

УДК 539.376

МОДЕЛЮВАННЯ ДЕФОРМАЦІЙ ПОВЗУЧОСТІ У НЕЛІНІЙНО-В'ЯЗКОПРУЖНИХ МАТЕРІАЛАХ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ КУБІЧНОЇ ТЕОРІЇ В'ЯЗКОПРУЖНОСТІ

Павлюк Я.В., Фернаті П.В., Рагуліна В.С.

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенко НАН України, м.Київ, Україна;

***Анотація.** Розглядається задача із визначення параметрів дробово-експоненційних ядер спадковості нелінійно-в'язкопружних матеріалів при постійних напруженнях. Проаналізовано метод визначення параметрів ядер, що використовується в кубічній теорії в'язкопружності. Ядра спадковості задаються дробово-експоненційною функцією Работнова. Виконано експериментальну апробації методу визначення параметрів ядер на задачах із розрахунку деформацій повзучості при постійних напруженнях та експериментально апробовано параметри дробово-експоненційних ядер спадковості для орієнтованого поліпропілену, нейлонових волокон FM 3001 і FM 10001, мікро пластику, склопластику ТС 8/3-250, склопластику СВAM та склопластику контактного формування.*

***Ключові слова:** повзучість, дробово-експоненційне ядро, кубічна теорія.*

Одним із основних завдань спадкової теорії повзучості є вибір ядер інтегральних рівнянь, знаходження їх резольвент і достовірне визначення параметрів ядер. В'язкопружна поведінка деяких армованих полімерів, склопластиків і металів, а також гірських порід досить добре описується за допомогою резольвентних операторів з ядром спадковості у вигляді дробово-експоненційної функції Работнова [1]. Найбільш загальний підхід до визначення механічних характеристик нелінійно-в'язкопружних матеріалів базується на використанні кратно-інтегрального рівняння Вольтерра-Фреше. Однак, велика кількість і багатомірна природа ядер спадковості ускладнює розв'язок задачі із визначення параметрів ядер. У зв'язку з цим запропоновано спрощені варіанти загального нелінійного визначального рівняння одним із яких є кубічна теорія.

У даній роботі вирішується задача ідентифікації дробово-експоненційних ядер спадковості нелінійно-в'язкопружних матеріалів в рамках всіх виділених варіантів нелінійної теорії в'язкопружності, і отримані рішення апробуються на завданнях розрахунку деформацій повзучості при постійних напруженнях.

1. Постановка задачі дослідження. Об'єкт дослідження.

Визначальне рівняння кубічної теорії в одновимірному випадку, що задає залежність між деформаціями ε напруженнями σ і t часом, записується у вигляді [2,3]:

$$\varepsilon(t) = \frac{\lambda_1}{E_1} \left[\sigma(t) + \int_0^t K_1(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \right] + \frac{\lambda_3}{E_3} \int_0^t K_3(t-\tau) \sigma^3(\tau) d\tau; \quad (1.1)$$

котре використовується для опису повзучості в'язкопружних матеріалів, коли в залежності від рівня напружень можна виділити лінійну і нелінійну межу в'язкопружних властивостей. Тут $K_1(t-\tau)$ і $K_3(t-\tau)$ – ядра спадковості в лінійній і нелінійній області відповідно, а $E_1 = E$.

В якості ядер повзучості використовують дробово-експоненційне ядро [1]:

$$K(t-\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-\tau)^{\alpha+(1+\alpha)n}}{\Gamma[(1+\alpha)(1+n)]}, \quad (1.2)$$

де α і β – параметри ядер ($-1 < \alpha < 0$; $\beta > 0$); $\Gamma[\cdot]$ – гамма-функція Ейлера.

Параметри α і β дробово-експоненційного ядра (1.2), визначаються за результатами обробки експериментальних даних на одновісну повзучість при фіксованій температурі декількох рівнях постійних напружень, так що

$$\sigma(t) = h(t) \sigma_k; \quad (k = \overline{1, m}), \quad (1.3)$$

де $h(t)$ – одинична функція Хевісайда ($h(t) = 0$ при $t < 0$ і $h(t) = 1$ при $t \geq 0$), а $\sigma_k = const$.

В якості експериментальних даних, отриманих згідно з (1.3), використані дані випробувань на повзучість зразків поліпропілену, нейлонових волокон FM3001 і FM10001, мікропластику, склотекстоліту ТС 8/3-250, склопластику СВAM і склопластику контактного формування, джерела звідки подані експериментальні дані подані у [3].

Задача полягає у встановленні характеру нелінійності в'язкопружних властивостей досліджених матеріалів, визначенні параметрів дробово-експоненційних ядер спадковості, апробації методу визначення параметрів ядер на задачах із розрахунку деформацій повзучості при постійних напруженнях.

2. Методика визначення параметрів ядер спадковості. Кубічна теорія є окремим частковим випадком загальної нелінійної теорії в'язкопружності Вольтера-Фреше, визначальні рівняння якої включають тільки лінійний і кубічний члени. Повзучість матеріалу, як власне і релаксація напружень, описується двома незалежними ядрами $K_1(t)$ і $K_3(t)$, що відображають відповідно лінійне і нелінійне в'язкопружне деформування матеріалу.

Методика визначення коефіцієнтів і параметрів ядер повзучості в кубічній теорії (1.2) реалізується наступним чином [2,3].

Нехай є сімейство кривих повзучості « $\varepsilon - t$ » при різних рівнях постійних напружень, кожне з яких досягнуто ступінчастим навантаженням згідно (1.3). Визначальне рівняння повзучості (1.2) з урахуванням (1.3) записується у вигляді

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_k}{E} \left[1 + \lambda_1 \int_0^t K_1(\tau) d\tau \right] + \frac{\sigma_k^3}{E_3} \lambda_3 \int_0^t K_3(\tau) d\tau, \quad (2.1)$$

де прийнято, що $h(t) = 1$.

По заданих кривих повзучості (2.1) будуються функції повзучості

$$J_k(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_k} = \frac{1}{E} \left[1 + \lambda_1 \int_0^t K_1(\tau) d\tau \right] + \frac{\sigma_k^2}{E_3} \lambda_3 \int_0^t K_3(\tau) d\tau, \quad (2.2)$$

і визначається область лінійності в'язкопружних властивостей матеріалу. Вважається, що матеріал володіє лінійними в'язкопружними властивостями в деякій області напружень, якщо в цій області функція повзучості (2.2) не залежить від рівня напружень.

Параметри ядер повзучості і невідомі коефіцієнти в (2.1) визначаються в два етапи. На першому етапі визначаються параметри ядра повзучості $K_1(t)$ і параметр λ_1 , що описують лінійне в'язкопружне деформування матеріалу. У цьому випадку рівняння (2.2) перетворюється до лінійного інтегрального рівняння

$$\frac{\bar{\varepsilon}(t)}{\bar{\sigma}_k} = \frac{1}{E} \left(1 + \lambda_1 \int_0^t K_1(\tau) d\tau \right), \quad (2.3)$$

невідомі параметри якого визначаються шляхом мінімізації функціоналу

$$F(\lambda_1, \bar{p}_i) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\bar{\varepsilon}(t_j, \bar{\sigma}_k)}{\bar{\sigma}_k} - \frac{1}{E} \left[1 + \lambda_1 \int_0^{t_j} K_1(\tau, \bar{p}_i) d\tau \right] \right\}^2. \quad (2.4)$$

Тут \bar{p}_i – параметри ядра повзучості $K_1(t)$; $\bar{\varepsilon}(\cdot)$ – експериментальні значення деформацій повзучості в лінійній області ($\bar{\sigma}_k < \sigma_*$).

На другому етапі визначаються параметри ядра повзучості $K_3(t)$ і коефіцієнти $b = \lambda_3 E_3^{-1}$, що описують деформування матеріалу в нелінійній області. В цьому випадку рівняння (2.1) можна представити у вигляді

$$E \frac{\tilde{\varepsilon}(\tilde{\sigma}_k, t_j)}{\tilde{\sigma}_k} - \left(1 + \lambda_1 \int_0^{t_j} K_1(\tau, \bar{p}_i) d\tau \right) = b E \tilde{\sigma}_k^2 \int_0^{t_j} K_3(\tau) d\tau, \quad (2.5)$$

де величина

$$I(\tilde{\sigma}_k, t_j) \equiv E \frac{\tilde{\varepsilon}(\tilde{\sigma}_k, t_j)}{\tilde{\sigma}_k} - \left(1 + \lambda_1 \int_0^t K_1(\tau, \tilde{p}_i) d\tau \right) \quad (2.6)$$

відома, оскільки величини $\tilde{\varepsilon}(\tilde{\sigma}_k, t_j)$ вимірюються за експериментальними кривими повзучості в нелінійній області ($\tilde{\sigma}_k > \sigma_*$), а значення параметрів визначаються згідно (2.4).

Параметри ядра повзучості $K_3(t)$ і величина коефіцієнту b , виходячи з (2.5) і (2.6) визначаються за результатами апроксимації дискретних значень величини шляхом мінімізації функціоналу

$$F(b, \tilde{p}_i) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \left\{ I(\tilde{\sigma}_k, t_j) - bE\tilde{\sigma}_k^2 \int_0^t K_3(\tau, \tilde{p}_i) d\tau \right\}^2 \rightarrow 0, \quad (2.7)$$

де \tilde{p}_i – параметри ядра повзучості $K_3(\cdot)$.

3. Чисельна реалізація методики

Експериментальні значення деформацій повзучості $\varepsilon(\sigma_k, t_j)$, заміряні по кривим повзучості в області напружень, які задовольняють умовам лінійності в'язкопружних властивостей нейлонових волокон і склопластиків, використовуються для визначення параметрів дробово-експоненційних ядер (1.2). В цьому випадку функціонал (2.7) з урахуванням (1.2) записується у вигляді

$$F(\alpha_1, \beta_1, \lambda_1) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\bar{\varepsilon}(\bar{\sigma}_k, t_j)}{\bar{\sigma}_k} - \frac{1}{E} \left[1 + \lambda_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t_j^{(1+\alpha_1)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1 + \alpha_1)(1 + n)]} \right] \right\}^2, \quad (3.1)$$

мінімізуючи який знаходимо значення параметрів α_1 , β_1 і λ_1 . Тут і далі процедура мінімізації функціоналів при визначенні параметрів ядер повзучості вирішується з використанням ітераційного методу Левенберга-Маркардта [4]. Значення параметрів α_1 , β_1 і λ_1 , розрахованих згідно (3.1), приведені в табл. 1. Параметри ядра у нелінійній області

Таблиця 1

Значення констант в кубічній теорії

Матеріал	E , МПа	α_1	β_1 , год ^{α}	λ_1 , год ^{α}	b , МПа ⁻³ . год ^{$-(1+\alpha)$}	λ_3	β_3 , год ^{$-(1+\alpha)$}
Волокно FM10001	1709,9	-0,859	0,04122	0,4636	$1,169 \cdot 10^{-6}$	-0,859	0,5222
Волокно FM3001	1889,2	-0,830	0,10829	0,3511	$0,780 \cdot 10^{-6}$	-0,798	0,4212
Склотекстоліт ТС8/3-250	15690	-0,406	0,07965	0,0537	$1,780 \cdot 10^{-3}$	-0,844	0,3778
Склопластик	4888,2	-0,573	0,08765	0,1600	$2,040 \cdot 10^{-7}$	-0,586	0,0985

визначаються з функціоналу (3.1) із врахуванням (1.2) записується у вигляді

$$F(\alpha_3, \beta_3, b) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \left\{ I(\tilde{\sigma}_k, t_j) - bE\tilde{\sigma}_k^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_3)^n t_j^{(1+\alpha_3)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1 + \alpha_3)(1 + n)]} \right\}^2, \quad (3.2)$$

Мінімізуючи який отримуємо значення параметрів α_3 , β_3 і λ_3 . Значення параметрів α_3 , β_3 і λ_3 для досліджуваних матеріалів, розрахованих згідно (3.2), приведені в табл. 1.

4. Експериментальна апробація методу.

Експериментальна апробація дробово-експоненційного ядра (1.2) в кубічній спадковій теорії і параметрів ядра, знайдених із припущенням існування області лінійності і області

нелінійності в'язкопружних властивостей матеріалу, для розв'язку задач нелінійної теорії в'язкопружності може бути здійснена на прикладі розрахунку деформацій повзучості при постійних напруженнях.

Залежність деформацій ε від часу t при навантаженні постійними напруженнями σ_k записується, виходячи із (1.1) із врахуванням (1.2) і (1.3), у вигляді

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_k}{E} \cdot \left[1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_1)^n t^{(1+\alpha_1)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha_1)(1+n)]} \right] + b\sigma_k^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_3)^n t^{(1+\alpha_3)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha_3)(1+n)]}, \quad (4.1)$$

де прийнято, що $\tau = 0$, $t - \tau = t$, а $h(t) = 1$. Значення деформацій повзучості $\varepsilon(t)$, розрахованих по рівнянню (4.1) із використанням значень параметрів α_1 , β_1 , λ , α_3 , β_3 , λ_3 , приведених в табл.1, співставлені на рис. 1 із експериментальними даними для

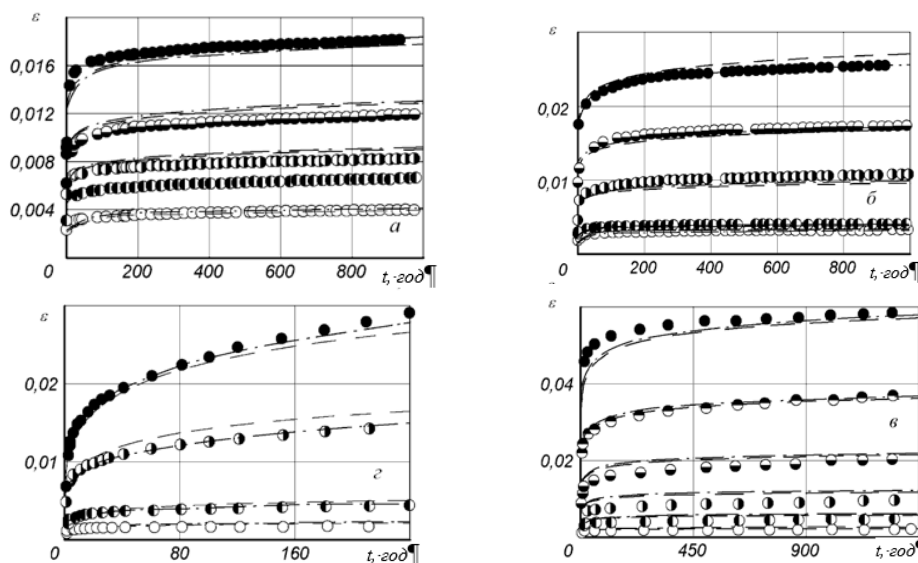


Рис. 1. - Розрахункові (лінія) і експериментальні точки (точки) значення деформацій повзучості нейлонових волокон FM 10001 (а), нейлонових волокон FM 3001 (б), склопластику ТС 8/3-250 (в) і склопластику контактного формувания (г).

нейлонових волокон FM 10001 (а) при $\sigma_k = 3,2$ (○), 5,0 (●), 6,8 (⊙), 9,3 (⊖), 12,4 (●) МПа, нейлонових волокон FM 3001 (б) при $\sigma_k = 3,3$ (○), 4,1 (●), 8,3 (⊙), 12,4 (⊖), 16,6 (●) МПа, склопластику ТС 8/3-250 (в) при $\sigma_k = 19,9$ (○), 39,8 (●), 59,7 (⊙), 79,6 (⊖), 99,5 (⊕), 119,5 (●) МПа и склопластику контактного формования (г) при $\sigma_k = 5$ (○), 10 (●), 20 (⊙), 25 (●) МПа.

Як видно із співставлення експериментальних даних із розрахунковими отримано задовільне узгодження результатів, що підтверджує достовірність виділення лінійної області та правильність визначення параметрів ядер.

Список літератури:

1. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. – Москва: Наука, 1977. – 384 с.
2. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация.- Москва: Высшая школа, 1976.- 277 с.
3. Голуб В.П., Павлюк Я.В., Фернати П.В. К определению параметров дробно-экспоненциальных ядер наследственности в нелинейной теории вязкоупругости // Прикл. механика.-2017.-Том 53, №4, С. 76-93.
4. More J.J., Garbow B.S., and Hillstrom K.E. Users Guide to Minipack // Argonne National Laboratory Publication ANL-80-74.- 1980.