

РОЗДІЛ 5 ЗГИН

5.1. Епюри внутрішніх зусиль у поперечних перерізах балок і рам

5.1*. Для балки на двох опорах прогоном $l = 3a$, навантаженої рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю q , парою сил із моментом $M = qa^2$ і зосередженою силою $F = qa$ (рис. 5.1), скласти в загальному вигляді вирази $Q(x)$ і $M(x)$, побудувати епюри і обчислити найбільші за абсолютним значенням згинальний момент і поперечну силу, якщо $q = 20$ кН/м і $a = 2$ м.

Відповідь: див. рис. 5.2.

5.2. Для балок, що несуть суцільне навантаження, розподілене за криволінійним законом, побудувати епюри Q і M та обчислити найбільші поперечну силу і згинальний момент, якщо: а) $q(x) = \frac{qx}{l^2}(2l - x)$;
б) $q(x) = \frac{qx^2}{l}$; в) $q(x) = q \sin \frac{\pi x}{l}$ (рис. 5.3).

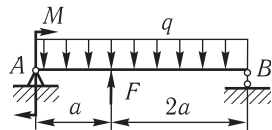


Рис. 5.1

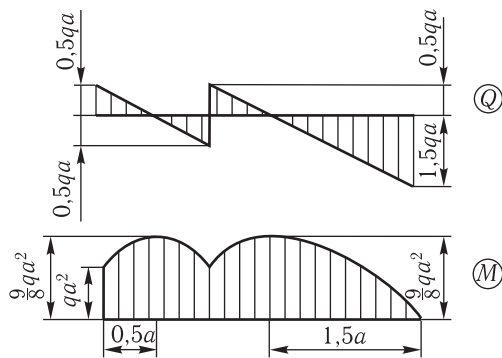


Рис. 5.2

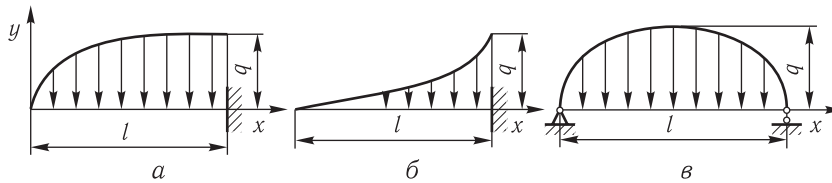


Рис. 5.3

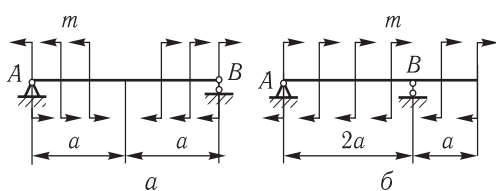


Рис. 5.4

Відповідь: а) $Q_{\max} = -\frac{2}{3}ql$,
 $M_{\max} = -\frac{ql^2}{4}$; б) $Q_{\max} = -\frac{1}{3}ql$,
 $M_{\max} = -\frac{ql^2}{12}$; в) $Q_{\max} = \frac{1}{\pi}ql$,
 $M_{\max} = \frac{ql^2}{\pi}$.

5.3. Побудувати епюри Q і M для балок, навантажених рівномірно розподіленим моментом (рис. 5.4), якщо $a = 2$ м, $m = 2$ кН/м.

Відповідь: а) $Q = 0$, $M_{\max} = -ma = -40$ кН·м; б) $Q_{\max} = \frac{3}{2}m = 30$ кН,
 $M_{\max} = -ma = -40$ кН·м.

5.4. Побудувати епюри Q і M для балок із шарнірами, схеми яких зображено на рис. 5.5, і обчислити найбільші за абсолютним значенням поперечну силу і згинальний момент.

Відповідь: а) $Q = 100$ кН, $M = -160$ кН·м; б) $Q = -120$ кН, $M = -152$ кН·м;
в) $Q = -30$ кН, $M = -40$ кН·м; г) $Q = 40$ кН, $M = 80$ кН·м.

5.5. Уздовж балки переміщується пара сил з моментом $M_0 = Fl$. Як змінюються при цьому епюри зусиль у перерізах балки (рис. 5.6)?

Відповідь: $Q = F = \text{const}$; $M = Fx$ зліва від моменту M_0 і $M = -F(l-x)$ праворуч.

5.6. Для балок AB з одним чи двома шарнірами C і D у прогонах (рис. 5.7) визначити реакції опор і побудувати епюри Q і M . Перевірити епюру M .

Відповідь: а) $R_A = 5,25$ кН, $R_B = 12,0$ кН, $M_B = M_{\max} = -15,2$ кН·м;
б) $R_A = R_B = \frac{F}{2}$, $M_A = M_B = -\frac{Fa}{2}$; в) $R_A = \frac{F}{4}$, $R_E = R_G = \frac{3F}{2}$, $R_F = \frac{3F}{4}$,
 $M_{\max} = -\frac{Fl}{3}$; г) $R_A = \frac{ql}{6}$, $R_B = \frac{q}{6}(2l+3a)$, $M_A = -\frac{qa}{3}(l+a)$.

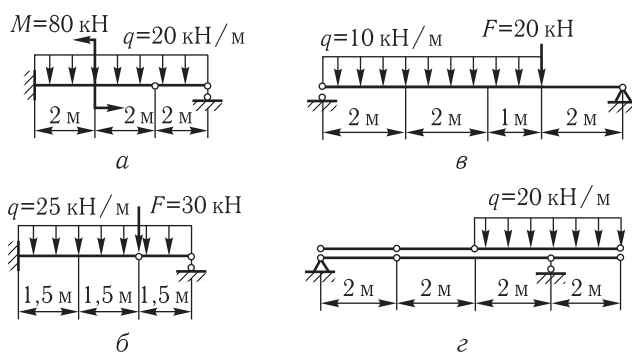


Рис. 5.5

5.7*. Для балок, навантажених зосередженими силами, побудувати епюри Q і M (рис. 5.8).

Відповідь: див. табл. 5.1.

5.8. Визначити реакції опор A і B та побудувати епюри Q і M для двохопорної балки з консоллю, навантаженою зосередженими навантаженнями (рис. 5.9).

Відповідь: а) $|M|_{\max} = 1,5M_0$; б) $|M|_{\max} = Fa$.

5.9*. Побудувати епюри Q і M для балок з консолями. Обчислити максимальний згинальний момент. Перевірити диференціальну залежність між Q і M (рис. 5.10).

Відповідь: див. табл. 5.2.

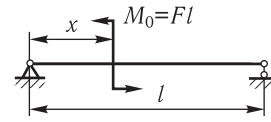


Рис. 5.6

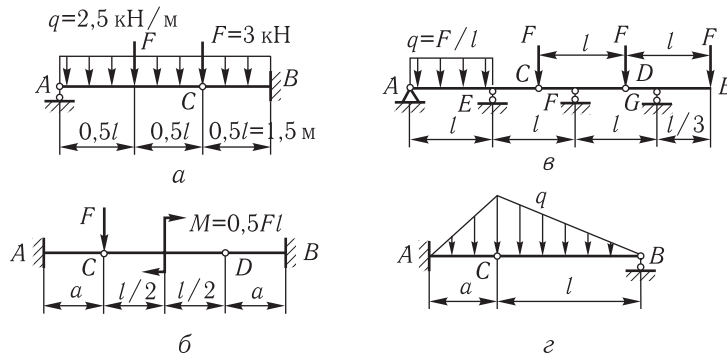


Рис. 5.7

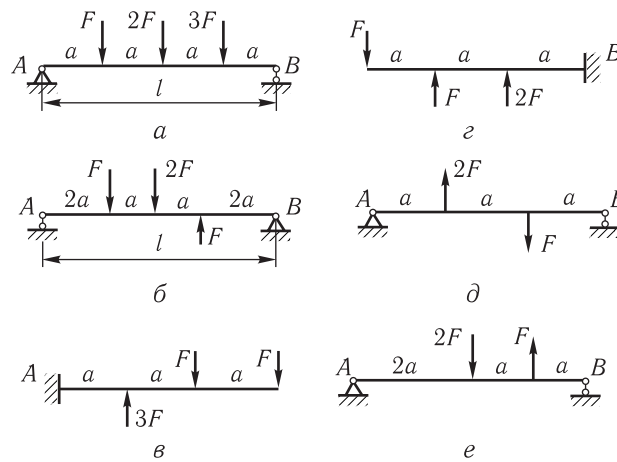


Рис. 5.8

Таблиця 5.1

Схема	R_A/F	R_B/F	M_{\max}/Fa	Q_{\max}/F	Схема	R_A/F	R_B/F	M_{\max}/Fa	Q_{\max}/F
<i>a</i>	2,5	3,5	4	-3,5	<i>z</i>	—	-2	1	2
<i>б</i>	1	0	2	-2	<i>д</i>	-1	0	± 1	1
<i>в</i>	-1	—	± 3	2	<i>е</i>	3/4	0,25	1,5	-5/4

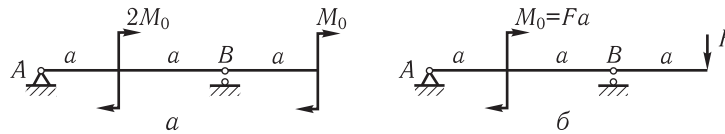


Рис. 5.9

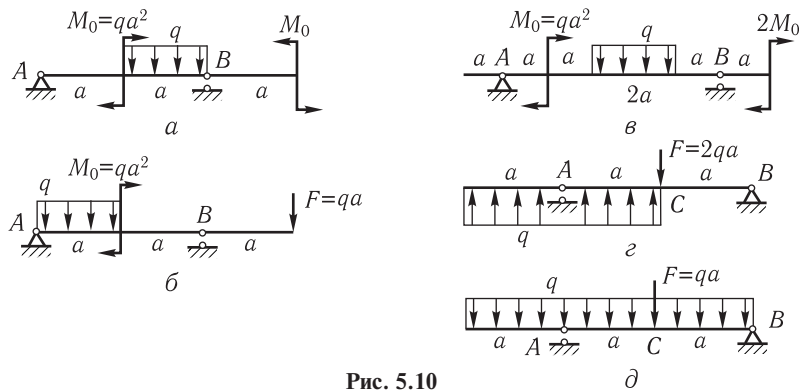


Рис. 5.10

5.10. Побудувати епюри Q і M від розподіленого моментного навантаження постійної інтенсивності m для балок, зображених на рис. 5.11. Перевірити диференціальну залежність між Q і M .

Відповідь: див. табл. 5.3.

Таблиця 5.2

Схема	R_A/qa	R_B/qa	M_{\max}/qa^2	Q_{\max}/qa
<i>a</i>	1/4	3/4	41/32	-3/4
<i>б</i>	-1/4	9/4	-1 (у перерізі B)	-5/4
<i>в</i>	1/5	9/5	-2	-9/5
<i>z</i>	-1	1	1 (у перерізі C)	1
<i>д</i>	11/4	5/4	3/4 (у перерізі C)	7/4

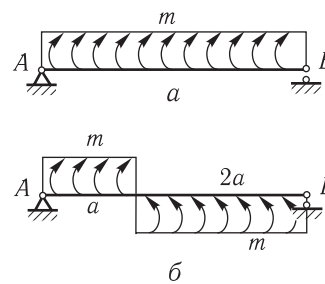


Рис. 5.11

Таблиця 5.3

Схема	Q/m	$M_{\max}/(ma)$	$ M _{\max}/(ma)$	Схема	Q/m	$M_{\max}/(ma)$	$ M _{\max}/(ma)$
<i>a</i>	-1	0	—	<i>б</i>	1/3	—	—

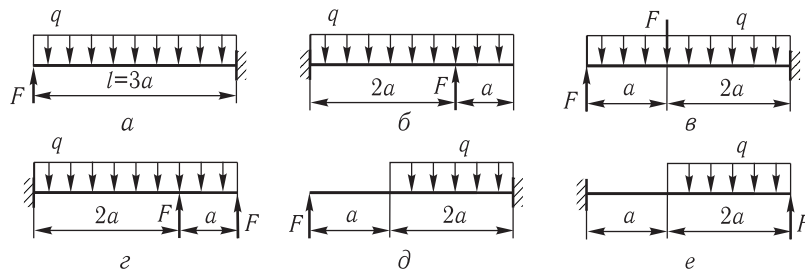


Рис. 5.12

Таблиця 5.4

Схема	<i>a</i>	<i>б</i>	<i>в</i>	<i>г</i>	<i>д</i>	<i>е</i>
F	$\frac{ql}{2}$	$\frac{3}{4}ql$	$\frac{3}{2}ql$	$0,3ql$	$\frac{2}{9}ql$	$\frac{4}{9}ql$
M_{\max}	$\frac{ql^2}{8}$	$-\frac{ql^2}{18}$	$\frac{4}{9}ql^2$	$0,08ql^2$	$\frac{8}{81}ql^2$	$\frac{8}{81}ql^2$

5.11*. Консоль завдовжки $l = 3a$ навантажена рівномірно розподіленим навантаженням і зосередженими силами (рис. 5.12). Встановити, за яких значень сил F момент у затисненні дорівнює нулю. Побудувати епюри Q і M за знайдених значень сил і переконатися в тому, що площа епюри Q дорівнює нулю.

Відповідь: див. табл. 5.4.

5.12. Двовісний візок підйомного крана переміщується по двох підкранових балках прогоном $l = 10$ м. Відстань між осями візка $c = 1,2$ м (рис. 5.13). Знайти небезпечне положення візка, за якого згинальний момент матиме найбільше значення, у двох випадках: а) без вантажу на гаку, якщо тиски від коліс крана, що передаються на кожен балку, однакові й дорівнюють $F_1 = F_2 = 20$ кН; б) з вантажем на гаку, якщо $F_1 = 50$ кН і $F_2 = 10$ кН. Підрахувати величини M_{\max} .

Відповідь: а) $x = \frac{l}{2} - \frac{c}{4} = 4,7$ м, $M_{\max} = 88,4$ кН·м; б) $x = \frac{l}{2} - \frac{c}{12} = 4,9$ м, $M_{\max} = 14,4$ кН·м.

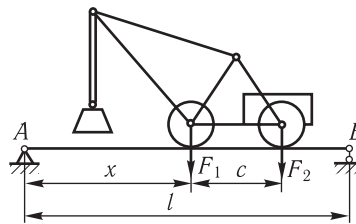


Рис. 5.13

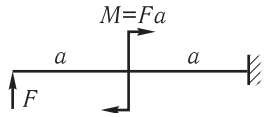


Рис. 5.14

5.13. Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для консолі, навантаженої зосередженою силою F і зосередженим моментом $M = Fa$ (рис. 5.14).

Відповідь: $M_{\max} = Fa$; $Q = F$.

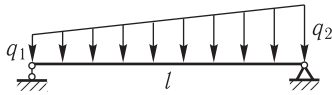


Рис. 5.15

5.14. Побудувати епюри Q і M для балки, навантаженої розподіленим навантаженням. Інтенсивність навантаження змінюється вздовж балки за лінійним законом. Розглянути випадки $q_1 = q_2 = q$, $q_2 = 0$, а також випадок $q_1 < 0$ (рис. 5.15).

Відповідь: при $q_1 = q_2 = q$ $M_{\max} = \frac{ql^2}{8}$.

5.15. Побудувати епюри Q і M . Перевірити диференціальну залежність між Q і M (рис. 5.16).

Відповідь: див. табл. 5.5.

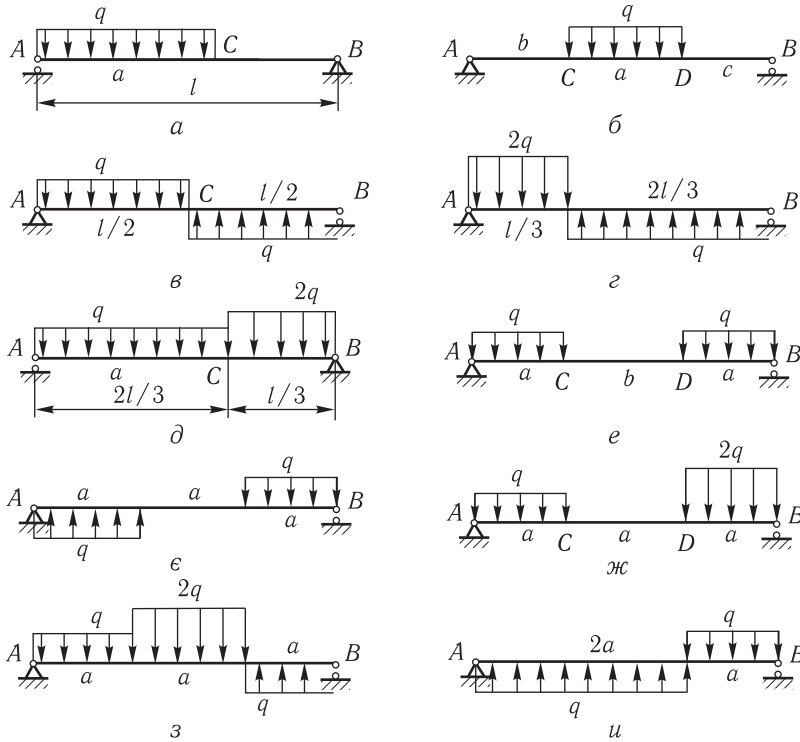


Рис. 5.16

Таблиця 5.5

Схема	R_A	R_B	$ M _{\max}$	$x(M _{\max})$	Інші зусилля
<i>a</i>	$qa(1-a/2l)$	$qa^2/2l$	$(qa^2/2)(1-a/2l)$	$a(1-a/2l)$	—
<i>б</i>	$(qa/l)(c+\frac{a}{2})$	$(qa/l)(b+\frac{a}{2})$	$M_C = (c+\frac{a}{2})\frac{qab}{l}; M_D = (b+\frac{a}{2})\frac{qac}{l}$		
<i>в</i>	$ql/4$	$-ql/4$	$ql^2/32$	$l/4$	$M_C = 0$
<i>г</i>	$ql/3$	$-ql/3$	$ql^2/36$	$l/6$	—
			$ql^2/18$	$2l/3$	
<i>д</i>	$5ql/9$	$7ql/9$	$25ql^2/162$	$5l/9$	—
<i>e</i>	qa	qa	$qa^2/2$	a	—
<i>є</i>	$-2qa/3$	$2qa/3$	$2qa^2/9$	$(2/3)a$	$ Q _{\max} = \frac{2qa}{9}$ біля опори
<i>ж</i>	$7qa/6$	$11qa/6$	$121qa^2/72$	$(25/12)a$	$ Q _{\max} = \frac{11qa}{6}$ біля опори <i>B</i>
<i>з</i>	$5qa/3$	$qa/3$	$25qa^2/18$	$(5/3)a$	$ Q _{\max} = \frac{5qa}{3}$ біля опори <i>A</i>
<i>и</i>	$-7qa/6$	$qa/6$	$49qa^2/72$	$(7/6)a$	$ Q _{\max} = \frac{7qa}{6}$ біля опори <i>A</i>

5.16. Для балок із шарнірами побудувати епюри Q і M (рис. 5.17).

Відповідь: а) $Q_{\max} = \frac{3F}{2}$ на AB , $|M|_{\max} = \frac{3Fa}{2}$ у защемленні; б) $|Q|_{\max} = 2F$ на AB , $|M|_{\max} = 2Fa$ у защемленні праворуч; в) $|Q|_{\max} = 2qa$ у защемленні праворуч, $|M|_{\max} = \frac{3qa^2}{2}$.

5.17*. Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для балки, жорстко затисненої одним кінцем (рис. 5.18).

Відповідь: д) див. рис. 5.19.

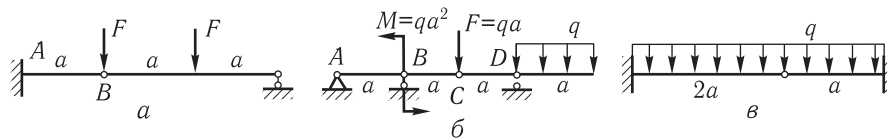


Рис. 5.17

5.18. Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для двохопорної балки з навантаженням, розподіленим за лінійним законом (рис. 5.20).

Відповідь: $R_A = 7qa/18$, $R_B = 11qa/18$, $M_{\max} = 0,77qa^2$ (на відстані $0,5a$ від B на BC), $Q_{\max} = 8qa/9$ (у перерізі B).

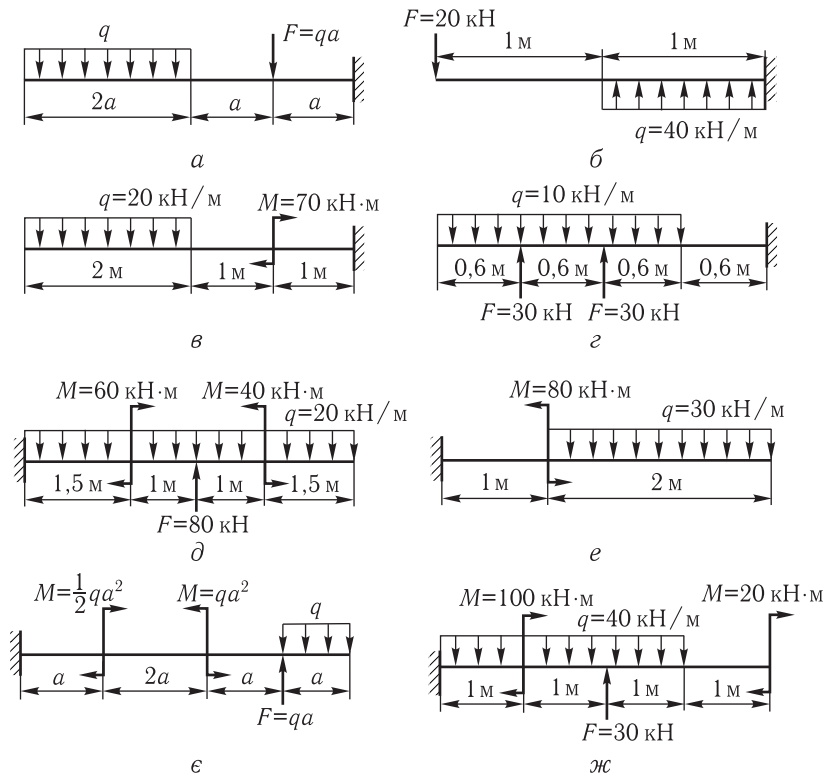


Рис. 5.18

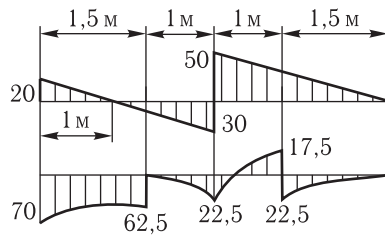


Рис. 5.19

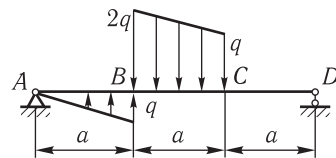


Рис. 5.20

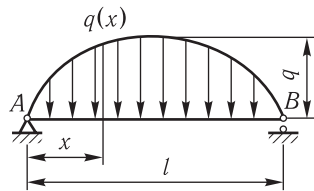


Рис. 5.21

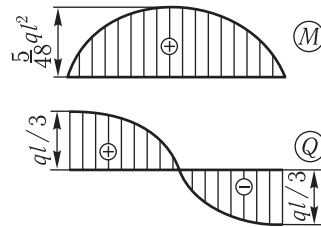


Рис. 5.22

5.19*. Балка прогоном l , шарнірно оберта по кінцях, несе суцільне навантаження, розподілене за параболічним законом, що виражається рівнянням $q(x) = \frac{4q}{l^2}(lx - x^2)$. Побудувати епюри Q і M (рис. 5.21).

Відповідь: див. рис. 5.22.

5.20. Побудувати епюри Q і M для балки прогоном l , навантаженої по всій довжині рівномірно розподіленим моментом інтенсивністю m (рис. 5.23).

Відповідь: див. рис. 5.24.

5.21. Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для балок, схеми навантажень яких зображено на рис. 5.25.

Відповідь: див. табл. 5.6.

5.22. По заданій епюрі поперечних сил Q (рис. 5.26, а) встановити навантаження, що діє на двохопорну балку, і її опорні реакції. Побудувати епюру згинальних моментів.

Відповідь: див. рис. 5.26, б.

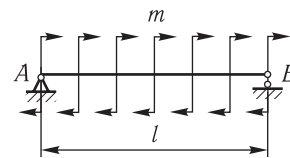


Рис. 5.23

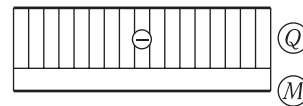


Рис. 5.24

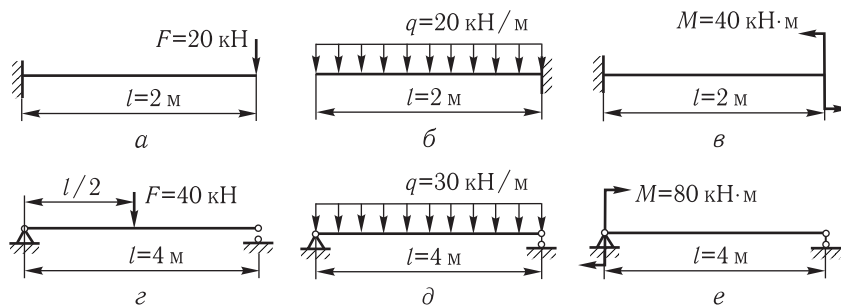


Рис. 5.25

Таблиця 5.6

Схема	а	б	в	г	д	е
Q_{\max} , кН	20	-40	0	20	60	-20
M_{\max} , кН·м	-40	-40	40	40	60	80

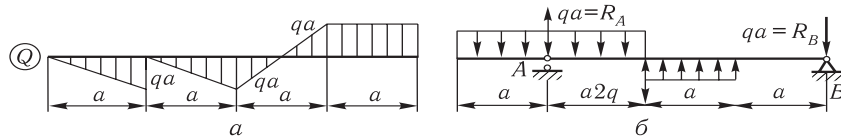


Рис. 5.26

5.23. Визначити реакції опор і знайти максимальний згинальний момент (рис. 5.27).

Відповідь: а) $|M|_{\max} = \frac{4Fa}{3}$ у перерізі С праворуч; б) $|M|_{\max} = \frac{49qa^2}{32}$ на відстані $(7/4)a$ від правої опори.

5.24. Балка АВ опирається кінцем В на іншу балку. Визначити опорні реакції балок і згинальні моменти в перерізах Е, С і F. Побудувати епюри Q і M (рис. 5.28).

Відповідь: $R_A = 10$ кН, $R_B = 30$ кН, $R_C = 75$ кН, $R_D = 15$ кН, $M_E = 30$ кН·м, $M_C = -30$ кН·м, $M_F = 15$ кН·м.

5.25. Побудувати епюри Q і M для балки (рис. 5.29, а): $l = 6$ м, $F = 20$ кН. Як зміняться епюри Q і M, якщо відстань між силами зменшити до $\frac{l}{3}$, а їхні величини збільшити до $F_1 = 30$ кН, тобто момент пари залишити попереднім (рис. 5.29, б)? Якими будуть епюри зусиль у граничному випадку зближення сил, якщо навантаження вийде у вигляді зосе-

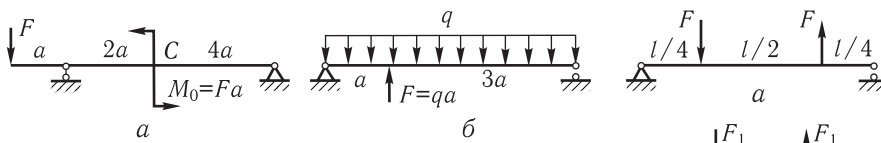


Рис. 5.27

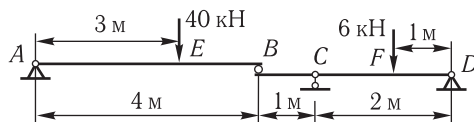


Рис. 5.28

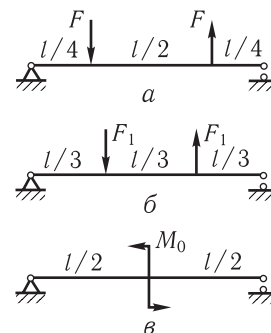


Рис. 5.29

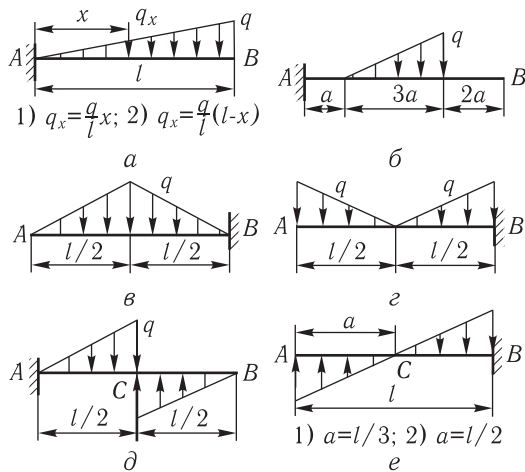


Рис. 5.30

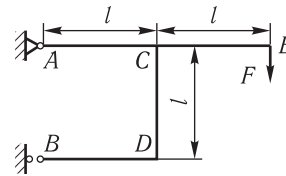


Рис. 5.31

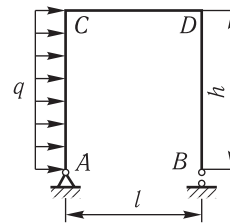


Рис. 5.32

редженого моменту $M_0 = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}$, прикладеного в площині балки по середині прогону (рис. 5.29, в)?

Відповідь: а) і б) $Q = 10 \text{ кН}$ на кінцях і $Q = -10 \text{ кН}$ посередині; в) $Q = 10 \text{ кН} = \text{const}$; а) $M_{\frac{\max}{\min}} = \pm 15 \text{ кН}\cdot\text{м}$; б) $M_{\frac{\max}{\min}} = \pm 20 \text{ кН}\cdot\text{м}$ відповідно під лівим і правим вантажами; в) $M_{\frac{\max}{\min}} = \pm 30 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ліворуч і праворуч від моменту M_0 .

5.26. Для консолей побудувати епюри Q і M та обчислити їхні максимальні значення (рис. 5.30).

Відповідь: а) $Q_{(1)A} = \frac{ql}{2}$, $M_{(1)A} = -\frac{ql^2}{3}$; $Q_{(2)A} = \frac{ql}{2}$, $M_{(2)A} = -\frac{ql^2}{6}$; б) $Q_A = \frac{3qa}{2}$, $M_A = -\frac{9qa^2}{2}$; в) $Q_B = -\frac{ql}{2}$, $M_B = -\frac{ql^2}{4}$; г) $Q_B = -\frac{ql}{2}$, $M_B = -\frac{ql^2}{4}$; д) $Q_A = 0$, $Q_C = -\frac{ql}{4}$, $M_C = -\frac{ql^2}{12}$; е) $Q_{(1)C} = \frac{ql}{2}$, $Q_{(1)B} = -\frac{ql}{4}$, $M_{(1)C} = -\frac{ql^2}{12}$, $M_{(1)B} = 0$; $Q_{(2)C} = \frac{ql}{4}$, $Q_{(2)B} = -\frac{ql}{4}$, $M_{(2)C} = \frac{ql^2}{12}$, $M_{(2)B} = \frac{ql^2}{6}$.

5.27. Побудувати епюру згинальних моментів (рис. 5.31).

Відповідь: $R_A = F$; $H_A = -H_B = -2F$; $M_{CA} = -M_{CE} = Fl$; $M_{CD} = -2Fl$.

5.28. Побудувати епюри Q , M і N для рами, якщо висота $h = 3 \text{ м}$, прогін $l = 2 \text{ м}$, навантаження $q = 2 \text{ кН/м}$ (рис. 5.32).

Відповідь: $R_B = -R_A = 4,5 \text{ кН}$; $M_C = 9 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $M_D = 0$; $H_A = -6 \text{ кН}$.

5.29. Побудувати епюри зусиль Q , M і N у двох випадках: а) ліва опора — нерухома (рис. 5.33, а); б) ліва опора — рухома (рис. 5.33, б).

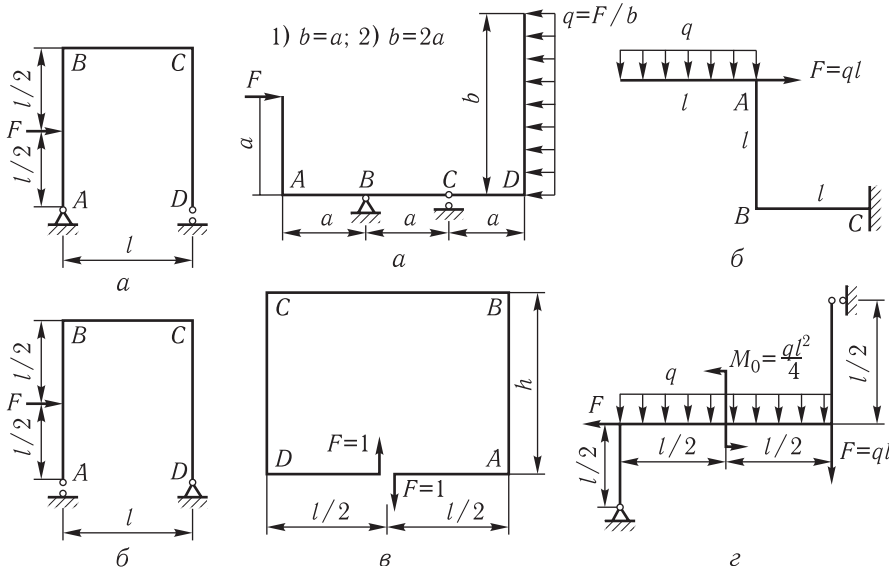


Рис. 5.33

Рис. 5.34

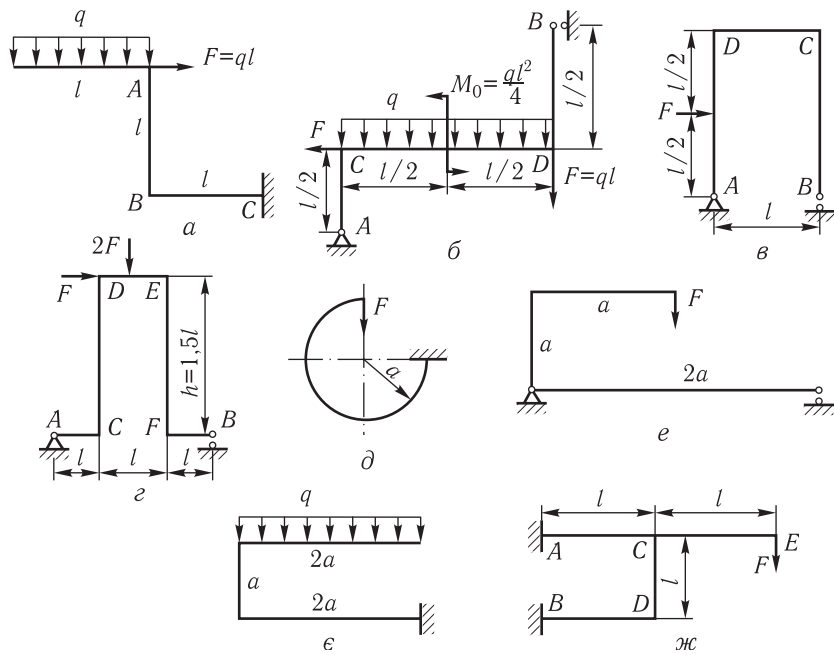


Рис. 5.35

Таблиця 5.7

Схема	M_A	M_B	M_C	M_D	Інші зусилля		
<i>a</i>	$-\frac{ql^2}{2}$	$\frac{ql^2}{2}$	$-\frac{ql^2}{2}$	—	—		
<i>з</i>	0	0	$\frac{Fl}{8}$	$\frac{13Fl}{8}$	$M_E = M_F = \frac{7Fl}{8}; M_{\max} = \frac{7Fl}{4}$		
Схема	R_A	R_B	M_C		M_D	H_A	H_B
<i>б</i>	$2ql$	—	$-\frac{7ql^2}{8}$		$\frac{3ql^2}{8}$	$\frac{7ql}{4}$	$-\frac{3ql}{4}$
<i>в</i>	$-\frac{F}{2}$	$\frac{F}{2}$	0		$\frac{Fl}{2}$	$-F$	0
<i>ж</i>	F	—	$M_{CA} = Fl; M_{CE} = -Fl;$ $M_{CD} = -2Fl$		0	$-2F$	$2F$
Схема	M_{\max}		Q_{\max}		N_{\max}		
<i>д</i>	Fa		F		F		
<i>e</i>	Fa		F		$-F$		
<i>є</i>	$2qa^2$		$2qa$		$-2qa$		

Відповідь: а) $R_B = -R_A = \frac{F}{2}$, $H_B = 0$, $H_A = -F$, $M_C = -Fl$, $M_D = \frac{3}{8}ql^2$;
 б) $R_B = -R_A = \frac{F}{2}$, $H_A = H_B = -F$, $M_C = -Fl$, $M_D = -\frac{Fl}{2}$.

5.30. Побудувати епюри поздовжніх сил N , поперечних сил Q і згинальних моментів M (рис. 5.34).

Відповідь: а) $M_{(1)C} = M_{(1)D} = \frac{Fa}{2}$, $M_{(1)A} = M_{(1)B} = Fa$, $R_{(1)B} = R_{(1)C} = \frac{F}{2}$,
 $H_{(1)B} = 0$, $M_{(2)A} = M_{(2)B} = M_{(2)C} = M_{(2)D} = Fa$, $R_{(2)B} = R_{(2)C} = H_{(2)B} = 0$;

б) $M_A = -\frac{ql^2}{2}$, $M_B = \frac{ql^2}{2}$, $M_C = -\frac{ql^2}{2}$; в) $M_D = -M_A = M_C = -M_B = \frac{l}{2}$;

г) $R_A = 2ql$, $H_B = -\frac{3}{4}ql$, $H_A = \frac{7}{4}ql$, $M_C = -\frac{7}{8}ql^2$, $M_D = \frac{3}{8}ql^2$.

5.31. Побудувати епюри Q , M і N для рам (рис. 5.35).

Відповідь: див. табл. 5.7.

5.32*. Побудувати епюри поздовжніх і поперечних сил та згинальних моментів для стрижнів рами, зображеної на рис. 5.36. Знайти найбільші за абсолютним значенням величини Q і M , N при $l = 4$ м і $q = 20$ кН/м.

Відповідь: див. рис. 5.37.

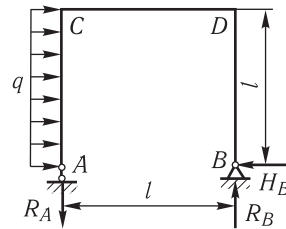


Рис. 5.36

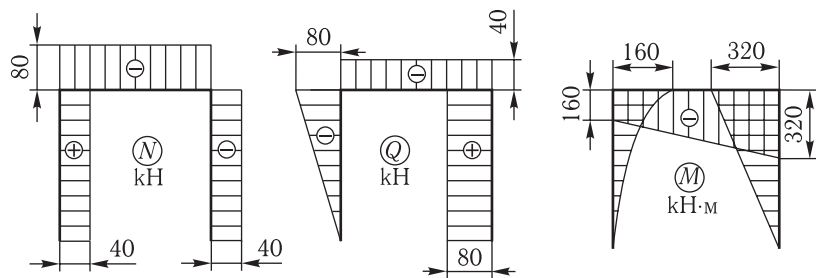


Рис. 5.37

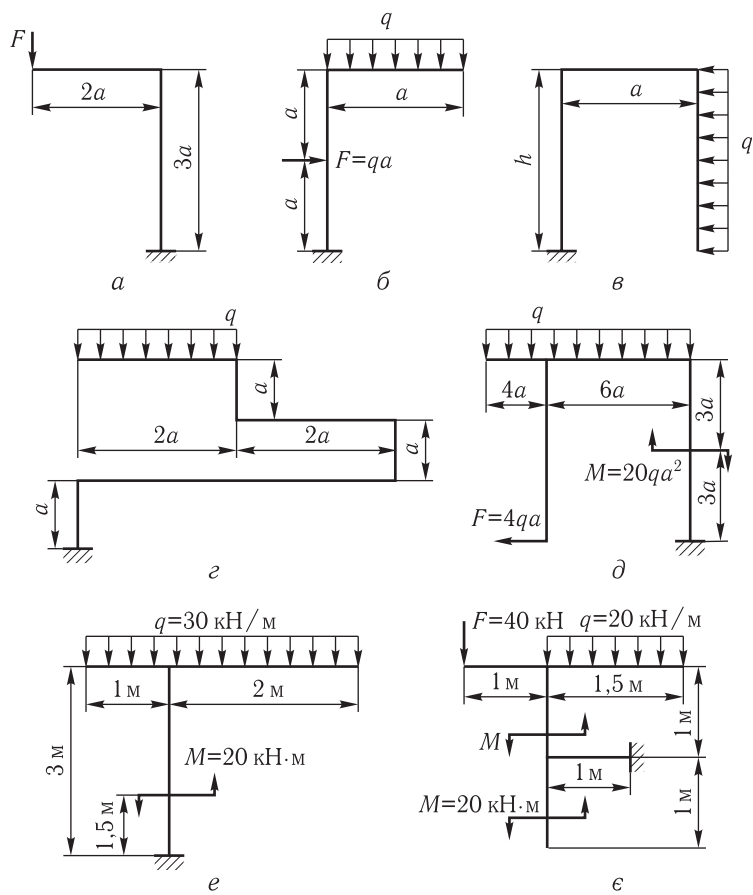


Рис. 5.38

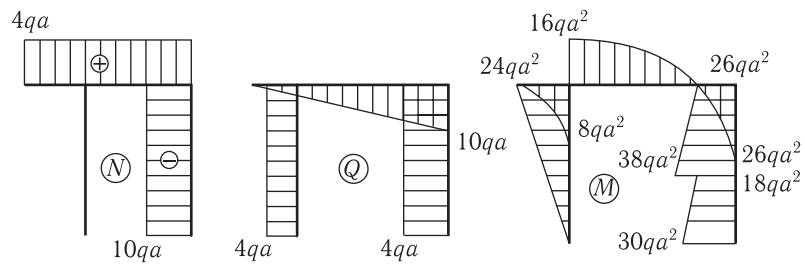


Рис. 5.39

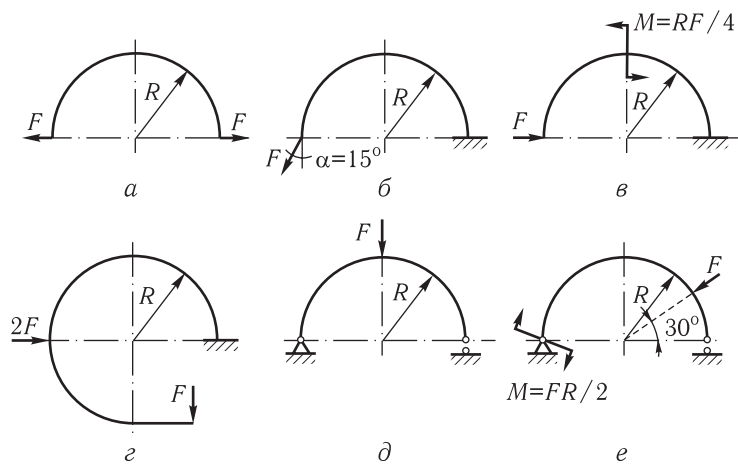


Рис. 5.40

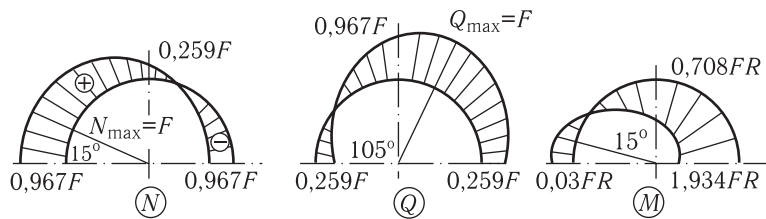


Рис. 5.41

5.33. Для ламаного бруса, жорстко затисненого одним кінцем, побудувати епюри поздовжніх і поперечних сил та згинальних моментів (рис. 5.38).

Відповідь: д) див. рис 5.39.

5.34. Побудувати епюри поздовжніх і поперечних сил та згинальних моментів для кривого бруса (рис. 5.40).

Відповідь: б) див. рис. 5.41.