

5.3. Деформації та переміщення при згинанні

5.84. Під дією заданого навантаження ліва ділянка AC балки зігнулася по дузі кола (рис. 5.79). Визначити прогин та кут повороту перерізу C . Вважати заданими момент M , довжину l , жорсткість перерізу балки при згинанні EI .

$$\text{Відповідь: } w_C = -\frac{11Mlh^2}{8EI}; \theta_C = \frac{25Ml}{24EI}.$$

5.85. Визначити похибку, допущену під час розрахунку прогину $w_{\text{пр}} = 20$ мм кінця балки завдовжки $l = 1$ м, інтегруванням наближеного диференційного рівняння зігнутої осі балки (рис. 5.80).

$$\text{Відповідь: } \left| 1 - \frac{2w_{\text{пр}}}{l^2 \left(1 - \cos \frac{2w_{\text{пр}}}{l} \right)} \right| 100 = 0,0125 \%$$

5.86. Балка завдовжки $l = 1$ м круглого перерізу діаметром $d = 20$ мм затиснена одним кінцем та навантажена поперечною силою $F = 100$ Н на іншому кінці. Обмірюваний прогин вільного кінця балки виявився таким, що дорівнює $w = 21,2$ мм. Обчислити модуль пружності під час розтягання матеріалу балки.

$$\text{Відповідь: } E = \frac{64Fl^3}{3\pi wd^4} = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа.}$$

5.87. Кінці балки завдовжки l вільно лежать на двох шарнірних опорах. Під дією зовнішніх навантажень зігнута вісь балки набула форми дуги кола. Знайти радіус кривини вказаного кола за умови, що кут повороту кінцевого перерізу балки дорівнює θ .

$$\text{Відповідь: } \rho = \frac{l}{2\theta}.$$

5.88. До балки завдовжки l прямокутного перерізу висотою h у площині найбільшої жорсткості прикладене рівномірне поперечне навантаження. Кінці балки вільно лежать на шарнірних опорах. Модуль пружності матеріалу балки під час розтягання дорівнює E . Визначити найбільший прогин балки, якщо максимальне напруження в балці σ_{max} .

$$\text{Відповідь: } w_{\text{max}} = -\frac{5}{24} \frac{\sigma_{\text{max}} l^2}{Eh}.$$

5.89. Визначити прогин і кут повороту вільного кінця балки (рис. 5.81). Відомі найбільша інтенсивність q навантаження, яке в поздовжньому напрямку змінюється за законом трикут-

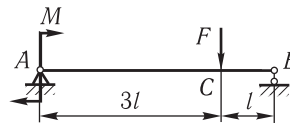


Рис. 5.79

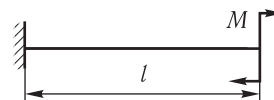


Рис. 5.80

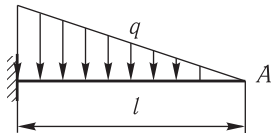


Рис. 5.81

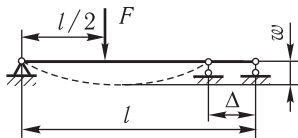


Рис. 5.82

ника, а також довжина l і жорсткість перерізу балки під час згинання EI .

Відповідь: $\theta_A = -\frac{ql^3}{24EI}$; $w_A = -\frac{ql^4}{30EI}$.

5.90. Є балка завдовжки $l = 1$ м (рис. 5.82). У скільки разів прогин балки w під силою, що дорівнює 2 см, більший, ніж поздовжнє переміщення рухомої опори?

Відповідь: у $\frac{l}{2,4w} \approx 21$ раз.

5.91*. Один кінець прямої сталеві балки защемлений, на іншому, вільному, прикладений зосереджений момент $M = 0,2$ кН·м. Балка має довжину $l = 0,5$ м, висоту $h = 15$ мм, у плані має форму рівнобічної трапеції з основами у вільному перерізі $b_0 = 20$ мм, у защемленому — $b = 50$ мм. Розрахувати величину кута повороту вільного кінця балки. Модуль пружності під час розтягання $E = 2 \times 10^5$ МПа.

Відповідь: $\theta = \frac{12Ml}{(b-b_0)h^3E} \ln \frac{b}{b_0} = 0,0543$ рад.

5.92. Балку симетричного перерізу заввишки h і завдовжки l затиснено на одному кінці й на іншому кінці навантажено силою F , що зумовлює в небезпечному перерізі найбільші напруження $\sigma_{\max} = [\sigma]$. Знайти величину прогину в перерізі під силою, виразивши його через розміри балки і допустимі напруження. Модуль пружності матеріалу балки E .

Відповідь: $w = \frac{2l^2}{3Eh} [\sigma]$.

5.93*. Визначити кути повороту опорних перерізів θ_A і θ_B , а також прогин посередині прогону для шарнірно обпертих балок двотаврового перерізу, зображених на рис. 5.83, за таких даних: а) $l = 2$ м, $q = 30$ кН/м, переріз — двотавр № 27; б) $l = 6$ м, $q = 20$ кН/м, $M = 80$ кН·м, переріз — двотавр № 36; в) $l = 4$ м, $q = 20$ кН/м, $M = 40$ кН·м, переріз — двотавр № 30. Модуль пружності в усіх випадках $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Відповідь: а) $\theta_A = -\theta_B = -0,001$ рад, $w = -0,62$ мм; б) $\theta_A = -0,0097$ рад, $\theta_B = 0,0127$ рад, $w = -19,3$ мм; в) $\theta_A = -\theta_B = -0,0094$ рад, $w = -10,4$ мм.

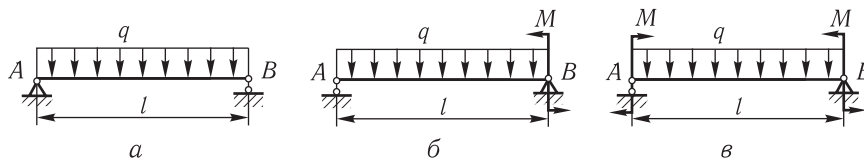


Рис. 5.83

5.94*. Для балок, що несуть суцільне навантаження, яке змінюється за законом трапеції, визначити: а) для консолі (рис. 5.84, а) — кут повороту й прогин кінцевого перерізу; б) для шарнірно обпертої балки (рис. 5.84, б) — кути повороту на опорах і прогин посередині прогону. Жорсткість поперечного перерізу EI .

Відповідь: а) $\theta = -\frac{(3q_1 + q_2)l^3}{24EI}$, $w = -\frac{(11q_1 + 4q_2)l^4}{120EI}$; б) $\theta_A = -\frac{(8q_1 + 7q_2)l^3}{360EI}$, $\theta_B = \frac{(7q_1 + 8q_2)l^3}{360EI}$, $w = -\frac{5(q_1 + q_2)l^4}{768EI}$.

5.95. Установити, як зміниться величина прогину посередині підвісної балки, якщо навантаження, що рівномірно розподілене на довжині $2a$ (рис. 5.85, а), замінити на прикладену посередині прогону зосереджену силу $F = 2qa$ (рис. 5.85, б). Жорсткість поперечного перерізу EI .

Відповідь: а) $w = -\frac{3qa^4}{8EI}$; б) $w = -\frac{qa^4}{2EI}$.

5.96*. Використовуючи спосіб Верещагіна, визначити величину прогину перерізу C і кут повороту перерізу D балок, зображених на рис. 5.86. Жорсткість кожної балки $EI = 800 \text{ кН}\cdot\text{м}^2$, $F = 12 \text{ кН}$, $M = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $q = 16 \text{ кН/м}$, $a = 1 \text{ м}$.

Відповідь: а) $\frac{Fa^3}{3EI} = 5 \text{ мм}$, $-\frac{2Fa^2}{3EI} = -0,01 \text{ рад}$; б) $\frac{qa^4}{8EI} = 2,5 \text{ мм}$, $-\frac{qa^3}{3EI} = -0,0067 \text{ рад}$; в) $\frac{5Ma^2}{8EI} = 6,25 \text{ мм}$, $-\frac{Ma}{2EI} = -0,005 \text{ рад}$.

5.97. У разі навантаження балки силою F крайнє нижнє волокно отримало в перерізі CC видовження $\Delta_s = 0,008 \text{ мм}$ (рис. 5.87). Визначити силу F , якщо $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$. Видовження вимірювали за допомогою тензومتра з базою $S = 50 \text{ мм}$.

Відповідь: $F = 14 \text{ кН}$.

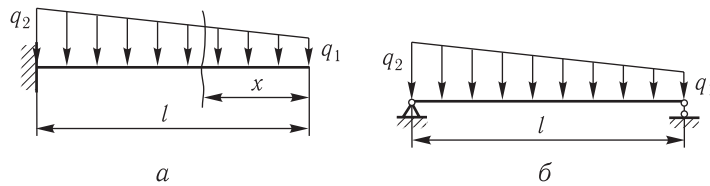


Рис. 5.84

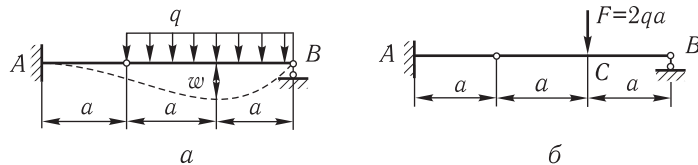


Рис. 5.85

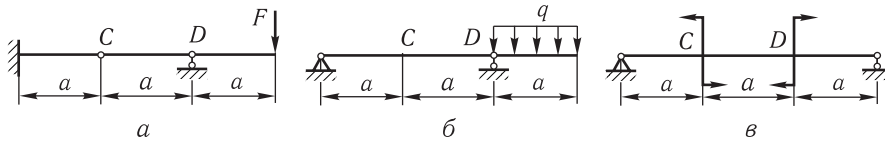


Рис. 5.86

5.98. Визначити прогин перерізу B балки і кут повороту перерізу A (рис. 5.88). Жорсткість поперечного перерізу EI .

Відповідь: а) $\theta_A = \frac{11qa^3}{48EI}$, $w_B = -\frac{37qa^4}{48EI}$; б) $\theta_A = -\frac{qa^3}{EI}$, $w_B = \frac{qa^4}{24EI}$.

5.99. Визначити найбільший прогин w_{\max} листової ресори, виконаної як брус рівного опору згину і навантаженої силою $F = 10$ кН (рис. 5.89). Прогин ресори $l = 80$ см. Кількість аркушів (смуг) $n = 6$, товщина листа $t = 7,5$ мм, ширина $b = 70$ мм, модуль пружності матеріалу $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа.

Відповідь: $w_{\max} = \frac{3Fl^3}{8Ebn t^3} = 52$ мм.

5.100. Дюралеву круглу трубу перерізом 50×44 мм покладено горизонтально на дві шарнірні опори. Визначити максимальний прогин l , що допускається, виходячи з умови, що прогин, зумовлений власною вагою, не повинний перевищувати $\frac{l}{200}$. Питова вага матеріалу $\gamma = 26$ кН/м³. Модуль пружності $E = 0,75 \cdot 10^5$ МПа.

Відповідь: $[l] = 51,43$ м.

5.101. Визначити прогин і кут повороту перерізу C балки (рис. 5.90). Жорсткість поперечного перерізу EI .

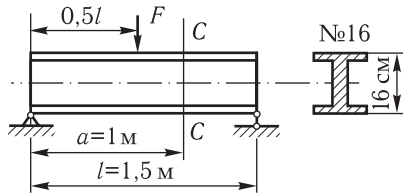


Рис. 5.87

Відповідь: $\theta_C = \frac{25qa^3}{12EI}$; $w_C = \frac{43qa^4}{24EI}$.

5.102*. Знайти прогин перерізу C балки (рис. 5.91). Жорсткість поперечного перерізу EI .

Відповідь: $w_C = -\frac{3qa^4}{8EI}$.

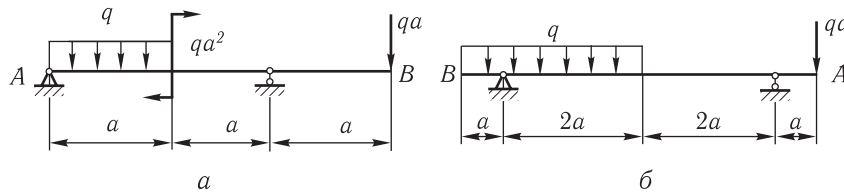


Рис. 5.88

5.103. Визначити кути повороту в опорах (рис. 5.92). Жорсткість поперечного перерізу EI , довжина балок $l = a + b$.

Відповідь: а) $\theta_A = -\left[a(l+b) - \frac{s^2}{4} \right] \frac{qsb}{6EI}$, $\theta_B = \left[b(l+a) - \frac{s^2}{4} \right] \frac{qsa}{6EI}$; б) $\theta_A = -\left[6ab(l+b) - s^2 \left(b + \frac{2s}{45} \right) \right] \frac{qs}{72EI}$, $\theta_B = \left[6ab(l+a) - s^2 \left(a + \frac{2s}{45} \right) \right] \frac{qs}{72EI}$.

5.104. Для балок з ділянками різної жорсткості визначити кути повороту і прогини перерізів A і B (рис. 5.93).

Відповідь: див. табл. 5.9.

5.105*. Для балки круглого змінного перерізу (закон зміни діаметра $d(x) = d_0(1 + \sqrt{x/l})$) (рис. 5.94) визначити прогин w_K перерізу K , для чого записати інтеграл Мора для шуканого переміщення. Модуль пружності E .

Відповідь: а) $w_K = \frac{32Fl^3}{3E\pi d_0^4}(83 - 120\ln 2)$; б) $w_K = \frac{16ql^4}{E\pi d_0^4}(97 - 140\ln 2)$.

5.106. Для балок постійного перерізу отримати загальні вирази для кута повороту перерізу $\theta_{\text{сер}}$ і прогину $w_{\text{сер}}$ посередині прогону і кутів повороту θ_A і θ_B на опорах (рис. 5.95). Жорсткість поперечного перерізу EI .

Відповідь: див. табл. 5.10.

5.107. Для балок, затиснених одним кінцем (рис. 5.96), за допомогою інтегрування диференціального рівняння вигнутої осі визначити значення кута повороту і прогину на вільному кінці за таких даних: а) $l = 2$ м, $q = 30$ кН/м,

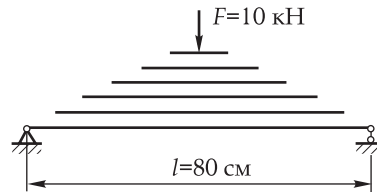


Рис. 5.89

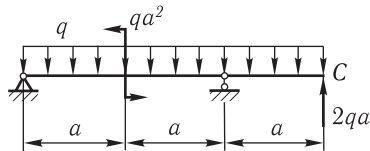


Рис. 5.90

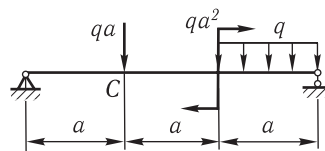


Рис. 5.91

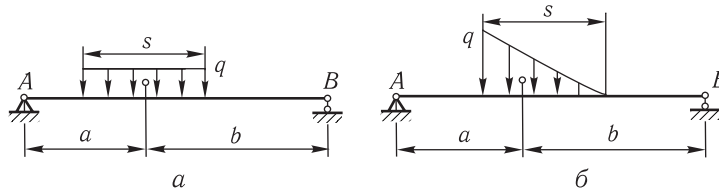


Рис. 5.92

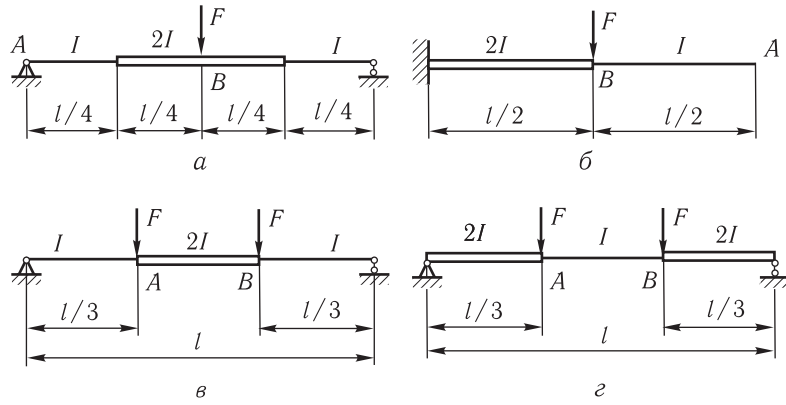


Рис. 5.93

Таблиця 5.9

Схема	$-\theta_A$	$-\theta_B$	$-w_A$	$-w_B$
a	$\frac{5Fl^2}{128EI}$	0	0	$\frac{3Fl^3}{256EI}$
б	$\frac{Fl^2}{16EI}$	$\frac{Fl^2}{16EI}$	$\frac{5Fl^3}{96EI}$	$\frac{Fl^3}{48EI}$
в	$\frac{Fl^2}{36EI}$	0	$\frac{7Fl^3}{324EI}$	$\frac{31Fl^3}{1296EI}$
г	$\frac{Fl^2}{18EI}$	0	$\frac{2Fl^3}{81EI}$	$\frac{19Fl^3}{648EI}$

$M = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}$, переріз — двотавр № 20; б) $l = 2 \text{ м}$, $F = 20 \text{ кН}$, $M = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}$, переріз — двотавр № 18. Модуль пружності в обох випадках $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Відповідь: а) $\theta = \frac{ql^3}{6EI} - \frac{Ml}{EI} = -0,0054 \text{ рад}$, $w = \frac{Ml^2}{2EI} - \frac{ql^4}{8EI} = 0$; б) $\theta = \frac{Ml}{EI} - \frac{Fl^2}{2EI} = 0$, $w = \frac{Ml^2}{2EI} - \frac{Fl^3}{3EI} = -5,17 \text{ мм}$.

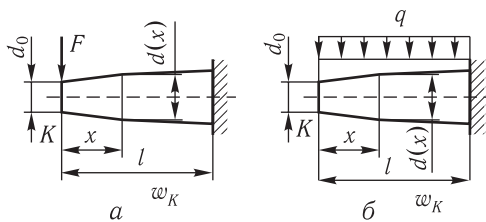


Рис. 5.94

5.108. Визначити величину прогинів посередині прогону і на вільному кінці балки, зображеної на рис. 5.97, якщо $F = qa$. Які будуть ці прогини, якщо рівномірно розподілене навантаження q поширити на всю довжину балки? Жорсткість поперечного перерізу EI .

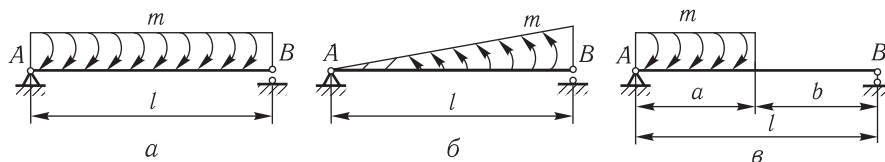


Рис. 5.95

Таблиця 5.10

Схема	θ_A	θ_B	$\theta_{\text{сер}}$	$w_{\text{сер}}$
a	0	0	0	0
б	$-\frac{m l^2}{24EI}$	$\frac{m l^2}{24EI}$	0	$-\frac{5m l^3}{384EI}$
в	$-\frac{mab(l+b)}{6lEI}$	$\frac{mab(l+a)}{6lEI}$	При $a > b$: $-\frac{mab(l+b)}{6lEI} + \frac{mbl}{8EI}$	При $a > b$: $-\frac{mb(3l^2 - 4b^2)}{48EI}$

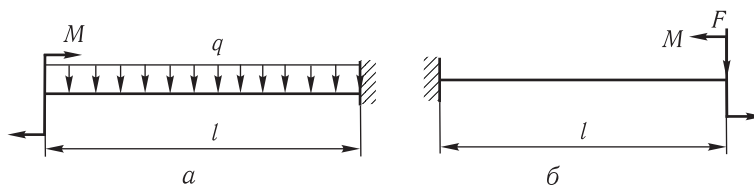


Рис. 5.96

Відповідь: а) $w_C = -\frac{7qa^4}{48EI}$, $w_D = -\frac{qa^4}{48EI}$; б) $w_C = -\frac{qa^4}{4EI}$, $w_D = \frac{qa^4}{8EI}$.

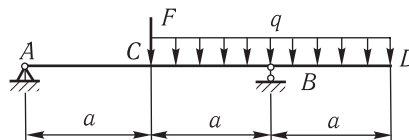


Рис. 5.97

5.109. Визначити способом Максвелла — Мора величину прогину перерізу C і кута повороту перерізу D для балок, зображених на рис. 5.98. Дано: $F = 18$ кН, $M = 10$ кН·м, $q = 12$ кН/м, $a = 1$ м, переріз балок —

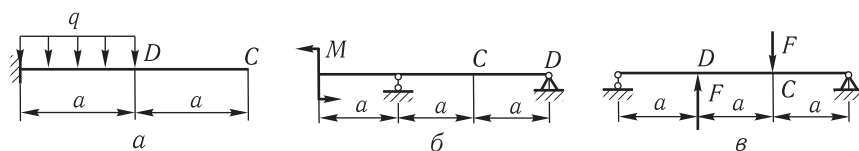


Рис. 5.98

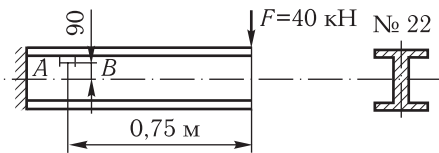


Рис. 5.99

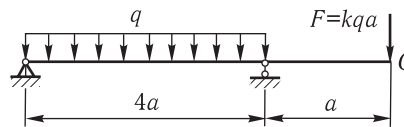


Рис. 5.100

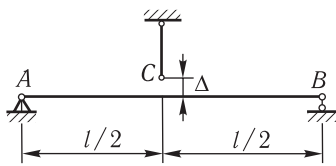


Рис. 5.101

двотавр № 10. Модуль пружності $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Відповідь: а) $-\frac{7qa^4}{24EI} = -8,84$ мм, $-\frac{qa^3}{6EI} = -0,00505$ рад; б) $\frac{Ma^2}{4EI} = 6,32$ мм, $-\frac{Ma}{3EI} =$

$= -0,00842$ рад; в) $-\frac{Fa^3}{18EI} = -2,525$ мм, $-\frac{Fa^2}{18EI} = -0,002525$ рад.

5.110. Тензометр AB має коефіцієнт збільшення $k = 1000$ і базу 20 мм (рис. 5.99). Визначити показання тензометра, якщо модуль пружності при розтяганні $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Відповідь: 10,6 мм.

5.111. Визначити, за якого значення коефіцієнта k прогин перерізу C дорівнюватиме нулю (рис. 5.100). За знайденого значення k побудувати епюру згинальних моментів і зобразити орієнтовний вид пружної лінії балки.

Відповідь: $k = 8/5$.

5.112. Перерізи C сталевих балки AB і дроту під час складання з'єднуються (рис. 5.101). Визначити силу натягу дроту, якщо до з'єднання розходження $\Delta = 3$ мм, балка мала довжину $l = 1$ м і квадратний переріз $b \times b = 40 \times 40$ мм, дріт — довжину $h = 40$ мм і діаметр $d = 5$ мм, модуль пружності $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Відповідь: $N = \frac{4\pi\Delta E d^2 b^2}{\pi d^2 l^2 + 16b^2 h} = 5,08$ кН.

5.4. Розрахунок статично невизначуваних стрижнів

5.113. Розкрити статичну невизначуваність балки, зображеної на рис. 5.102, визначити опорні реакції, побудувати епюри згинальних моментів і поперечних сил, підібрати двотавровий переріз балки за допустимого нормального напруження 160 МПа, визначити величину найбільшого прогину балки і порівняти його з найбільшим допустимим прогином $[w] = 0,002$ прогону балки. Модуль пружності $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.