

Міністерство освіти і науки України  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут»

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ  
ДО ВИКОНАННЯ КУРСОВОЇ  
І РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБІТ  
З ДИСЦИПЛІНИ «ОПР МАТЕРІАЛІВ»  
(завдання і приклади розрахунків)**

для студентів технічних напрямів підготовки  
усіх форм навчання

*Рекомендовано Методичною радою НТУУ «КПІ»*

Київ  
НТУУ «КПІ»  
2010

Методичні вказівки до виконання курсової і розрахунково-графічної робіт з дисципліни «Опір матеріалів» (завдання і приклади розрахунків) для студентів технічних напрямів підготовки усіх форм навчання/ Уклад.: А.Є. Бабенко, О.О. Боронко, Б.І. Ковальчук, С.М. Шукаєв, Г.Є. Візерська, О.П. Заховайко, С.І. Трубачев, В.А. Колодежний, А.М. Бабак. – К.: ІВК “Видавництво «Політехніка»”, 2010. – 108 с.

*Гриф надано Методичною радою НТУУ «КПІ»  
(Протокол № 10 від 17.06.2010 р.)*

Укладачі:	А. Є. Бабенко, д-р техн. наук, проф. О. О. Боронко, д-р техн. наук, проф. Б. І. Ковальчук, д-р техн. наук, проф. С. М. Шукаєв, д-р техн. наук, проф. Г. Є. Візерська, к-т техн. наук, доц. О. П. Заховайко, к-т техн. наук, доц. С. І. Трубачев, к-т техн. наук, доц. В. А. Колодежний, ст. викл. А. М. Бабак, ас.
Відповідальний редактор	М. І. Бобир, д-р техн. наук, проф.
Рецензент	В. Л. Калюжний, д-р техн. наук, проф.

## ЗМІСТ

Вступ.....	4
Задача № 1. Статично невизначувана балка.....	6
Задача № 2. Статично невизначувана рама.....	17
Задача № 3. Неплоский згин.....	25
Задача № 4. Позацентровий стиск.....	39
Задача № 5. Розрахунок круглого вала на згин з крученням.....	46
Задача № 6. Розрахунок просторової рами.....	54
Задача № 7. Проектувальний розрахунок на стійкість стиснутих стержнів.....	61
Задача № 8. Розрахунок стержневої системи з врахуванням сил інерції....	69
Задача № 9. Розрахунок на міцність при ударі.....	76
Задача № 10. Вимушені коливання лінійної системи з одним ступенем вільності за відсутності тертя.....	80
Задача № 11. Розрахунок на міцність при повторно-змінному навантаженні круглого вала на згин з крученням.....	88
Задача № 12. Розрахунок тонкостінної посудини на опорах.....	95
Список рекомендованої літератури.....	105
Додатки.....	106

## ВСТУП

Опір матеріалів – одна з базових загальнотехнічних дисциплін, яка відіграє важливу роль у підготовці інженерних кадрів. Значне місце в практичній діяльності інженерів посідають розрахунки на міцність, жорсткість і стійкість – основні завдання опору матеріалів.

У вивченні курсу опору матеріалів найефективніший метод навчання прийомом розв’язування задач – самостійна робота студентів. Тому в програмах курсу опору матеріалів для студентів НТУУ “КПІ” передбачено виконання протягом навчального року курсової або розрахунково-графічних робіт, мета яких – закріпити та поглибити знання, набуті під час вивчення теоретичного курсу, засвоїти методики розрахунків елементів конструкцій з вибором відповідного матеріалу і розрахункової схеми, навчитися користуватися довідковою літературою.

Курсова і розрахунково-графічні роботи складаються з двох частин і охоплюють найтипівіші для практики задачі, що відповідають усім основним розділам опору матеріалів.

Більшість виданих методичних вказівок містять тільки завдання до курсових чи розрахунково-графічних робіт. Досвід показує, що під час самостійного виконання робіт у студентів виникає ряд труднощів. Це зумовлює потребу детального розгляду указаних робіт і задач на практичних заняттях і тим самим обмежує, за браком часу, можливість розв’язання інших важливих з теоретичного і практичного боку задач, що не увійшли до курсової чи розрахунково-графічної роботи.

Методичні вказівки містять завдання і приклади розв’язання задач другої частини курсової роботи, а також задач, які згідно з навчальними програмами курсів можуть бути включені до розрахунково-графічної роботи. В останньому випадку може бути змінено і обсяг розрахункової частини тих чи інших задач. Методичні вказівки охоплюють такі розділи теоретичного курсу: “Статично невизначувані системи”, “Складний опір”, “Стойкість стиснутих стержнів”, “Розрахунок систем з врахуванням сил

інерції”, ”Розрахунок при ударі”, “Вимушені коливання”, “Розрахунок при повторно-змінному навантаженні”, “Розрахунок оболонок”.

Використовуючи наведені в умовах задач дані, слід мати на увазі таке. Якщо навантаження подано з від’ємним знаком, то на розрахунковій схемі його напрямок потрібно змінити на протилежний і знак “мінус” опустити.

Розв’язання задач супроводжується роз’ясненням складних теоретичних положень, формулюванням правил, за якими знаходять ті чи інші величини. Це дає можливість студентам після уважного вивчення певних розділів теоретичного курсу і детального розгляду прикладів розв’язання задач самостійно виконати роботу.

У підготовці методичних вказівок використано розробки колективу кафедри [3, 4].

# ЗАДАЧА 1

## СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНА БАЛКА

Для заданої балки (рис. 1.1, табл. 1.1) підібрати переріз заданої форми і визначити зазначене переміщення перерізу  $A$ .

*Таблиця 1.1. Варіанти завдань до задачі 1*

Варіант	$q_1$ , кН/м	$q_2$ , кН/м	$P$ , кН	$M$ , кН·м	Переміщення	Матеріал	Форма перерізу
0	25	0	-10	30	$w_A$	Сталь10	I
1	0	-20	15	20	$\theta_A$	Сталь60	□
2	-15	0	20	10	$w_A$	Сталь50	⌈
3	0	25	-25	40	$\theta_A$	Сталь30	I
4	10	0	30	-50	$w_A$	Сталь20	Π
5	0	-15	35	10	$\theta_A$	Сталь20Г	□
6	-20	0	40	20	$w_A$	Сталь25	⌈
7	0	10	-30	30	$\theta_A$	Сталь30Г	Π
8	20	0	10	-40	$w_A$	Сталь35	□
9	0	-10	20	50	$\theta_A$	Сталь50Г	⌈

### План розв'язування задачі

1. Розкрити статичну невизначуваність балки методом рівняння трьох моментів або за допомогою канонічних рівнянь методу сил. В останньому випадку перш за все необхідно побудувати найбільш раціональний варіант еквівалентної розрахункової схеми.

2. Перевірити правильність розкриття статичної невизначуваності балки (коли невизначуваність балки розкривається обома методами, перевірку можна не робити).

3. Для еквівалентної розрахункової схеми побудувати епюру згинальних моментів.

4. Підібрати з умови міцності за нормальними напруженнями розміри поперечного перерізу балки вказаної форми (підібрати за сортаментом відповідний профіль).

5. Визначити вказане переміщення перерізу  $A$  методом Мора або Верещагіна.

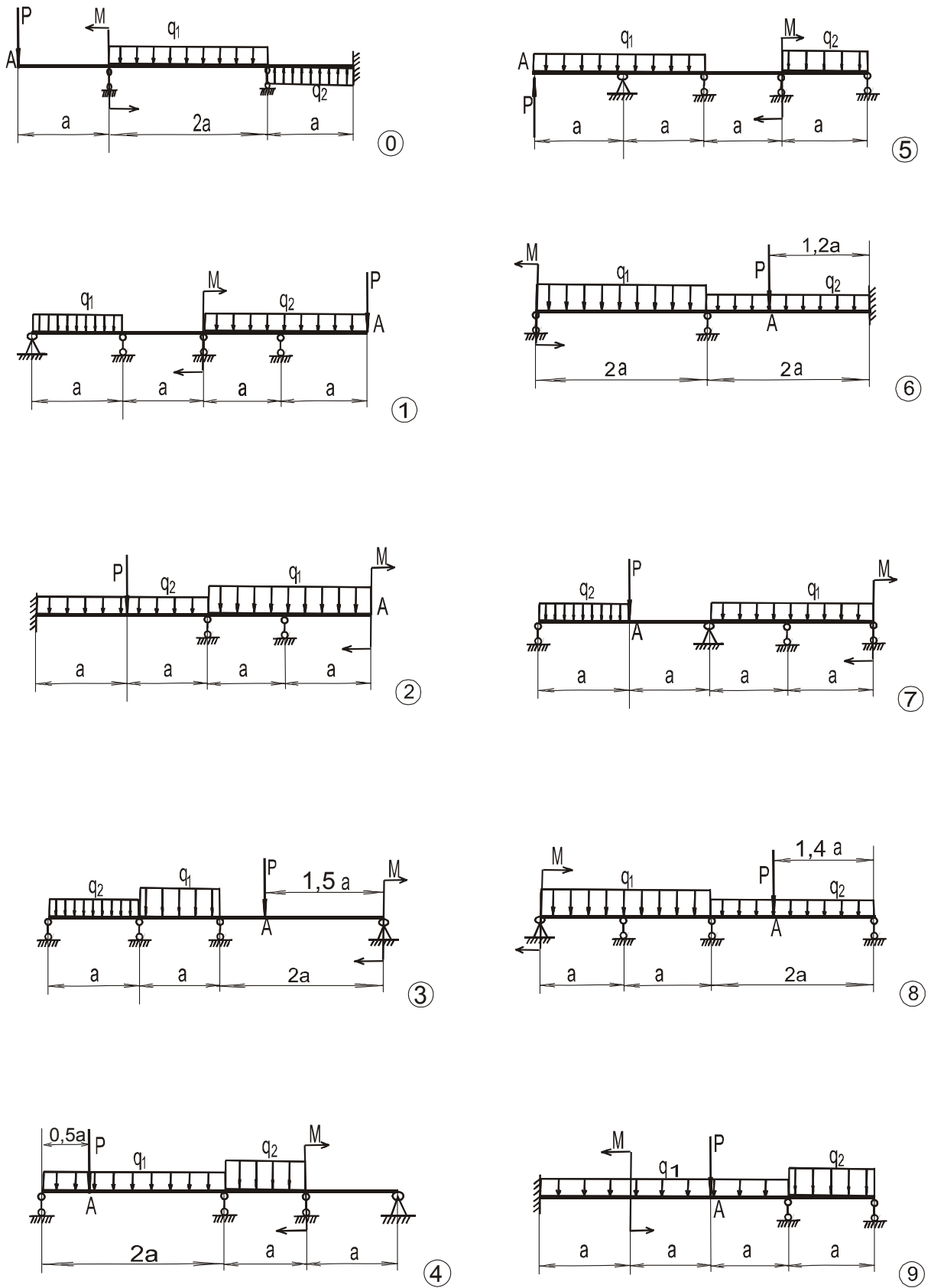


Рис. 1.1. Варіанти розрахункових схем балок до задачі 1

## Розв'язання задачі

Для заданої балки (рис. 1.2, а) підібрати прямокутний переріз ( $h/b = 2$ ). Визначити вертикальне переміщення перерізу А. При цьому  $EI = \text{const}$  для всієї балки, а матеріал балки – сталь 20, для якої допустиме напруження на розтяг  $[\sigma] = 160$  МПа.

Балка два рази статично невизначувана.

1А. Розкриємо статичну невизначуваність за допомогою методу трьох моментів, зайвими невідомими в цьому випадку будуть згинальні моменти в опорних перерізах, а рівняння трьох моментів матиме вигляд

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -6 \left( \frac{\omega_n a_n}{l_n} + \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} \right).$$

Пронумеруємо опори та прогони балки (опори, починаючи з нуля, прогони – з одиниці). На рис. 1.2, б показана еквівалентна система, тобто основана система, яку завантажено заданим навантаженням і згинальними моментами в опорних перерізах. Побудуємо епюри згинальних моментів для окремих балок основної системи тільки від заданого навантаження (епюри  $M_p$ ) (рис. 1.2, в).

Для першої проміжної опори записуємо рівняння трьох моментів ( $n = 1$ ):

$$M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6 \left( \frac{\omega_1 a_1}{l_1} + \frac{\omega_2 b_2}{l_2} \right),$$

при цьому

$$\begin{aligned} \omega_1 a_1 &= \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1,875 \cdot 0,5 + \frac{1}{2} \cdot 0,9 \cdot 18 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,9 - \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot 2 \cdot \left( 0,9 + \frac{1}{3} \cdot 0,1 \right) = \\ &= 5,4 \text{ кН} \cdot \text{м}^2, \end{aligned}$$

$$\omega_2 b_2 = \frac{1}{2} \cdot 0,4 \cdot 7,14 \cdot \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot 0,4 \right) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 7,14 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$



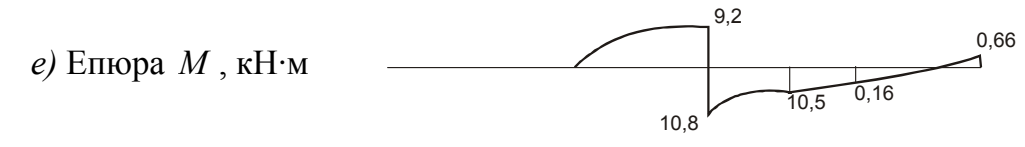
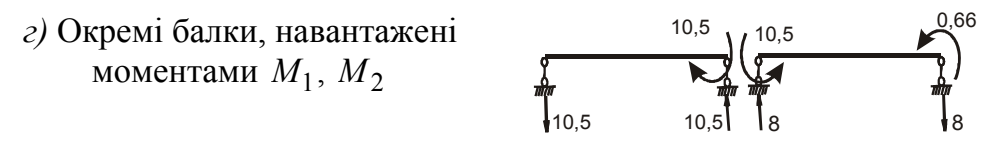
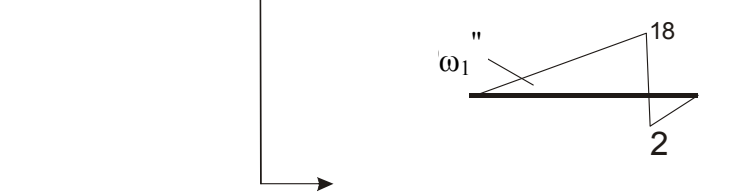
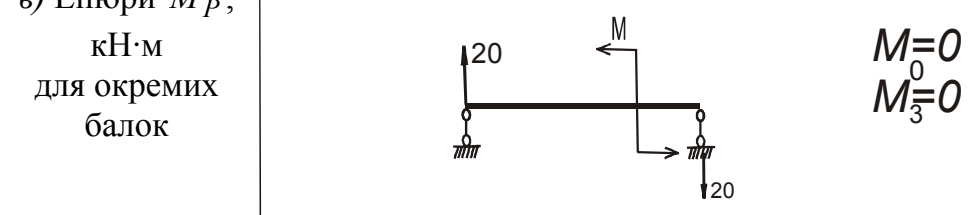
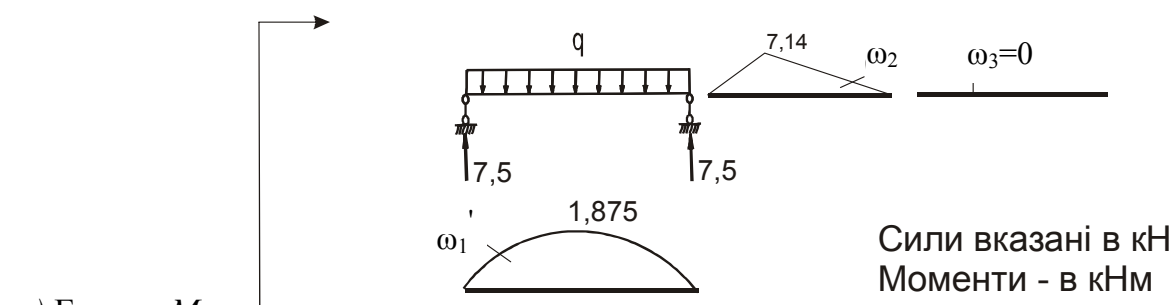
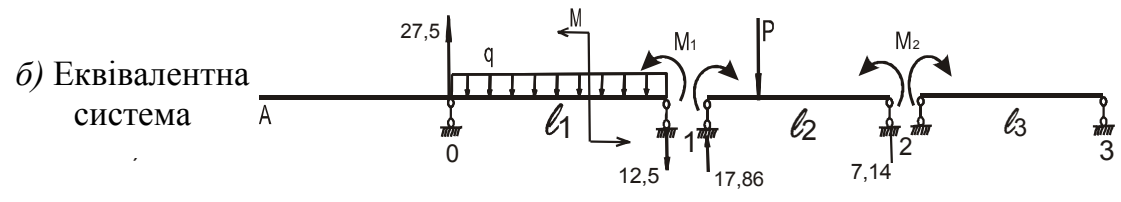
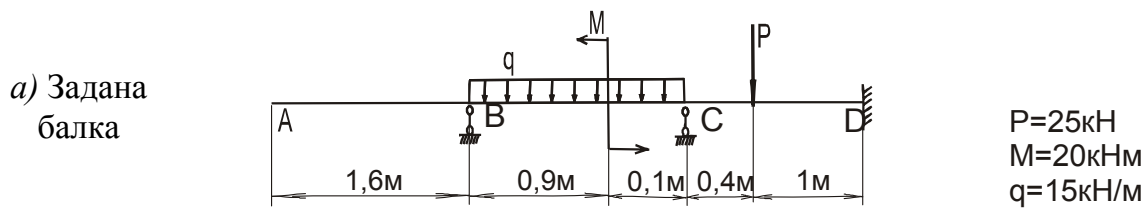


Рис. 1.2. До методу трьох моментів

Тоді рівняння трьох моментів для першої проміжної опори матиме вигляд

$$2M_1 \cdot (1 + 1,4) + M_2 \cdot 1,4 = -6 \cdot \left( \frac{5,4}{1} + \frac{4}{1,4} \right),$$

звідси

$$3,43M_1 + M_2 = -35,39.$$

Запишемо рівняння трьох моментів для другої проміжної опори ( $n = 2$ ):

$$M_1 l_2 + 2M_2 (l_2 + l_3) + M_3 l_3 = -6 \left( \frac{\omega_2 a_2}{l_2} + \frac{\omega_3 b_3}{l_3} \right),$$

де

$$\omega_2 a_2 = \frac{1}{2} \cdot 0,4 \cdot 7,14 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,4 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 7,14 \cdot \left( 0,4 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) = 3 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Тоді для другої проміжної опори рівняння трьох моментів виглядає:

$$1,4M_1 + 2,8M_2 = -6 \cdot \left( \frac{3}{1,4} \right)$$

або

$$M_1 + 2M_2 = -9,18.$$

Отже маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3,43M_1 + M_2 = -35,39, \\ M_1 + 2M_2 = -9,18. \end{cases}$$

Звідси

$$M_1 = -10,5 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad M_2 = 0,66 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Визначимо реакції в опорах 0 і 1. Для цього розглянемо прості балки, навантажені лише знайденими моментами  $M_1$  та  $M_2$ , і обчислимо реакції

від дії цих моментів (рис. 1.2, з). Враховуючи ці реакції разом з реакціями від зовнішнього навантаження, які показані попередньо на тому ж рис. 1.2, б, знайдемо:

$$R_B = 27,5 - 10,5 = 17 \text{ кН},$$

$$R_C = -12,5 + 17,86 + 10,5 + 8 = 23,86 \text{ кН}.$$

1Б. Розкриємо статичну невизначуваність балки за допомогою канонічних рівнянь методу сил.

Основну систему візьмемо, відкинувши зайві зв'язки, приймаючи за такі шарнірно-рухомі опори в перерізах  $B$  і  $C$  (рис. 1.3, б).

Завантаживши основну систему заданим навантаженням та зайвими невідомими  $X_1$  та  $X_2$ , отримаємо еквівалентну систему (рис. 1.3, в).

Канонічні рівняння методу сил для два рази статичної невизначуваної балки мають вигляд:

$$\begin{cases} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1P} = 0, \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2P} = 0. \end{cases}$$

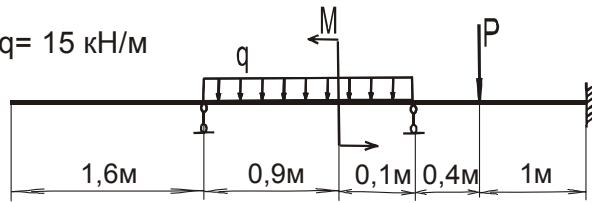
Коефіцієнти та вільні члени цієї системи рівнянь обчислимо методом Верещагіна:

$$\Delta = \sum \frac{\omega \bar{M}_c}{EI}.$$

Для цього треба основну систему спочатку завантажити заданим навантаженням і отримати силову систему, для якої побудувати епюру згинальних моментів  $M_P$ . Розшарована епюра  $M_P$  показана на рис. 1.3, з. Наступним етапом завантажуюмо основну систему одиничною силою  $\bar{X}_1 = 1$  і будуємо епюру згинальних моментів  $\bar{M}_1$  для цієї одиничної системи, а далі основну систему завантажуюмо одиничною силою  $\bar{X}_2 = 1$  і будуємо епюру згинальних моментів  $\bar{M}_2$ . Обидві епюри показані на рис. 1.3, д, е.

$P=25\text{кН}$ ;  $M=20\text{кНм}$ ;  $q= 15 \text{ кН/м}$

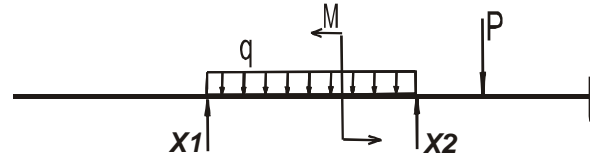
а) Задана балка



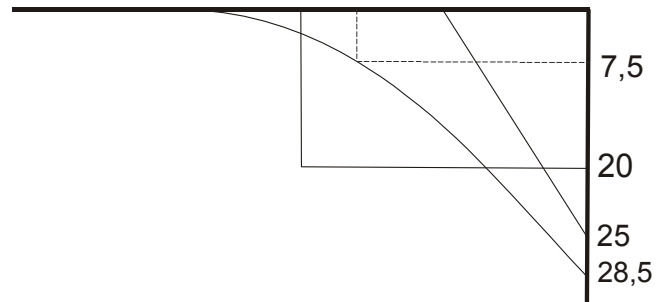
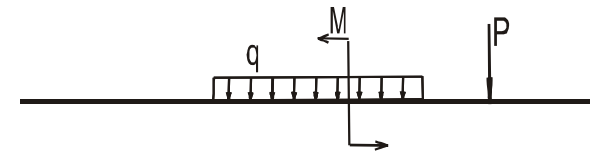
б) Основна система



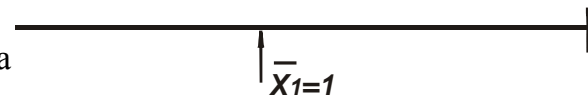
в) Еквівалентна система



г) Силова система та розширована епюра  $M_P$ ,  $\text{кН}\cdot\text{м}$

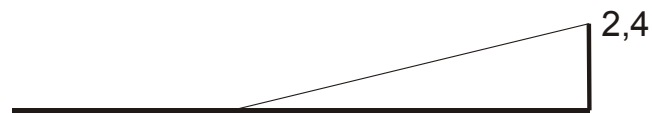


д) Одинична система



та

епюра  $\overline{M}_1$ , м



е) Одинична система



та

епюра  $\overline{M}_2$ , м



Рис. 1.3. До методу сил

Визначимо коефіцієнти та вільні члени канонічних рівнянь за методом Верещагіна:

$$EI\delta_{11} = \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 2,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,4 = 4,608 \text{ м}^3,$$

$$EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = \frac{1}{2} \cdot 1,4 \cdot 1,4 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot 1,4\right) = 1,894 \text{ м}^3,$$

$$EI\Delta_{1P} = -\frac{1}{3} \cdot 7,5 \cdot 1 \cdot \frac{3}{4} \cdot 1 - 7,5 \cdot 1,4 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot 1,4\right) - \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 1,4 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot 1,4\right) -$$

$$-20 \cdot 1,5 \cdot \left(0,9 + \frac{1}{2} \cdot 1,5\right) - \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 1 \cdot \left(1,4 + \frac{2}{3} \cdot 1\right) = -123,39 \text{ кН} \cdot \text{м}^3,$$

$$EI\delta_{22} = \frac{1}{2} \cdot 1,4 \cdot 1,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,4 = 0,914 \text{ м}^3,$$

$$EI\Delta_{2P} = -7,5 \cdot 1,4 \cdot 0,7 - \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 1,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,4 - 20 \cdot 1,4 \cdot 0,7 - \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 1 \cdot \left(0,4 + \frac{2}{3} \cdot 1\right) =$$

$$= 54,00 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Тоді канонічні рівняння методу сил приймають такий вигляд:

$$\begin{cases} 4,6X_1 + 1,894 - 123,39 = 0, \\ 1,894X_1 + 0,914X_2 - 54,00 = 0. \end{cases}$$

Звідси

$$R_B = X_1 = 17 \text{ кН}, \quad R_C = X_2 = 23,86 \text{ кН}.$$

Відмітимо, що ці результати збігаються з попередніми результатами, які мають місце при розкритті статичної невизначуваності методом трьох моментів. Тому додаткова перевірка цих даних не потрібна, а еквівалентна система виглядає, як показано на рис. 1.2, *д*.

Будуємо епюру згинальних моментів  $M$  для еквівалентної системи, тобто для заданої балки, яка представлена на рис. 1.2, *е*. Максимальний

згинальний момент, що діє в небезпечному перерізі,  $M_{\max} = 10,8 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

3. Підберемо розміри прямокутного перерізу з  $h/b = 2$ . Умова міцності для небезпечного перерізу має вигляд:

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma],$$

звідси

$$[W] = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{10,8 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,675 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 67,5 \text{ см}^3.$$

Для прямокутника

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{h^3}{12} = 67,5 \text{ см}^3,$$

$$h = \sqrt[3]{67,5 \cdot 12} = 9,4 \text{ см}, \quad b = \frac{h}{2} = 4,7 \text{ см}.$$

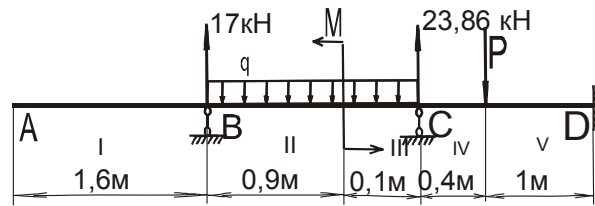
Момент інерції прямокутного перерізу відносно осі  $z$ :

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{4,7 \cdot 9,4^3}{12} = 325,3 \text{ см}^4.$$

4. Визначим вертикальне переміщення перерізу  $A$  методом Мора. Для цього розглянемо еквівалентну балку і одиничну систему (рис. 1.4). Одиничну систему отримаємо, приклавши до еквівалентної системи одиничну вертикальну силу в перерізі  $A$ :

Запишемо вирази для згинальних моментів  $M$  від зовнішнього навантаження та обчислених реакцій шарнірно рухомих опор та вирази згинальних моментів  $\bar{M}$  від одиничної сили, яка прикладена в перерізі  $A$ . На кожній ділянці ці вирази  $M$  та  $\bar{M}$  мають вигляд:

Еквівалентна  
(задана) балка



$P=25\text{кН};$   
 $M=20\text{кНм};$   
 $q=15\text{кН/м}$

Одинична  
система

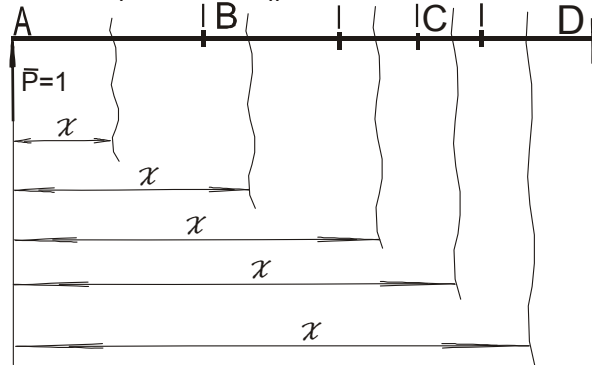


Рис. 1.4. До визначення переміщення  
перерізу  $A$

ділянка  $I$  ( $0 \leq x \leq 1,6$  м):

$$\begin{cases} M(x) = 0, \\ \bar{M}(x) = 1 \cdot x; \end{cases}$$

ділянка  $II$  ( $1,6 \text{ м} \leq x \leq 2,5$  м):

$$\begin{cases} M(x) = 17(x - 1,6) - \frac{q(x - 1,6)^2}{2}, \\ \bar{M}(x) = 1 \cdot x; \end{cases}$$

ділянка  $III$  ( $2,5 \text{ м} \leq x \leq 2,6$  м):

$$\begin{cases} M(x) = 17(x - 1,6) - \frac{q(x - 1,6)^2}{2} - M, \\ \bar{M}(x) = 1 \cdot x; \end{cases}$$

ділянка  $IV$  ( $2,6 \text{ м} \leq x \leq 3$  м):

$$\begin{cases} M(x) = 17(x - 1,6) - q(x - 2,1) - M + 23,86(x - 2,6), \\ \bar{M}(x) = 1 \cdot x; \end{cases}$$

ділянка  $V$  ( $3 \text{ м} \leq x \leq 4 \text{ м}$ ):

$$\begin{cases} M(x) = 17(x-1,6) - q(x-2,1) - M + 23,86(x-2,6) - P(x-3), \\ \bar{M}(x) = 1 \cdot x; \end{cases}$$

Інтеграл Мора для визначення  $w_{A \text{ верт}}$  має вигляд:

$$w_{A \text{ верт}} = \frac{1}{EI} \sum \int_l M(x) \bar{M}(x) dx,$$

де  $EI = \text{const} = 2 \cdot 10^{11} \cdot 325,3 \cdot 10^{-8} = 650,6 \cdot 10^3 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$ .

$$\begin{aligned} w_{A \text{ верт}} &= \frac{1}{EI} \left( \int_{1,6}^{2,5} (17(x-1,6) - \frac{q(x-1,6)^2}{2}) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{2,5}^{2,6} (17(x-1,6) - \frac{q(x-1,6)^2}{2} - M) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{2,6}^3 (17(x-1,6) - q(x-2,1) - M + 23,86(x-2,6)) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_3^4 (17(x-1,6) - q(x-2,1) - M + 23,86(x-2,6) - P(x-3)) dx = \right. \\ &= \frac{1}{650,6 \cdot 10^3} \left( \int_{1,6}^{2,5} (17(x-1,6) - \frac{15(x-1,6)^2}{2}) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{2,5}^{2,6} (17(x-1,6) - \frac{15(x-1,6)^2}{2} - 20) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{2,6}^3 (17(x-1,6) - 15(x-2,1) - 20 + 23,86(x-2,6)) dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_3^4 (17(x-1,6) - 15(x-2,1) - 20 + 23,86(x-2,6) - 25(x-3)) dx = \right. \\ &= 0,00537 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,00537 \text{ мм}. \end{aligned}$$



## ЗАДАЧА 2

### СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНА РАМА

Для заданої рами (рис.2.1, табл. 2.1) підібрати двотавровий переріз і визначити переміщення перерізу  $A$ . Взяти  $l = 1$  м,  $n_T = 1,5$ . З двох зв'язків 1 та 2 залишити той, що вказаний в табл. 2.1.

Таблиця 2.1. Варіанти завдань до задачі 2

Варіант	Q кН/м	P кН	M кНм	Переміщення	Матеріал	N зв'язку
0	10	-30	40	$w_{A \text{ верт}}$	Сталь25	2
1	-15	25	35	$w_{A \text{ гор}}$	Сталь30	1
2	20	-20	30	$\theta_A$	Сталь40	2
3	25	15	-25	$\theta_A$	Сталь35	1
4	-10	30	20	$w_{A \text{ гор}}$	Сталь50	2
5	15	25	-20	$w_{A \text{ верт}}$	Сталь55	1
6	20	-10	40	$\theta_A$	Сталь50Г	1
7	25	20	-35	$\theta_A$	Сталь10	2
8	30	10	-30	$w_{A \text{ верт}}$	Сталь60	2
9	-30	20	25	$w_{A \text{ гор}}$	Сталь30Г	1

#### План розв'язування задачі

1. Розкрити статичну невизначуваність рами, користуючись канонічними рівняннями методу сил. Для цього необхідно:

– відкинувши зайвий зв'язок, побудувати найбільш раціональний варіант основної системи;

– завантаживши основну систему заданим навантаженням і зайвим зусиллям  $X_1$ , що замінює дію зайвого зв'язку, побудувати еквівалентну систему;

– записати канонічне рівняння методу сил;

– завантажити основну систему по черзі заданим навантаженням і одиничною силою  $\overline{X}_1 = 1$  і записати вирази для згинальних моментів від заданих сил  $M_P(x)$  та одиничної сили  $\overline{M}_1(x)$  (при використанні способу

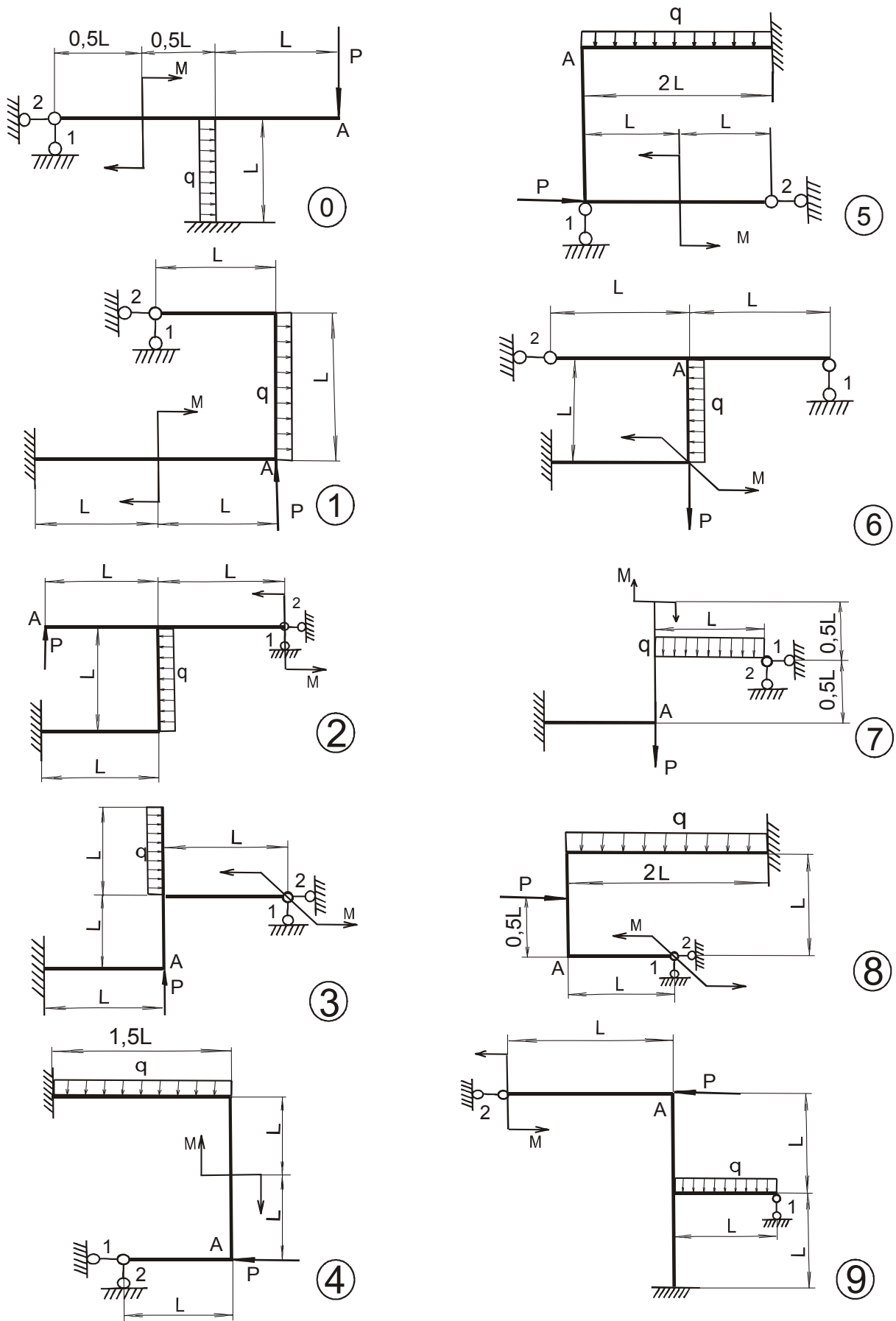


Рис. 2.1. Варіанти розрахункових схем рам до задачі 2

Верещагіна побудувати відповідні епюри), обчислити коефіцієнт та вільний член канонічного рівняння за формулами Мора або Верещагіна;

– розв’язати канонічне рівняння і визначити невідоме зусилля  $X_1$ ;

2. Побудувати епюру згинальних моментів  $M$  для еквівалентної системи.

3. Перевірити правильність розкриття статичної невизначуваності системи, переконавшись за допомогою метода Мора або Верещагіна, що переміщення в напрямку сили  $X_1$  дорівнює нулю.

4. З умови міцності на згин підібрати двотавровий переріз.

5. Визначити вказане переміщення перерізу  $A$  методом Мора або Верещагіна.

### Розв’язання задачі

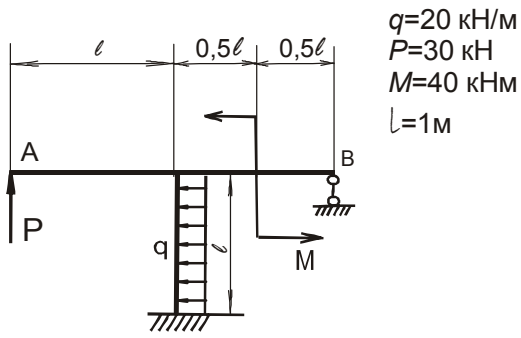
Підібрати двотавровий переріз для рами, показаної на рис. 2.2, *a*, та визначити кут повороту перерізу  $A$ . При цьому  $EI = \text{const}$  для всієї рами, матеріал рами – сталь 20, для якої допустиме напруження на розтяг  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

Рама один раз статично невизначувана. Основну систему виберемо, відкинувши зайвий зв’язок – шарнірно-рухому опору (рис. 2.2, *б*). Завантаживши основну систему заданим навантаженням та зайвою невідомою силою  $X_1$ , яка замінює дію відкинутого зв’язку, отримаємо еквівалентну систему (рис. 2.2, *в*).

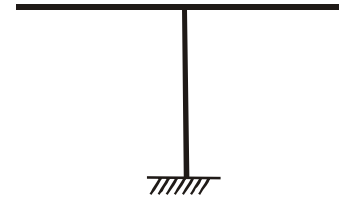
Канонічне рівняння методу сил для один раз статично невизначуваної рами має вигляд:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0, \quad \text{звідки} \quad X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}.$$

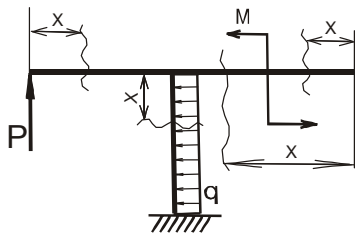
Отже, щоб визначити зайву невідому силу  $X_1$ , треба попередньо обчислити коефіцієнт  $\delta_{11}$  та вільний член  $\Delta_{1P}$ . Їх визначимо методом Верещагіна. Для цього основну систему завантажуюмо заданим зовнішнім навантаженням і записуємо вирази для згинальних моментів від заданих сил



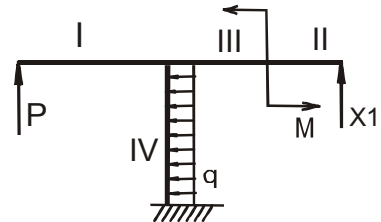
а) Задана система



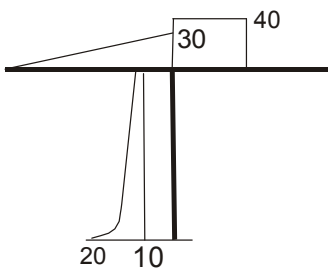
б) Основна система



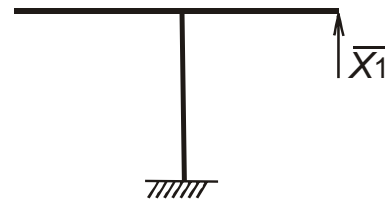
в) Силовая система



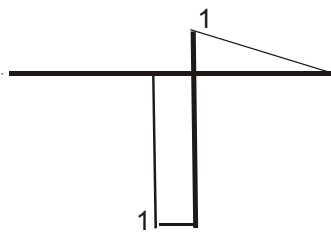
г) Еквівалентна система



д) Епюра  $M_P$ , кН·м

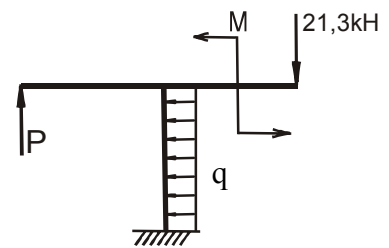


е) Одична система



є) Епюра  $\bar{M}_1$ , м

$q=20 \text{ кН/м}$   
 $P=30 \text{ кН}$   
 $M=40 \text{ кНм}$



ж) Еквівалентна система

Рис. 2.2. До методу сил

$M_P(x)$  на кожній ділянці (рис. 2.2, *з*):

ділянка I ( $0 \leq x \leq l$ ):  $M_P = Px$ ;

ділянка II ( $0 \leq x \leq l/2$ ):  $M_P = 0$ ;

ділянка III ( $l/2 \leq x \leq l$ ):  $M_P = M$ ;

ділянка IV ( $0 \leq x \leq l$ ):  $M_P = -Pl + M + qx^2/2$ .

Будуємо епюру згинальних моментів  $M_P$  (рис. 2.2, *д*).

Для одиничної системи (рис. 2.2, *е*):

ділянка I ( $0 \leq x \leq l$ ):  $\overline{M}_1 = 0$ ;

ділянка II ( $0 \leq x \leq l/2$ ):  $\overline{M}_1 = x$ ;

ділянка III ( $l/2 \leq x \leq l$ ):  $\overline{M}_1 = x$ ;

ділянка IV ( $0 \leq x \leq l$ ):  $\overline{M}_1 = l$ .

За цими даними побудуємо епюру згинальних моментів  $\overline{M}_1$  (рис. 2.2, *е*).

За допомогою епюр  $M_P$  та  $\overline{M}_1$  обчислимо коефіцієнт  $\delta_{11}$  та вільний член  $\Delta_{1P}$  канонічного рівняння методу сил:

$$EI\delta_{11} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1,33 \text{ м}^3,$$

$$EI\Delta_{1P} = 40 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + 10 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 = 28,33 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Таким чином,  $X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{28,33 \text{ кН}}{1,33} = -21,3 \text{ кН}$ .

Отже задана рама навантажена, як показано на рис. 2.2, *ж*.

2. Будуємо епюру згинальних моментів  $M$  для еквівалентної системи, записавши спочатку вирази для згинальних моментів  $M$  на кожній ділянці:

ділянка I ( $0 \leq x \leq l$ ):  $M = Px$ ;

ділянка II ( $0 \leq x \leq l/2$ ):  $M = -21,3x$ ;

ділянка III ( $l/2 \leq x \leq l$ ):  $M = -21,3x + M$ ;

ділянка IV ( $0 \leq x \leq l$ ):  $M = -21,3l + M + qx^2/2 - Pl$ .

Епюра згинальних моментів  $M$  для цього випадку представлена на рис. 2.3, а.

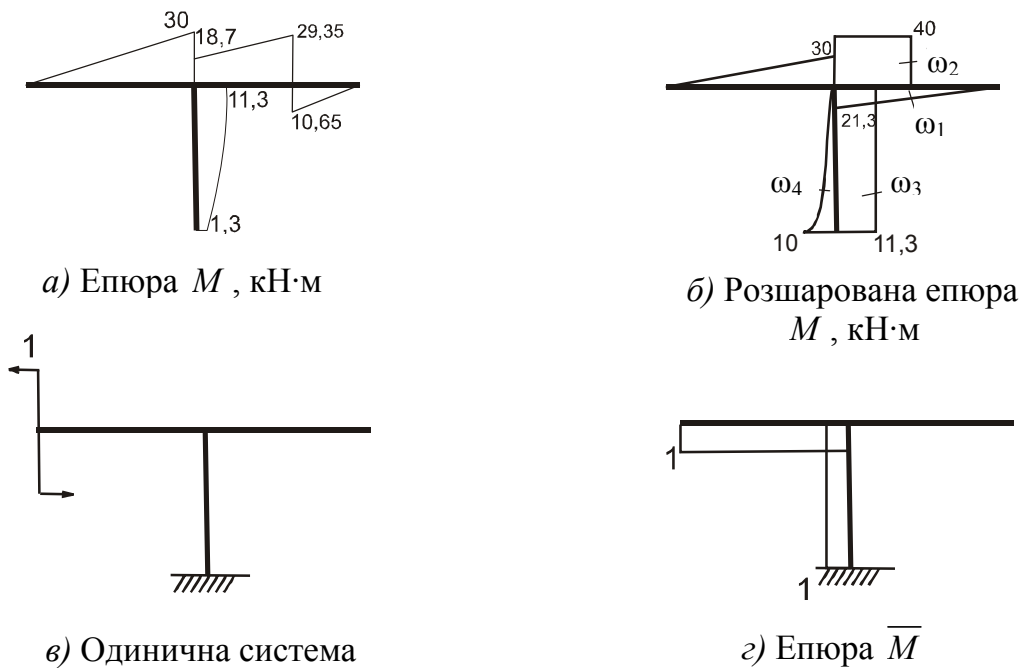


Рис. 2.3. Епюри згинальних моментів

3. Перевіримо правильність розкриття статичної невизначуваності рами. З цією метою обчислимо переміщення перерізу  $B$  в напрямку сили  $X_1$  за методом Верещагіна, враховуючи попередньо побудовані епюри згинальних моментів  $M$  (рис. 2.3, а) та  $\bar{M}_1$  (рис. 2.2, е).

На рис. 2.3, б показано розширену епюру  $M$  на II, III, IV ділянках:

$\omega_1$  – площа епюри  $M$  на II і III ділянках від  $X_1 = 21,3$  кН ;

$\omega_2$  – площа епюри  $M$  на III ділянці від  $M = 40$  кН·м ;

$\omega_3$  – площа епюри  $M$  на IV ділянці від  $P = 30$  кН,  $X_1 = 21,3$  кН та  $M = 40$  кН·м ;

$\omega_4$  – площа епюри  $M$  на  $IV$  ділянці від  $q = 20 \text{ кН/м}$ .

Шукане переміщення:

$$\begin{aligned}w_{B \text{ верт}} &= 0,5 \cdot 40 \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 21,3 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 10 \cdot 1 - 1 \cdot 11,3 \cdot 1 = \\ &= 18,33 - 18,4 = -0,07\end{aligned}$$

В зв'язку з тим, що при розкритті статичної невизначуваності системи зайві невідомі визначаються з окресленою точністю, наслідки перевірки мають також похибку – шукані переміщення відрізняються від нуля. Тому при перевірці рекомендується окремо обчислювати суму додатних та від'ємних членів. Якщо виражене у відсотках відношення різниці між цими сумами до меншої з них невелике (до 5 %), то результат можна вважати задовільним.

В нашому випадку

$$\frac{0,07}{18,33} \cdot 100 = 0,38 \%,$$

отже статична невизначуваність рами розкрита правильно.

4. Підберемо двотавровий переріз для еквівалентної системи, тобто для заданої рами з умови міцності рами:

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma], \quad \text{звідси} \quad W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}.$$

З епюри згинальних моментів для еквівалентної системи (рис. 2.3) видно, що  $M_{\max} = 30 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

Тому момент опору двотаврового перерізу:

$$W \geq \frac{30 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 1,875 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 187,5 \text{ см}^3.$$

Орієнтуючись на цей результат, вибираємо двотавр № 20а, для якого  $W = 203 \text{ см}^3$ ,  $I = 2030 \text{ см}^4$ .

5. На цьому етапі розрахунку визначимо кут повороту перерізу  $A$  методом Верещягіна (або Мора). У зв'язку з цим розглянемо одиничну систему, тобто випадок, коли основна система в перерізі  $A$  завантажується одиничним моментом (рис. 2.3, *в*).

При цьому вирази для згинальних моментів  $\overline{M}$  на ділянках мають вигляд:

$$\text{ділянки I і IV: } \overline{M} = -1;$$

$$\text{ділянки II і III: } \overline{M} = 0.$$

Кут повороту перерізу  $A$  рами:

$$\begin{aligned} \theta_A &= \frac{1}{EI} \left( -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 30 \cdot 1 - 1 \cdot 11,3 \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 10 \cdot 1 \right) = -\frac{22,97 \text{ кН} \cdot \text{м}^2}{EI} = \\ &= -\frac{22,97 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2030 \cdot 10^{-8}} = -0,00566. \end{aligned}$$

Від'ємний знак означає, що переріз  $A$  повертається у протилежному по відношенню до одиничного моменту, що прикладений в цьому перерізі, напрямку, тобто за годинниковою стрілкою.



## ЗАДАЧА 3

### НЕПЛОСКИЙ ЗГИН

На балку діє просторова система сил (рис. 3.1, табл. 3.1). З умови міцності дібрати безпечний переріз балки вказаної форми. Вважаючи осі  $y$  і  $z$  (рис. 3.1) головними центральними осями заданого перерізу, розташувати його найраціональнішим чином. У небезпечному перерізі знайти положення нейтральної лінії і побудувати сумарну епюру розподілу напружень. Визначити величину та напрямок повного прогину у вказаному перерізі  $A$ . Взяти  $a = 1$  м,  $n_T = 1,5$ .

Таблиця 3.1. Варіанти завдань до задачі 3

Варіант	$q$ , кН/м	$P$ , кН	$M$ , кН·м	$\alpha$ , рад	Переріз	Матеріал
0	10	12	-14	$\pi/3$	□	Сталь 10
1	12	-14	18	$\pi/6$	⌋⌋	Сталь 20
0	10	12	-14	$\pi/3$	□	Сталь 10
3	18	25	30	$3\pi/4$	□	Сталь 30
4	2	-6	8	$5\pi/6$	⌋⌋	Сталь 35
5	6	10	-10	$4\pi/3$	Π	Сталь 40
6	4	8	12	$5\pi/4$	□	Сталь 45
7	8	15	-15	$7\pi/3$	⌋⌋	Сталь 50
8	16	-18	-30	$\pi/4$	Π	Сталь 55
9	20	40	50	$7\pi/6$	□	Сталь 60

#### План розв'язування задачі

1. Зобразити в масштабі розрахункову схему.
2. Розкласти всі навантаження на складові, що діють у головних площинах  $xu$  та  $xz$ .
3. Побудувати епюри згинальних моментів  $M_y$  і  $M_z$  (поперечними силами  $Q_y$  і  $Q_z$  в розрахунках на міцність та жорсткість знехтувати).
4. Визначити небезпечний переріз балки.

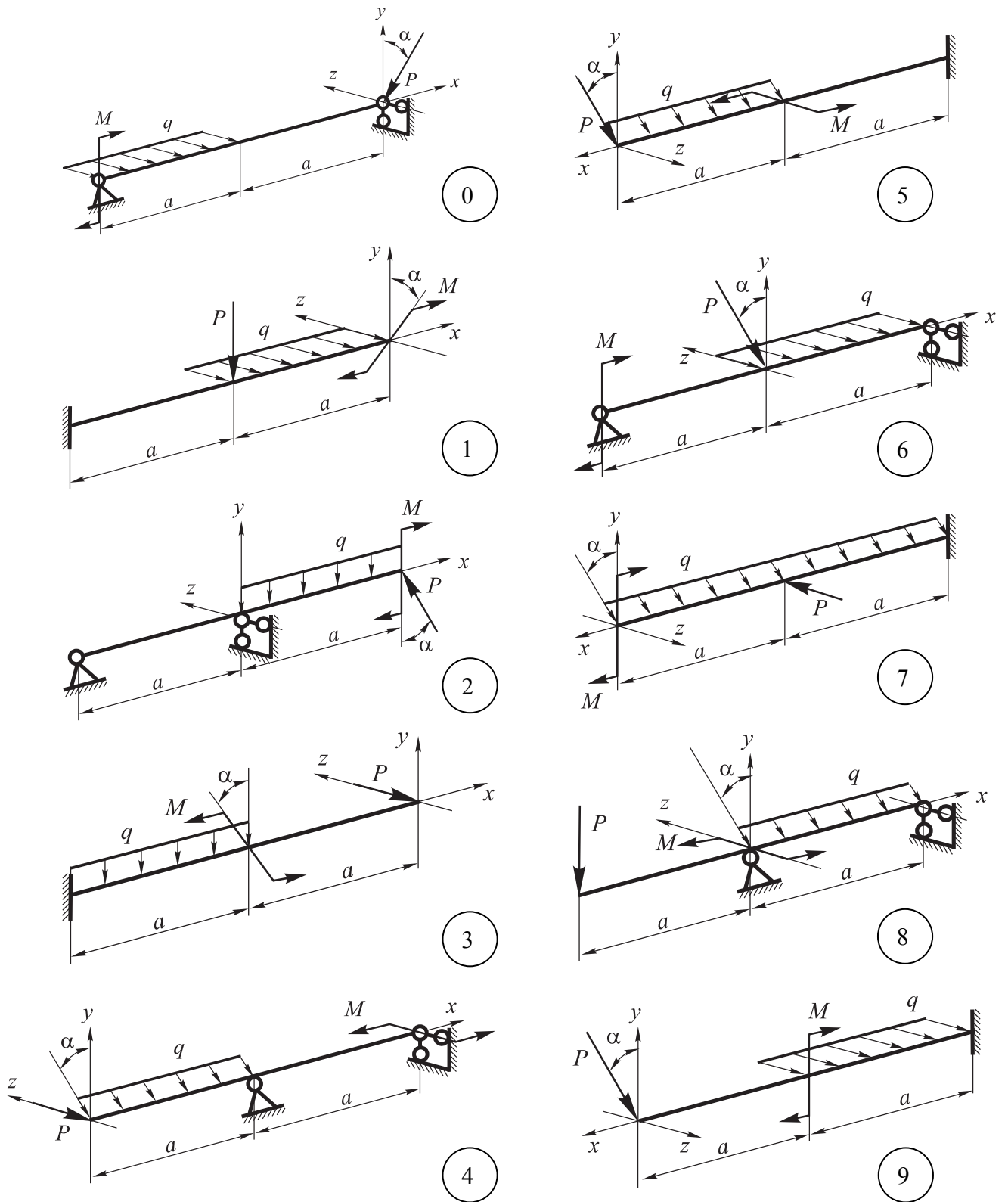


Рис. 3.1. Варіанти розрахункових схем балок до задачі 3

5. Вибрати раціональне розташування перерізу вказаної форми.
6. Методом послідовних наближень дібрати переріз з розрахунку на міцність за нормальними напруженнями.
7. Визначити положення нейтральної лінії в небезпечному перерізі і побудувати епюру сумарних напружень.
8. Будь-яким з відомих методів визначити прогини балки в перерізі  $A$  у головних площинах  $xu$  та  $xz$ , а потім обчислити величину повного прогину та знайти його напрямок у вибраній системі координат. Для цього слід накреслити переріз в масштабі, векторну діаграму переміщень його центру мас, зобразивши в певному масштабі знайдені вектори переміщень у головних площинах, та знайти вектор сумарного переміщення. Обчислити кут його нахилу відносно однієї з головних осей.

### Розв'язання задачі

Дано (рис. 3.2):  $q = 10$  кН/м,  $P = 20$  кН,  $M = 15$  кН·м,  $a = 1$  м,  $\alpha = 30^\circ$ , переріз – [] (два швелери), матеріал – сталь 20 з модулем пружності  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа та границею текучості  $\sigma_T = 250$  МПа, коефіцієнт запасу міцності  $n_T = 1,5$ .

1. Зобразимо розрахункову схему, розклавши попередньо всі сили на складові, що діють у головних площинах  $xu$  та  $xz$  (рис. 3.3).

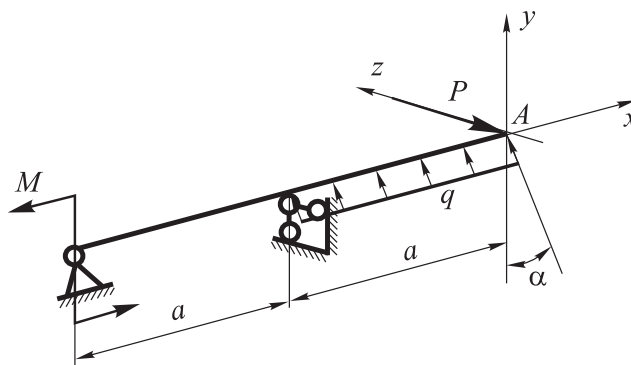


Рис. 3.2. Розрахункова схема балки для умов неплоского згину

В даному прикладі слід розкласти лише рівномірно розподілене навантаження  $q$ :

$$q_y = 10 \cdot \cos 30^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 8,66 \text{ кН/м};$$

$$q_z = 10 \cdot \sin 30^\circ = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ кН/м}.$$

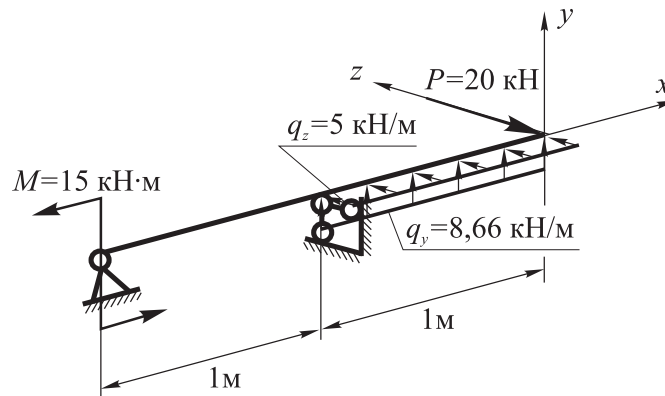


Рис. 3.3. Розрахункова схема балки модифікована

2. Визначаємо опорні реакції в кожній площині з умов рівноваги балки (розрахункові схеми подані на рис. 3.4).

У площині  $xy$ :

$$\sum M_{zB} = R_{Cy} \cdot 1 - M - q_y \cdot 1 \cdot 0,5 = R_{Cy} \cdot 1 - 15 - 8,66 \cdot 1 \cdot 0,5 = 0;$$

$$\sum M_{zC} = -M + R_{By} \cdot 1 - q_y \cdot 1 \cdot 1,5 = -15 + R_{By} \cdot 1 - 8,66 \cdot 1 \cdot 1,5 = 0.$$

Звідси  $R_{Cy} = 19,33 \text{ кН}$ ,  $R_{By} = 27,99 \text{ кН}$ .

У площині  $xz$ :

$$\sum M_{yB} = R_{Cz} \cdot 1 - P \cdot 1 + q_z \cdot 1 \cdot 0,5 = R_{Cz} \cdot 1 - 20 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \cdot 0,5 = 0;$$

$$\sum M_{yC} = R_{Bz} \cdot 1 - P \cdot 2 + q_z \cdot 1 \cdot 1,5 = R_{Bz} \cdot 1 - 20 \cdot 2 + 5 \cdot 1 \cdot 1,5 = 0.$$

Звідси  $R_{Cz} = 17,5 \text{ кН}$ ,  $R_{Bz} = 32,5 \text{ кН}$ .

3. Побудуємо в площинах  $xu$  та  $xz$  епюри згинальних моментів  $M_y$  і  $M_z$ . Для цього запишемо вирази для згинальних моментів для кожної ділянки у відповідних площинах. Ці вирази нам знадобляться також при визначенні прогинів балки у заданому перерізі  $A$ .

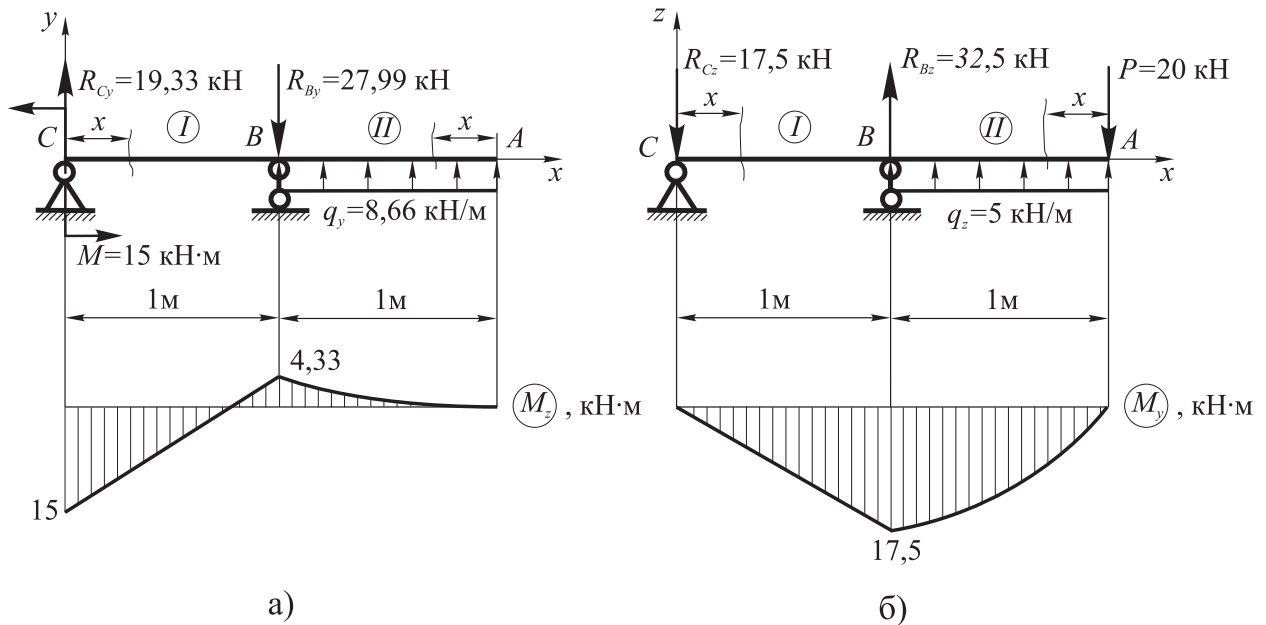


Рис. 3.4. Епюри згинальних моментів

У площині  $xu$ :

$$I: 0 \leq x \leq 1 \text{ м:} \quad M_z(x) = -M + R_{Cy} \cdot x.$$

$$II: 0 \leq x \leq 1 \text{ м:} \quad M_z(x) = \frac{q_y x^2}{2}.$$

У площині  $xz$ :

$$I: 0 \leq x \leq 1 \text{ м:} \quad M_y(x) = -R_{Cz} \cdot x.$$

$$II: 0 \leq x \leq 1 \text{ м:} \quad M_y(x) = \frac{q_z x^2}{2} - P \cdot x.$$

Підставляючи числові значення в отримані рівняння, будуємо епюри згинальних моментів  $M_z$  і  $M_y$  (див. рис. 3.4, а і б відповідно).

4. Аналізуючи епюри згинальних моментів, приходимо до висновку, що небезпечним є переріз  $B$ . Тут діють моменти  $M_{yB} = M_{y\max} = 17,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$  і  $M_{zB} = 4,33 \text{ кН}\cdot\text{м}$ . Інші перерізи, згідно з епюрами моментів, менш навантажені. Тому саме для цього перерізу і проведемо необхідні розрахунки, пов'язані з добором безпечних розмірів швелерів та раціональним розташуванням перерізу, з них складеного, відносно головних осей інерції.

5. Почнемо розрахунки з вибору раціонального розташування перерізу балки заданої форми відносно осей  $y$  і  $z$ . При цьому керуватимемось такими міркуваннями.

Оскільки в площині  $xz$  діє більший за абсолютною величиною згинальний момент  $M_y$ , то саме в цій площині розмістимо висоту перерізу. Адже в цьому випадку більшому згинальному моменту відповідатиме більший момент опору перерізу (рис. 3.5).

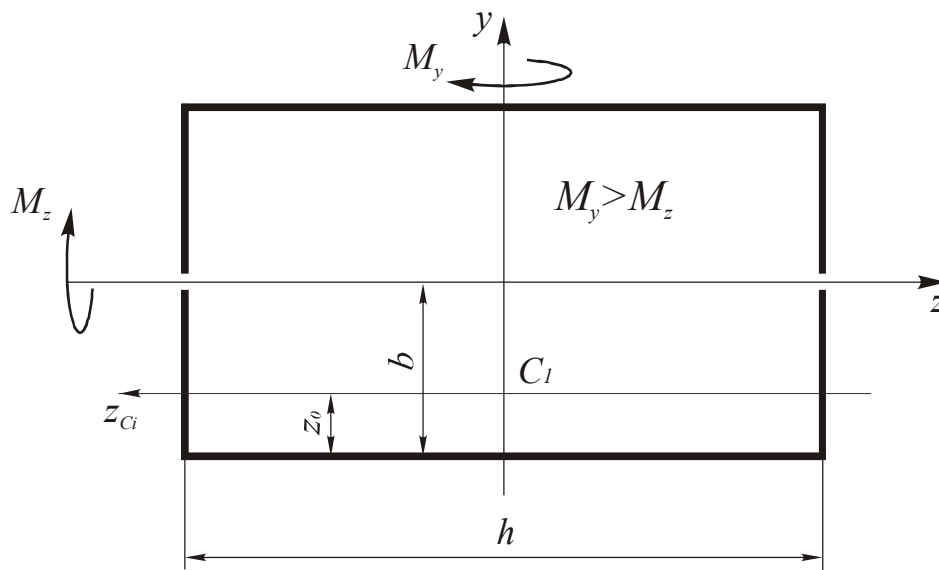


Рис. 3.5. Схема раціонального розташування перерізу балки відносно заданої системи координат

6. Як відомо, для такого типу перерізів небезпечна точка збігається з однією з вершин умовного прямокутника, в який даний переріз вписується, і саме з тією точкою, в якій напруження, викликані дією моментів, мають один знак. Для перерізу  $B$  умова міцності матиме вигляд:

$$|\sigma_{\max}| = \frac{|M_{zB}|}{W_z} + \frac{|M_{yB}|}{W_y} \leq [\sigma].$$

Невідомими тут є моменти опору перерізу  $W_z$  і  $W_y$ . Тому розрахунок ведуть методом послідовних наближень. При цьому можна попередньо вибрати деякий номер швелера, визначити моменти опору складеного з цих швелерів перерізу і перевірити його на міцність. В разі значної розбіжності між діючим та допустимим напруженнями слід вибрати інший типорозмір, аж поки ця різниця не досягне мінімального значення.

*Примітка:* перевантаження, коли діюче напруження  $|\sigma_{\max}| > [\sigma]$ , допускається до 3 %.

В нашому прикладі можна скоротити цей шлях, адже в небезпечному перерізі згинальний момент в одній площині ( $M_y$ ) значно перевищує згинальний момент в іншій площині ( $M_z$ ). Тому можна спробувати дібрати переріз з умови міцності лише в площині дії максимального моменту, а потім перевірити його на міцність з урахуванням іншої складової моменту.

Виходячи з цих міркувань, запишемо:

$$\sigma = \frac{|M_{yB}|}{W_y} \leq [\sigma].$$

Допустиме напруження для сталі 20  $[\sigma] = \frac{\sigma_r}{n_r} = \frac{250}{1,5} = 166 \text{ МПа}$ . Отже,

$$W_y \geq \frac{|M_{yB}|}{[\sigma]} = \frac{17,5 \cdot 10^6}{166} = 105421,7 \text{ мм}^3 = 105,42 \text{ см}^3.$$

Ми знайшли необхідний момент опору складеного перерізу відносно осі  $y$ . Враховуючи, що момент опору для перерізу, що розглядається,

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{2I_{y_i}}{z_{\max}} = 2W_{y_i}, \text{ де } I_{y_i} \text{ – момент інерції одного швелера відносно}$$

осі  $y$  (див. рис. 3.5), отримаємо

$$W_{y_i} = 0,5W_y \geq 0,5 \cdot 105,42 = 52,71 \text{ см}^3.$$

З таблиць сортamentів прокатної сталі вибираємо номер швелера з найближчим більшим значенням моменту опору. Це швелер № 14 з такими геометричними характеристиками:  $h = 140 \text{ мм}$ ,  $b = 58 \text{ мм}$ ,  $z_0 = 16,7 \text{ мм}$ ,  $W_{y_i} = 70,2 \text{ см}^3$ ,  $I_{y_i} = 491 \text{ см}^3$ ,  $I_{zC_i} = 45,4 \text{ см}^3$ ,  $F = 15,6 \text{ см}^2$ .

Знаходимо моменти інерції  $I_z$  і  $I_y$  та моменти опору  $W_z$  і  $W_y$  для складеного перерізу (див. рис. 3.5):

$$I_y = 2I_{yC_i} = 2 \cdot 491 = 982 \text{ см}^4;$$

$$W_y = 2W_{y_i} = 2 \cdot 70,2 = 140,4 \text{ см}^3;$$

$$I_z = 2 \left[ I_{zC_i} + (b - z_0)^2 A \right] = 2 \left[ 45,4 + (5,8 - 1,67)^2 \cdot 15,6 \right] = 622,98 \text{ см}^4;$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{622,98}{5,8} = 107,41 \text{ см}^3.$$

Перевіряємо на міцність переріз з урахуванням  $M_z$ :

$$|\sigma_{\max}| = \frac{|M_{zB}|}{W_z} + \frac{|M_{yB}|}{W_y} = \frac{4,3 \cdot 10^6}{107,41 \cdot 10^3} + \frac{17,5 \cdot 10^6}{140,4 \cdot 10^3} = 40,03 + 124,64 = 164,67 \text{ МПа} < 166 \text{ МПа}.$$

Умова міцності виконується.

Отже, зупиняємось на перерізі, що складається з швелерів № 14. Проте, згідно з епюрами моментів (див. рис. 3.4), потенційно небезпечним є також переріз С. Хоч тут і діє тільки згинальний момент у площині  $xu$ , проте величина його ( $M_z = 15 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ) близька до величини максимального моменту у вибраному нами небезпечному перерізі В, в той час як момент опору перерізу у цій площині  $W_z$  менший від  $W_y$ .

Перевіримо на міцність балку в перерізі С:



$$\sigma = \frac{|M_{zC}|}{W_z} = \frac{15 \cdot 10^6}{107,41 \cdot 10^3} = 139,65 \text{ МПа} < 166 \text{ МПа} .$$

Умова міцності виконується.

7. Визначаємо положення нейтральної лінії в небезпечному перерізі  $B$  і будуємо епюру сумарних напружень.

Креслимо в масштабі переріз балки (рис. 3.6).

Щоб спростити знаходження положення нейтральної лінії в перерізі та для більшої наочності, зручно спочатку показати положення силової лінії. Вона проходить через квадранти, в яких обидва моменти  $M_y$  і  $M_z$  викликають деформації волокон одного знаку: або стиск, або розтяг. Згідно з рис. 3.6 – це другий і четвертий квадранти. Кут нахилу силової лінії до осі  $u$  обчислимо за формулою

$$\alpha = \arctg\left(\frac{M_{yB}}{M_{zB}}\right) = \arctg\left(\frac{17,5}{4,33}\right) = 76^\circ .$$

Визначаємо положення нейтральної лінії відносно осі  $z$ :

$$\beta = \arctg\left(-\frac{M_{yB}}{M_{zB}} \cdot \frac{I_z}{I_y}\right) = \arctg\left(-\frac{17,5}{4,33} \cdot \frac{622,98}{982}\right) = -69^\circ .$$

Проходить нейтральна лінія відповідно через перший і третій квадранти (про це свідчить і знак "-" у формулі для кута  $\beta$ ).

Проводимо нейтральну лінію і перпендикулярно до неї – базову лінію епюри сумарних напружень. Проводимо також базові лінії епюр розподілу напружень по сторонах перерізу. небезпечні точки перерізу – найвіддаленіші від нейтральної лінії. Тобто це точки  $D$  і  $E$ . Тут діють максимальні напруження: стискувальні для точки  $D$  і розтягувальні для точки  $E$  (знак напружень визначаємо за напрямком дії згинальних моментів  $M_z$  і  $M_y$ ).

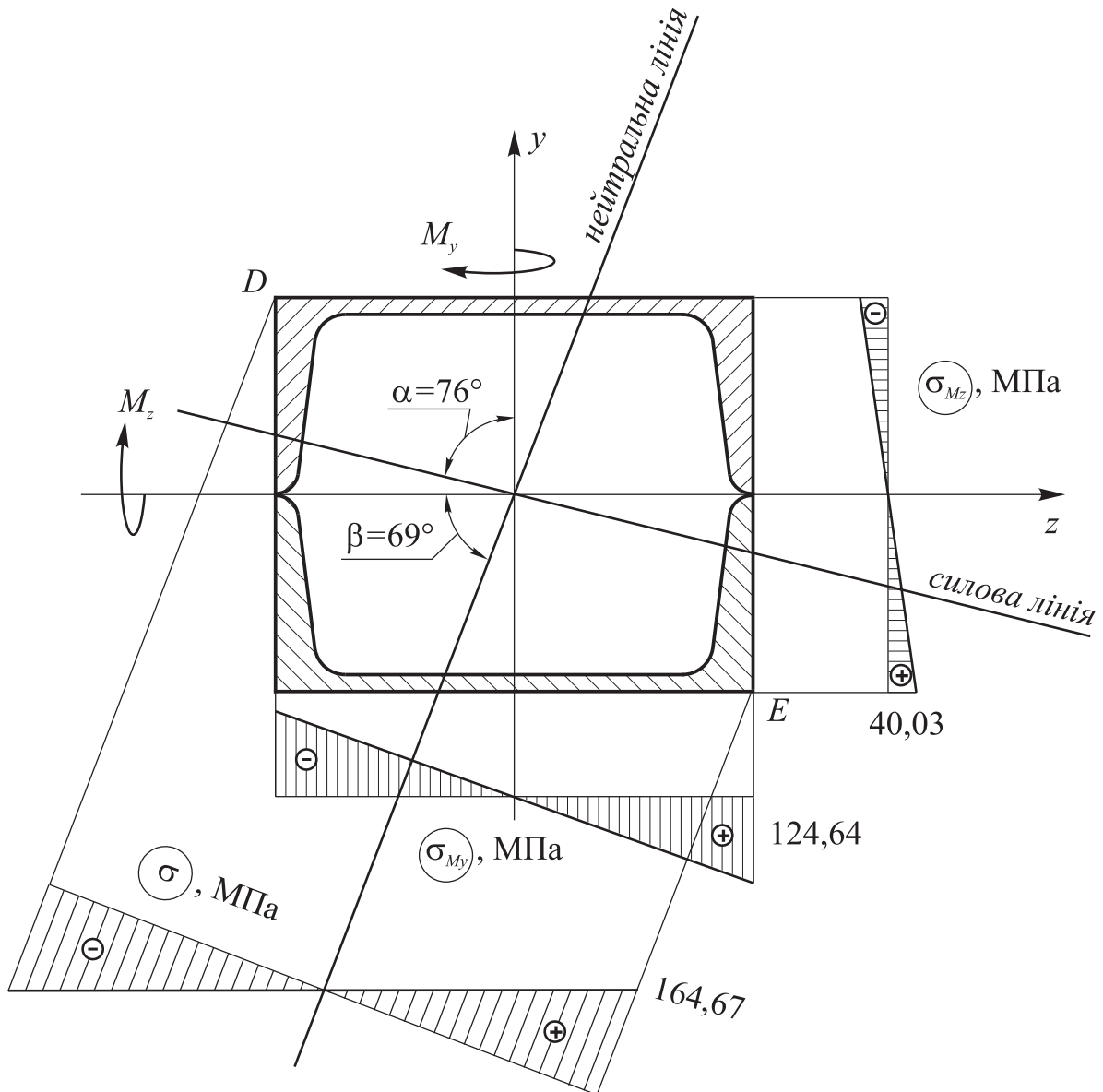


Рис. 3.6. Епюри розподілу напружень у перерізі B

Користуючись результатами розрахунків для  $|\sigma_{\max}|$  (див. п. 6), запишемо:

$$|\sigma_{M_z}| = \frac{|M_{zB}|}{W_z} = 40,03 \text{ МПа}; \quad |\sigma_{M_y}| = \frac{|M_{yB}|}{W_y} = 124,64 \text{ МПа};$$

$$\sigma_D = -\sigma_{M_z} - \sigma_{M_y} = -\frac{M_{zB}}{W_z} - \frac{M_{yB}}{W_y} = -40,03 - 124,64 = -164,67 \text{ МПа};$$

$$\sigma_E = \sigma_{M_z} + \sigma_{M_y} = \frac{M_{zB}}{W_z} + \frac{M_{yB}}{W_y} = 40,03 + 124,64 = 164,67 \text{ МПа}.$$

За отриманими даними будуємо епюри напружень (див. рис. 3.6).

8. Визначаємо прогини балки в перерізі  $A$  у головних площинах  $xy$  та  $xz$  та величину повного прогину, користуючись методом Мора.

Прогин у площині  $xy$  позначимо  $w_{Ay}$ , а у площині  $xz$  –  $w_{Az}$ .

Для визначення прогину у площині  $xy$  до балки в перерізі  $A$  прикладаємо одиничну силу  $\bar{P}_y = 1$  (рис. 3.7, *a*) та записуємо вирази для згинальних моментів на кожній ділянці стержня (точки відліку положень довільного перерізу  $x$  на кожній ділянці узгоджуємо з вибраними в п. 3 при визначенні згинальних моментів від заданого навантаження).

У площині  $xy$ :

$$I: 0 \leq x \leq 1 \text{ м}: \quad \bar{M}_z(x) = -1 \cdot x.$$

$$II: 0 \leq x \leq 1 \text{ м}: \quad \bar{M}_z(x) = -1 \cdot x.$$

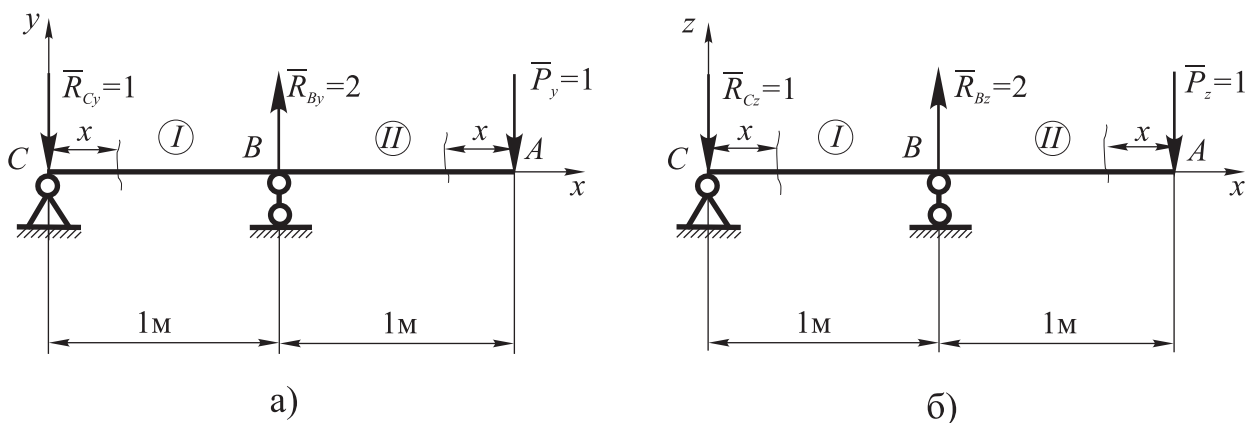


Рис. 3.7. Схеми прикладання до балки одиничних навантажень при визначенні прогинів у перерізі  $A$

Користуючись виразами для згинальних моментів від заданого навантаження, отриманими в п. 3, та одиничного навантаження, запишемо інтеграл Мора у вигляді:

$$\begin{aligned}
w_{Ay} &= \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{M_{z_i}(x) \bar{M}_{z_i}(x)}{EI_z} dx = \frac{1}{EI_z} \left[ \int_0^1 (-M + R_{Cy}x)(-1 \cdot x) dx + \int_0^1 \frac{q_y x^2}{2} (-1 \cdot x) dx \right] = \\
&= \frac{1}{2 \cdot 10^5 \cdot 622,98 \cdot 10^4} \left[ \int_0^{10^3} (-15 \cdot 10^6 + 19,33 \cdot 10^3 x)(-x) dx + \int_0^{10^3} \frac{8,66x^2}{2} (-x) dx \right] = \\
&= \frac{1}{2 \cdot 10^5 \cdot 622,98 \cdot 10^4} \left[ \int_0^{10^3} (15 \cdot 10^6 x - 19,33 \cdot 10^3 x^2) dx - \int_0^{10^3} \frac{8,66x^3}{2} dx \right] = \\
&= \frac{1}{2 \cdot 10^5 \cdot 622,98 \cdot 10^4} \left( 15 \cdot 10^6 \frac{x^2}{2} - 19,33 \cdot 10^3 \frac{x^3}{3} - \frac{8,66x^4}{8} \right) \Bigg|_0^{10^3} = \\
&= \frac{10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 622,98 \cdot 10^4} \left( \frac{15}{2} - \frac{19,33}{3} - \frac{8,66}{8} \right) = -0,016 \text{ мм.}
\end{aligned}$$

Отже, величина прогину у площині  $xу$  складає  $|w_{Ay}| = 0,016$  мм. Знак „-” означає, що прогин спрямований у бік, протилежний до напрямку одиничної сили  $\bar{P}_y$  (див. рис. 3.7, а).

Для визначення прогину у площині  $xz$  прикладаємо в перерізі  $A$  одиничну силу  $\bar{P}_z = 1$  (рис. 3.7, б) і проводимо всі необхідні обчислення у послідовності, як і для площини  $xу$ .

Вирази для згинальних моментів від одиничного навантаження:

$$I: 0 \leq x \leq 1 \text{ м:} \quad \bar{M}_y(x) = -1 \cdot x.$$

$$II: 0 \leq x \leq 1 \text{ м:} \quad \bar{M}_y(x) = -1 \cdot x.$$

Інтеграл Мора:

$$\begin{aligned}
w_{Az} &= \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{M_{y_i}(x) \bar{M}_{y_i}(x)}{EI_z} dx = \\
&= \frac{1}{EI_z} \left[ \int_0^1 (-R_{Cz} \cdot x)(-1 \cdot x) dx + \int_0^1 \left( \frac{q_z x^2}{2} - P \cdot x \right) (-1 \cdot x) dx \right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2 \cdot 10^5 \cdot 982 \cdot 10^4} \left[ \int_0^{10^3} (17,5 \cdot 10^3 x^2) dx + \int_0^{10^3} \left( -\frac{5x^3}{2} + 20 \cdot 10^3 x^2 \right) dx \right] = \\
&= \frac{1}{2 \cdot 10^5 \cdot 982 \cdot 10^4} \left( 17,5 \cdot 10^3 \frac{x^3}{3} - \frac{5x^4}{8} + 20 \cdot 10^3 \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^{10^3} = \\
&= \frac{10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 982 \cdot 10^4} \left( \frac{17,5}{3} - \frac{5}{8} + \frac{20}{3} \right) = 6,046 \text{ мм.}
\end{aligned}$$

Сумарний прогин знаходимо як геометричну суму знайдених прогинів:

$$w_A = \sqrt{w_{Ay}^2 + w_{Az}^2} = \sqrt{0,016^2 + 6,046^2} \approx 6,05 \text{ мм.}$$

Щоб визначити напрямок прогину, треба побудувати векторну діаграму переміщень центру ваги перерізу  $A$ , зобразивши в масштабі вектори переміщень  $\vec{w}_{Ay}$  і  $\vec{w}_{Az}$ .

Слід зазначити, що в нашому випадку напрямок сумарного прогину практично збігається з напрямком прогину в площині  $xz$ , оскільки  $w_{Ay} \ll w_{Az}$ . Однак, з метою показати методику таких обчислень повністю, зобразимо векторну діаграму переміщень без дотримання масштабів, вказавши лише реальні напрямки знайдених прогинів (рис. 3.8).

Кут між напрямком сумарного прогину та віссю  $z$  знайдемо зі співвідношення:

$$\gamma = \arctg \left( \frac{w_y}{w_z} \right) = \arctg \left( \frac{0,016}{6,05} \right) = \arctg 0,0026446 = 0,15^\circ.$$

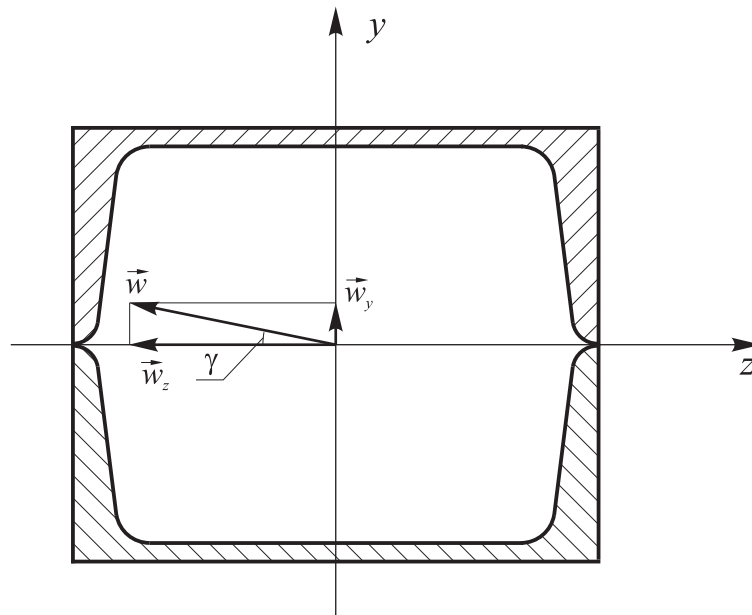


Рис. 3.8. Векторна діаграма переміщень перерізу  $A$

## ЗАДАЧА 4 ПОЗАЦЕНТРОВИЙ СТИСК

Бетонна колона стискається силою  $P$ , що діє паралельно осі колони, але не збігається з віссю (рис. 4.1). Для заданого перерізу колони (табл. 4.1, рис. 4.2) визначити допустиме значення сили  $P$  і побудувати епюру розподілення напружень в перерізі, якщо відома точка прикладання сили  $P$  в системі координат  $z'$ ,  $y'$  і допустимі значення напружень на розтяг  $[\sigma]_p = 2$  МПа і на стиск  $[\sigma]_c = 20$  МПа.

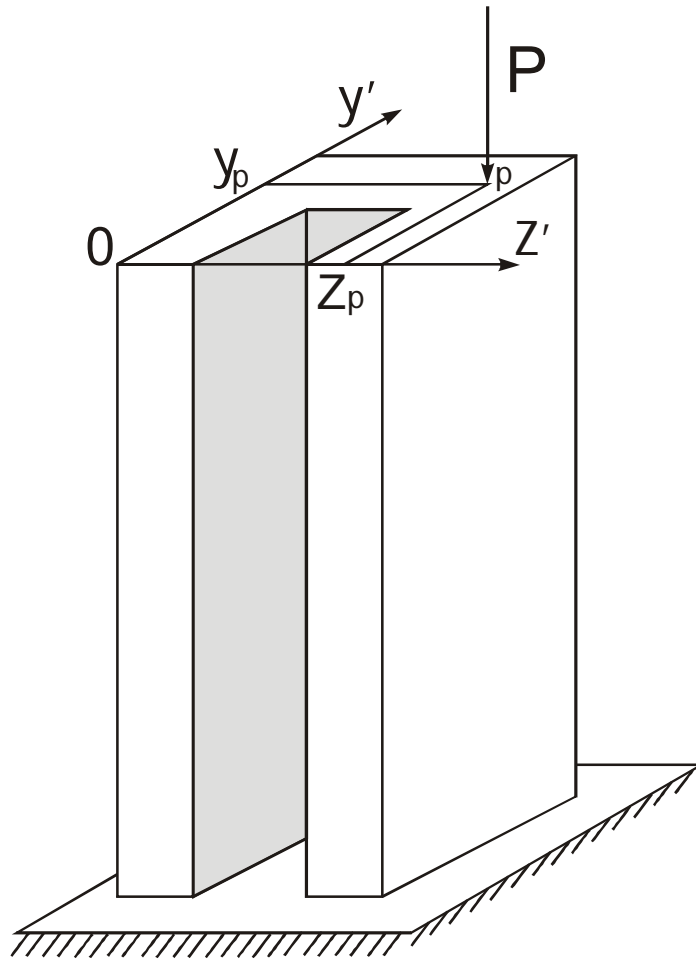


Рис. 4.1. Приклад позацентрального стиску колони

Таблиця 4.1. Варіанти завдань до задачі 4

Пара-метр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a$ , см	70	65	50	45	40	45	50	55	60	65
$z_P$ , см	40	30	20	15	10	15	25	35	40	15
$y_P$ , см	30	10	25	20	15	20	25	20	25	30

### План розв'язування задачі

1. Визначити положення центра ваги перерізу в системі координат  $y'$ ,  $z'$ .
2. Провести головні центральні осі інерції  $y$ ,  $z$  і визначити в цій системі координати точки прикладання сили (полюса)  $y_P$ ,  $z_P$ .
3. Обчислити головні центральні моменти інерції перерізу  $I_y$ ,  $I_z$  і радіуси інерції  $i_y$ ,  $i_z$ .
4. Знайти відрізки  $y_H$ ,  $z_H$ , що відсікаються нейтральною лінією на осях  $y$ ,  $z$ , провести нейтральну лінію і визначити координати небезпечних (найбільш віддалених від нейтральної лінії) точок.
5. Обчислити допустиме значення сили  $P$  з умов міцності в небезпечних точках перерізу.
6. Побудувати епюру розподілення нормальних напружень в перерізі.

### Розв'язання задачі

До колони з перерізом, який показано на рис. 4.3, прикладена сила  $P$  в точці з координатами  $y'_P = 5$  см,  $z'_P = 10$  см. Визначити допустиму силу  $P$  й побудувати епюру розподілення напружень в перерізі.

1. Визначаємо координати центра ваги  $C$  перерізу.

Розглядаючи переріз складеним з двох частин – прямокутника  $80 \times 40$  см з центром ваги  $C_1$  і вирізу  $56 \times 28$  см з центром ваги  $C_2$ , знайдемо координату  $y'_C$  центра ваги перерізу:



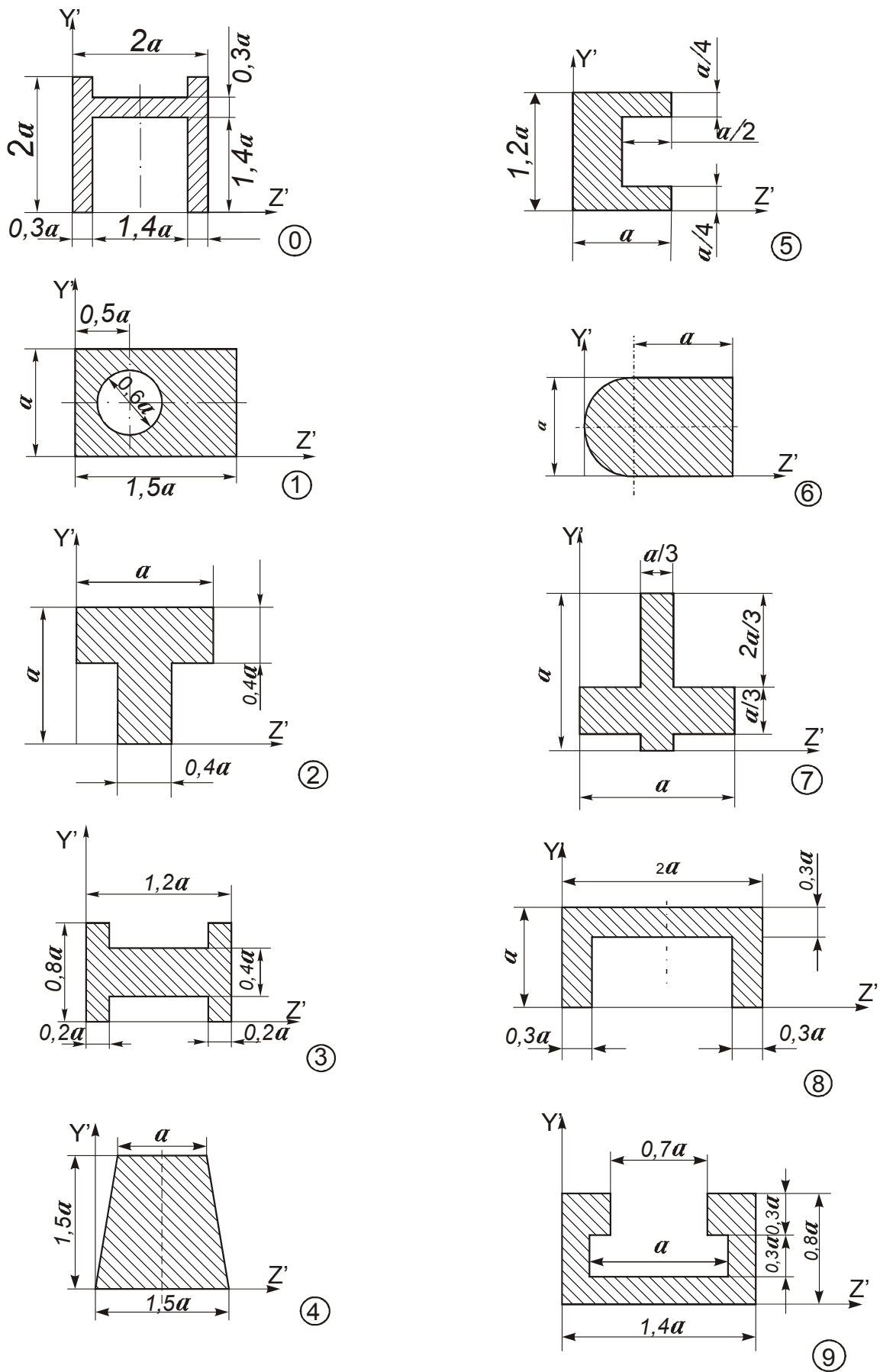


Рис. 4.2. Варіанти поперечних перерізів до задачі 4

$$y'_C = \frac{\sum y'_{Ci} F_i}{\sum F_i} = \frac{y'_{C1} F_1 - y'_{C2} F_2}{F_1 - F_2} = \frac{20 \cdot 80 \cdot 40 - 26 \cdot 56 \cdot 28}{80 \cdot 40 - 56 \cdot 28} = 14,8 \text{ см.}$$

Оскільки переріз симетричний, то  $z'_C = 40 \text{ см.}$

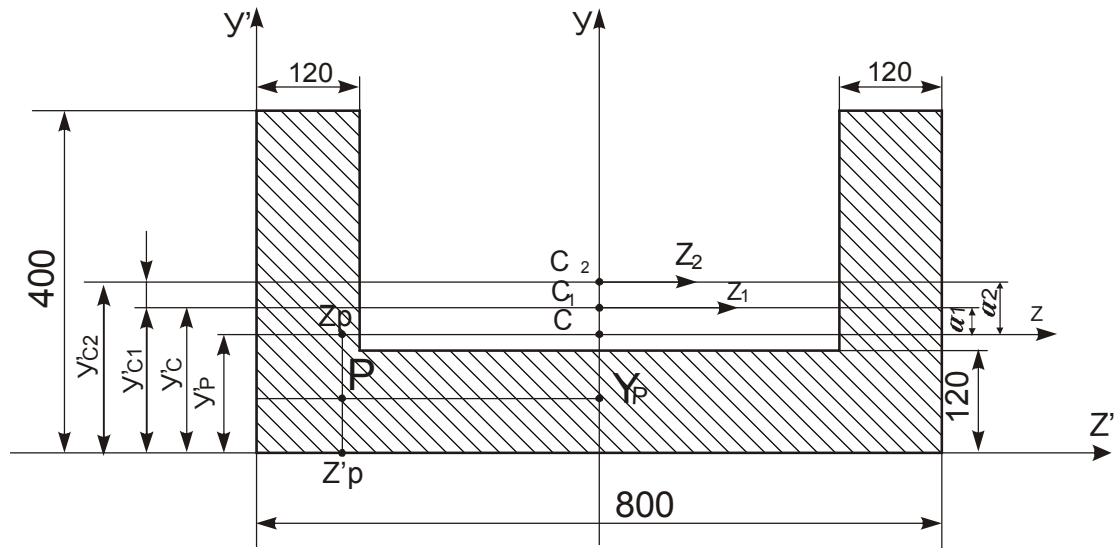


Рис. 4.3. Поперечний переріз колони

2. Через центр ваги перерізу  $C$  проводимо головні центральні осі інерції перерізу –  $y, z$ .

В цій системі координат точка прикладення сили (поліус) має координати  $y_P = -9,3 \text{ см}$ ,  $z_P = -30 \text{ см}$ .

3. Визначаємо головні центральні моменти інерції і радіуси інерції перерізу.

Моменти інерції перерізу відносно головних центральних осей:

$$I_y = I_y^I - I_y^{II} = \frac{40 \cdot 80^3}{12} - \frac{28 \cdot 56^3}{12} = 1648128 \text{ см}^4;$$

$$\begin{aligned} I_z &= I_z^I - I_z^{II} = (I_{z1} + a_1^2 F_1) - (I_{z2} + a_2^2 F_2) = \\ &= \left( \frac{80 \cdot 40^3}{12} + 5,7^2 \cdot 80 \cdot 40 \right) - \left( \frac{56 \cdot 28^3}{12} + 11,7^2 \cdot 56 \cdot 28 \right) = 123474,6 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Радіуси інерції перерізу відносно головних центральних осей:

$$i_y^2 = \frac{I_y}{F} = \frac{1648128}{1632} = 1020 \text{ см}^2;$$

$$i_z^2 = \frac{I_z}{F} = \frac{213474,6}{1632} = 130,8 \text{ см}^2.$$

4. Визначаємо положення нейтральної лінії і координати небезпечних точок.

Відрізки  $y_H$  і  $z_H$ , які відсікає нейтральна лінія на головних центральних осях, знайдемо за формулами:

$$y_H = -\frac{i_z^2}{y_P} = -\frac{130,8}{-9,3} = 14 \text{ см};$$

$$z_H = -\frac{i_y^2}{z_P} = -\frac{1020}{-30} = 34 \text{ см}$$

Нейтральна лінія займає положення, яке показано на рис. 4.4. Небезпечними будуть точки  $A$  і  $B$ , що найбільш віддалені від нейтральної лінії. При цьому в точці  $A$  діють максимальні стискувальні, а в точці  $B$  – максимальні розтягуювальні напруження.

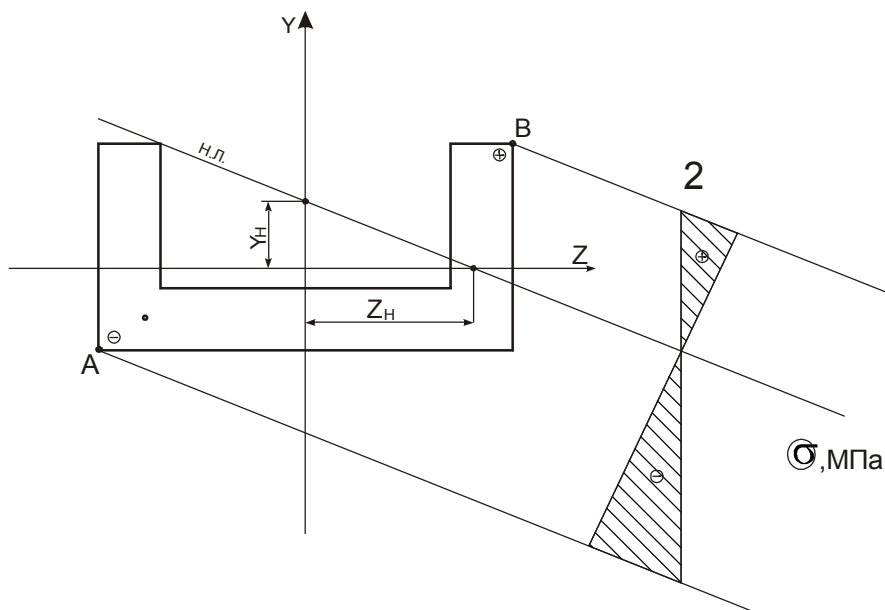


Рис. 4.4. Положення нейтральної лінії і епюра напружень

Координати небезпечних точок:

$$\begin{aligned}y_A &= -14,3 \text{ см}, & z_A &= -40 \text{ см}; \\y_B &= 25,7 \text{ см}, & z_B &= 40 \text{ см}.\end{aligned}$$

5. Визначаємо допустиме значення сили  $P$ .

Запишемо умови міцності для кожної з небезпечних точок і визначимо допустимі значення сили  $[P_-]$  і  $[P_+]$ , які будуть задовольняти умови міцності за стискувальними (т.  $A$ ) і розтягувальними (т.  $B$ ) напруженнями.

Для точки  $A$ , враховуючи, що  $P < 0$ , маємо:

$$|\sigma_{\min}| = |\sigma_A| = \left| -\frac{P}{F} \left( 1 + \frac{z_P}{i_y^2} z_A + \frac{y_P}{i_z^2} y_A \right) \right| \leq [\sigma_-],$$

звідси

$$\begin{aligned}[P_-] &= \frac{[\sigma_-] F}{1 + \frac{z_P z_A}{i_y^2} + \frac{y_P y_A}{i_z^2}} = \frac{20 \cdot 10^6 \cdot 1632 \cdot 10^{-4}}{1 + \frac{(-30)(-40)}{1020} + \frac{(-9,3)(-14,3)}{130,8}} = 1029653 \text{ Н} = \\ &= 1029,653 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Для точки  $B$ :

$$\sigma_{\max} = \sigma_B = -\frac{P}{F} \left( 1 + \frac{z_P}{i_y^2} z_B + \frac{y_P}{i_z^2} y_B \right) \leq [\sigma_+],$$

Звідси

$$\begin{aligned}[P_+] &= -\frac{[\sigma_+] F}{1 + \frac{z_P z_B}{i_y^2} + \frac{y_P y_B}{i_z^2}} = -\frac{2 \cdot 10^6 \cdot 1632 \cdot 10^{-4}}{1 + \frac{(-30) \cdot 40}{1020} + \frac{(-9,3) \cdot 25,7}{130,8}} = 163200 \text{ Н} = \\ &= 163,2 \text{ кН}.\end{aligned}$$

З двох значень  $[P_+]$  і  $[P_-]$  вибираємо менше  $[P_-] = 163,2 \text{ кН}$ . У цьому випадку будуть задовольнятися умови міцності і в т.  $A$ , і в т.  $B$ .

6. Оскільки допустиме значення сили ми визначили з умови міцності в т.  $B$ , то під час дії цієї сили напруження в т.  $B$  будуть дорівнювати допус-

тимим – 2 МПа . Знаючи, що на нейтральній лінії  $\sigma = 0$ , можна легко побудувати лінійну епюру розподілення нормальних напружень в перерізі (див. рис. 4.4).

## ЗАДАЧА 5

### РОЗРАХУНОК КРУГЛОГО ВАЛА НА ЗГИН З КРУЧЕННЯМ

Сталевий вал зі шківом пасової передачі 3 та двома зубчастими колесами 1, 2 (рис. 5,1, табл. 5.1) рівномірно обертається з швидкістю  $\omega$  і передає потужність, задану на зубчастих колесах або на шківі і одному з коліс.

Визначити діаметр вала, нехтуючи його власною вагою і вагою коліс та шківа. Кут зачеплення  $\alpha = 20^\circ$ ,  $a = 1$  м, діаметр початкового колеса 1  $d_1 = 0,5$  м, діаметр шківа  $d_3 = 0,25$  м. Взяти коефіцієнт запасу  $n_T = 1,5$ .

*Таблиця 5.1. Варіанти завдань до задачі 5*

Варіант	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\omega, \text{C}^{-1}$	$N_1, \text{кВт}$	$N_2, \text{кВт}$	$N_3, \text{кВт}$	$\frac{d_2}{d_1}$	Матеріал
0	0	$3\pi/2$	$\pi$	10	–	40	20	0,5	Сталь 60
1	$\pi/6$	$4\pi/3$	$5\pi/6$	15	60	–	30	0,4	Сталь 55
2	$\pi/3$	$7\pi/6$	$2\pi/3$	20	50	20	–	0,6	Сталь 50
3	$\pi/2$	$\pi$	$\pi/2$	30	–	30	40	0,5	Сталь 45
4	$2\pi/3$	$5\pi/6$	$\pi/3$	40	60	–	35	0,4	Сталь 40
5	$5\pi/6$	$2\pi/3$	0	50	30	10	–	0,3	Сталь 35
6	$\pi$	$\pi/3$	$\pi/6$	60	–	50	40	0,6	Сталь 30
7	$7\pi/6$	$\pi/2$	$3\pi/2$	70	50	–	30	0,5	Сталь 25
8	$4\pi/3$	$\pi/6$	$4\pi/3$	80	50	20	–	0,4	Сталь 20
9	$3\pi/2$	0	$7\pi/6$	90	–	60	30	0,3	Сталь 10

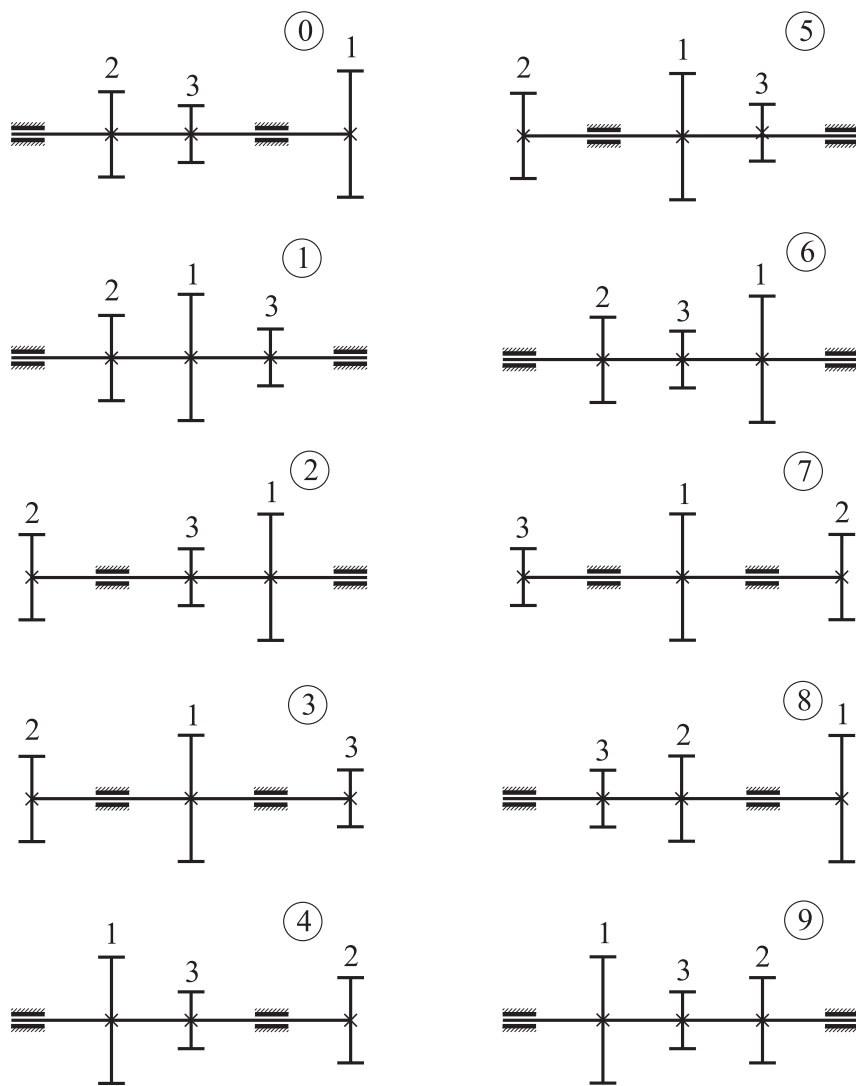
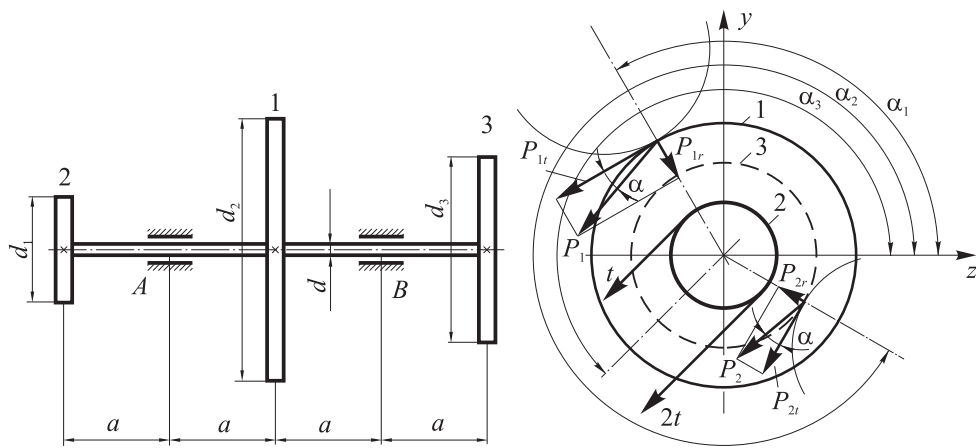


Рис. 5.1. Варіанти схем валів до задачі 5

## План розв'язування задачі

1. Визначити на шківі або колесі потужність, де її не задано, з умови рівномірного обертання вала, нехтуючи тертям у підшипниках.

2. Обчислити зовнішні моменти  $M_k$  на кожному колесі та шківі, приклавши їх у відповідному напрямку.

3. Визначити сили в передачах.

4. Зобразити в аксонометрії схему навантаження вала, звівши сили до центрів ваги перерізів і розклавши їх на горизонтальні та вертикальні складові.

5. Побудувати епюри крутних моментів та згинальних моментів у горизонтальній та вертикальній площинах.

6. Визначити небезпечний переріз.

7. Обчислити діаметр вала за одним з критеріїв міцності, округливши його величину до найближчого більшого значення згідно з рекомендованим рядом лінійних розмірів R 40 (див. додаток 1).

## Розв'язання задачі

Дано (рис. 5.2):  $\omega = 50 \text{ с}^{-1}$ ,  $N_1 = 50 \text{ кВт}$ ,  $N_2 = 30 \text{ кВт}$ ,  $d_1 = 0,5 \text{ м}$ ,  
 $d_2 = 0,15 \text{ м}$ ,  $d_3 = 0,25 \text{ м}$ ,  $a = 1 \text{ м}$   $\alpha = 20^\circ$ ,  $\alpha_1 = \frac{5}{3}\pi = 300^\circ$ ,  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$ ,  
 $\alpha_3 = \frac{3}{2}\pi = 270^\circ$ , матеріал – сталь 20 з границею текучості  $\sigma_T = 250 \text{ МПа}$ ,  
коєфіцієнт запасу міцності  $n_T = 1,5$ .

1. Визначимо потужність  $N_2$  на колесі 2 (за умовою задачі потужності  $N_1$  на колесі 1 і  $N_3$  на шківі 3 задані). Для цього скористаємось умовою рівномірного обертання вала. Орієнтуючись на напрямок дії моментів від заданого навантаження (див. рис. 5.2), запишемо:

$$N_1 = N_2 + N_3.$$



Звідси  $N_2 = N_1 - N_3 = 50 - 30 = 20$  кВт.

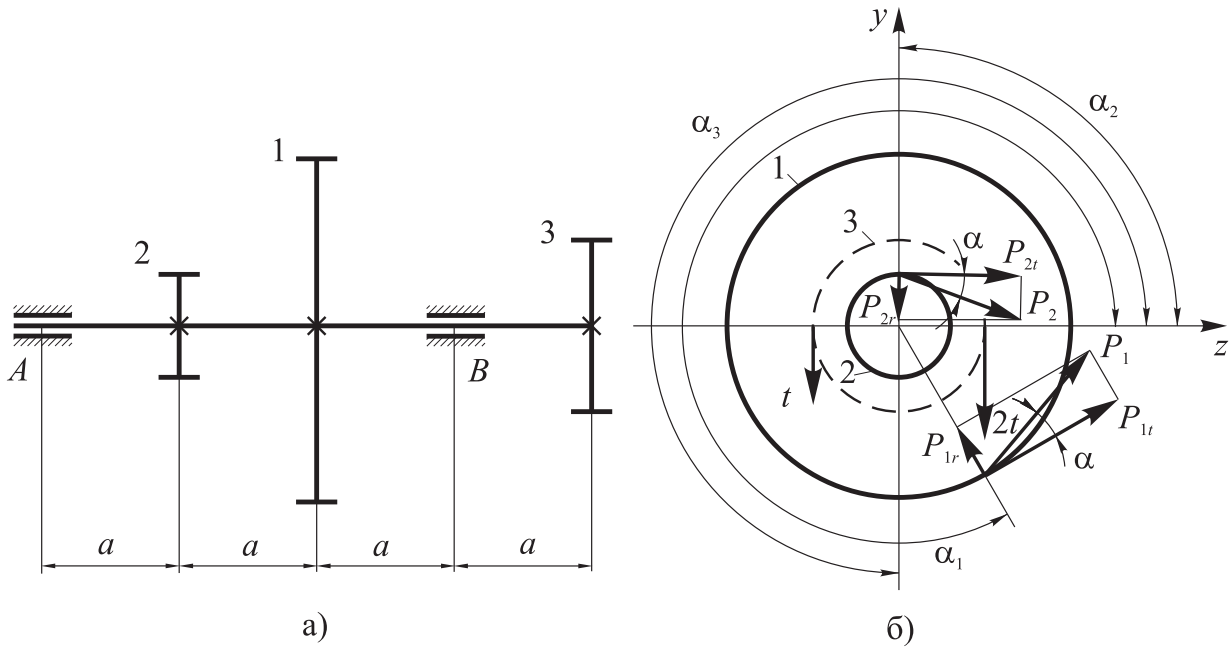


Рис. 5.2. Схема навантаження вала

2. За обертального руху обертальний момент пов'язаний з потужністю співвідношенням:

$$T = \frac{N}{\omega}.$$

Таким чином, до коліс 1, 2 і шківів 3 прикладені моменти:

$$T_1 = \frac{N_1}{\omega} = \frac{50}{50} = 1 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$T_2 = \frac{N_2}{\omega} = \frac{20}{50} = 0,4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$T_3 = \frac{N_3}{\omega} = \frac{30}{50} = 0,6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

3. Ці моменти створюються відповідними силами в передачах:

$$P_1 = \frac{2T_1}{d_1 \cos \alpha} = \frac{2 \cdot 1}{0,5 \cdot \cos 20^\circ} \approx 4,3 \text{ кН};$$

$$P_2 = \frac{2T_2}{d_2 \cos \alpha} = \frac{2 \cdot 0,4}{0,15 \cdot \cos 20^\circ} \approx 5,7 \text{ кН};$$

$$P_3 = 3t = 3 \frac{2T_3}{d_3} = 3 \cdot \frac{2 \cdot 0,6}{0,25} \approx 14,4 \text{ кН}.$$

4. Будуємо в аксонометрії розрахункову схему вала, звівши сили до центрів ваги перерізів і розклавши їх на горизонтальні і вертикальні складові (рис. 5.3).

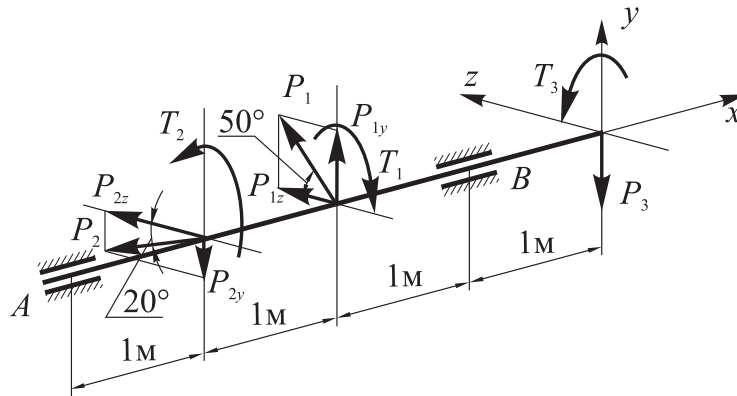


Рис. 5.3. Розрахункова схема вала

Визначаємо компоненти навантажень, вказані на рис. 5.3:

$$P_{1y} = P_1 \sin 50^\circ = 4,3 \cdot 0,766 = 3,3 \text{ кН};$$

$$P_{1z} = P_1 \cos 50^\circ = 4,3 \cdot 0,643 = 2,8 \text{ кН};$$

$$P_{2y} = P_2 \sin 20^\circ = 5,7 \cdot 0,342 = 1,9 \text{ кН};$$

$$P_{2z} = P_2 \cos 20^\circ = 5,7 \cdot 0,94 = 5,4 \text{ кН}.$$

5. Будуємо епюри крутних та згинальних моментів у вертикальній та горизонтальній площинах.

Визначаємо опорні реакції в кожній площині з умов рівноваги балки (розрахункові схеми подані на рис. 5.4).

У вертикальній площині  $xy$ :

$$\sum M_{zA} = R_{By} \cdot 3 - P_{2y} \cdot 1 + P_{1y} \cdot 2 - P_3 \cdot 4 = R_{By} \cdot 3 - 1,9 \cdot 1 + 3,3 \cdot 2 - 14,4 \cdot 4 = 0;$$

$$\sum M_{zB} = R_{Ay} \cdot 3 + P_{2y} \cdot 2 - P_{1y} \cdot 1 - P_3 \cdot 1 = R_{Ay} \cdot 3 + 1,9 \cdot 2 - 3,3 \cdot 1 - 14,4 = 0.$$

Звідси  $R_{Ay} = 4,6$  кН,  $R_{By} = 17,6$  кН.

У горизонтальній площині  $xz$ :

$$\sum M_{yA} = R_{Bz} \cdot 3 - P_{2z} \cdot 1 - P_{1z} \cdot 2 = R_{Bz} \cdot 3 - 5,4 \cdot 1 - 2,8 \cdot 2 = 0;$$

$$\sum M_{yB} = R_{Az} \cdot 3 - P_{2z} \cdot 2 - P_{1z} \cdot 1 = R_{Az} \cdot 3 - 5,4 \cdot 2 - 2,8 \cdot 1 = 0.$$

Звідси  $R_{Az} = 4,5$  кН,  $R_{Bz} = 3,7$  кН.

Побудувавши епюри крутних моментів та згинальних моментів  $M_z$  і  $M_y$  у вертикальній і горизонтальній площинах відповідно (див. рис. 5.4), визначаємо небезпечний переріз. Для цього зручно спочатку побудувати епюру сумарного згинального моменту  $M_c$ . Ординати цієї епюри в характерних точках знаходимо за формулою:

$$M_c = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}.$$

У перерізі 2:

$$M_{c2} = \sqrt{4,6^2 + 4,5^2} = \sqrt{21,16 + 20,25} = 6,4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

У перерізі 1:

$$M_{c1} = \sqrt{11,1^2 + 3,7^2} = \sqrt{123,21 + 13,69} = 11,7 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

У перерізі B:

$$M_{cB} = 14,4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

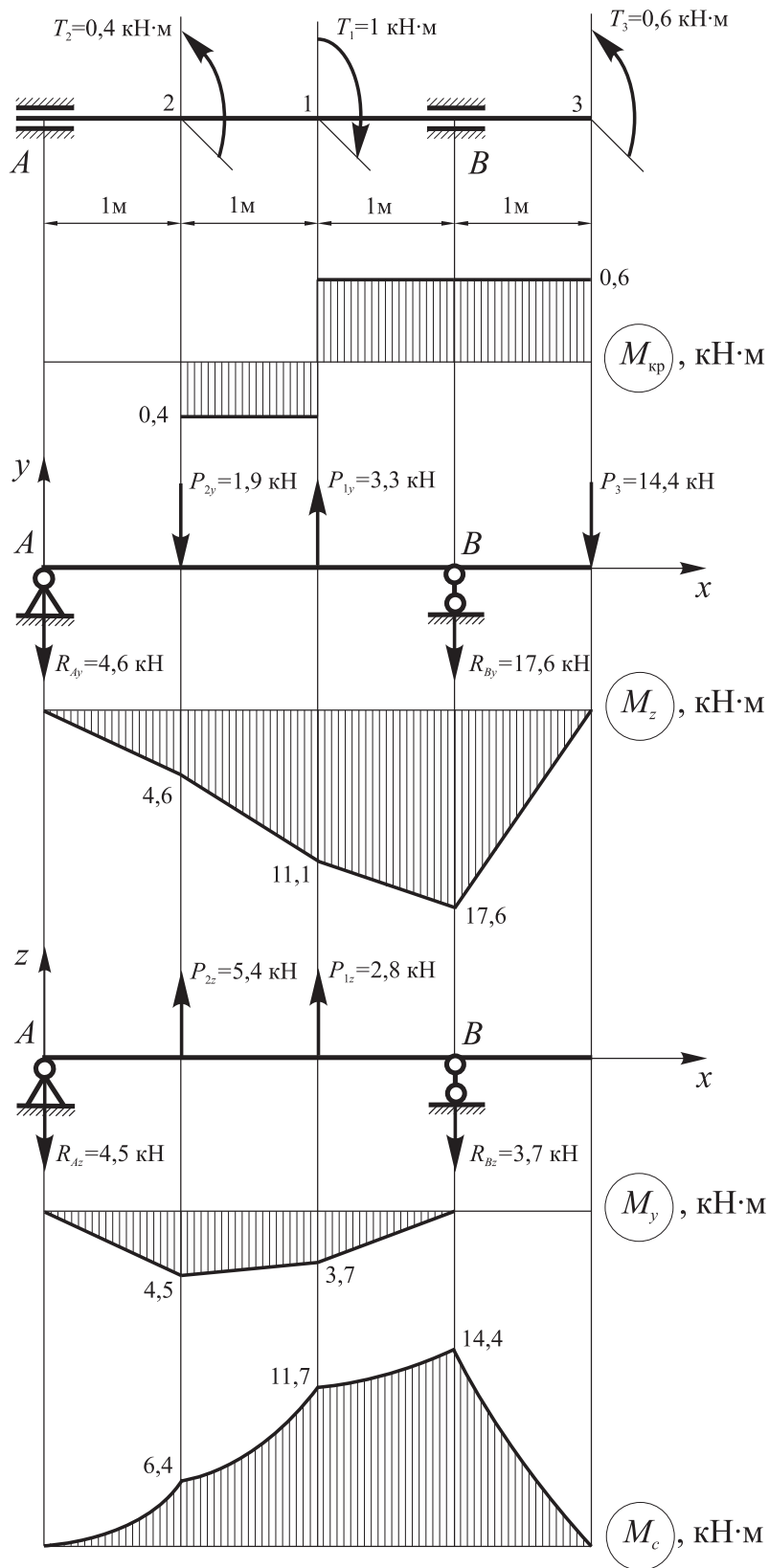


Рис. 5.4. Епюри крутного та згинальних моментів

Проаналізувавши епюри крутного та сумарного згинального моментів, приходимо до висновку, що небезпечним є переріз  $B$ . Тут діє максимальний крутний момент ( $M_{\text{кр}} = 0,6 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ) та сумарний згинальний момент ( $M_{\text{с}} = 14,4 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ).

6. Для визначення необхідного діаметра вала скористаємось третьою теорією міцності. Записуємо умову міцності:

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}} = \frac{\sqrt{M_{\text{с}}^2 + M_{\text{кр}}^2}}{W} = \frac{M_{\text{зв max}}}{W} \leq [\sigma].$$

Враховуючи, що осьовий момент опору круглого перерізу  $W = \frac{\pi d^3}{32}$ ,

знаходимо:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 M_{\text{зв max}}}{\pi [\sigma]}}.$$

Тут  $M_{\text{зв max}} = \sqrt{14,4^2 + 0,6^2} = \sqrt{207,36 + 0,36} = 14,41 \text{ кН} \cdot \text{м}$ , допустиме напруження для сталі 20  $[\sigma] = \sigma_{\text{T}}/n_{\text{T}} = 250/1,5 = 167 \text{ МПа}$ . Отже,

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 14,41 \cdot 10^6}{\pi \cdot 167}} = 95,8 \text{ мм}.$$

Згідно з рекомендованим рядом лінійних розмірів R 40 (див. додаток 1) остаточно приймаємо  $d = 96 \text{ мм}$ .

## ЗАДАЧА 6

### РОЗРАХУНОК ПРОСТОРОВОЇ РАМИ

Визначити розміри поперечних перерізів на кожній ділянці з умови міцності, якщо перша ділянка має круглий переріз, друга –квадратний і третя прямокутний з відношенням сторін  $h/b = 2$ , при цьому прямокутний переріз розташувати раціонально (табл. 6.1, рис. 6.1). Довжина всіх ділянок  $a = 1$  м, коефіцієнт запасу міцності прийняти  $n_T = 1,5$ .

*Таблиця 6.1. Варіанти завдань до задачі 6*

Варіант	$q$ , кН/м	$P$ , кН	$M$ , кН·м	Матеріал
0	10	$2qa$	$qa^2$	Сталь 10
1	15	$qa$	$2qa^2$	Сталь 20
0	20	$-3qa$	$-2qa^2$	Сталь 20
3	10	$5qa$	$qa^2$	Сталь 40
4	-10	$4qa$	$3qa^2$	Сталь 50
5	-20	$2qa$	$1,5qa^2$	Сталь 60
6	-15	$5qa$	$-1,5qa^2$	Сталь 10
7	10	$-qa$	$2qa^2$	Сталь 20
8	30	$-1,5qa$	$qa^2$	Сталь 30
9	5	$2qa$	$-2qa^2$	Сталь 40

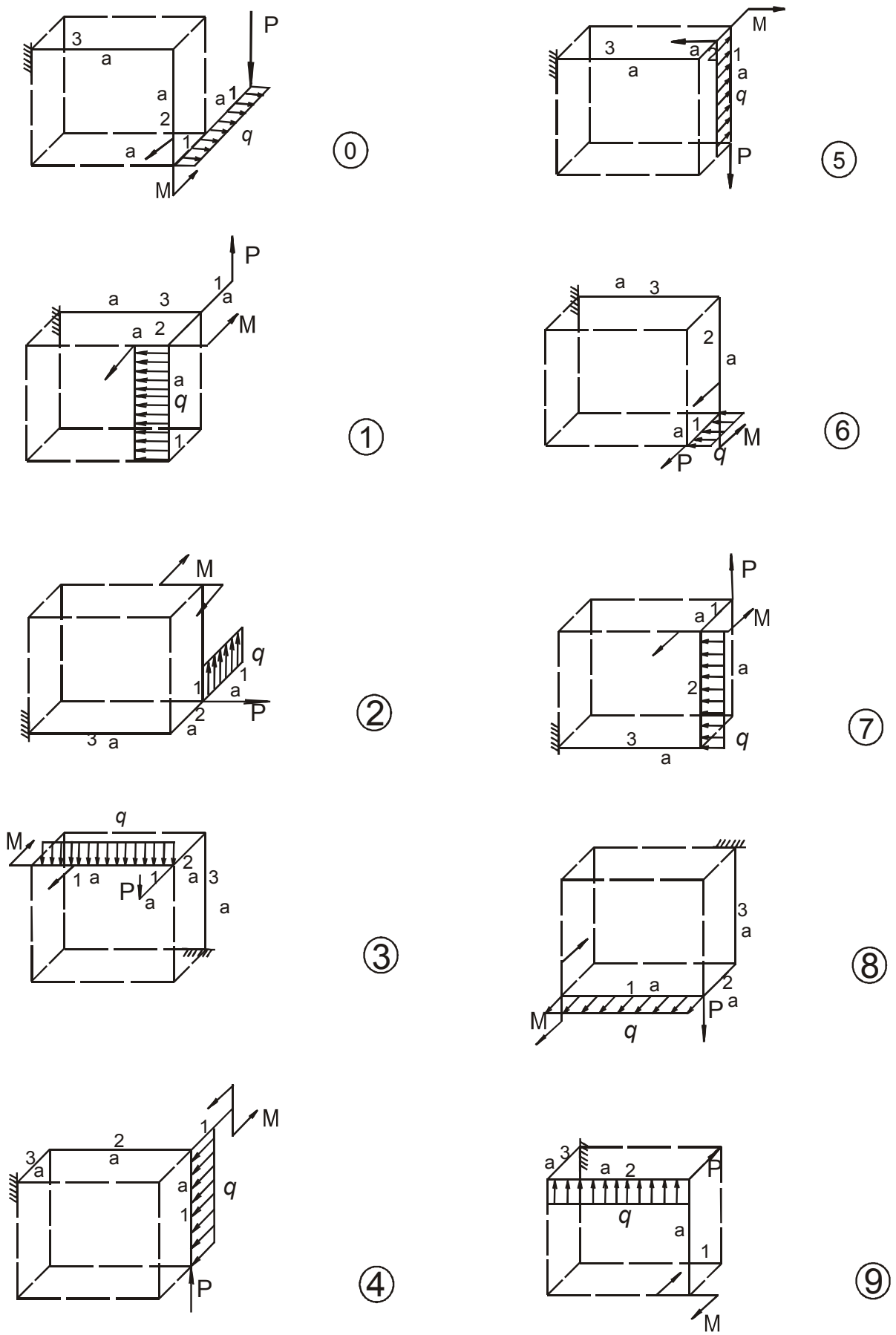


Рис. 6.1. Варіанти розрахункових схем до задачі 6

## План розв'язування задачі

1. Побудувати розрахункову схему.
2. Побудувати епюри внутрішніх силових факторів на кожній ділянці.
3. Визначити небезпечні перерізи послідовно на кожній ділянці.
4. Знайти небезпечні точки в небезпечних перерізах.
5. Визначити напружений стан в небезпечних точках.
6. Користуючись відповідними критеріями міцності, обчислити розрахункові напруження в небезпечних точках і з умови міцності визначити розміри перерізу.

## Розв'язання задачі

Дано (рис. 6.2):  $a = 1$  м, матеріал – Ст3,  $P = 5$  кН,  $q = 25$  кН/м,  $M = 8$  кН·м,  $h/b = 2$ .

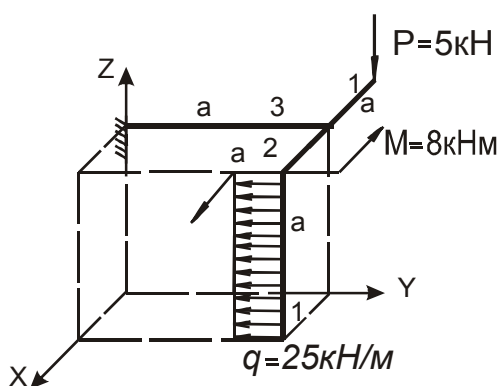


Рис. 6.2. Розрахункова схема

1. Побудуємо епюри (рис. 6.3).
2. Розглянемо перший (вертикальний) стержень (рис. 6.4). Він круглого поперечного перерізу. З розрахунку на міцність отримаємо допустиме значення діаметра круглого стержня.



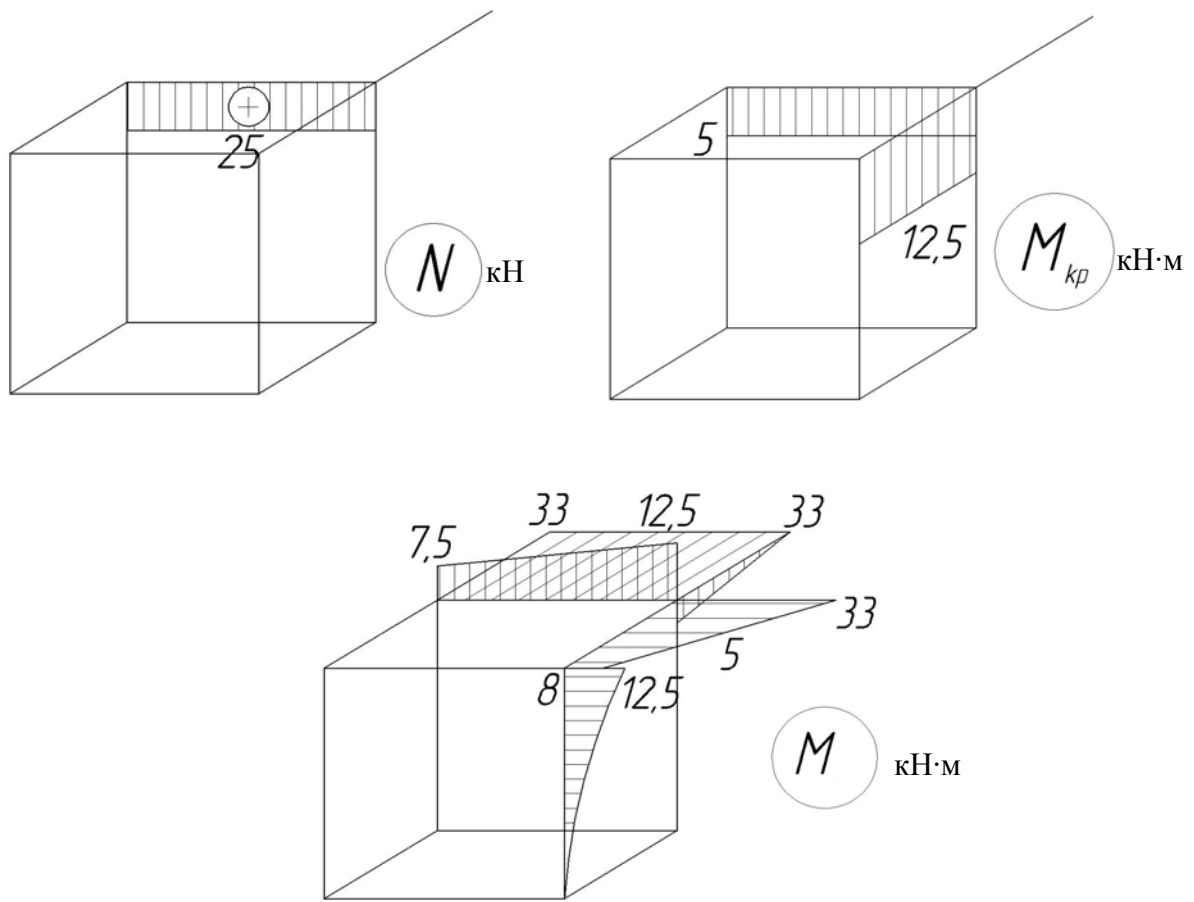


Рис. 6.3. Епюри внутрішніх силових факторів

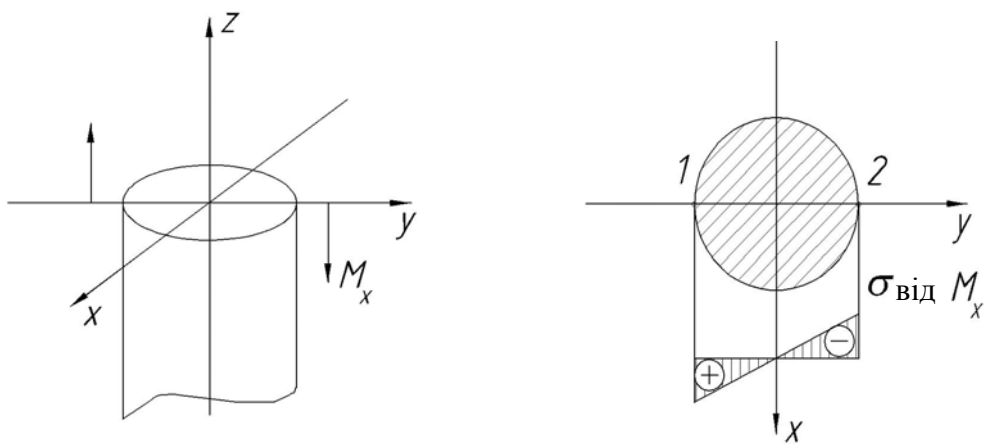


Рис. 6.4. Епюри розподілу напружень у небезпечному перерізі першої ділянки

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x \max}}{W_x} \leq [\sigma];$$

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 12,5}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^3}} = 0,092 \text{ м.}$$

Візьмемо  $d = 92$  мм.

3. Розглянемо перший (горизонтальний) стержень (рис. 6.4, де  $y$  замінили на  $z$ , а всі  $x$  – на  $y$ ). Він також круглого поперечного перерізу. Розрахуємо його аналогічно попередньому стержню:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{y \max}}{W_y} \leq [\sigma];$$

$$W_y = \frac{\pi d^3}{32} \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 5}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^3}} = 0,068 \text{ м.}$$

Візьмемо  $d = 68$  мм.

4. Розглянемо другий стержень (рис. 6.5). Він квадратного поперечного перерізу.

$$\sigma_{1,2} = \frac{M_z \max}{W_z};$$

$$\tau_{1,2} = \frac{M_{кр}}{W_{кр}}.$$

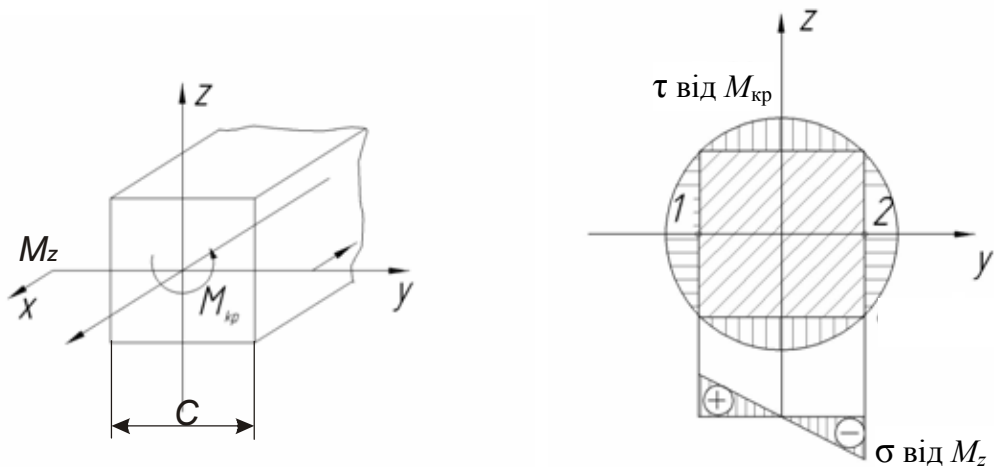


Рис. 6.5. Епюри розподілу напружень у небезпечному перерізі другої ділянки

Визначимо розміри перерізу без врахування  $M_{кр}$ :

$$W_z = \frac{c^3}{6} \Rightarrow c = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 33}{160 \cdot 10^3}} = 0,107 \text{ м.}$$

Візьмемо  $c = 115 \text{ мм}$ .

$$\sigma_{1,2} = \frac{6 \cdot 33 \cdot 10^3}{0,115^3} = 130 \text{ МПа};$$

$$\tau_{1,2} = \frac{M_{кр}}{\alpha c^3} = \frac{12500}{0,208 \cdot 0,115^3} = 39 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{екв III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{130^2 + 4 \cdot 39^2} = 154 \text{ МПа} \leq [\sigma].$$

5. Розглянемо третій стержень (рис. 6.6). Він прямокутного поперечного перерізу.

$$\sigma_l = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma].$$

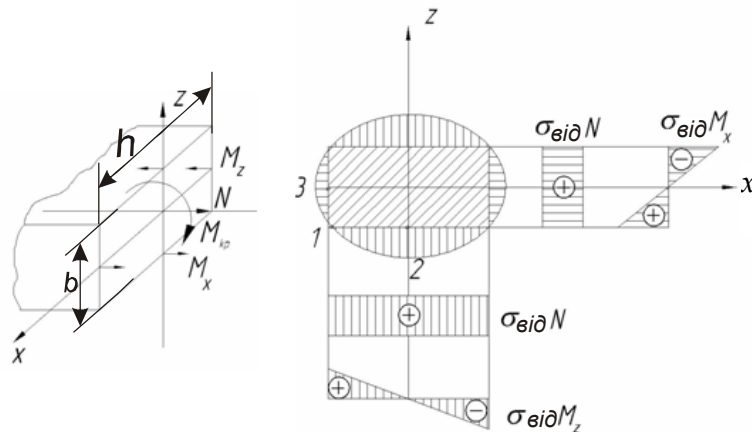


Рис. 6.6. Епюри розподілу напружень у небезпечному перерізі третьої ділянки

Визначимо розміри перерізу без врахування  $N$ :

$$W_z = \frac{bh^2}{6}; \quad W_x = \frac{hb^2}{6} \quad h = 2b \Rightarrow W_z = \frac{4b^3}{6}, \quad W_x = \frac{2b^3}{6}.$$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{3M_z + 6M_x}{2[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 33 + 6 \cdot 12,5}{2 \cdot 160 \cdot 10^3}} = 0,082 \text{ м.}$$

Візьмемо  $b = 82 \text{ мм}$ ,  $h = 2 \cdot 82 = 164 \text{ мм}$ .

Перевіримо точку 1 (див. рис. 6.6):

$$\sigma_1 = \frac{25 \cdot 10^3}{0,082 \cdot 0,164} + \frac{6 \cdot 33 \cdot 10^3}{0,082 \cdot 0,164^2} + \frac{6 \cdot 12,5 \cdot 10^3}{0,164 \cdot 0,082^2} = 160 \text{ МПа} = [\sigma].$$

Перевіримо точку 2 (див. рис. 6.6):

$$\sigma_2 = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{W_x} = \frac{25 \cdot 10^3}{0,082 \cdot 0,164} + \frac{6 \cdot 12,5 \cdot 10^3}{0,164 \cdot 0,082^2} = 70 \text{ МПа};$$

$$\tau_2 = \frac{M_{кр}}{\alpha hb^2} = \frac{5 \cdot 10^3}{0,246 \cdot 0,164 \cdot 0,082^2} = 18 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{екв III} = \sqrt{70^2 + 4 \cdot 18^2} = 79 \text{ МПа} < [\sigma].$$

Перевіримо точку 3 (див. рис. 6.6):

$$\sigma_3 = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{25 \cdot 10^3}{0,082 \cdot 0,164} + \frac{6 \cdot 33 \cdot 10^3}{0,082 \cdot 0,164^2} = 92 \text{ МПа};$$

$$\tau_3 = \gamma \frac{M_{кр}}{\alpha hb^2} = 0,795 \cdot 18 = 14,3 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{екв III} = \sqrt{92^2 + 4 \cdot 14,3^2} = 96 \text{ МПа} < [\sigma].$$

## ЗАДАЧА 7

### ПРОЕКТУВАЛЬНИЙ РОЗРАХУНОК НА СТІЙКІСТЬ СТИСНУТИХ СТЕРЖНІВ

Для заданого стояка (рис. 7.1, табл. 7.1), що стиснений осью силою  $P$ , підібрати переріз (рис. 7.2, 7.3), попередньо раціонально його розташували. Конструкцію опор стояка показано у двох проекціях. Складений переріз працює як одне ціле. Матеріал – сталь Ст3, допустиме напруження на стиск  $[\sigma] = 160$  МПа .

*Таблиця 7.1. Варіанти завдань до задачі 7*

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P$ , кН	260	280	400	240	380	320	370	400	360	300
$l$ , м	4,5	4,5	4	3	3,5	2,5	3	2,5	4	3,5

#### План розв'язування задачі

Задача розв'язується методом послідовних наближень з використанням таблиці коефіцієнтів зменшення основного допустимого напруження.

1. Проаналізувавши умови закріплення кінців стояка у двох площинах, побудувати розрахункову схему.

2. Приймаючи значення коефіцієнта зменшення основного допустимого напруження  $\varphi_1 = 0,5 \dots 0,6$ , визначити площу поперечного перерізу і з урахуванням форми перерізу обчислити радіуси інерції  $i_y, i_z$ .

3. Для забезпечення максимальної жорсткості стержня в цілому переріз розташувати так, щоб вісь координат, відносно якої переріз має більший радіус інерції, була перпендикулярна до площини, в якій коефіцієнт зведення довжини  $\mu$  має більше значення. Обчислити гнучкості стержня у двох площинах. Подальший розрахунок вести для площини найбільшої гнучкості.

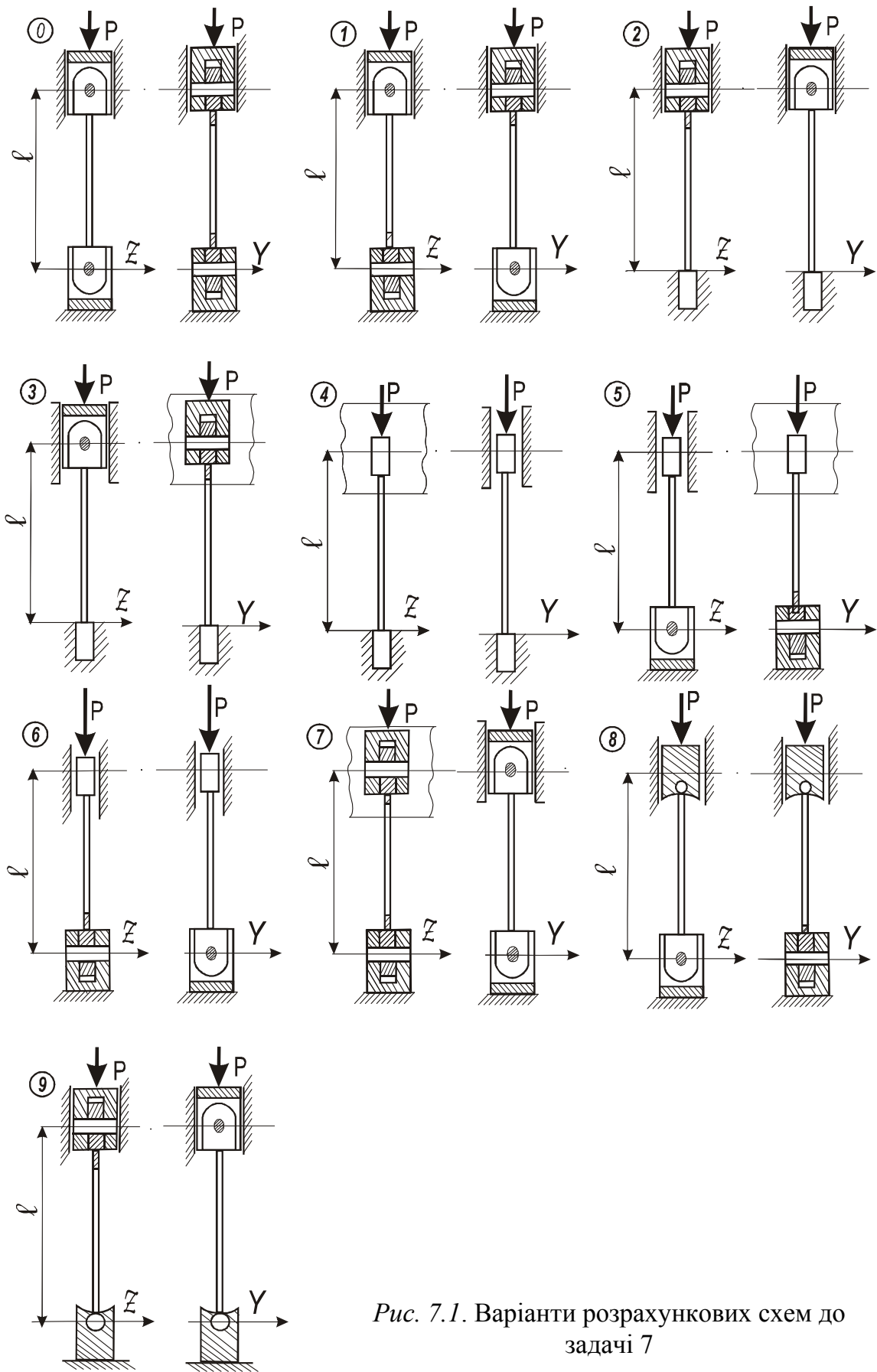


Рис. 7.1. Варіанти розрахункових схем до задачі 7

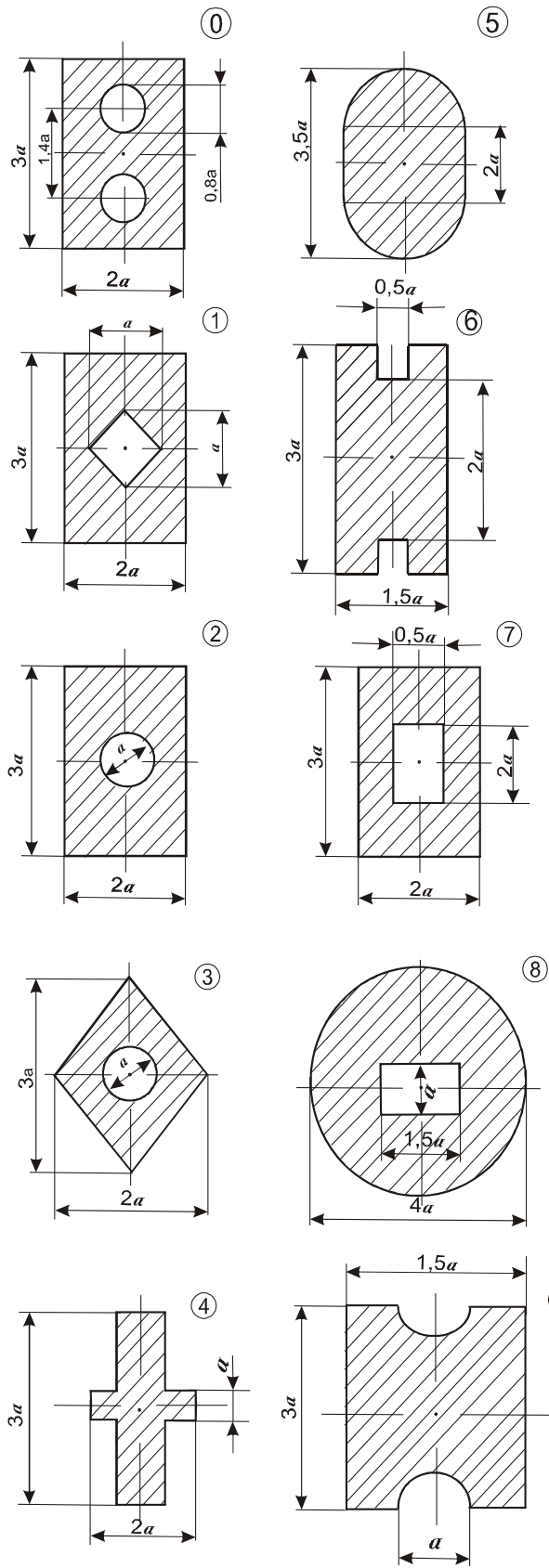


Рис. 7.2. Варіанти суцільних поперечних перерізів стиснутих стержнів (вар. А)

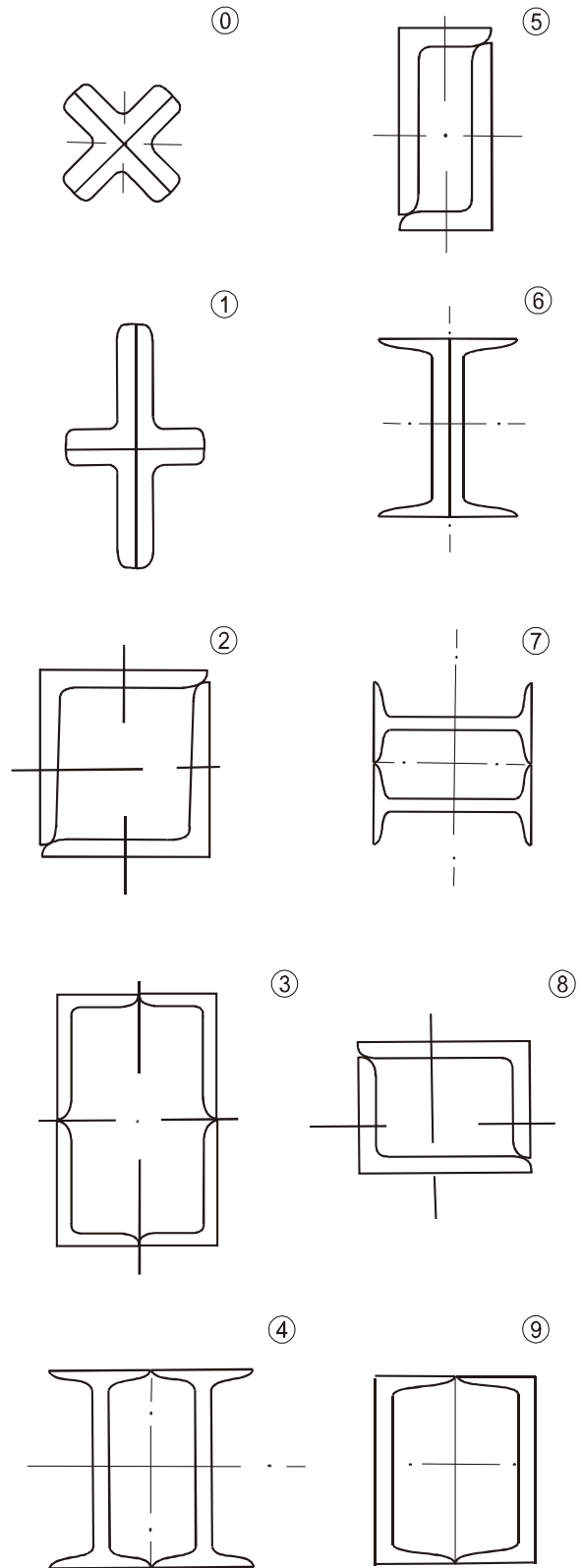


Рис. 7.3. Варіанти складених поперечних перерізів стиснутих стержнів (вар. Б)

4. За обчисленим значенням максимальної гнучкості знайти, використовуючи табличні дані, коефіцієнт  $\varphi_1$  (за необхідністю – методом інтерполяції). Якщо різниця між заданим і знайденим значеннями коефіцієнта перевищує 5 %, розрахунки повторити, задаючись новим значенням коефіцієнта  $\varphi_2$ , що дорівнює середньому арифметичному двох попередніх, і т. д.

5. Для остаточного значення площі перерізу обчислити напруження в стержні і порівняти з допустимими напруженнями на стійкість  $[\sigma_{ст}] = \varphi[\sigma]$ .

### Розв'язання задачі

Для стояка, який представлений на рис. 7.1, вар. 0, що стискається силою  $P = 300$  кН, підібрати переріз, який складається з двох швелерних профілів (рис. 7.3, вар. 9). Довжина стояка  $l = 5$  м. Матеріал – сталь Ст3. Допустиме напруження на стиск  $[\sigma] = 160$  МПа.

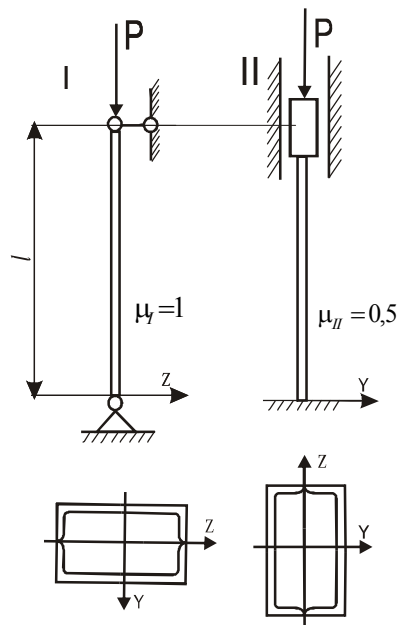


Рис. 7.4. Розрахункова схема

1. Аналізуючи, які в'язі накладає закріплення кінців стояка у двох площинах, будуюмо розрахункову схему (рис. 7.4) і встановлюємо значення



коефіцієнтів зведення довжини  $\mu$  у кожній площині. Переріз стояка будемо підбирати, використовуючи умову стійкості

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq \varphi[\sigma], \quad \text{з якої} \quad F = \frac{P}{\varphi[\sigma]}.$$

2. На першому етапі розрахунку задаємося  $\varphi_1 = 0,6$ . Тоді площа перерізу

$$F_1 = \frac{P}{\varphi_1[\sigma]} = \frac{350 \cdot 10^3}{0,6 \cdot 160 \cdot 10^6} = 38,7 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 38,7 \text{ см}^2.$$

Розрахункова площа перерізу одного швелера

$$F'_1 = \frac{F_1}{2} = \frac{38,7}{2} = 19,35 \text{ см}^2.$$

За таблицею сортamentу підбираємо швелер № 16а, для якого  $F' = 19,5 \text{ см}^2$ ,  $I_{y'} = 823 \text{ см}^4$ ,  $I_{z'} = 78,8 \text{ см}^4$ ,  $b = 6,8 \text{ см}$ ,  $z_0 = 2,00 \text{ см}$ .

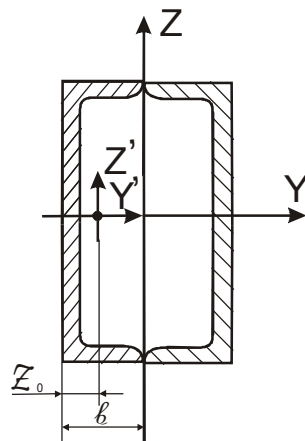


Рис. 7.5. Поперечний переріз стояка

Визначаємо положення головних центральних осей перерізу  $y, z$  і обчислюємо головні центральні моменти інерції перерізу (рис. 7.5):

$$I_y = 2I_{y'} = 2 \cdot 823 = 1646 \text{ см}^4;$$

$$I_z = 2 \left[ I_{z'} + (b - z_0)^2 F' \right] = 2 \left[ 78,8 + (6,8 - 2)^2 \cdot 19,5 \right] = 1056,16 \text{ см}^4.$$

Радіуси інерції перерізу:

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}} = \sqrt{\frac{1646}{2 \cdot 19,5}} = 6,50 \text{ см};$$

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{F}} = \sqrt{\frac{1065,16}{2 \cdot 19,5}} = 5,20 \text{ см}.$$

Оскільки  $i_y > i_z$ , переріз розташовуємо так, щоб вісь  $y$  була перпендикулярна до площини, в якій коефіцієнт зведення довжини  $\mu$  більший (жорсткість закріплення менша), тобто до площини  $I$  (див. рис. 7.4). При такій орієнтації перерізу різниця в гнучкості стержня в обох площинах буде мінімальна.

Обчислюємо гнучкості стержня в площинах  $I$  і  $II$ :

$$\lambda_I = \frac{\mu_I l}{i_y} = \frac{1 \cdot 500}{6,50} = 76,9; \quad \lambda_{II} = \frac{\mu_{II} l}{i_z} = \frac{0,5 \cdot 500}{5,20} = 48,1.$$

Небезпечною є площина  $I$ , в якій гнучкість стержня максимальна. Тому подальший розрахунок стержня на стійкість будемо вести в площині  $I$ .

За допомогою таблиць для гнучкості знаходимо коефіцієнт  $\varphi_1$ , що відповідає  $\lambda_I = 76,9$ . При цьому використовуємо метод інтерполяції. За таблицями для  $\lambda = 70 - \varphi = 0,81$ , для  $\lambda = 80 - \varphi = 0,75$ . Тоді

$$\varphi'_1 = 0,81 - \frac{0,81 - 0,75}{10} \cdot 6,9 = 0,77.$$

Оскільки  $\varphi'_1 \neq \varphi_1$ , переходимо до другого етапу розрахунку.

3. Задаємось другим значенням коефіцієнта

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,6 + 0,77}{2} = 0,69.$$

Знаходимо

$$F_2 = \frac{P}{\varphi_2 [\sigma]} = \frac{350 \cdot 10^3}{0,69 \cdot 160 \cdot 10^6} = 3,17 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 31,7 \text{ см}^2.$$

Розрахункова площа перерізу швелера

$$F_2' = \frac{F_2}{2} = \frac{31,7}{2} = 15,85 \text{ см}^2.$$

За таблицями сортаменту підбираємо швелер № 14, для якого

$$F' = 15,6 \text{ см}^2; I_{y'} = 491 \text{ см}^4; I_{z'} = 45,4 \text{ см}^4; b = 5,8 \text{ см}; z_0 = 1,67 \text{ см}.$$

Обчислюємо:

$$I_y = 2I_{y'} = 2 \cdot 491 = 982 \text{ см}^4; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F_2}} = \sqrt{\frac{982}{2 \cdot 15,6}} = 5,6 \text{ см};$$

$$\lambda_I = \frac{\mu l}{i_y} = \frac{1 \cdot 500}{5,6} = 89,5.$$

За таблицями для  $\lambda_I = 89,5$  методом інтерполяції визначаємо

$$\varphi_2' = 0,69 + \frac{0,75 - 0,69}{10} \cdot 0,5 = 0,693.$$

Оскільки різниця між значеннями  $\varphi_2$  і  $\varphi_2'$  менша 5 %, на останньому перерізі можна зупинитися.

Перевіримо виконання умови стійкості стержня, що складений з двох швелерів № 14:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{P}{F} = \frac{350 \cdot 10^3}{2 \cdot 15,6 \cdot 10^{-4}} = \\ &= 112 \cdot 10^6 \text{ Па} = 112 \text{ МПа} > \varphi_2' [\sigma] = 0,693 \cdot 160 = 110,9 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Переріз перевантажено. Підраховуємо його перевантаження:

$$\delta = \frac{112 - 110,9}{110,9} \cdot 100 \% = 1 \%$$

Перевантаження допустиме, оскільки воно менше 5 %.

Отже заданий стояк необхідно виготовити з швелерів № 14.

## ЗАДАЧА 8

### РОЗРАХУНОК СТЕРЖНЕВОЇ СИСТЕМИ З ВРАХУВАННЯМ СИЛ ІНЕРЦІЇ

Для системи, що складається з сталевого вала  $AB$  і пов'язаних з ним стержнів того ж діаметра (рис. 8.1, табл. 8.1), визначити з умови міцності граничну кутову швидкість обертання, якщо  $L = 0,4$  м і  $[\sigma] = 100$  МПа.

*Таблиця 8.1. Варіанти завдань до задачі 8*

Варіант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$d$ , см	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5
$k$	0	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0	1
$m$	1,0	0,5	0,8	0,7	0	1,0	0,6	0,1	0,3	0,2

#### План розв'язування задачі

1. Обчислити розподілені сили інерції  $q(x)$ , що діють на окремі стержні під час обертання вала  $AB$ .
2. Розглядаючи вал зі стержнями як раму, що навантажена силами інерції, зобразити розрахункову схему системи. Обчисливши рівнодійні розподілених сил інерції, визначити реакції в опорах.
3. Побудувати епюри згинальних моментів  $M$ , поздовжніх сил  $N$  і встановити небезпечний переріз.
4. Обчислити граничну кутову швидкість вала з умови міцності за нормальними напруженнями.

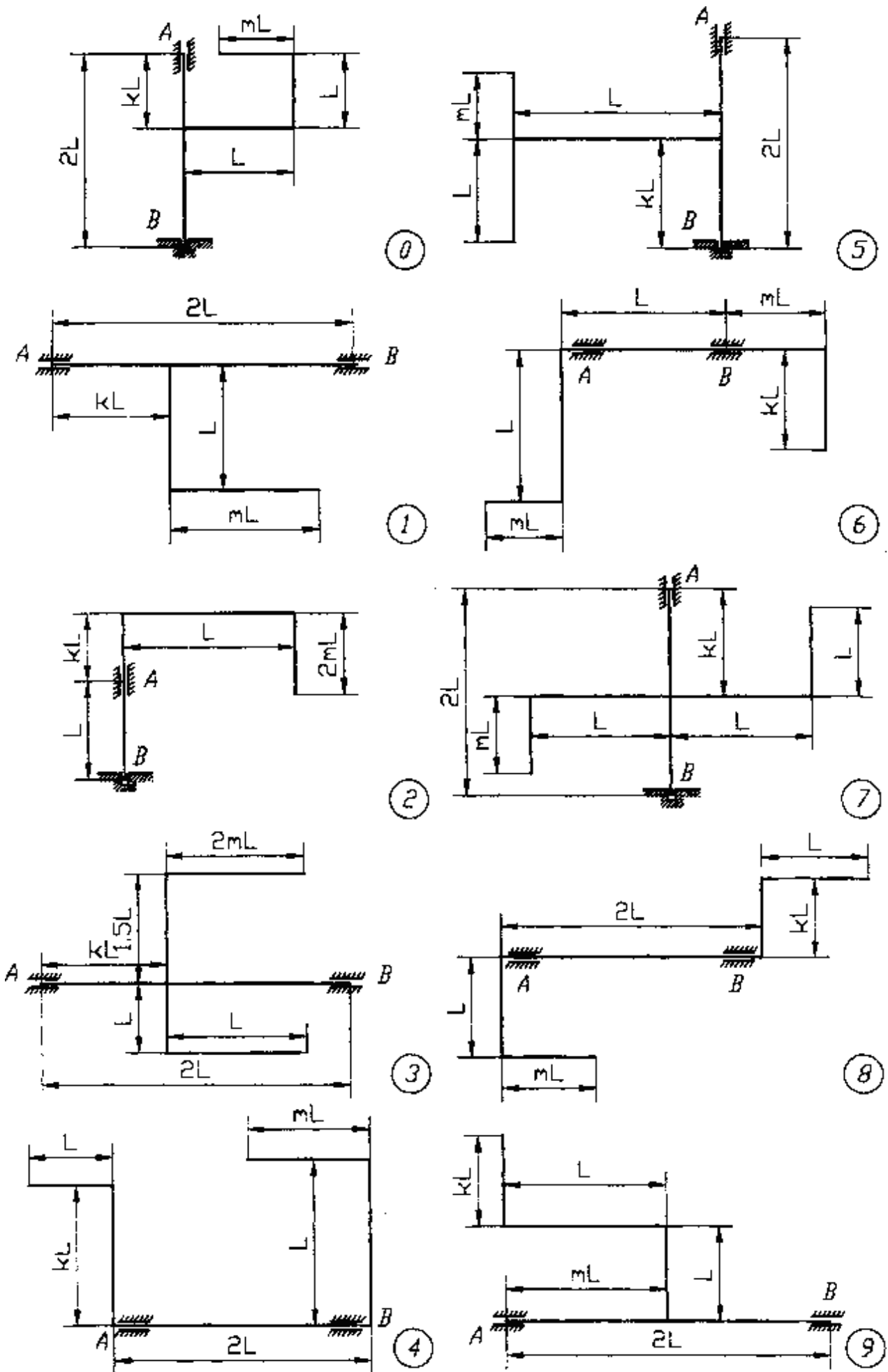


Рис. 8.1. Варіанти розрахункових схем до задачі 8

## Розв'язання задачі

Рама, що виготовлена із стержнів круглого перерізу діаметром  $d$ , обертається відносно вертикальної осі з кутовою швидкістю  $\omega$  (рис. 8.2).

Дано:  $l = 0,4$  м,  $d = 1$  см,  $g = 9,81$  м/с<sup>2</sup>,  
матеріал – сталь:  $[\sigma] = 100$  МПа, питома вага  $\gamma = 80$  кН/м<sup>3</sup>.

Знайти:  $[\omega]$  з умови міцності рами.

1. Умовно зупинимо раму, приклавши до неї, згідно з принципом Даламбера, сили інерції  $q_1(x)$ ,  $q_2$ ,  $q_3(x)$  (рис.8.3).

Сили інерції, що діють на елементарні ділянки стержнів довжиною  $dx$ :

$$dP_2 = dm_2 a_2 = \left( \frac{\gamma}{g} F \cdot dx \right) \cdot (\omega^2 l) = \frac{\gamma}{g} F \omega^2 l \cdot dx,$$

де  $a_2$  – відцентрове прискорення ділянки  $dx$  стержня II;

$$\begin{aligned} dP_1(x) = dP_3(x) = dm_1 a_1(x) &= \left( \frac{\gamma}{g} F \cdot dx \right) \cdot (\omega^2 x) = \\ &= \frac{\gamma}{g} F \omega^2 x \cdot dx. \end{aligned}$$

Сили, що діють на одиницю довжини стержнів:

$$q_2 = \frac{dP_2}{dx} = \frac{\gamma}{g} F \omega^2 l = q, \quad (1)$$

$$q_1(x) = q_3(x) = \frac{dP_1(x)}{dx} = \frac{\gamma}{g} F \omega^2 x = q \frac{x}{l}.$$

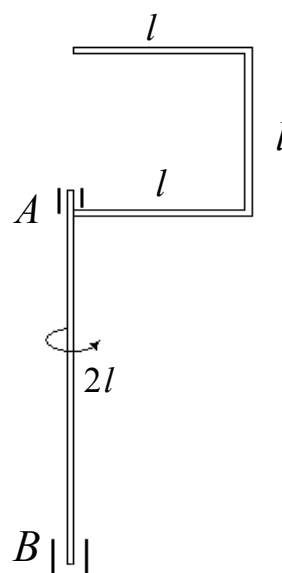


Рис. 8.2. Розрахункова схема рухомої рами

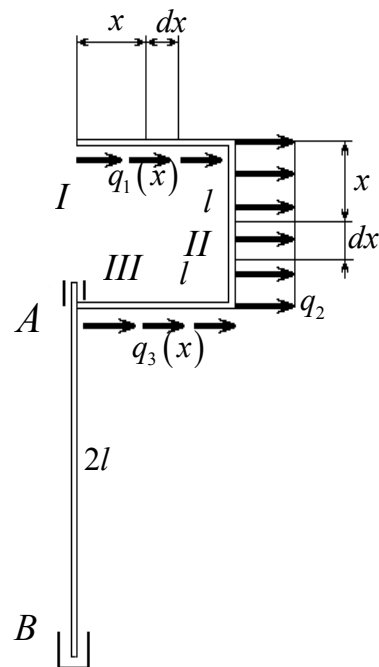


Рис. 8.3. Розрахункова схема еквівалентної нерухомої рами

Отже сила інерції  $q_2$  розподілена вздовж стержня  $II$  рівномірно (за законом “прямокутника”). Рівнодійна  $P_2$  дорівнює площі її епюри (прямокутника) (рис. 8.4):

$$P_2 = ql.$$

Сили інерції  $q_1(x)$  та  $q_3(x)$  розподілені вздовж стержнів  $I$  та  $III$  лінійно (за законом “трикутника”). Їх рівнодійні  $P_1$  та  $P_3$  дорівнюють площі трикутника (рис. 8.5):

$$P_1 = P_3 = \frac{1}{2}ql.$$

2. Визначимо реакції опор  $R_A$  і  $R_B$  з рівнянь рівноваги рами, використовуючи замість сил інерції  $q_1, q_2, q_3$  їх рівнодійні  $P_1, P_2, P_3$  (рис. 8.6):

$$\sum_j M_{j(A)} = 0: \quad P_1 l + P_2 \cdot \frac{l}{2} - R_B \cdot 2l = 0,$$

$$R_B = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{4}P_2 = \frac{1}{4}ql + \frac{1}{4}ql = \frac{ql}{2};$$

$$\sum_j X_j = 0: \quad P_1 + P_2 + P_3 + R_B - R_A = 0,$$

$$R_A = P_1 + P_2 + P_3 + R_B = \frac{5}{2}ql.$$

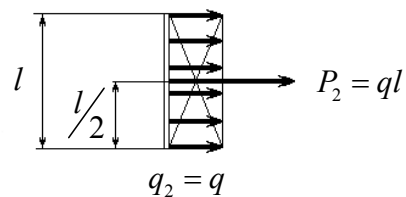


Рис. 8.4. Рівнодійна сила на ділянці  $II$

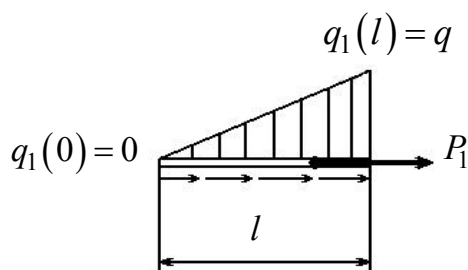


Рис. 8.5. Рівнодійна сила на ділянці  $I$

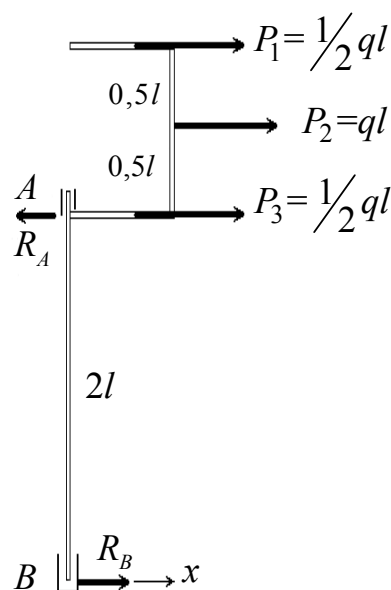


Рис. 8.6. Визначення реакцій

3. Побудуємо епюри внутрішніх згинальних моментів  $M$  та поздовжніх сил  $N$  (рис. 8.10).

Визначимо внутрішні моменти і сили в перерізах  $x$ .

Ділянка  $I$  (рис. 8.7):  $0 < x < 1$ :



$$M_1(x) = \sum_j M_{j(s)} = 0;$$

$$N_1(x) = -\sum_j X_j = -\frac{1}{2}q_1(x) \cdot x = -\frac{1}{2}q \frac{x^2}{l},$$

$$N_1(0) = 0, \quad N_1(l) = -\frac{1}{2}ql.$$

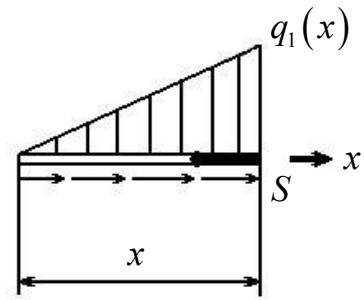


Рис. 8.7. Визначення внутрішніх зусиль на ділянці I

Ділянка II (рис. 8.8):  $0 \leq x \leq l$ :

$$M_2(x) = \sum_j M_{j(s)} = \frac{1}{2}q_1(l) \cdot l \cdot x + q_2 \cdot x \cdot \frac{x}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}qlx + qx \frac{x}{2};$$

$$M_2(0) = 0, \quad M_2(l) = ql^2;$$

$$N_2(x) = -\sum_j X_j = 0.$$

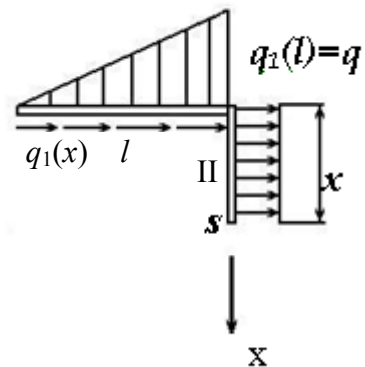


Рис. 8.8. Визначення внутрішніх зусиль на ділянці II

Ділянка III (рис. 8.9):  $0 \leq x \leq l$ :

$$M_3(x) = \sum_j X_j = R_B \cdot 2l = ql^2;$$

$$N_3(x) = -\sum_j X_j = -R_B + R_A - \frac{1}{2}q_3(x) \cdot x =$$

$$= -\frac{1}{2}ql + \frac{5}{2}ql - \frac{1}{2}q \frac{x^2}{l} = 2ql - \frac{1}{2}q \frac{x^2}{l},$$

$$N_3(0) = 2ql, \quad N_3(l) = 1,5ql.$$

Ділянка IV (рис. 8.9):  $0 \leq x \leq 2l$ :

$$M_4(x) = \sum_j M_{j(s)} = R_B \cdot x = \frac{1}{2}qlx,$$

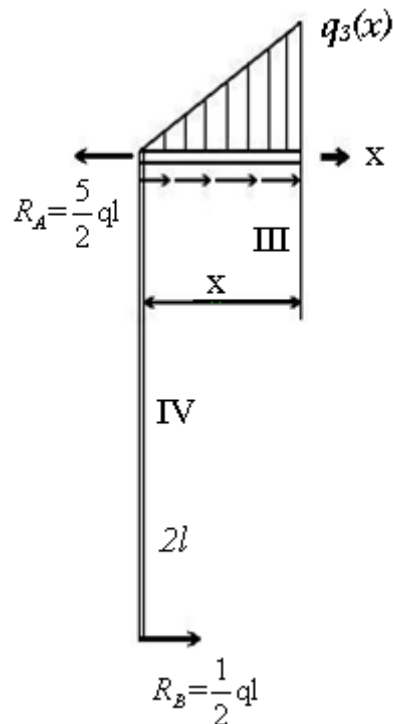


Рис. 8.9. Визначення внутрішніх зусиль на ділянках III і IV

$$M_4(0) = 0, \quad M_4(2l) = ql^2;$$

$$N_4(x) = -\sum_j X_j = 0.$$

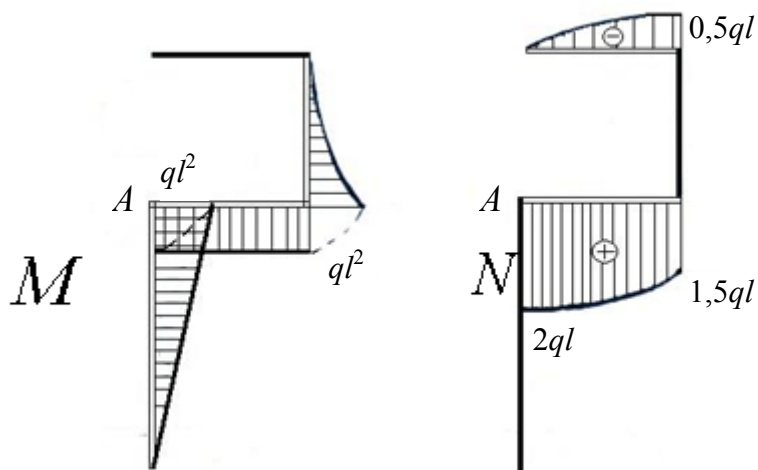


Рис. 8.10. Епюри внутрішніх зусиль

4. Визначимо допустиму кутову швидкість обертання рами  $[\omega]$  з умови міцності рами за нормальними напруженнями.

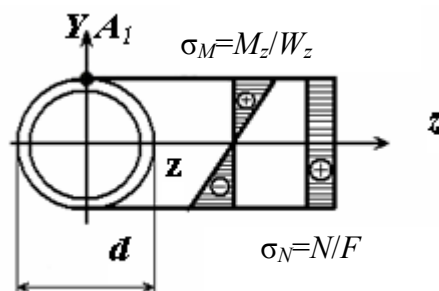


Рис. 8.11. Епюри напружень в небезпечному перерізі  $A$  рами

Напруження в небезпечній точці  $A_1$  (рис. 8.11):

$$|\sigma|_{\max} = \sigma_{A_1} = (\sigma_M + \sigma_N)_{A_1} = \frac{M_A}{W_z} + \frac{N_A}{F} = \frac{ql^2}{\pi d^3 / 32} + \frac{2ql}{\pi d^2 / 4} = \frac{ql}{\pi d^2} \left( 32 \frac{l}{d} + 8 \right).$$

Умова міцності рами з урахуванням (1):

$$|\sigma|_{\max} = \frac{ql}{\pi d^2} \left( 32 \frac{l}{d} + 8 \right) = \frac{\gamma F}{g} \frac{\omega^2 l \cdot l}{\pi d^2} \left( 32 \frac{l}{d} + 8 \right) = \frac{\gamma \omega^2 l^2}{4g} \left( 32 \frac{l}{d} + 8 \right) \leq [\sigma].$$

Звідси

$$\omega \leq \sqrt{\frac{4g[\sigma]}{\gamma l^2 \left( 32 \frac{l}{d} + 8 \right)}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 9,81 \cdot 100 \cdot 10^6}{80 \cdot 10^3 \cdot (0,4)^2 \cdot \left( 32 \cdot \frac{0,4}{0,01} + 8 \right)}} \approx 15,42 \text{ с}^{-1},$$

$$[\omega] = 15,42 \text{ с}^{-1}.$$

Примітка. Без врахування внутрішніх поздовжніх сил  $N$  отримаємо

$$\omega \leq \sqrt{\frac{4g[\sigma]}{\gamma l^2 \left( 32 \frac{l}{d} + 8 \right)}} \approx 15,42 \text{ с}^{-1},$$

$$[\omega] = 15,42 \text{ с}^{-1}.$$

## ЗАДАЧА 9

### РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ ПРИ УДАРІ

Для заданої пружної системи (рис. 9.1, табл 9.1) визначити максимальне напруження, яке виникає в системі при ударі тіла вагою  $Q$ . Задане тіло падає з висоти  $H$ . Матеріал системи – сталь,  $h$ ,  $b$  – розміри прямокутного поперечного перерізу,  $d$  – діаметр круглого перерізу.

*Таблиця 9.1. Варіанти завдань до задачі 9*

Варіант	$Q$ , кН	$H$ , м	$a$ , м	$c$ , м	$h$ , см	$b$ , см	$d$ , см
0	100	0,02	1	0,5	6	3	–
1	200	0,04	2	1	–	–	6
2	300	0,03	1,5	1	6	2	–
3	400	0,05	2,5	1,5	–	–	4
4	400	0,06	3	1,5	8	3	–
5	600	0,07	3,5	2	–	–	8
6	700	0,01	4	2	10	3	–
7	800	0,08	3	2	–	–	7
8	900	0,09	4	3	10	5	–
9	1000	0,1	2	1,5	–	–	9

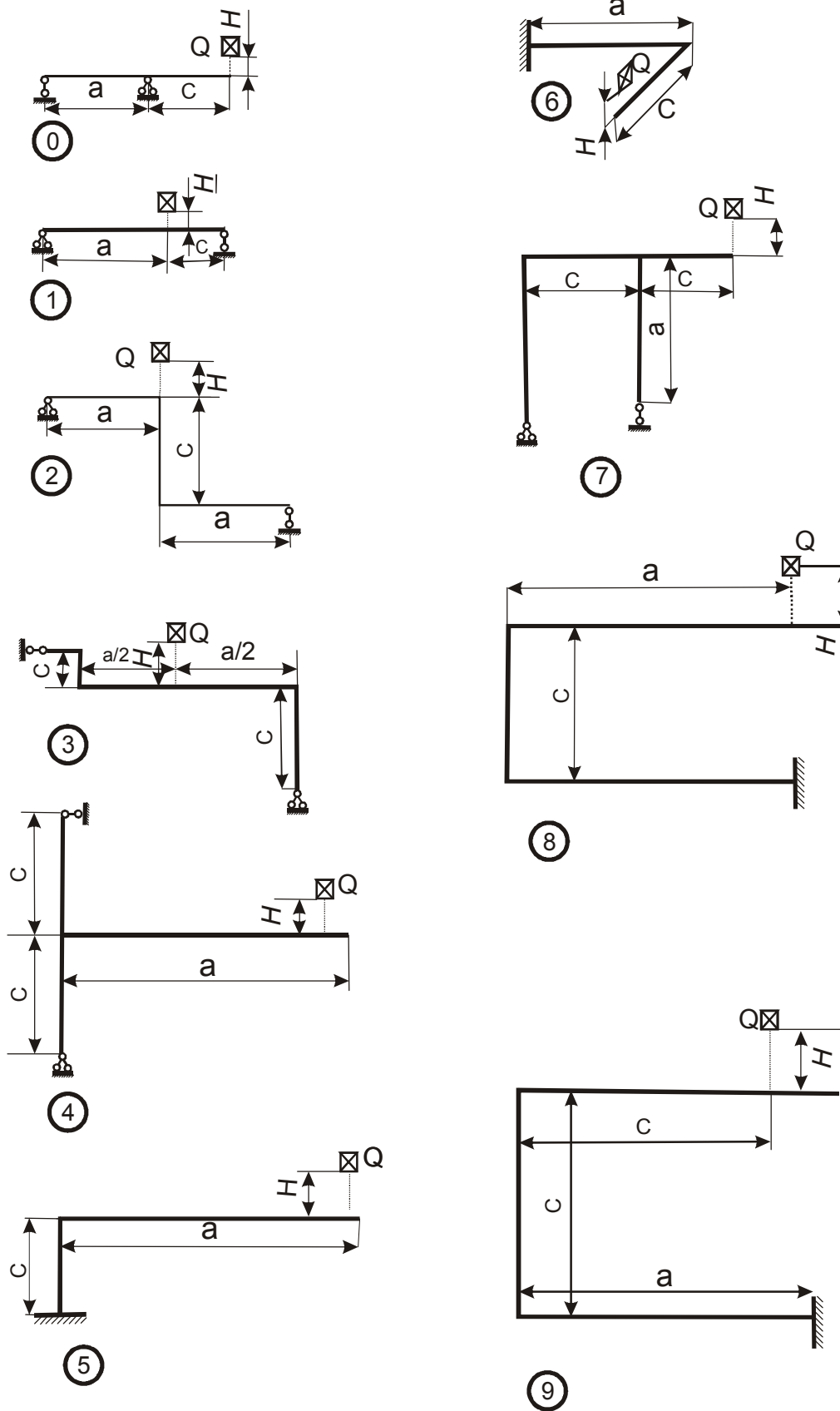


Рис. 9.1. Варіанти розрахункових схем до задачі 9

## План розв'язування задачі

1. Прикласти до системи статично в місці падіння тіла в напрямку падіння силу, що дорівнює вазі тіла, і побудувати епюру згинальних моментів.
2. Визначити будь-яким методом статичне переміщення точки падіння тіла в напрямку падіння.
3. Визначити коефіцієнт динамічності.
4. Визначити максимальне статичне напруження в системі, що виникає від дії ваги тіла.
5. Обчислити максимальне напруження в системі в момент удара (динамічне напруження).

## Розв'язання задачі

Дано (рис. 9.2):  $Q = 1000$  кН,  $H = 0,004$  м,  $d = 6$  см,  $a = 0,5$  м,  $c = 1$  м,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа .

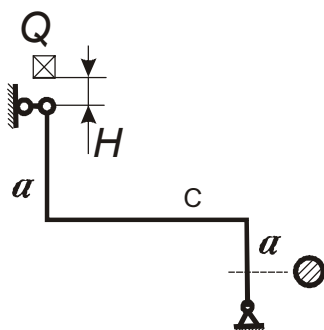


Рис. 9.2. Розрахункова схема

1. Прикладаємо до системи в місці падіння тіла в напрямку падіння статичну силу, що дорівнює вазі тіла, знаходимо реакції опор і будуємо епюру згинальних моментів (рис. 9.3, а, б):

$$R_B = Q, \quad H_A = H_B = Qc/(2a).$$

2. Обчислюємо статичне переміщення точки падіння груза в вертикальному напрямку, використовуючи метод Верещагіна (або іншим методом). Будуємо епюри згинальних моментів від одиничної сили (рис. 9.3, в).

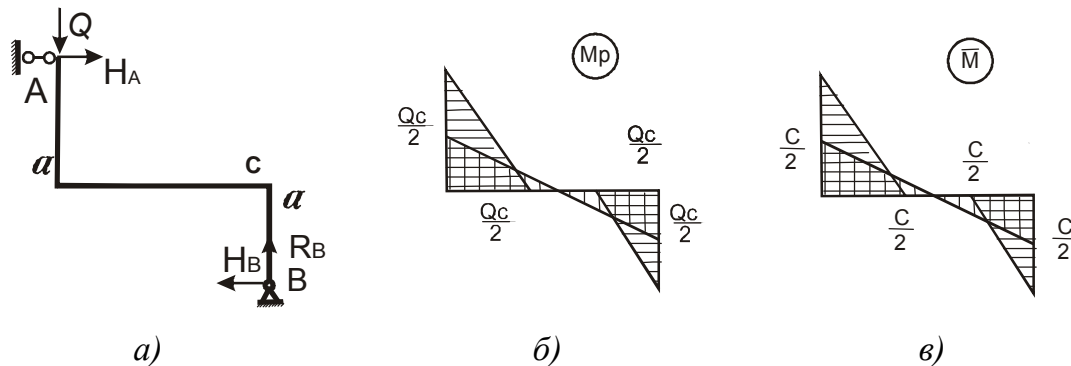


Рис. 9.3. Розрахункова схема (а) та епюри згинальних моментів від сили  $Q$  (б) і одиничної сили  $Q = 1$  (в) при статичному навантаженні

$$\delta_{ст} = \frac{1}{EI} \cdot \left( 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{Q \cdot c}{2} \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{c}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{Q \cdot c}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{c}{2} \right) = \frac{Qc^2}{6EI} \left( a + \frac{c}{2} \right);$$

$$\delta_{ст} = \frac{1000 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 64}{6 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot \pi \cdot 6^4 \cdot 10^{-8}} = 1,456 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

3. Визначаємо коефіцієнт динамічності:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,004}{1,456 \cdot 10^{-4}}} = 54,95.$$

4 Знаходимо максимальні статичні напруження. Рама працює на згин, тому

$$\sigma_{ст} = \frac{M}{W} = \frac{Qc}{2W} = \frac{1000 \cdot 32}{2 \cdot \pi \cdot 0.06^3} = 23,6 \text{ МПа.}$$

5. Визначаємо максимальне напруження в рамі в момент удару Так як в межах закону Гука напруження і переміщення зв'язані лінійними залежностями, то

$$\sigma_d = K_d \sigma_{ст} = 54,95 \cdot 23,6 = 1297 \text{ МПа.}$$

## ЗАДАЧА 10

### ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ З ОДНИМ СТУПЕНЕМ ВІЛЬНОСТІ ЗА ВІДСУТНОСТІ ТЕРТЯ

Ротор електродвигуна має частоту обертання  $n$  (рис. 10.1, табл. 10.1). Через неврівноваженість ротора виникає гармонічна змушувальна сила  $F = F_0 \cos pt$ . Модуль пружності при розтягу матеріалу балки  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа. Маса двигуна  $m$  і характеристики перерізу балки  $I_z, W_z$  наведені в таблиці 10.1.

Необхідно:

1. Визначити, при якому значенні загальної довжини балки наступить резонанс.
2. Визначити загальну довжину балки, при якій колова частота  $\omega_0$  власних коливань системи буде на 30 % більше частоти змушувальної сили  $F$ .
3. Для останнього випадку обчислити амплітуду вимушених коливань і максимальні нормальні динамічні напруження в балці. Масою балки знехтувати.

*Таблиця 10.1. Варіанти завдань до задачі 10*

Варіант	$I_z, \text{см}^4$	$W_z, \text{см}^3$	$m, \text{кг}$	$n, \text{об/хв}$	$F_0, \text{кН}$
0	350	58,4	45	700	2
1	572	81,7	50	600	3
2	873	109	45	800	5
3	350	58,4	39	400	4
4	1290	143	100	500	7
5	1430	159	120	200	2
6	350	58,4	140	300	1
7	572	81,7	150	1800	4
8	1840	184	112	270	3
9	2550	232	150	5410	5



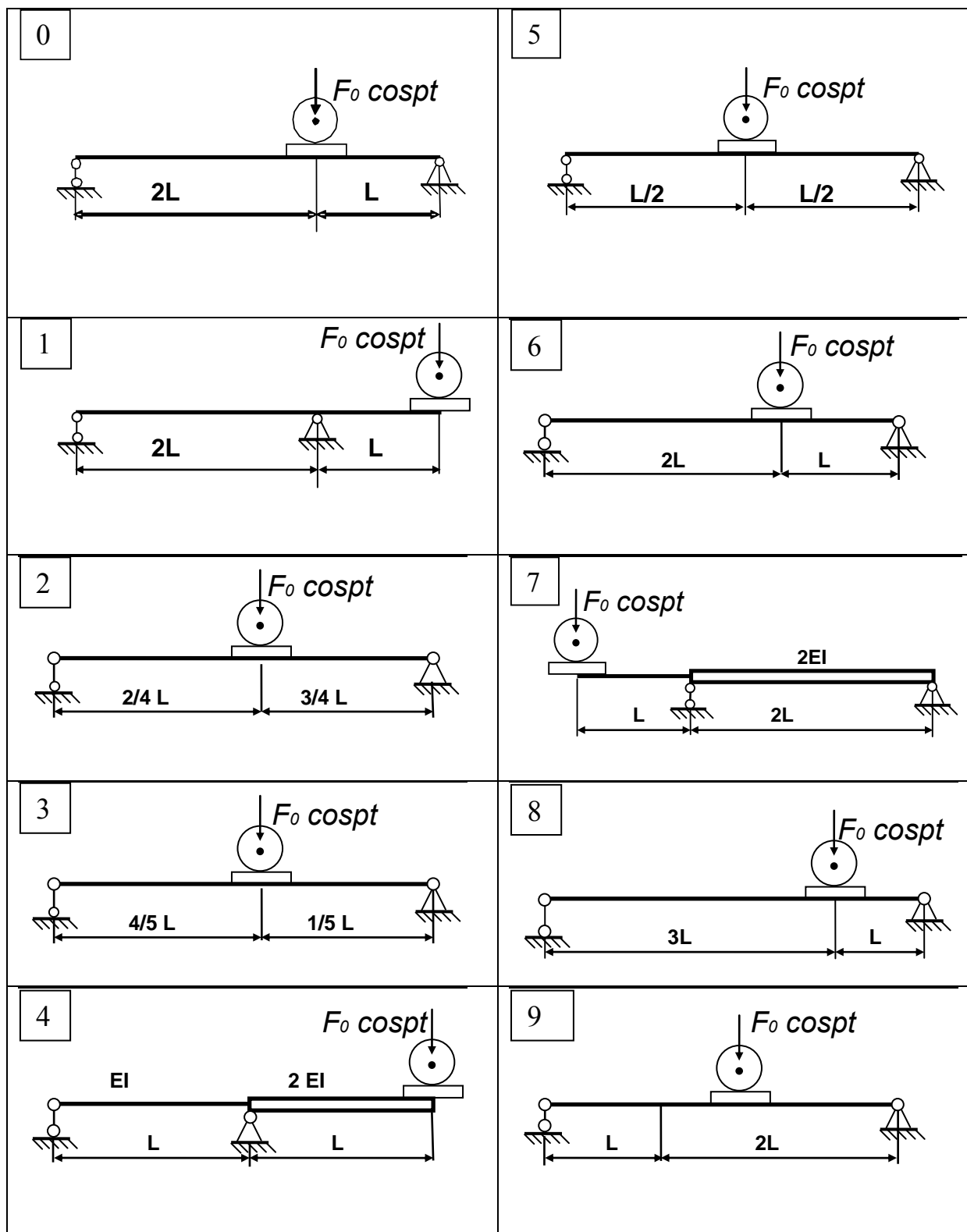


Рис. 10.1. Варіанти розрахункових схем до задачі 10

## План розв'язування задачі

1. Записати диференціальне рівняння малих вимушених коливань системи відносно положення стійкої рівноваги.
2. Визначити статичний прогин  $\delta_{ст}$  балки під дією ваги двигуна  $Q$ .
3. Обчислити власну колову частоту системи  $\omega_0$ .
4. Визначити частоту змушувальної сили  $p$ .
5. Встановити довжину балки, при якій виникає резонанс.
6. Знайти довжину балки, при якій виникають коливання вдалині від резонансу ( $\omega_0 = 1,3p$ ).
7. Визначити амплітуду вимушених коливань балки вдалині від резонансу.
8. Визначити динамічний прогин балки.
9. Визначити коефіцієнт динамічності.
10. Визначити максимальне нормальне напруження  $\sigma_{ст}^{max}$  в балці від сили  $Q$ .
11. Визначити максимальне динамічне напруження.

## Розв'язання задачі

Електродвигун, що встановлений на шарнірно-опертій балці (рис. 10.2), робить  $n = 900$  об/хв. Внаслідок неврівноваженості ротора виникає вертикальна складова відцентрової сили інерції  $F_0 = 0,2$  кН. Маса електродвигуна  $m = 100$  кг, модуль пружності матеріалу балки  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, момент інерції перерізу балки  $I_z = 254$  см<sup>4</sup>, момент опору  $W_z = 37,2$  см<sup>3</sup>.

1. Запишемо диференціальне рівняння малих вимушених коливань системи відносно положення стійкої рівноваги:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos pt,$$

де  $F_0$  і  $p$  – амплітуда і частота змушувальної сили,  $\omega_0$  – власна колова частота.

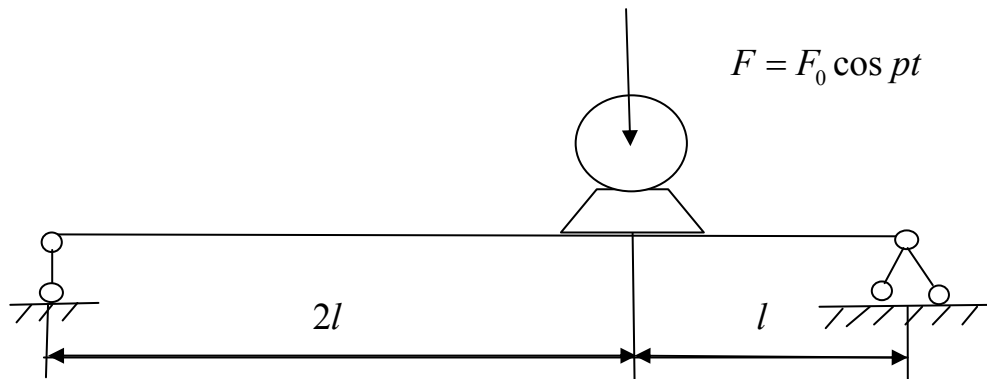


Рис. 10.2. Схема навантаження балки

2. Визначимо статичний прогин  $\delta_{ст}$  балки під дією сили, яка дорівнює вазі двигуна  $Q = mg$ , методом Мора.

Побудуємо епюри моментів від сили  $Q$  та одиничної сили  $\bar{X}_1 = 1$  (рис. 10.3).

Визначимо реакції  $\bar{R}_A$  та  $\bar{R}_B$ :

$$\sum M_B = -Q \cdot 2l + R_B \cdot 3l = 0; \quad R_B = \frac{Q \cdot 2l}{3l} = \frac{2}{3}Q;$$

$$\sum M_A = R_A \cdot 3l + Q \cdot l = 0; \quad R_A = \frac{Q}{3}.$$

Запишемо рівняння  $M$  для першої ділянки:

$$M_P^I(x) = R_A \cdot x = \frac{Q}{3}x; \quad I: 0 \leq x \leq 2l;$$

$$M_P^I(0) = 0; \quad M_P(2l) = \frac{2}{3}Ql.$$

Для другої ділянки:

$$M_P^{II}(x) = R_B \cdot x = \frac{2}{3}Q \cdot x; \quad II: 0 \leq x \leq l;$$

$$M_P''(0) = 0; \quad M_P''(l) = \frac{2}{3}Ql.$$

Будуємо допоміжну систему, яку навантажуюмо одиничною силою в точці прикладання сили  $Q$ .

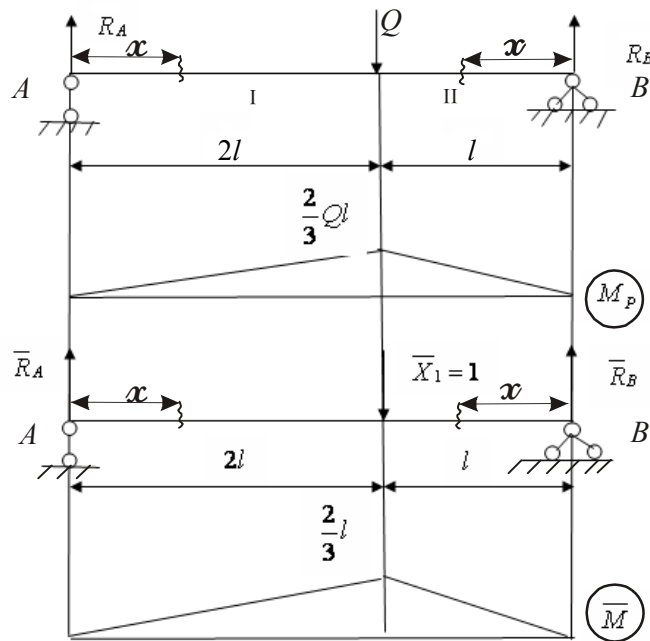


Рис. 10.3. Епюри згинальних моментів

Визначаємо реакції  $\bar{R}_A$  та  $\bar{R}_B$ :

$$\sum M_A = -\bar{X}_1 \cdot 2l + \bar{R}_B \cdot 3l = 0; \quad \bar{R}_B = \frac{2}{3};$$

$$\sum M_B = -\bar{R}_A \cdot 3l + \bar{X}_1 \cdot l = 0; \quad \dots \quad \bar{R}_A = \frac{1}{3}.$$

Запишемо рівняння моментів від одиничної сили для першої та другої ділянок:

$$I: 0 \leq x \leq 2l: \quad \bar{M}^I(x) = \frac{1}{3}x;$$

$$II: 0 \leq x \leq l: \quad \overline{M}''(x) = \frac{2}{3}x.$$

Обчислимо інтеграли Мора (на 2-х ділянках):

$$\begin{aligned} \delta_{\text{ст}} &= \int_0^{2l} \frac{M_p^I \overline{M}^I}{EI} dx + \int_0^l \frac{M_p^{II} \overline{M}^{II}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left( \int_0^{2l} \frac{1}{3} Qx \cdot \frac{1}{3} x dx + \int_0^l \frac{2}{3} Qx \cdot \frac{2}{3} x dx \right) = \\ &= \frac{1}{EI} \left( \frac{Qx^3}{27} \Big|_0^{2l} + \frac{4Qx^3}{27} \Big|_0^l \right) = \frac{1}{EI} \left( \frac{8Ql^3}{27} + \frac{4Ql^3}{27} \right) = \frac{12Ql^3}{27EI} = \frac{4Ql^3}{9EI}. \end{aligned}$$

Отже  $\delta_{\text{ст}} = \frac{4Ql^3}{9EI}$ .

3. Запишемо формулу для колової власної частоти  $\omega_0$ :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\delta_{\text{ст}}}} = \sqrt{\frac{9gEI}{4Ql^3}}.$$

4. Частота змушувальної сили визначається за формулою

$$p = \frac{\pi n}{30} = \frac{900 \cdot 3,14}{30} = 94,2 \text{ с}^{-1}.$$

5. Визначимо довжину  $l$  балки, при якій виникає резонанс ( $p = \omega_0$ ):

$$\sqrt{\frac{9gEI}{4Ql^3}} = 94,2;$$

$$l = \sqrt[3]{\frac{9gEI}{4Q(94,2)^2}};$$

$$l = \sqrt[3]{\frac{9 \cdot 9,81 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 254 \cdot 10^{-8}}{4 \cdot 100 \cdot 9,81 \cdot 8873,64}} = \sqrt[3]{1,288} = 1,09 \text{ м}.$$

Загальна довжина балки буде складати

$$l + 2l = 3l = 3 \cdot 1,09 = 3,27 \text{ м.}$$

6. Довжину балки  $l_1$ , при якій частота  $\omega_0$  перевищує частоту  $p$  на 30 % визначимо із співвідношення

$$\omega_0 = 1,3p,$$

тоді

$$l_1 = \sqrt[3]{\frac{9gEI}{4Q(1,3p)^2}} = \sqrt[3]{\frac{9 \cdot 9,81 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 254 \cdot 10^{-8}}{4 \cdot 9,81 \cdot 100 \cdot 1,69 \cdot 8873,64}} = \sqrt[3]{0,7621} = 0,92 \text{ м.}$$

Загальна довжина балки буде складати

$$l_1 + 2l_1 = 3l_1 = 3 \cdot 0,92 = 2,76 \text{ м.}$$

7. Амплітуда вимушених коливань вдалині від резонансу за відсутності тертя дорівнює

$$A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - p^2)} = \frac{200}{100[(1,3 \cdot 94,2)^2 - (94,2)^2]} = \frac{200}{100[14996,45 - 8873,64]} = 0,326 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

8. Визначимо динамічний прогин балки:

$$\delta_d = \delta_{ст} + A = \delta_{ст} \left(1 + \frac{A}{\delta_{ст}}\right) = \delta_{ст} K_d.$$

Формула для обчислення  $\delta_{ст}$  одержана в п. 2:

$$\delta_{ст} = \frac{4Ql_1^3}{9EI} = \frac{4 \cdot 100 \cdot 9,8 \cdot 0,92^3}{9 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 254 \cdot 10^{-8}} = 0,66 \cdot 10^{-3};$$

$$\delta_d = 0,66 \cdot 10^{-3} + 0,326 \cdot 10^{-3} = 0,986 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Обчислимо коефіцієнт динамічності:

$$K_d = 1 + \frac{A}{\delta_{ст}} = 1 + \frac{0,326 \cdot 10^{-3}}{0,66 \cdot 10^{-3}} = 1 + 0,49 = 1,49.$$

9. Визначимо максимальне нормальне напруження від сили  $Q = mg$ .

З епюри моментів (див. рис. 10.2):

$$M_{\max} = \frac{2}{3} Q l_1;$$

$$M_{\max} = \frac{2 \cdot 100 \cdot 9,8 \cdot 0,92}{3} = 601,06 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$\sigma_{ст}^{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{601,06}{37,2 \cdot 10^{-6}} = 16,16 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 16,16 \text{ МПа}.$$

Максимальне нормальне динамічне напруження дорівнює

$$\sigma_d^{\max} = K_d \sigma_{ст}^{\max} = 1,49 \cdot 16,16 = 24,07 \text{ МПа}.$$

## ЗАДАЧА 11

### РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ ПРИ ПОВТОРНО- ЗМІННОМУ НАВАНТАЖЕННІ КРУГЛОГО ВАЛА НА ЗГИН З КРУЧЕННЯМ

Використовуючи дані і результати розв’язання задачі 5, уточнити величину діаметру сталевого вала, на якому закріплено шків пасової передачі та два зубчастих колеса (див. рис. 5.1, табл. 5.1), у розрахунку додатково врахувати циклічність дії згинального моменту та вплив конструктивних і технологічних факторів (табл. 11.1) на границю витривалості.

*Таблиця 11.1. Варіанти завдань до задачі 11*

Варіант	Чистота обробки	Матеріал	Границя міцності, МПа	Границя текучості, МПа	Границя витривалості, МПа
			$\sigma_B$	$\sigma_T$	$\sigma_{-1}$
0	Поліров.	Сталь 60	690	410	310–380
1	Шліфув.	Сталь 55	660	390	290–370
2	Тонк.обт.	Сталь 50	640	380	270–350
3	Груб.обт.	Сталь 45	610	360	250–340
4	Наяв.окал.	Сталь 40	580	340	230–320
5	Поліров.	Сталь 35	540	320	220–300
6	Шліфув.	Сталь 30	500	300	200–270
7	Тонк.обт.	Сталь 25	460	280	190–250
8	Груб.обт.	Сталь 20	420	250	170–220
9	Наяв.окал.	Сталь 10	340	210	160–220

#### План розв’язування задачі

1. Накреслити епюри крутних моментів та згинальних моментів у горизонтальній та вертикальній площинах згідно з результатами розрахунків, виконаних у задачі 5.



2. Визначити коефіцієнти запасу за нормальними  $n_\sigma$  і дотичними  $n_\tau$  напруженнями в небезпечних перерізах валу для величини діаметру, визначеного за результатами статичного розрахунку.

3. Обчислити за формулою Гафа і Полларда повний коефіцієнт запасу вала відносно границі витривалості  $n$ . За результатами розрахунків зробити висновки.

4. У випадку невиконання умови міцності ( $\min\{n_\tau, n\} < [n]$ ), повторити розрахунки, обравши нове значення діаметру вала. Підбір діаметру вала продовжувати до забезпечення виконання умови міцності.

### Розв'язання задачі

Дано: діаметр вала  $d = 96$  мм;  $a = 1$  м; матеріал – сталь 20; нормативний коефіцієнт запасу міцності  $[n] = 2$ . Поверхня вала шліфувана. Схема навантаження вала представлена на рис. 5.2. З таблиці 11.1 беремо:  $\sigma_B = 420$  МПа,  $\sigma_T = 250$  МПа,  $\sigma_{-1} = 170$  МПа.

1. Креслимо розрахункову схему вала згідно з вихідними даними задачі 5, будуємо епюри крутних моментів та згинальних моментів у горизонтальній та вертикальній площинах згідно з результатами розрахунків, виконаних у задачі 5 (рис. 5.4), визначаємо ймовірно небезпечні перерізи вала.

Раніше було зроблено висновок, що небезпечним є переріз  $B$ . Тут діє максимальний крутний момент ( $M_{кр} = 0,6$  кН·м) та максимальний сумарний згинальний момент ( $M_c = 14,4$  кН·м).

Крім того, слід перевірити переріз  $I$ , де закріплено зубчасте колесо, через наявність в цьому місці концентратора у вигляді шпонкової канавки, що оброблена пальцевою фрезою. Тут діє максимальний крутний момент ( $M_{кр} = 0,6$  кН·м) та сумарний згинальний момент ( $M_c = 11,7$  кН·м).

2. В умовах плоского напруженого стану за наявності нормальних і дотичних напружень повний коефіцієнт запасу міцності на витривалість розраховується за формулою Гафа і Полларда:

$$n = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}},$$

де  $n_{\sigma}$  і  $n_{\tau}$  – коефіцієнти запасу за нормальними та дотичними напруженнями відповідно.

Визначимо коефіцієнти запасу  $n_{\sigma}$  і  $n_{\tau}$  в небезпечних перерізах вала.

Відповідно до умов навантаження, нормальні напруження у небезпечній точці перерізу змінюються за симетричним циклом, а дотичні напруження залишаються сталими.

У випадку симетричного циклу коефіцієнт запасу обчислюється за формулою:

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{K \sigma_a},$$

де  $\sigma_a$  – амплітуда фактично діючих напружень,  $K$  – загальний коефіцієнт зниження граници витривалості, що враховує сукупний вплив основних конструктивних і технологічних факторів на витривалість деталі при симетричному циклі.

У загальному випадку коефіцієнт  $K$  визначається таким чином:

$$K = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n},$$

де  $\alpha_i > 1$ ,  $\gamma_i < 1$  – коефіцієнти, що враховують негативний вплив кожного з факторів. Якщо вплив факторів позитивний (наприклад, зміцнення поверхні), то коефіцієнти  $\alpha_i$  і  $\gamma_i$  необхідно поміняти місцями.

У практичних розрахунках на втому найбільш поширеним є варіант коефіцієнту зниження граници витривалості, коли враховується вплив тільки трьох факторів: концентрації напружень, розмірів деталі і якості обробки поверхні. Вплив цих факторів оцінюється коефіцієнтами  $K_{\sigma}$ ,  $\varepsilon$  і  $\beta$  відповідно. Якщо  $K_{\sigma} > 1$ ,  $\varepsilon < 1$ ,  $\beta < 1$ , то

$$K = \frac{K_{\sigma}}{\varepsilon \beta},$$

де  $K_{\sigma}$  – ефективний коефіцієнт концентрації напружень,  $\varepsilon$  – коефіцієнт впливу абсолютних розмірів перерізу,  $\beta$  – коефіцієнт впливу стану і якості поверхні.

Знаходимо номінальні амплітудні напруження  $\sigma_a$ , що діють у ймовірно небезпечних перерізах.

$$W = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 9,6^3}{32} = 86,815 \text{ см}^3.$$

Переріз  $B$ :

$$\sigma_a^B = \sigma_{\max} = \frac{M_c^B}{W} = \frac{14,4 \cdot 10^3}{86,815 \cdot 10^{-6}} \approx 166 \text{ МПа}.$$

Переріз  $I$ :

$$\sigma_a^I = \sigma_{\max} = \frac{M_c^I}{W} = \frac{11,7 \cdot 10^3}{86,815 \cdot 10^{-6}} \approx 135 \text{ МПа}.$$

Визначимо коефіцієнти концентрації напружень в небезпечних перетинах  $K_{\sigma}^B$  і  $K_{\sigma}^I$ . Коефіцієнт  $K_{\sigma}^B = 1$  (концентратори відсутні). Згідно з додатком 3, де наведено значення ефективних концентраторів  $K_{\sigma}$  в залежності від границі міцності матеріалу вала із шпонковим пазом, обробленого пальцевою фрезою,  $K_{\sigma}^I = 1,51$ .

Значення коефіцієнта впливу абсолютних розмірів ( $\varepsilon_{\sigma} \approx \varepsilon_{\tau}$ ) знайдемо у додатку 4. Для вуглецевої сталі з границею міцності  $\sigma_B = 420 \text{ МПа}$  та діаметром  $d = 96 \text{ мм}$  коефіцієнт буде становити  $\varepsilon_{\sigma} = 0,7$ .

Коефіцієнт впливу стану і якості поверхні  $\beta$  визначимо з додатку 5. Для шліфованої поверхні і заданої сталі  $\beta = 0,95$ .

Обчислимо загальний коефіцієнт зниження границі витривалості для небезпечних перерізів.

Переріз  $B$ :

$$K^B = \frac{1}{0,7 \cdot 0,95} = 1,5.$$

Переріз  $I$ :

$$K^I = \frac{1,51}{0,7 \cdot 0,95} = 2,27.$$

Тоді  $n_{\sigma}^B = \frac{170}{1,5 \cdot 166} = 0,683$ ;  $n_{\sigma}^I = \frac{170}{2,27 \cdot 135} = 0,555$ .

Визначимо коефіцієнт запасу статичної міцності при крученні.

$$n_{\tau} = \frac{\tau_T}{\tau_{\max}}.$$

Границю текучості при крученні визначимо за третьою теорією міцності.

$$\tau_T = 0,5\sigma_T = 0,5 \cdot 250 = 125 \text{ МПа}.$$

Полярний момент опору перерізу вала:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi \cdot 9,6^3}{16} = 173,63 \text{ см}^3.$$

$$\tau_{\max}^B = \tau_{\max}^I = \frac{M_{\text{кр}}}{W_p} = \frac{600}{173,63 \cdot 10^{-6}} = 3,46 \text{ МПа}.$$

Тоді

$$n_{\tau} = \frac{125}{3,46} = 36,13.$$

3. Обчислюємо повний коефіцієнт запасу міцності на витривалість за формулою Гафа і Полларда:

$$n = \frac{0,555 \cdot 36,13}{\sqrt{(0,555)^2 + (36,13)^2}} = \frac{20,052}{36,134} = 0,555.$$

Отже

$$n = 0,555 < [n] = 1,8.$$

Тобто, умова міцності не виконується. Врахування циклічності згинального моменту привело до зменшення коефіцієнту запасу у  $1,5/0,555 = 2,7$  рази.

4. Вибираємо нове значення діаметру вала і повторюємо розрахунки, виконані у пп. 2, 3.

Нехай діаметр вала  $d = 150$  мм. Тоді маємо наступні геометричні характеристики перерізу:

$$W = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 15^3}{32} = 331,17 \text{ см}^3, \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi \cdot 15^3}{16} = 662,34 \text{ см}^3.$$

Знаходимо амплітуди нормальних напружень у ймовірно небезпечних перерізах:

$$\sigma_a^B = \sigma_{\max} = \frac{M_c^B}{W} = \frac{14,4 \cdot 10^3}{331,17 \cdot 10^{-6}} = 43,48 \text{ МПа},$$

$$\sigma_a^I = \sigma_{\max} = \frac{M_c^I}{W} = \frac{11,7 \cdot 10^3}{331,17 \cdot 10^{-6}} = 35,33 \text{ МПа}.$$

За допомогою лінійної інтерполяції даних, що наведені у додатку 4, визначаємо нове значення масштабного коефіцієнта:

$$\varepsilon_\sigma = 0,67.$$

Тоді

$$K^B = \frac{1}{0,67 \cdot 0,95} = 1,57; \quad n_\sigma^B = \frac{170}{1,57 \cdot 43,48} = 2,49.$$

$$K^I = \frac{1,51}{0,67 \cdot 0,95} = 2,37, \quad n_\sigma^I = \frac{170}{2,37 \cdot 35,33} = 2,03.$$

$$\tau_{\max}^B = \tau_{\max}^I = \frac{M_{\text{кр}}}{W_p} = \frac{600}{662,34 \cdot 10^{-6}} = 0,91 \text{ МПа};$$

$$n_\tau = \frac{125}{0,91} = 137,36.$$

Обчислюємо повний коефіцієнт запасу міцності на витривалість:

$$n = \frac{2,03 \cdot 137,36}{\sqrt{(2,03)^2 + (137,36)^2}} = \frac{278,84}{137,37} = 2,03;$$

$$n = 2,03 > [n] = 2.$$

Умова міцності виконується. Остаточо, діаметр вала буде становити  $d = 150$  мм.

## ЗАДАЧА 12

### РОЗРАХУНОК ТОНКОСТІННОЇ ПОСУДИНИ НА ОПОРАХ

Сталеву тонкостінну циліндричну посудину з днищами встановлено на чотирьох симетрично розташованих опорах (рис.12.1, табл.12.1). Посудина знаходиться під внутрішнім тиском  $p$  і заповнена на  $2/3$  висоти  $H$  рідиною з питомою вагою  $\gamma$ . Обчислити товщину стінки посудини в небезпечному перерізі. Допустиме напруження на розтяг для матеріалу посудини  $[\sigma] = 100$  МПа. Підібрати переріз стояків з умови стійкості. Прийняти для стояків  $[\sigma] = 160$  МПа,  $R_1 = R$ ,  $l_1 = 0,2l$ ,  $r = R/3$ .

*Таблиця 12.1. Варіанти завдань до задачі 12*

Варіант	$p$ , МПа	$\gamma$ , кН/м <sup>3</sup>	$H$ , м	$h$ , м	$R$ , м	$L$ , м	Перерізи стояка
0	1,5	20	4,5	1,3	1,3	2,5	Г
1	1,2	30	3,5	1,0	1,2	2,2	І
2	2,1	35	3,0	0,8	1,0	1,8	Л
3	1,9	25	3,6	0,6	1,1	2,0	Л
4	1,6	30	3,5	0,5	0,9	1,9	І
5	1,8	40	2,8	0,7	0,8	2,0	Г
6	1,4	25	4,0	1,1	1,1	3,0	Л
7	2,0	20	3,8	0,9	1,0	2,5	Л
8	1,7	40	2,6	0,5	0,6	2,1	Г
9	1,3	25	4	1,2	1,3	2,4	І

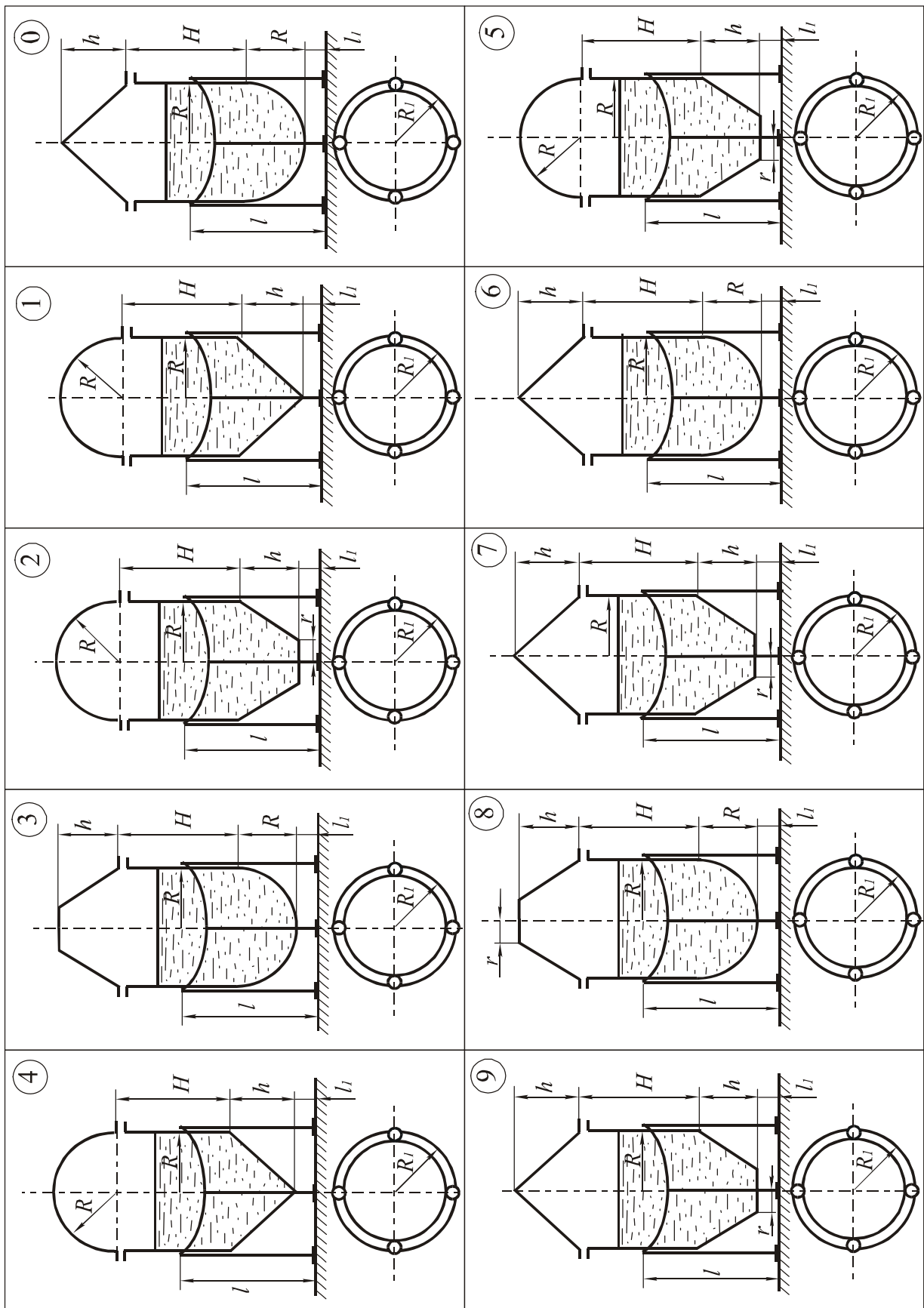


Рис. 12.1. Варіанти схем посудин до задачі 12



## План розв'язування задачі

1. Обчислити товщину стінки посудини в небезпечному перерізі.
2. Визначити навантаження на стояк, враховуючи вагу рідини, самої оболонки та її днищ.
3. Підібрати переріз стояка з розрахунку на стійкість, вважаючи стояк на одному кінці (верхньому) закріплений шарнірно, на другому – жорстко.

## Розв'язання задачі

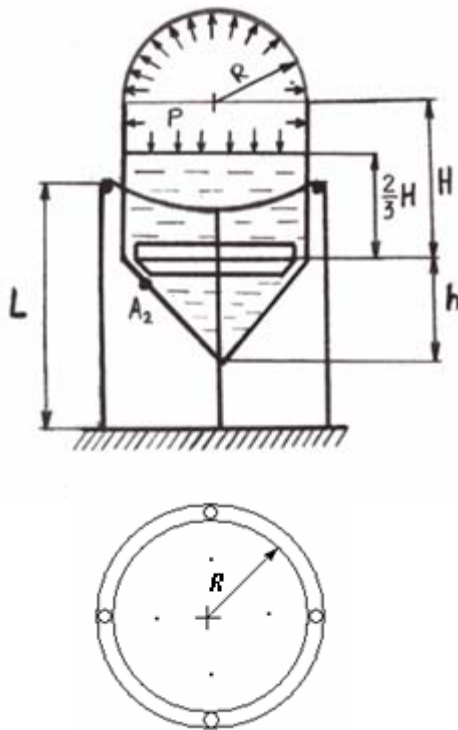


Рис. 12.2. Розрахункова схема

Дано:  $p = 1,5 \text{ МПа}$ ,  $\gamma_o = 80 \text{ кН/м}^3$ ,  
 $\gamma_p = 10 \text{ кН/м}^3$ ,  $H = 3 \text{ м}$ ,  $h = 1 \text{ м}$ ,  $L = 2 \text{ м}$ ,  
 $R = 0,8 \text{ м}$ , переріз стояків – [] (2 швелери),  
 $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ ,  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

Обчислити: 1)  $t$  – товщину стінки оболонки (з розрахунку на міцність посудини),  
 2) номер швелера (з розрахунку на стійкість стояків).

1. Розрахуємо на міцність циліндричну частину посудини.

Меридіональний та коловий радіуси:

$$\rho_m = \infty; \quad \rho_t = R.$$

Тиск на поверхню циліндра в залежності від глибини:

$$p_1(y_1) = p + \gamma_p \left( \frac{2}{3} H - y_1 \right).$$

Рівняння рівноваги зони (рис. 12.3):

$$\sigma_{1m} \cdot 2\pi R t = p_1 \pi R^2 + Q_1^*.$$

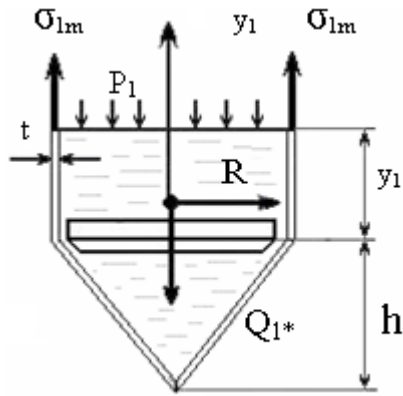


Рис. 12.3. Навантаження циліндричної частини посудини

Звідси

$$\begin{aligned} \sigma_{1m} &= \frac{p_1 R}{2t} + \frac{Q_{1*}}{2\pi R t} = \frac{pR + \gamma_p \left( \frac{2}{3} H - y_1 \right) R}{2t} + \frac{\left( \gamma_p \cdot \frac{1}{3} \pi R^2 h + \gamma_p \pi R^2 y_1 \right)}{2\pi R t} = \\ &= \frac{R \left[ p + \gamma_p \left( \frac{2}{3} H - y_1 + \frac{1}{3} h + y_1 \right) \right]}{2t} = \frac{R \left[ p + \frac{1}{3} \gamma_p (2H + h) \right]}{2t} = \text{const.} \end{aligned}$$

Рівняння Лапласа

$$\sigma_{1m} / \rho_{1m} + \sigma_{1t} / \rho_{1t} = p_1 / t,$$

звідси виходить

$$\sigma_{1t}(y_1) = \frac{p_1 \rho_{1t}}{t} = \frac{\left[ p + \gamma_p \left( \frac{2}{3} H - y_1 \right) \right] R}{t}.$$

Небезпечні точки, де найбільші напруження, – це точки циліндра на рівні  $A_1$ , напруження в них:

$$\begin{aligned} \sigma_{1m} = \text{const} &= \frac{R \left[ p + \frac{1}{3} \gamma_p (2H + h) \right]}{2t} = \\ &= \frac{0,8 \cdot 10^3 \text{ мм} \cdot \left[ 1,5 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2} + \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Н}}{\text{мм}^3} \cdot (2 \cdot 3 \cdot 10^3 \text{ мм} + 1 \cdot 10^3 \text{ мм}) \right]}{2t} \approx \frac{610 \text{ Н/м}}{t}, \end{aligned}$$

$$\sigma_{1t}(y_1 = 0) = \sigma_{1t \max} = \frac{\left(p + \frac{2}{3}\gamma_p H\right)R}{t} =$$

$$= \frac{\left(1,5 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2} + \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Н}}{\text{мм}^3} \cdot 3 \cdot 10^3 \text{ мм}\right) \cdot 0,8 \cdot 10^3 \text{ мм}}{t} \approx \frac{1360 \text{ Н/м}}{t}.$$

Умова міцності для небезпечних точок  $A_1$  за IV критерієм міцності:

$$\sigma_{1 \text{ IV}} = \sqrt{\sigma_{1m}^2 + \sigma_{1t \max}^2 - \sigma_{1m}\sigma_{1t \max}} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{610}{t}\right)^2 + \left(\frac{1360}{t}\right)^2 - \frac{610}{t} \cdot \frac{1360}{t}} \approx \frac{1180 \text{ Н/мм}}{t} \leq [\sigma] = 160 \text{ Н/мм}^2.$$

Звідси

$$t \geq \frac{1180}{160} = 7,4 \text{ мм}.$$

2. Розрахуємо на міцність конічну частину посудини.

Для конічної частини (рис. 12.4):

$$\rho_{2m} = \infty, \quad \rho_{2t} = \frac{y_2 \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}.$$

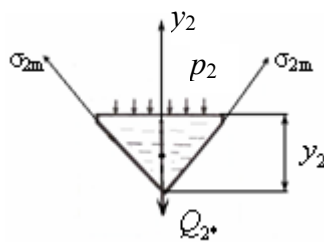


Рис. 12.4. Навантаження конічної частини посудини

$$p_2(y_2) = p + \gamma_p \left( \frac{2}{3}H + h - y_2 \right),$$

$$\sigma_{2m} \cdot 2\pi r t \cdot \cos \alpha = p_2 \cdot \pi r^2 + Q_{2*},$$

$$r = y_2 \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\begin{aligned} \sigma_{2m}(y_2) &= \frac{p_2 r}{2t \cos \alpha} + \frac{\gamma_p \cdot \frac{1}{3} \pi r^2 y_2}{2\pi r t \cos \alpha} = \frac{\left[ p + \gamma_p \left( \frac{2}{3} H + h - y_2 \right) \right] r + \frac{1}{3} \gamma_p r y_2}{2t \cos \alpha} = \\ &= \frac{\left[ p + \gamma_p \left( \frac{2}{3} H + h - y_2 \right) \right] y_2 \operatorname{tg} \alpha}{2t \cos \alpha}. \end{aligned}$$

$$\frac{\sigma_{2m}}{\sigma_{2t}} + \frac{\sigma_{2t}}{\sigma_{2t}} = \frac{p_2}{t},$$

$$\sigma_{2t}(y_2) = \frac{p_2 p_{2t}}{t} = \frac{\left[ p + \gamma_p \left( \frac{2}{3} H + h - y_2 \right) \right] y_2 \operatorname{tg} \alpha}{t \cos \alpha}.$$

Знайдем координати  $y_{2m}$  точок конуса, в яких напруження найбільші:

$$\frac{d\sigma_{2m}}{dy_2} = \frac{\left[ p + \gamma_p \left( \frac{2}{3} H + h - 2y_{2m} \right) \right] \operatorname{tg} \alpha}{2t \cos \alpha} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$y'_{2m} = \left( \frac{p}{\gamma_p} + \frac{2}{3} H + h \right) \cdot \frac{3}{4} = \left( \frac{1,5 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2}{10 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^3} + \frac{2}{3} \cdot 3 \text{ м} + 1 \text{ м} \right) \cdot \frac{3}{4} \geq h = 1 \text{ м},$$

$$y''_{2m} = \left( \frac{p}{\gamma_p} + \frac{2}{3} H + h \right) \cdot \frac{1}{2} = \left( \frac{1,5 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2}{10 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^3} + \frac{2}{3} \cdot 3 \text{ м} + 1 \text{ м} \right) \cdot \frac{1}{2} \geq h = 1 \text{ м}.$$

Обидві точки знаходяться вище конуса висотою  $h$ . Отже небезпечні точки конуса  $A_2$  знаходяться у верхній частині конуса. Напруження в них ( $y_2 = h$ ):

$$\begin{aligned}
y_2 = h\sigma_{2m\max} = \sigma_{2m}(y_2 = h) &= \frac{\left[ p + \gamma_p \left( \frac{2}{3}H + h - \frac{2}{3}h \right) \right] h \operatorname{tg} \alpha}{2t \cos \alpha} = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \alpha = R/h = 0,8 \\ \cos \alpha = h/\sqrt{R^2 + h^2} = 0,78 \end{array} \right\} = \\
&= \frac{\left[ 1,5 + 10 \cdot 10^{-6} \left( \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 10^3 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 10^3 \right) \right] \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{2t \cdot 0,78} \approx \frac{778 \text{ Н/мм}}{t}, \\
\sigma_{2\max} = \sigma_t(y_2 = h) &= \frac{\left[ p + \gamma_p \left( \frac{2}{3}H + h - h \right) \right] h \operatorname{tg} \alpha}{t \cos \alpha} = \\
&= \frac{\left[ 1,5 + 10 \cdot 10^{-6} \left( \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 10^3 \right) \right] \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{t \cdot 0,78} \approx \frac{1560 \text{ Н/мм}}{t}.
\end{aligned}$$

Умова міцності конічної частини:

$$\begin{aligned}
\sigma_{2 \text{ IV}} &= \sqrt{\sigma_{2m\max}^2 + \sigma_{2t\max}^2 - \sigma_{2m\max} \sigma_{2t\max}} = \\
&= \sqrt{\left( \frac{778}{t} \right)^2 + \left( \frac{1560}{t} \right)^2 - \frac{778}{t} \cdot \frac{1560}{t}} \approx \frac{1351 \text{ Н/мм}}{t} \leq [\sigma] = 160 \text{ Н/мм}^2.
\end{aligned}$$

Звідси

$$t \geq \frac{1351}{160} = 8,4 \text{ мм.}$$

Посудина буде міцною, якщо і циліндрична, і конічна її частини будуть міцні. Таким чином, умова міцності посудини – система нерівностей:

$$\begin{cases} t \geq 8,4 \text{ мм;} \\ t \geq 7,4 \text{ мм.} \end{cases}$$

Обираємо  $t = 9$  мм.

3. Визначимо навантаження на стояк.

Врахуємо вагу посудини – оболонки та рідини в посудині. Рівняння рівноваги посудини з рідиною (рис. 2.5):

$$\sum_j Y_j = 0: \quad 4N + Q_* + Q_o = 0.$$

Зусилля в стояку:

$$N = -\frac{Q_* + Q_o}{4} = -\frac{\gamma_p (V'_c + V'_k) + \gamma_o (V''_c + V''_k + V''_{cf})}{4} =$$

$$= -\frac{\gamma_p \left( \pi R^2 \cdot \frac{2}{3} H + \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h \right)}{4} =$$

$$= -\frac{\gamma_o t \left( 2\pi R \cdot H + \pi R \cdot h / \cos \alpha + 2\pi R^2 \right)}{4} =$$

$$= -\frac{\pi R \left[ \gamma_p \frac{R}{3} (2H + h) - \gamma_o t (2H + h / \cos \alpha + 2R) \right]}{4} =$$

$$= -\frac{\pi \cdot 0,8 \text{ м} \cdot \left[ 10 \frac{\text{кН}}{\text{м}} \cdot \frac{0,8 \text{ м}}{3} \cdot (2 \cdot 3 \text{ м} + 1 \text{ м}) \right]}{4} =$$

$$= -\frac{\pi \cdot 0,8 \text{ м} \cdot \left[ 80 \frac{\text{кН}}{\text{м}} \cdot 9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot (2 \cdot 3 \text{ м} + 1 \text{ м} / 0,78 + 2 \cdot 0,8 \text{ м}) \right]}{4} \approx -14,4 \text{ кН}.$$

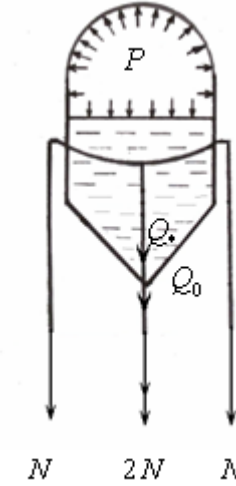


Рис. 12.5. Навантаження на стояки

4. Розрахуємо стояк на стійкість за допомогою метода послідовних наближень (рис. 12.6):

1-е наближення:  $\varphi_1 = 0,5$ .

$$F_1 \geq \frac{|N|}{\varphi_1[\sigma]} = \frac{14,4 \cdot 10^3 \text{ Н}}{0,5 \cdot 160 \text{ Н/мм}^2} \approx 180 \text{ мм}^2 = 1,8 \text{ см}^2.$$

$$F_{1\text{шв}} = F_1 / 2 \geq 0,9 \text{ см}^2.$$

Вибираємо швелер № 5 (найменший швелер в сортаменті):  $F_{1\text{шв}} = 6,16 \text{ см}^2$ ;  $I_{z1} = 5,61 \text{ см}^4$ ;

$$b = 3,2 \text{ см}; z_0 = 1,16 \text{ см}.$$

Для двох швелерів № 5 (рис. 12.7):

$$F_1 = 2F_{1\text{шв}} = 12,32 \text{ см}^2;$$

$$I_{1\text{min}} = I_{1z} = 2 \cdot \left[ 5,61 + (3,2 - 1,16)^2 \cdot 6,16 \right] \approx 62,5 \text{ см}^4.$$

Радіус інерції

$$i_1 = \sqrt{\frac{I_{1\text{min}}}{F_1}} = \sqrt{\frac{62,5}{12,32}} \approx 2,25 \text{ см}.$$

Гнучкість стояка

$$\lambda_1 = \frac{nL}{i_1} = \frac{0,7 \cdot 200 \text{ см}}{2,25 \text{ см}} \approx 62.$$

Уточнений коефіцієнт  $\varphi$ :  $\varphi_1^* = \varphi(\lambda_1 = 62) = 0,85$ .

Різниця

$$\delta_1 = \frac{|\varphi_1^* - \varphi_1|}{\min(\varphi_1, \varphi_1^*)} \cdot 100 = \frac{|0,85 - 0,5|}{0,5} \cdot 100 \approx 70\% \geq 5\%.$$

2-е наближення:  $\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1^*}{2} = 0,675$ .

Далі за вищенаведеними формулами одержимо:

$$F_{2\text{шв}} \geq 0,685 \text{ см}^2.$$

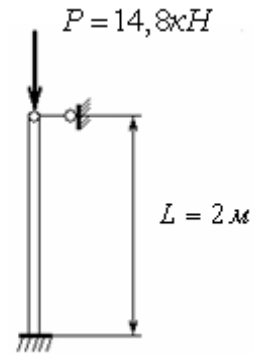


Рис. 12.6. Розрахункова схема стояка

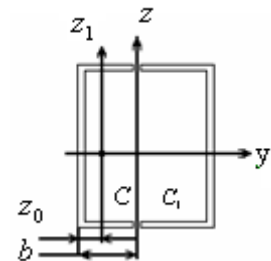


Рис. 12.7. Переріз стояка

Залишаємо найменший швелер № 5 з сортаменту. У цьому випадку, як було розраховано вище,

$$\varphi_2^* = 0,85.$$

Різниця

$$\delta_2 = \frac{|0,85 - 0,675|}{0,675} \cdot 100 \approx 26\% \geq 5\%.$$

Очевидно, в подальших наближеннях необхідна площа швелера буде зменшуватися. Тому остаточно вибираємо для стояка 2 швелери № 5.

Перевіримо виконання умови стійкості стояка:

$$\sigma = \frac{|N|}{F} = \frac{14,4 \cdot 10^3}{12,32 \cdot 10^{-4}} = 11,7 \cdot 10^6 \text{ Па} = 11,7 \text{ МПа} <$$

$$< \varphi_2^* [\sigma] = 0,85 \cdot 160 = 136 \text{ МПа}.$$

Стояки за умовою стійкості значно недовантажено.



## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Писаренко Г.С., Квітка О.Л., Уманський Е.С.* Опір матеріалів: Підручник/ За ред. Г. С. Писаренка. – К.: Вища шк., 2004. – 655 с.
2. *Збірник задач з опору матеріалів: Навч. посіб./ М. І. Бобир, А. Є. Бабенко, О. О. Боронко та ін.; За ред. М. І. Бобиря.* – К.: Вища шк., 2008. – 399 с.
3. *Методичні вказівки до курсової роботи з дисципліни «Опір матеріалів» для студентів усіх спеціальностей денної та вечірньої форм навчання/ Уклад.: А. Є. Бабенко, Г. Є. Візерська, О. П. Заховайко та ін.* – К.: НТУУ “КПІ”, 1998. – Ч. II. – 40 с.
4. *Методичні вказівки до розрахунково-проектувальних завдань з дисципліни «Опір матеріалів» для студентів усіх спеціальностей денної та вечірньої форм навчання/ Уклад.: Г. Є. Візерська, Л. В. Рогозіна, Б. І. Ковальчук та ін.* – К.: КПІ, 1993. – Ч. II. – 32 с.

# ДОДАТКИ

*Додаток 1*

Міністерство освіти і науки України  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут»  
Кафедра динаміки, міцності машин та опору матеріалів

## КУРСОВА РОБОТА (РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА) З ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ

Механіко-машинобудівний інститут  
Група МТ-11  
Студент Петренко Микола Іванович  
Варіант 78  
Викладач /Осадчук В.Г./

Київ 2010

## Рекомендований ряд лінійних розмірів R 40

1,0	1,6	2,5	4,0	6,3	10	16	25	40	63	100	160
1,05	1,7	2,6	4,2	6,7	10,5	17	26	42	67	105	170
1,1	1,8	2,8	4,5	7,1	11	18	28	45	71	110	180
1,15	1,9	3,0	4,8	7,5	11,5	19	30	48	75	120	190
1,2	2,0	3,2	5,0	8,0	12	20	32	50	80	125	200
1,3	2,1	3,4	5,3	8,5	13	21	34	53	85	130	210
1,4	2,2	3,6	5,6	9,0	14	22	36	56	90	140	220
1,5	2,4	3,8	6,0	9,5	15	24	38	60	95	150	240

**Залежність ефективних коефіцієнтів концентрації  $K_\sigma$  і  $K_\tau$  від границі міцності  $\sigma_B$  матеріалу вала зі шпонковим пазом, який оброблено пальцевою фрезою.**

$\sigma_B$ , МПа	$K_\sigma$	$K_\tau$	$\sigma_B$ , МПа	$K_\sigma$	$K_\tau$
400	1,51	1,20	800	2,01	1,86
500	1,64	1,37	900	2,14	2,05
600	1,76	1,54	1000	2,26	2,22
700	1,89	1,71	1200	2,50	2,39

**Значення коефіцієнта впливу абсолютних розмірів ( $\varepsilon_\sigma \approx \varepsilon_\tau$ ) у залежності від діаметра деталі й матеріалу**

Матеріал	$\varepsilon_\sigma \approx \varepsilon_\tau$ при $d$ , мм							
	10	20	30	40	50	70	100	200
Вуглецева сталь $\sigma_B = 400 - 500$ МПа	0,98	0,92	0,88	0,85	0,82	0,76	0,70	0,63
Вуглецева і легована сталь $\sigma_B = 500 - 800$ МПа	0,97	0,89	0,85	0,81	0,78	0,73	0,68	0,61
Легована сталь $\sigma_B = 800 - 1200$ МПа	0,95	0,86	0,81	0,77	0,74	0,69	0,65	0,59
Легована сталь $\sigma_B = 1200 - 1400$ МПа	0,94	0,83	0,77	0,73	0,70	0,66	0,62	0,57

**Значення коефіцієнту впливу стану і якості поверхні  $\beta$  при циклічному згинанні вала в залежності від границі міцності  $\sigma_B$  матеріалу та виду обробки поверхні**

Вид поверхні	Границя міцності $\sigma_B$ , МПа				
	400	600	800	1000	1200
Шліфована	0,95	0,92	0,90	0,89	0,87
Тонко обточена	0,93	0,88	0,84	0,80	0,77
Грубо обточена	0,91	0,84	0,77	0,71	0,66
З окалиною	0,80	0,64	0,53	0,45	0,38