профілю діють максимальні дотичні напруження при крученні?
9. Де діють максимальні дотичні напруження в замкнутому тонкостінному профілі при крученні?
10. Запишіть умови міцності і жорсткості для циліндричної гвинтової пружини з малим кроком.

### ЗАДАЧА 6

Для заданого вала (рис. 6.1) з умов міцності і жорсткості дібрати діаметри окремих його ділянок і округлити їх до стандартних розмірів у більший бік. Побудувати епюри абсолютних кутів закручування, взявши за нерухомий переріз один з кінців вала. Числові дані наведені у табл. 6.1. Довжина ділянки  $a=1$  м; допустимий кут закручування  $[\theta]=2$  град/м.

Таблиця 6.1. Варіанти завдань для задачі 6

| Варіант | $N_1$ , кВт | $N_2$ , кВт | $N_3$ , кВт | $N_4$ , кВт | $\omega$ , с <sup>-1</sup> | Матеріал     |
|---------|-------------|-------------|-------------|-------------|----------------------------|--------------|
| 0       | 0,2         | 0,4         | 0,3         | 0,5         | 10                         | Сталь 40     |
| 1       | 0,3         | 0,5         | 0,7         | 0,8         | 30                         | Латунь Л68   |
| 2       | 0,4         | 0,6         | 0,8         | 0,85        | 20                         | Сталь 40Х    |
| 3       | 0,5         | 0,7         | 0,9         | 0,6         | 40                         | Сталь Ст.3   |
| 4       | 0,8         | 1,0         | 2,0         | 1,5         | 60                         | Сталь 50     |
| 5       | 1,0         | 1,5         | 2,0         | 2,5         | 25                         | Дуралюмін Д1 |
| 6       | 2,0         | 3,0         | 4,0         | 6,0         | 75                         | Сталь 20     |
| 7       | 4,0         | 5,0         | 5,0         | 7,0         | 80                         | Бронза БрО10 |
| 8       | 6,0         | 6,5         | 7,0         | 6,0         | 35                         | Сталь Ст.5   |
| 9       | 5,0         | 6,0         | 3,5         | 6,5         | 45                         | Бронза БрА5  |

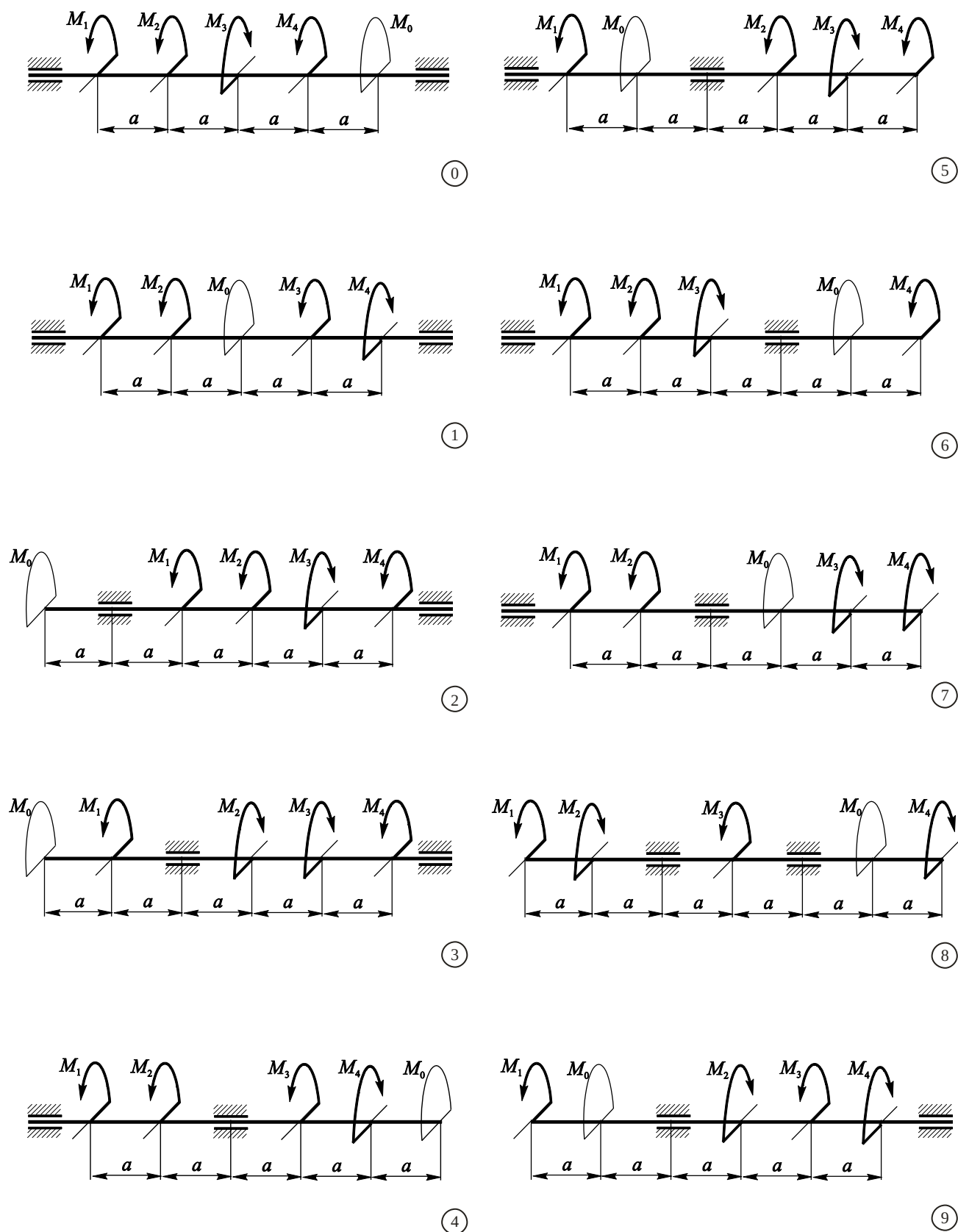


Рис. 6.1 Варіанти розрахункових схем до задачі 6



## План розв'язування задачі

1. Обчислити, нехтуючи тертям у підшипниках, потужність  $N_0$  з умови рівномірного обертання вала.
2. Визначити зовнішні моменти, прикладені до вала у відповідних перерізах.
3. Зобразити схему вала та побудувати епюру крутних моментів.
4. З умов міцності та жорсткості знайти діаметри вала на різних його ділянках, округливши одержані величини до стандартних значень у більшу сторону.
5. Зобразити ескіз східчастого вала, позначивши діаметри і довжини окремих ділянок.
6. Визначити кути закручування в характерних перерізах вала і побудувати епюру кутів закручування.

## Приклад розв'язування задачі

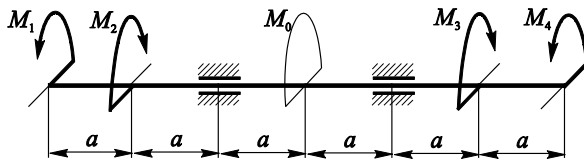


Рис. 6.2 Схема вала

Дано:  $N_1 = 0,6 \text{ кВт}$ ,  $N_2 = 2,5 \text{ кВт}$ ,

$N_3 = 4,0 \text{ кВт}$ ,  $N_4 = 3,0 \text{ кВт}$ ,  $\omega = 50 \text{ с}^{-1}$ ,

Матеріал – дуралюмін Д6,  $[\theta] = 2 \text{ град/м}$ ,  
 $a = 1 \text{ м}$ .

1. Визначимо невідому потужність  $N_0$ , взявши попередньо за напрямок моменту в цьому перерізі напрямок моменту  $M_1$ .

$$N_1 - N_2 + N_0 - N_3 + N_4 = 0.$$

Звідси  $N_0 = -N_1 + N_2 + N_3 - N_4 = -0,6 + 2,5 + 4 - 3 = 2,9 \text{ кВт}$ . Знак плюс у підсумку свідчить, що попередньо вибраний напрямок моменту в цьому перерізі був правильним.

2. Визначимо величини зовнішніх моментів:

$$M_1 = \frac{N_1}{\omega} = \frac{0,6 \cdot 10^3}{50} = 12 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad M_2 = \frac{N_2}{\omega} = \frac{2,5 \cdot 10^3}{50} = 50 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad M_0 = \frac{N_0}{\omega} = \frac{2,9 \cdot 10^3}{50} = 58 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = \frac{N_3}{\omega} = \frac{4 \cdot 10^3}{50} = 80 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad M_4 = \frac{N_4}{\omega} = \frac{3 \cdot 10^3}{50} = 60 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

3. Зобразимо розрахункову схему вала (рис. 6.3) та побудуємо епюру крутних моментів. Для цього розбиваємо вал на ділянки, починаючи відлік зліва направо від першого з перерізів, де прикладений момент. Знак крутного моменту, як відомо, можна вибирати довільно. Вважатимемо, що крутний момент у перерізі вала буде додатним при дії зовнішнього моменту у напрямку  $M_1$ . Оскільки маємо лише зосереджені моменти, то крутні моменти на кожній ділянці будуть постійними, тобто не залежатимуть від  $x$ .

Ділянка I:  $M_{кр1} = M_1 = 12 \text{ Н} \cdot \text{м}.$

Ділянка II:  $M_{кр2} = M_1 - M_2 = 12 - 50 = -38 \text{ Н} \cdot \text{м}.$

Ділянка III:  $M_{кр3} = M_1 - M_2 + M_0 = 12 - 50 + 58 = 20 \text{ Н} \cdot \text{м}.$

Ділянка IV:  $M_{кр4} = M_1 - M_2 + M_0 - M_3 = 12 - 50 + 58 - 80 = -60 \text{ Н} \cdot \text{м}.$

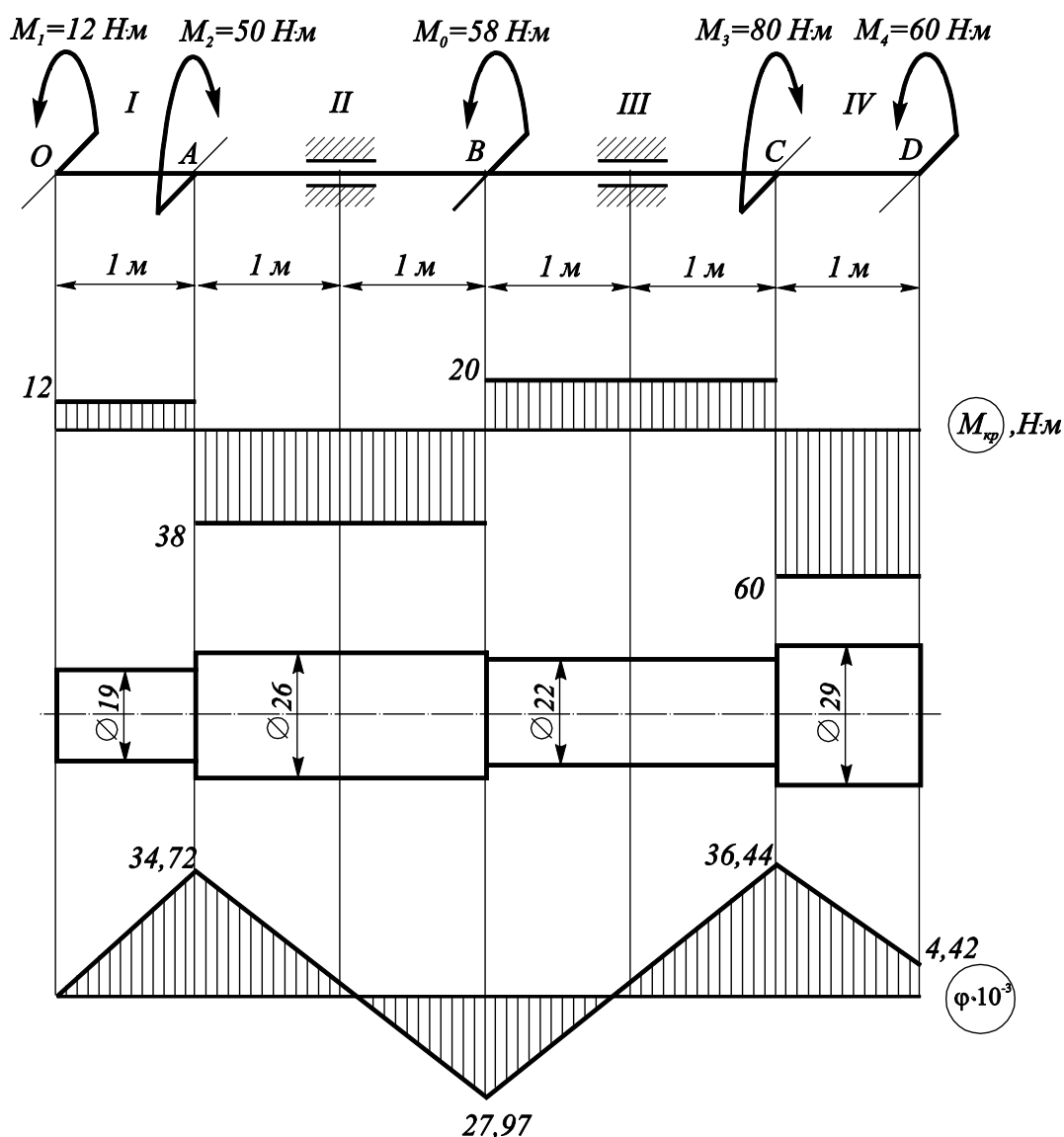


Рис. 6.3 Розрахункова схема, епюри та ескіз вала

4. Обчислимо діаметри окремих ділянок вала з умов міцності та жорсткості. Для круглого вала маємо:

умова міцності  $\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p} \leq [\tau];$

умова жорсткості  $\theta_{\max} = \frac{M_{кр}}{GI_p} \leq [\theta].$

Враховуючи, що полярні моменти опору і інерції відповідно дорівнюють  $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$  і

$I_p = \frac{\pi d^4}{32}$ , знаходимо:

з умови міцності –  $d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{кр}}{\pi[\tau]}};$  з умови жорсткості –  $d \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{кр}}{\pi G[\theta]}}.$

Модуль зсуву для дуралюмініу Д6, згідно з додатком 9 [1],  $G=2,7 \cdot 10^4$  МПа. Допустимий відносний кут закручування  $[\theta]=2$  град/м  $=0,035 \cdot 10^{-3}$  рад/мм нам заданий за умовою задачі, а допустиме напруження знайдемо, обравши, згідно з додатком 7 [1], такі характеристики для дуралюмініу Д6:  $\sigma_T=50$  МПа;  $\sigma_B=180$  МПа;  $\delta=8\%$ . Оскільки  $\delta \geq 5\%$ , то матеріал є пластичним. Тоді за третьою теорією міцності  $[\tau]=0,5[\sigma]=0,5 \frac{\sigma_T}{n_T}=0,5 \frac{50}{1,5}=16,67$  МПа.

Ділянка I:

$$d'_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{kp1}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 12 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 16,67}} = 15,44 \text{ мм};$$

$$d''_1 \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{kp1}}{\pi G[\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 12 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 2,7 \cdot 10^4 \cdot 0,035 \cdot 10^{-3}}} = 18,96 \text{ мм}.$$

Беремо більше з отриманих значень, округлюючи його до більшого цілого числа:

$$d_1 = 19 \text{ мм}$$

Ділянка II:

$$d'_2 \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{kp2}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 38 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 16,67}} = 22,64 \text{ мм};$$

$$d''_2 \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{kp1}}{\pi G[\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 38 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 2,7 \cdot 10^4 \cdot 0,035 \cdot 10^{-3}}} = 25,30 \text{ мм}.$$

Беремо  $d_2 = 26$  мм.

Ділянка III:

$$d'_3 \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{kp3}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 20 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 16,67}} = 18,28 \text{ мм};$$

$$d''_3 \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{kp3}}{\pi G[\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 20 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 2,7 \cdot 10^4 \cdot 0,035 \cdot 10^{-3}}} = 21,55 \text{ мм}.$$

Беремо  $d_3 = 22$  мм.

Ділянка IV:

$$d'_4 \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{kp4}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 60 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 16,67}} = 26,37 \text{ мм};$$

$$d''_4 \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{kp4}}{\pi G[\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 60 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 2,7 \cdot 10^4 \cdot 0,035 \cdot 10^{-3}}} = 28,36 \text{ мм}.$$

Беремо  $d_4 = 29$  мм.

Ескіз вала представлений на рис. 6.3.

5. Визначимо абсолютні кути закручування окремих ділянок і всього вала.

Для стержня з постійною по довжині жорсткістю перерізу і постійним діючим крутним моментом абсолютний кут закручування знаходимо за формулою:

$$\varphi = \frac{M_{kp} l}{GI_p}.$$

**Зауваження 1.** Знак кута закручування на ділянці визначається знаком крутного моменту. Величини кутів закручування знаходимо в радіанах.

$$\begin{aligned} \text{Ділянка I:} \quad I_{p1} &= \frac{\pi d_1^4}{32} = \frac{\pi \cdot (19 \cdot 10^{-3})^4}{32} = 1,28 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4; \\ \varphi_1 &= \frac{M_{кр1} a}{GI_{p1}} = \frac{12 \cdot 1}{2,7 \cdot 10^{10} \cdot 1,28 \cdot 10^{-8}} = 34,72 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ділянка II:} \quad I_{p2} &= \frac{\pi d_2^4}{32} = \frac{\pi \cdot (26 \cdot 10^{-3})^4}{32} = 4,49 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4; \\ \varphi_2 &= \frac{M_{кр2} \cdot 2a}{GI_{p2}} = \frac{-38 \cdot 2}{2,7 \cdot 10^{10} \cdot 4,49 \cdot 10^{-8}} = -62,69 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ділянка III:} \quad I_{p3} &= \frac{\pi d_3^4}{32} = \frac{\pi \cdot (22 \cdot 10^{-3})^4}{32} = 2,30 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4; \\ \varphi_3 &= \frac{M_{кр3} \cdot 2a}{GI_{p3}} = \frac{20 \cdot 2}{2,7 \cdot 10^{10} \cdot 2,3 \cdot 10^{-8}} = 64,41 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ділянка IV:} \quad I_{p4} &= \frac{\pi d_4^4}{32} = \frac{\pi \cdot (29 \cdot 10^{-3})^4}{32} = 6,94 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4; \\ \varphi_4 &= \frac{M_{кр4} \cdot a}{GI_{p2}} = \frac{-60 \cdot 1}{2,7 \cdot 10^{10} \cdot 6,94 \cdot 10^{-8}} = -32,02 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Кут закручування всього вала (вимірюється між крайніми перерізами, де прикладені моменти),

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = (34,72 - 62,69 + 64,41 - 32,02) \cdot 10^{-3} = 4,42 \cdot 10^{-3}.$$

6. Будуємо епюру кутів закручування. Для цього обчислюємо кути повороту перерізів вала, що збігаються з границями ділянок, відносно крайнього лівого кінця вала, вважаючи його нерухомим:

$$\varphi_{A-O} = \varphi_1 = 34,72 \cdot 10^{-3};$$

$$\varphi_{B-O} = \varphi_1 + \varphi_2 = 34,72 \cdot 10^{-3} - 62,69 \cdot 10^{-3} = -27,97 \cdot 10^{-3};$$

$$\varphi_{C-O} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 34,72 \cdot 10^{-3} - 62,69 \cdot 10^{-3} + 64,41 \cdot 10^{-3} = 36,44 \cdot 10^{-3};$$

$$\varphi_{D-O} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 34,72 \cdot 10^{-3} - 62,69 \cdot 10^{-3} + 64,41 \cdot 10^{-3} - 32,02 \cdot 10^{-3} = 4,42 \cdot 10^{-3}.$$

За цими даними будуємо епюру кутів повороту перерізів вала, яка представлена на рис. 6.3.

## V. ЗГИН ПРЯМИХ СТЕРЖНІВ

### Питання для самоперевірки знань.

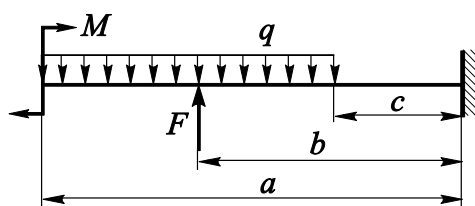
1. Коли має місце чистий згин стержня?
2. Які зусилля виникають в перерізі стержня за поперечного згину?
3. Форму якої кривої набуває вісь стержня при чистому згинанні?
4. Що називається нейтральним шаром стержня при згині?
5. Який вид напруженого стану реалізується в стержні при чистому згинанні?
6. Де знаходиться небезпечна точка перерізу стержня при чистому згинанні?
7. Чому при згинанні двотавровий профіль є більш раціональним у порівнянні з рівномічним з ним квадратним перерізом.
8. Які переміщення визначають при розрахунках стержнів на жорсткість при згинанні?
9. Сформулюйте правило знаків для переміщень в стержнях при згинанні.
10. Перелічіть початкові геометричні та статичні параметри однойменного методу визначення переміщень при згинанні.

### ЗАДАЧА 7

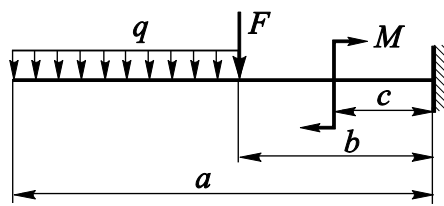
Для заданої консольної сталеві балки (рис. 7.1, табл. 7.1) з основної умови міцності дібрати круглий, прямокутний (з заданим співвідношенням сторін  $h/b$ ) і двотавровий перерізи. Порівняти вагу 1 м довжини кожного профілю. Провести повну перевірку міцності двотаврової балки. Довжина балки  $a = 2$  м.

Таблиця 7.1. Варіанти завдань для задачі 7

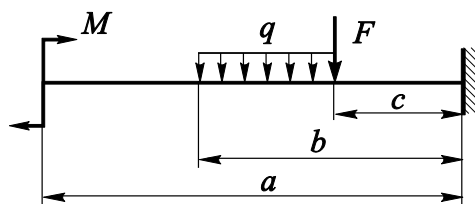
| Варіант | $q$ , кН/м | $F$ , кН | $M$ , кНм | $b$ , м | $c$ , м | $h/b$ | Марка сталі |
|---------|------------|----------|-----------|---------|---------|-------|-------------|
| 0       | 10         | 20       | 4         | 0,7     | 0,3     | 2     | Сталь 20    |
| 1       | 20         | 10       | 3         | 0,8     | 0,5     | 3     | Сталь 30    |
| 2       | 30         | 15       | 2         | 0,6     | 0,4     | 1     | Сталь 40    |
| 3       | 15         | 15       | 5         | 0,65    | 0,4     | 3     | Сталь 45    |
| 4       | 35         | 10       | 2         | 0,75    | 0,35    | 2     | Сталь 50    |
| 5       | 25         | 30       | 8         | 0,85    | 0,25    | 1     | Сталь 60    |
| 6       | 12         | 50       | 15        | 0,62    | 0,3     | 2     | Сталь 40Х   |
| 7       | 24         | 25       | 10        | 0,65    | 0,4     | 3     | Сталь 30Г   |
| 8       | 35         | 45       | 14        | 0,75    | 0,5     | 1     | Сталь 20Г   |
| 9       | 18         | 30       | 12        | 0,8     | 0,45    | 3     | Сталь 25    |



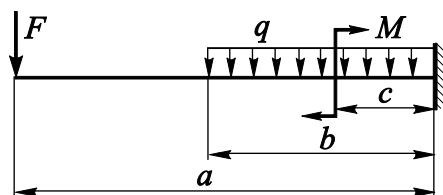
①



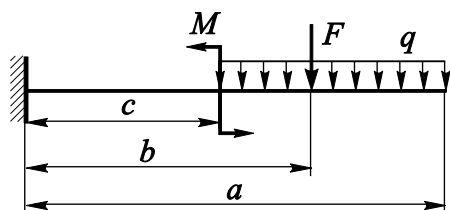
⑤



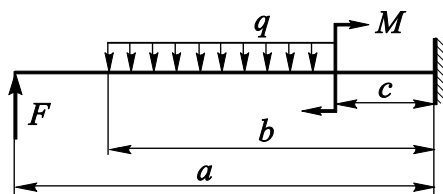
①



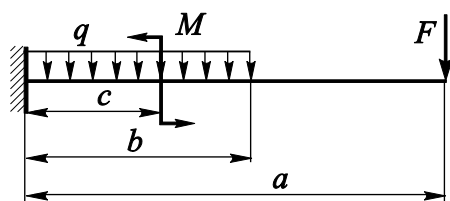
⑥



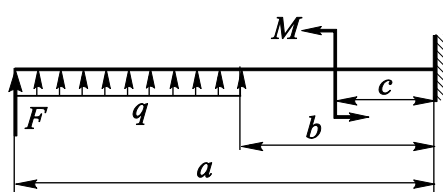
②



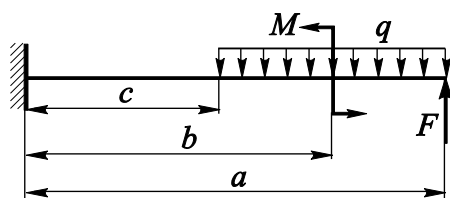
⑦



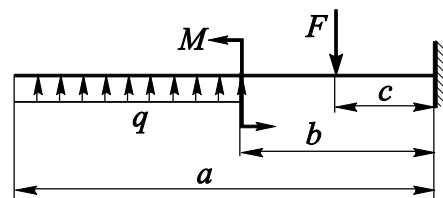
③



⑧



④



⑨

Рис. 7.1 Варіанти розрахункових схем до задачі 7

### План розв'язування задачі

1. Записати вирази для поперечної сили і згинального моменту на кожній ділянці консольної балки та побудувати їх епюри. Перевірити виконання диференціальних залежностей між епюрами.
2. Використовуючи основну умову міцності при згині, визначити необхідне значення моменту опору перерізу балки.
3. Дібрати розміри круглого, прямокутного і двотаврового перерізів.
4. Порівняти вагу одного метра довжини кожного профілю, вважаючи матеріал усіх балок однаковим.
5. Для двотаврового профілю визначити значення нормальних і дотичних напружень в характерних точках по висоті перерізу та побудувати епюри їх розподілу, визначити потенційно небезпечні точки та перевірити їх на міцність.

### Приклад розв'язування задачі

Дано:  $q=20$  кН/м,  $F=15$  кН,  $M=10$  кНм,  $h/b=2$ . Матеріал балки – сталь 20.

1. Розіб'ємо балку на ділянки і запишемо вирази для поперечної сили і згинального моменту на кожній ділянці.

Ділянка I:  $0 \leq x \leq 0,8$  м.  
 $Q(x) = 0;$   
 $M(x) = M = 1,6$  кНм.

Ділянка II:  $0,8 \text{ м} \leq x \leq 1,6$  м.  
 $Q(x) = F = 6$  кН;  
 $M(x) = M - F(x - 0,8) = 1,6 - 6(x - 0,8) = 6,4 - 6x$ .  
При  $x = 0,8$  м  $M(x) = 1,6$  кНм; при  $x = 1,6$  м  $M(x) = -3,2$  кНм.

Ділянка III:  $1,6 \text{ м} \leq x \leq 2$  м.  
 $Q(x) = F - q(x - 1,6) = 6 - 20(x - 1,6) = 38 - 20x$ .  
При  $x = 1,6$  м  $Q(x) = 6$  кН; при  $x = 2$  м  $Q(x) = -2$  кН.

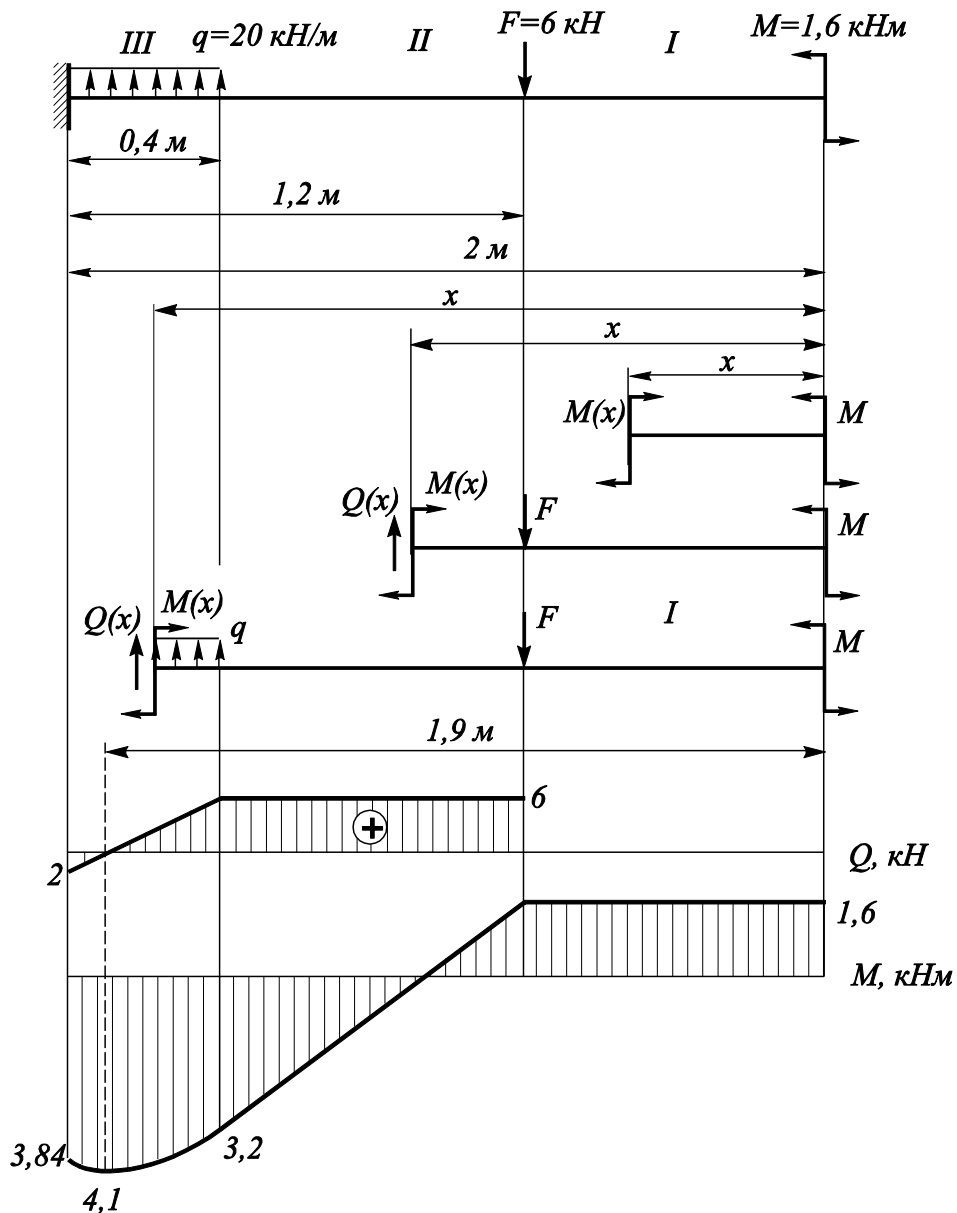
$$M(x) = M - F(x - 0,8) + q(x - 1,6) \frac{(x - 1,6)^2}{2} = 1,6 - 6(x - 0,8) + 20 \frac{(x - 1,6)^2}{2}.$$

При  $x = 1,6$  м  $M(x) = -3,2$  кНм; при  $x = 2$  м  $M(x) = -3,84$  кНм.

На третій ділянці  $M(x)$  набуває екстремального значення, оскільки  $Q(x)$  тут змінює свій знак. Визначимо екстремум моменту, встановивши його абсцису. Для цього прирівняємо до нуля вираз для поперечної сили на цій ділянці:

$$Q(x) = 38 - 20x = 0.$$

Звідси  $x = 1,9$  м. Тоді  $M_{\max} = 1,6 - 6(1,9 - 0,8) + 20 \frac{(1,9 - 1,6)^2}{2} = -4,1$  кНм.



**Рис. 7.2 Розрахункова схема і епюри зусиль**

За отриманими рівняннями та значеннями зусиль у відповідних перерізах будемо епюри зусиль (рис. 7.2)

2. З основної умови міцності при згині  $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma]$  добираємо перерізи (допустиме напруження для сталі 20  $[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{250}{1,5} = 166,7 \text{ МПа}$ ). Знайдемо мінімально допустиму величину моменту опору перерізу:

$$W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{4,1 \cdot 10^6}{166,7} = 24595,08 \text{ мм}^3.$$

Двотавр: за таблицями сортаментів прокатних профілів добираємо двотавр №10, для якого момент опору  $W = 34,8 \text{ см}^3 (34800 \text{ мм}^3)$  і площа перерізу  $A_{\text{дв-р}} = 1090 \text{ мм}^2$ .



Круг:  $W = \frac{\pi d^3}{32}$ ; звідси  $d \geq \sqrt[3]{\frac{32W}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 24595,08}{\pi}} = 63,04 \text{ мм}$ . Можна прийняти

$d = 63 \text{ мм}$ . Площа перерізу складає  $A_{\text{круг}} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 63^2}{4} = 3117,24 \text{ мм}^2$ .

Прямокутник:  $W = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{4b^3}{3}$ ;  $b \geq \sqrt[3]{\frac{3W}{4}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 24595,08}{4}} = 26,42 \text{ мм}$ .

Приймаємо, згідно з єдиним рядом лінійних розмірів  $R_{a40}$ , найближчий більший розмір  $b = 27 \text{ мм}$ . Висота перерізу  $h = 2b = 54 \text{ мм}$ . Площа перерізу  $A_{\text{пр-к}} = bh = 27 \cdot 54 = 1458 \text{ мм}^2$ .

3. Співвідношення ваг одного метру довжини балки дорівнюють співвідношенню їх площ. Отже

$$A_{\text{дв-р}} : A_{\text{пр-к}} : A_{\text{круг}} = 1090 : 1458 : 3117 = 1 : 1,34 : 2,86.$$

4. Проведемо повну перевірку міцності дібраного двотаврового перерізу балки в потенційно небезпечному перерізі, де діє згинальний момент  $M = 3,2 \text{ кНм}$  і поперечна сила  $Q = 6 \text{ кН}$  (див. рис. 7.1).

Випишемо з таблиць сортаментів геометричні характеристики двотавра №10, які будуть нам потрібні при подальших розрахунках:

- осьовий момент інерції перерізу  $I_z = 198 \text{ см}^4$ ;
- осьовий момент опору перерізу  $W_z = 39,7 \text{ см}^3$ ;
- статичний момент половини площі перерізу відносно осі  $z$   $S_z = 23,0 \text{ см}^3$ ;

Щоби провести повну перевірку на міцність, зобразимо у масштабі двотавровий переріз (рис. 7.3 а) та побудуємо епюри розподілу нормальних і дотичних напружень по висоті перерізу, попередньо обчисливши величини цих напружень у кількох характерних його точках.

Для спрощення обчислень представимо полицю двотавра у вигляді прямокутника з розмірами сторін  $b = 55 \text{ мм}$  і  $h = t = 7,2 \text{ мм}$  (рис. 7.3 б). Через малість товщини полиці  $t$  така заміна не вплине суттєво на результати розрахунків напруженого стану в області, прилеглій до полиці двотавра.

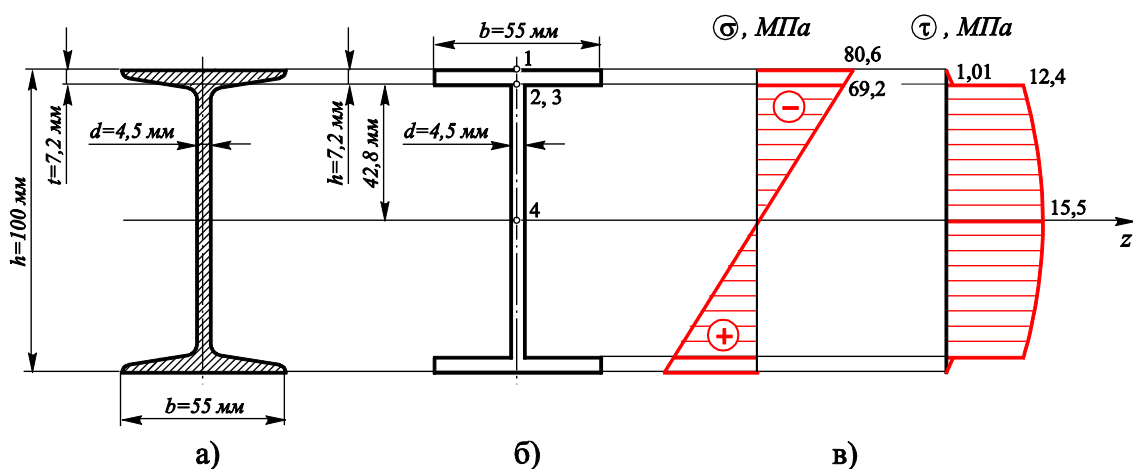


Рис. 7.3. Двотавровий переріз балки (а) і (б) та епюри розподілу напружень по його висоті (в)

**Точка 1.**  $\sigma^{(1)} = \frac{M}{W} = \frac{3,2 \cdot 10^6}{39700} = 80,6 \text{ МПа} ; \tau = 0.$

**Точка 2.** Ця точка належить полиці двотавра.

$$\sigma^{(2)} = \frac{M}{I_z} y_2 = \frac{3,2 \cdot 10^6}{198 \cdot 10^4} 42,8 = 69,2 \text{ МПа}.$$

Обчислимо дотичні напруження в цій точці.

**Зауваження 1.** Полиця двотавра відноситься до перерізів, для яких припущення щодо розподілу дотичних напружень, сформульованих Журавським, не виконуються, оскільки тут  $h/b = 7,2/55 = 0,13 < 2$ . Проте ми знехтуємо цим застереженням і обчислимо дотичне напруження за вказаною формулою, щоб оцінити лише якісну картину розподілу дотичних напружень по висоті двотавра. Як далі буде показано, точка 2 не відноситься до потенційно небезпечних.

Статичний момент площі, розташованої вище рівня точки 2, тобто полиці

$$S_z^{(2)} = S_z^{(3)} = 7,2 \cdot 55 \cdot (42,8 + 3,6) = 18374,4 \text{ мм}^3.$$

Тоді

$$\tau^{(2)} = \frac{QS_z^{(2)}}{b^{(2)} I_z} = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 18374,4}{55 \cdot 198 \cdot 10^4} = 1,01 \text{ МПа}.$$

**Точка 3.** Ця точка належить стояку двотавра.

$$\sigma^{(3)} = \sigma^{(2)} = 69,2 \text{ МПа}$$

$$\tau^{(3)} = \frac{QS_z^{(3)}}{b^{(3)} I_z} = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 18374,4}{4,5 \cdot 198 \cdot 10^4} = 12,4 \text{ МПа}.$$

**Точка 4.**  $\sigma^{(4)} = 0 ; \tau^{(4)} = \tau_{\max} = \frac{QS_z}{b^{(4)} I_z} = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 23 \cdot 10^3}{4,5 \cdot 198 \cdot 10^4} = 15,5 \text{ МПа}$

За отриманими результатами будемо епюри розподілу напружень по висоті двотавра (рис. 7.3 в).

Проведемо перевірку міцності балки в потенційно небезпечних точках перерізу. Згідно з епюрами напружень – це точки 1, 3 і 4.

**Точка 1.**  $\sigma^{(1)} = 80,6 \text{ МПа} < 166,7 \text{ МПа} ; \tau = 0$ . Умова міцності виконується.

**Точка 3.**  $\sigma^{(3)} = 69,2 \text{ МПа} ; \tau^{(3)} = 12,4 \text{ МПа}$ . Розрахункове напруження за четвертою теорією міцності:

$$\sigma_p^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{69,2^2 + 3 \cdot 12,4^2} = 72,5 \text{ МПа} < 166,7 \text{ МПа}.$$

Умова міцності виконується.

**Точка 4.**  $\sigma^{(4)} = 0$ ;  $\tau^{(4)} = 15,5 \text{ МПа} < 100 \text{ МПа}$  (тут має місце чистий зсув і допустиме дотичне напруження за четвертою теорією міцності  $[\tau] = 0,6[\sigma] = 0,6 \cdot 166,7 = 100 \text{ МПа}$ ).

Умова міцності виконується.

**Зауваження 2.** При аналізі міцнісної надійності конструкції допускається перевантаження їх елементів, але не більш як на 5% від величини допустимого напруження. Тут принагідно нагадати, що запас міцності передбачає зменшення граничних напружень до величини допустимих для пластичних матеріалів на 50% ( $n_T = 1,5$ ), а для крихких – на 150 – 200% ( $n_B = 2,5 \div 3$ ).

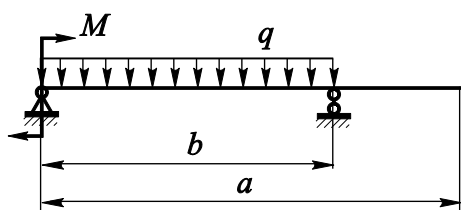
В даній задачі, як бачимо в перерізі, що перевірявся, в усіх потенційно небезпечних точках умова міцності виконувалася.

## ЗАДАЧА 8

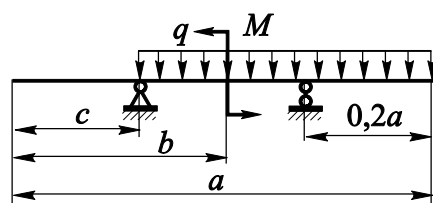
Для двоопорної шарнірно опертої балки довжиною  $a = 2 \text{ м}$  (рис. 8.1, табл. 8.1) побудувати епюри внутрішніх сил, за основною умовою міцності дібрати прямокутний переріз із заданим співвідношенням сторін  $h/b$ . З використанням методу початкових параметрів визначити переміщення в балці та побудувати епюри кутів повороту перерізів і прогинів, а також перевірити балку на жорсткість за кутами повороту перерізів на опорах та за стрілою прогину. Прийняти  $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$ ,  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  $[f] = 8 \text{ мм}$ ,  $[\theta] = 0,01$ .

Таблиця 8.1. Варіанти завдань для задачі 4

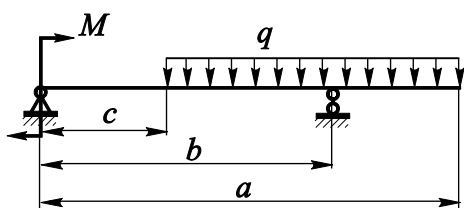
| Варіант | $q$ , кН/м | $M$ , кНм | $h/b$ | $b$ , м | $c$ , м |
|---------|------------|-----------|-------|---------|---------|
| 0       | 15         | 4         | 1:2   | 0,8     | 0,4     |
| 1       | 10         | 3         | 1:4   | 0,7     | 0,5     |
| 2       | 20         | 2         | 1:1   | 0,5     | 0,3     |
| 3       | 12         | 5         | 1:3   | 0,75    | 0,5     |
| 4       | 35         | 2         | 1:2,5 | 0,75    | 0,45    |
| 5       | 25         | 8         | 1:2   | 0,8     | 0,45    |
| 6       | 8          | 15        | 1:3,5 | 0,6     | 0,4     |
| 7       | 4          | 10        | 1:1   | 0,65    | 0,3     |
| 8       | 5          | 14        | 1:3   | 0,75    | 0,55    |
| 9       | 8          | 12        | 1:2,5 | 0,85    | 0,4     |



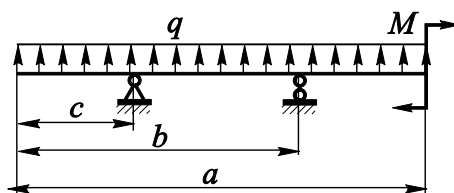
0



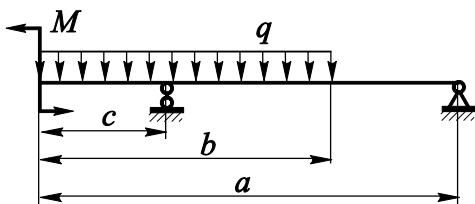
5



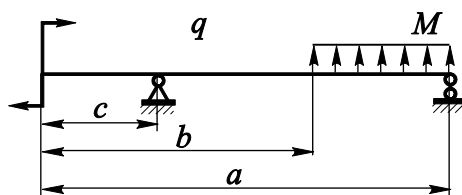
1



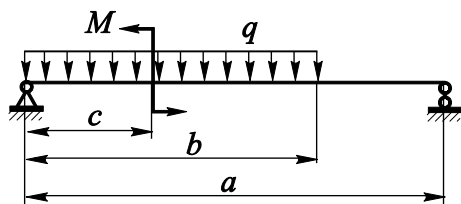
6



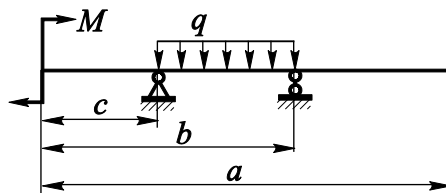
2



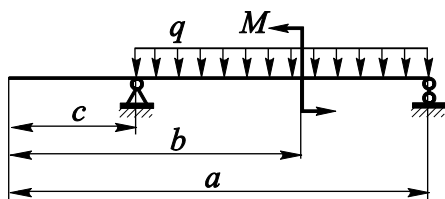
7



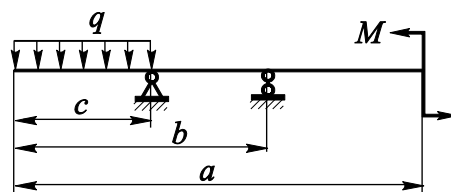
3



8



4



9

Рис. 8.1 Варіанти розрахункових схем до задачі 8

## План розв'язування задачі

1. Знайти опорні реакції, записати вирази для поперечної сили і згинального моменту на кожній ділянці балки та побудувати епюри цих зусиль.
2. Використовуючи основну умову міцності при згині, визначити необхідне значення моменту опору перерізу балки.
3. Дібрати розмір прямокутного перерізу за заданим співвідношенням сторін  $h/b$ .
4. Знайти початкові параметри з умови відсутності прогинів на опорах балки.
5. Записати універсальне рівняння кутів поворотів перерізів і прогинів балки та за його допомогою обчислити їх значення в перерізах балки, достатніх для побудови епюр цих переміщень.
6. Побудувати епюри переміщень та перевірити балку на жорсткість за заданими допустимими кутами поворотів опорних перерізів та стрілою прогину.

## Приклад розв'язування задачі

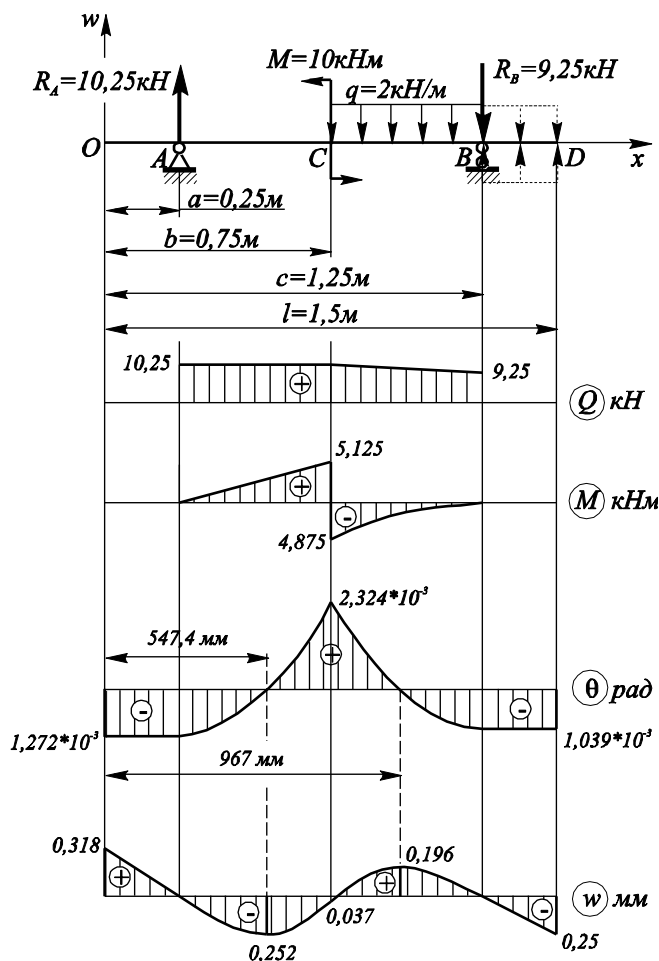


Рис. 8.2. Розрахункова схема балки та епюри зусиль та переміщень

Для двоопорної шарнірно опертої балки, зображеної на рис. 8.2, побудувати епюри внутрішніх сил, дібрати квадратний переріз зі стороною  $a$ , побудувати епюри кутів повороту перерізів та прогинів, а також перевірити балку на жорсткість за кутами повороту перерізів на опорах A і B та за стрілою прогину. Прийняти  $[\sigma] = 100\text{ МПа}$ ,

$$E = 2 \cdot 10^5\text{ МПа}, [f] = 8\text{ мм}, [\theta] = 0,01$$

Визначимо опорні реакції.

$$\sum M_A = M - q \cdot 0,5 \cdot 0,75 - R_B \cdot 1 = 0;$$

$$\sum M_B = M + q \cdot 0,5 \cdot 0,25 - R_A \cdot 1 = 0$$

$$R_A = 10,25\text{ кН}; R_B = 9,25\text{ кН}$$

Перевірка:

$$\sum Y = R_A - q \cdot 0,5 - R_B = 10,25 - 1 - 9,25 = 0.$$

Епюри зусиль  $Q$  і  $M$  представлені на рис.8.2.

З основної умови міцності визначимо розміри поперечного перерізу балки (за умовою задачі – квадратного):

$$W = \frac{a^3}{6} \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{5,125 \cdot 10^6}{100} = 51250 \text{ мм}^3.$$

Звідси  $a \geq 67,497 \text{ мм}$ . Округляючи до ближчого цілого числа, приймаємо  $a = 68 \text{ мм}$ .

Головний центральний момент інерції перерізу  $I = \frac{a^4}{12} = \frac{68^4}{12} = 1781781,33 \text{ мм}^4$ . Тоді

жорсткість перерізу  $EI = 2 \cdot 10^5 \cdot 1781781,33 = 356,35 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{мм}^2$

Далі проведемо необхідні розрахунки на жорсткість, включно з побудовою епюр переміщень.

Помістивши початок координат в точці  $O$ , запишемо універсальні рівняння кутів поворотів перерізів і прогинів балки:

$$\theta(x) = \theta_0 + \frac{1}{EI} \left[ R_A \frac{(x-a)^2}{2!} - M \frac{(x-b)}{1!} - q \frac{(x-b)^3}{3!} + q \frac{(x-c)^3}{3!} - R_B \frac{(x-c)^2}{2!} \right];$$

$$w(x) = w_0 + \theta_0 x + \frac{1}{EI} \left[ R_A \frac{(x-a)^3}{3!} - M \frac{(x-b)^2}{2!} - q \frac{(x-b)^4}{4!} + q \frac{(x-c)^4}{4!} - R_B \frac{(x-c)^3}{3!} \right].$$

В опорних перерізах прогини відсутні. Тоді

$$w_A|_{x=a} = w_0 + \theta_0 a = 0;$$

$$w_B|_{x=c} = w_0 + \theta_0 c + \frac{1}{EI} \left[ R_A \frac{(c-a)^3}{3!} - M \frac{(c-b)^2}{2!} - q \frac{(c-b)^4}{4!} \right] = 0;$$

Після підстановки числових значень отримаємо:

$$w_0 + \theta_0 \cdot 250 = 0;$$

$$\begin{aligned} w_0 + \theta_0 \cdot 1250 + \frac{1}{EI} \left[ 10,25 \cdot 10^3 \frac{(10^3)^3}{6} - 10^7 \frac{2,5 \cdot 10^5}{2} - 2 \frac{6,25 \cdot 10^{10}}{24} \right] &= \\ &= w_0 + \theta_0 \cdot 1250 + \frac{10^{12}}{EI} \left[ \frac{20,5 - 15 - 0,0625}{12} \right] = w_0 + \theta_0 \cdot 1250 + \frac{10^{12}}{EI} 0,453 = 0 \end{aligned}$$

Віднімаючи від другого рівняння перше отримаємо  $\theta_0 = -\frac{0,453 \cdot 10^9}{EI} = -1,272 \cdot 10^{-3}$ . Тоді

$$w_0 = -250\theta_0 = 250 \cdot 1,272 \cdot 10^{-3} = 0,318 \text{ мм}.$$

Знайшовши початкові параметри, будуюмо епюри переміщень.

**Зауваження 1.** Згідно з диференціальним рівнянням пружної лінії стержня і диференціальною залежністю між кутом повороту перерізу та прогином відзначимо, що по відношенню до епюри прогинів як графіка функції епюра кутів повороту є графіком похідної, а епюра згинальних моментів – графіком другої похідної. На цій підставі епюра згинальних моментів по відношенню до епюри кутів повороту як графіка функції є графіком похідної, а

епюра поперечних сил – графіком другої похідної. Ці залежності дозволяють спростити процес побудови епюр переміщень та здійснити перевірку правильності виконаних побудов.

Визначимо кути повороту перерізів на опорах  $A$  і  $B$ , в точці  $D$ , а також в точці  $C$  прикладання зосередженого моменту.

$$\theta_A|_{x=a} = \theta_0 = -1,272 \cdot 10^{-3};$$

$$\begin{aligned} \theta_C|_{x=b} &= -\frac{0,453 \cdot 10^9}{EI} + \frac{1}{EI} R_A \frac{(b-a)^2}{2!} = -\frac{0,453 \cdot 10^9}{EI} + \frac{1}{EI} 10,25 \cdot 10^3 \frac{25 \cdot 10^4}{2} = \\ &= -1,272 \cdot 10^{-3} + 3,595 \cdot 10^{-3} = 2,324 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_B|_{x=c} &= \theta_0 + \frac{1}{EI} \left[ R_A \frac{(c-a)^2}{2!} - M \frac{(c-b)}{1!} - q \frac{(c-b)^3}{3!} \right] = -\frac{0,453 \cdot 10^9}{EI} + \\ &+ \frac{10^9}{EI} \left[ 10,25 \frac{1}{2} - 10 \cdot 0,5 - 2 \frac{0,125}{6} \right] = -\frac{0,37 \cdot 10^9}{356,35 \cdot 10^9} = -1,039 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_D|_{x=l} &= \theta_0 + \frac{1}{EI} \left[ R_A \frac{(l-a)^2}{2!} - M \frac{(l-b)}{1!} - q \frac{(l-b)^3}{3!} - R_B \frac{(l-c)^2}{2!} + q \frac{(l-c)^3}{3!} \right] = \\ &= -\frac{0,453 \cdot 10^9}{EI} + \frac{10^9}{EI} \left[ 10,25 \frac{1,5625}{2} - 10 \cdot 0,75 - 2 \frac{0,421875}{6} - \right. \\ &\left. - 9,25 \frac{0,0625}{2} + 2 \frac{0,015625}{6} \right] = -\frac{0,453 \cdot 10^9}{EI} + \frac{0,083 \cdot 10^9}{EI} = -\frac{0,370 \cdot 10^9}{356,35 \cdot 10^9} = -1,039 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Оскільки кути повороту перерізів по довжині балки змінюють знак, знайдемо абсциси перерізів, кути повороту яких дорівнюють нулю. Згідно з розрахунками ці перерізи знаходяться на ділянках  $AC$  і  $CB$ .

Ділянка  $AC$ :

$$\theta(x) = \theta_0 + \frac{1}{EI} \left[ R_A \frac{(x-a)^2}{2!} \right] = -\frac{0,453 \cdot 10^9}{EI} + \frac{1}{EI} 10,25 \cdot 10^3 \frac{(x-250)^2}{2} = 0.$$

Звідси  $x = 547,4$  мм.

Ділянка  $CB$ :

Положення абсциси  $x$ , за якої  $\theta = 0$ , можна знайти з задовільною точністю, не проводячи громіздких розрахунків для отримання та розв'язання кубічного рівняння відносно  $x$ , що матиме місце для цієї ділянки, а безпосередньо з епюри  $\theta$ , провівши її уточнену побудову з використанням універсального рівняння кутів поворотів перерізів. Дані розрахунків кутів повороту на ділянці  $CB$  зведені до таблиці.

**Табл. 11.1 Результати розрахунків кутів повороту перерізів на ділянці  $CB$**

| $x$ , м         | 0,8                   | 0,9                   | 1,0                    | 1,1                    | 1,2                    |
|-----------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| $\theta$ , рад. | $1,675 \cdot 10^{-3}$ | $0,592 \cdot 10^{-3}$ | $-0,210 \cdot 10^{-3}$ | $-0,741 \cdot 10^{-3}$ | $-1,005 \cdot 10^{-3}$ |

З урахуванням масштабу знаходимо  $x=967$  мм

Визначимо прогини балки в точках  $O$ ,  $C$ ,  $D$ , а також в точках, де прогини екстремальні.  
Прогин в точці  $O$  – це знайдений початковий прогин  $w_0 = 0,318$  мм.

$$w_C|_{x=b} = w_0 + \theta_0 b + \frac{1}{EI} R_A \frac{(b-a)^3}{3!} = 0,318 - 1,272 \cdot 10^{-3} \cdot 750 + \\ + \frac{1}{3563562,67 \cdot 10^5} 10,25 \cdot 10^3 \frac{125 \cdot 10^6}{6} = -0,636 + 0,599 = -0,037 \text{ мм}$$

$$w_D|_{x=l} = w_0 + \theta_0 l + \frac{1}{EI} \left[ R_A \frac{(l-a)^3}{3!} - M \frac{(l-b)^2}{2!} - q \frac{(l-b)^4}{4!} + q \frac{(l-c)^4}{4!} - R_B \frac{(l-c)^3}{3!} \right] = \\ = 0,318 - 1,272 \cdot 10^{-3} \cdot 1500 + \\ + \frac{10^{12}}{3563562,67 \cdot 10^5} \left[ 10,25 \frac{1,25^3}{6} - 10 \frac{0,75^2}{2} - 2 \frac{0,75^4}{24} + 2 \frac{0,25^4}{24} - 9,25 \frac{0,25^3}{6} \right] = \\ = -1,59 + \frac{10^7}{3563562,67} [3,337 - 2,812 - 0,026 + 0,003 - 0,024] = -1,59 + 1,34 = -0,25 \text{ мм}$$

$$w_{\max 1}|_{x=547,4 \text{ мм}} = w_0 + \theta_0 \cdot 547,4 + \frac{1}{EI} R_A \frac{(547,4-a)^3}{3!} = 0,318 - 1,272 \cdot 10^{-3} \cdot 547,4 + \\ + \frac{1}{3563562,67 \cdot 10^5} 10,25 \cdot 10^3 \frac{26304066,424}{6} = 0,318 - 0,696 + 0,126 = -0,252 \text{ мм.}$$

$$w_{\max 2}|_{x=967 \text{ мм}} = w_0 + \theta_0 \cdot 967 + \frac{1}{EI} \left[ R_A \frac{(967-a)^3}{3!} - M \frac{(967-b)^2}{2!} - q \frac{(967-b)^4}{4!} \right] = \\ = 0,318 - 1,272 \cdot 10^{-3} \cdot 967 + \frac{10^{12}}{3563562,67 \cdot 10^5} \left[ 10,25 \frac{0,717^3}{6} - 10 \frac{0,217^2}{2} - 2 \frac{0,217^4}{24} \right] = \\ = -0,912 + 1,108 = 0,196 \text{ мм}$$

Перевіряємо балку на жорсткість:

- кути повороту на опорах  $|\theta_A| = 1,272 \cdot 10^{-3} < [\theta] = 0,01$ ,  $|\theta_B| = 1,039 \cdot 10^{-3} < [\theta] = 0,01$ ;
- стріла прогину  $f = |w_{\max 1}| = 0,318 \text{ мм} < [f] = 8 \text{ мм}$ .

Отже, умови жорсткості для балки виконуються.



## ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Опір матеріалів: Підручник / Г.С. Писаренко, О.Л. Квітка, Е.С. Уманський; За ред. Г.С. Писаренка. - К.: Вища шк., 1993. - 655 с.
2. Збірник задач з опору матеріалів: Навч. посіб. / М.І. Бобир, А.Є. Бабенко, О.О. Боронко та ін.; За ред. М.І. Бобиря. – К.: Вища шк., 2008. – 399 с.: іл.
3. Сборник задач по сопротивлению материалов / Под ред. В. К. Качурина. – М.; Наука, 1972. – 430 с.
4. Приклади розв'язання типових задач з опору матеріалів: Метод. вказівки до викон. курс. роботи з дисц. "Опір матеріалів" для студ. техн. спец. Усіх форм навчання / Уклад.: Б.І. Ковальчук, С.М. Шукаєв, О.П. Заховайко, Д.Ю. Шпак. – К.: ІВЦ "Видавництво "Політехніка", 2003. – Ч. І.- 68 с.
5. Опір матеріалів: метод. Вказівки до виконання курсової і розрахунково-графічних робіт (завдання і приклади розрахунків) для студ. техн. напрямів підготов. усіх форм навчання / Уклад.: А.Є. Бабенко, О.О. Боронко, Б.І. Ковальчук та ін. К.: НТУУ "КПІ", 2010. – 108 с.