Г.С. Писаренко
О.Л. Квітка
Е.С. Уманський

Опір матеріалів

Вища школа

УДК 539.3/.6(075.8)
ББК 30.121я73
П34

Гриф надано Міністерством освіти і науки України (лист від 8 листопада 2000 р. № 1/11-2980)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Р е ц е н з е н т и: д-р техн. наук, проф. *Ю. С. Воробйов* (Асоціація «Надійність машин та споруд»), проф. *Б. І. Ковальчук* (Національний технічний університет України «КПІ»), д-р фіз.-мат. наук, проф. *А. Ф. Улітко* (Київський національний університет імені Тараса Шевченка)

Редактор *Т. Ю. Ходирева*

Писаренко Г. С. та ін.

П34 Опір матеріалів: Підручник / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський; За ред. Г. С. Писаренка. — 2-ге вид., допов. і переробл. — К.: Вища шк., 2004. — 655 с.: іл.

ISBN 966-642-056-2

Викладено основні питання опору матеріалів, що відображують сучасний рівень науки і техніки. Наведено загальні методи визначення переміщень і метод сил, питання пружних коливань, розрахунки при повторно-змінних та ударних навантаженнях. Висвітлено елементи теорії тонкостінних оболонок, основи механіки руйнування, подано докладно проаналізовані приклади.

У другому виданні (1-ше вид. — 1993 р.) введено нові нормативно затверджені терміни.

Для студентів механічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

УДК 539.3/.6(075.8)
ББК 30.121я73

ISBN 966-642-056-2

ЗМІСТ

Передмова 8

Р о з д і л 1. **Вступ**

§ 1. Наука про опір матеріалів. Об'єкти вивчення 9
§ 2. Види деформацій стрижня. Поняття про деформований стан матеріалу 12
§ 3. Основні гіпотези науки про опір матеріалів 15

Р о з д і л 2. **Геометричні характеристики плоских перерізів**

§ 4. Статичні моменти площі. Центр ваги перерізу 17
§ 5. Моменти інерції плоских фігур 19
§ 6. Моменти інерції складних перерізів 23
§ 7. Моменти інерції відносно паралельних осей 24
§ 8. Залежність між моментами інерції при повороті координатних осей 26
§ 9. Визначення напряму головних осей інерції. Головні моменти інерції 27
§ 10. Графічне зображування моментів інерції 30
§ 11. Поняття про радіус і еліпс інерції 33
§ 12. Порядок розрахунку 34

Р о з д і л 3. **Зовнішні й внутрішні сили. Метод перерізів. Епюри внутрішніх сил**

§ 13. Класифікація зовнішніх сил 37
§ 14. Внутрішні сили. Метод перерізів. Епюри 38
§ 15. Епюри поздовжніх сил 42
§ 16. Епюри крутних моментів 44
§ 17. Балки та їхні опори 46
§ 18. Визначення реакцій 47
§ 19. Поперечні сили і моменти в перерізах балки 49
§ 20. Побудова епюр *Q* і *M* у балках 50
§ 21. Диференціальні залежності при згинанні. Деякі особливості епюр *Q* і *M* 55
§ 22. Побудова епюр внутрішніх зусиль для рам 62
§ 23. Побудова епюр внутрішніх зусиль для криволінійних стрижнів 67
§ 24. Диференціальні залежності при згинанні плоских криволінійних стрижнів 71
§ 25. Побудова епюр внутрішніх зусиль для просторових рам 76
§ 26. Напруження в перерізі 80

Р о з д і л 4. **Розтяг і стиск. Механічні характеристики матеріалів**

§ 27. Напруження і деформації при розтяганні й стисканні. Розрахунок на міцність і жорсткість 83

§ 28. Умови міцності і жорсткості. Види розрахунків ... 87
§ 29. Випробування матеріалів на розтягання ... 88
§ 30. Деякі інші види механічних випробувань ... 97
§ 31. Поняття про механізм утворення деформацій ... 100
§ 32. Поняття про концентрацію напружень ... 103
§ 33. Вплив різних факторів на механічні властивості матеріалів ... 106
§ 34. Допустимі напруження ... 112

Р о з д і л 5. **Розрахунок на міцність і жорсткість при розтяганні й стисканні**

§ 35. Приклади розрахунків при дії зосереджених сил ... 115
§ 36. Урахування власної ваги і сил інерції ... 123
§ 37. Статично невизначувані конструкції ... 130
§ 38. Розрахунок гнучких ниток ... 140

Р о з д і л 6. **Основи теорії напруженого і деформованого стану**

§ 39. Напруження в точці ... 152
§ 40. Закон парності дотичних напружень. Головні площадки і головні напруження ... 154
§ 41. Лінійний напружений стан ... 155
§ 42. Плоский напружений стан ... 158
§ 43. Пряма задача в плоскому напруженому стані. Круг напружень ... 161
§ 44. Обернена задача в плоскому напруженому стані ... 164
§ 45. Об'ємний напружений стан. Напруження на довільній площадці ... 167
§ 46. Деформації при об'ємному напруженому стані. Узагальнений закон Гука ... 174
§ 47. Потенціальна енергія деформації ... 177

Р о з д і л 7. **Критерії міцності**

§ 48. Завдання теорій міцності ... 180
§ 49. Класичні критерії міцності (теорії міцності) ... 181
§ 50. Поняття про нові теорії міцності ... 188

Р о з д і л 8. **Зсув**

§ 51. Зсув. Розрахунок на зріз ... 193
§ 52. Чистий зсув ... 194

Р о з д і л 9. **Кручення**

§ 53. Напруження і деформації при крученні. Умови міцності й жорсткості ... 206
§ 54. Аналіз напруженого стану і руйнування при крученні ... 211
§ 55. Розрахунок валів на міцність і жорсткість при крученні ... 212
§ 56. Кручення стрижнів некруглого перерізу ... 216
§ 57. Кручення тонкостінних стрижнів ... 222
§ 58. Розрахунок гвинтових циліндричних пружин ... 227
§ 59. Концентрація напружень при крученні ... 233

Р о з д і л 10. **Згин**

§ 60. Нормальні напруження при плоскому згинанні прямого стрижня ... 237
§ 61. Дотичні напруження при згинанні ... 243
§ 62. Розрахунок на міцність при згинанні ... 249
§ 63. Про раціональну форму перерізу балки ... 257
§ 64. Повний розрахунок балок на міцність ... 258

§ 65. Концентрація напружень при згинанні ... 261
§ 66. Диференціальне рівняння зігнутої осі балки ... 265
§ 67. Приклади визначення переміщень інтегруванням диференціального рівняння зігнутої осі балки ... 269
§ 68. Визначення переміщень у балках за методом початкових параметрів ... 276
§ 69. Розрахунок балок змінного перерізу на міцність і жорсткість ... 290
§ 70. Розрахунок на дію сил інерції при згинанні ... 302

Р о з д і л 11. **Додаткові питання теорії згинання**

§ 71. Про розрахунок складених балок ... 305
§ 72. Дотичні напруження при згинанні балок тонкостінного профілю. Центр згинання ... 308
§ 73. Розрахунок балок на пружній основі ... 314
§ 74. Згинання балок, матеріал яких не відповідає закону Гука ... 319

Р о з д і л 12. **Складний опір**

§ 75. Складне і косе згинання ... 325
§ 76. Згинання з розтяганням (стисканням) ... 332
§ 77. Згинання з крученням ... 338

Р о з д і л 13. **Загальні теореми про пружні системи. Загальні методи визначення переміщень**

§ 78. Узагальнені сили і переміщення ... 354
§ 79. Робота зовнішніх сил ... 357
§ 80. Робота внутрішніх сил ... 358
§ 81. Застосування принципу початку можливих переміщень до пружних систем ... 362
§ 82. Теореми про взаємність робіт і переміщень ... 365
§ 83. Загальна формула для визначення переміщень. Метод Мора ... 367
§ 84. Переміщення, спричинені дією температури ... 371
§ 85. Обчислення інтегралів Мора способом Верещагіна ... 373
§ 86. Застосування способу Верещагіна до стрижнів змінного поперечного перерізу ... 378
§ 87. Потенціальна енергія деформації ... 379
§ 88. Теорема Кастільяно. Теорема Лагранжа ... 381
§ 89. Теорема про мінімум потенціальної енергії ... 384

Р о з д і л 14. **Статично невизначувані системи**

§ 90. Основні поняття та визначення. Етапи розрахунку статично невизначуваної системи ... 386
§ 91. Розрахунок простих статично невизначуваних балок ... 389
§ 92. Канонічні рівняння методу сил ... 392
§ 93. Багатопрогонові нерозрізні балки. Рівняння трьох моментів ... 404
§ 94. Вплив неточного розміщення опор по висоті ... 412
§ 95. Розрахунок статично невизначуваних криволінійних стрижнів ... 413
§ 96. Визначення переміщень у статично невизначуваних системах ... 416
§ 97. Контроль правильності розв'язання статично невизначуваної системи ... 418
§ 98. Про розрахунок просторових рамних систем ... 420

Р о з д і л 15. **Розрахунок плоских кривих брусів**

§ 99. Визначення напружень у кривих брусах ... 424
§ 100. Розрахунок на міцність кривих брусів ... 432

§ 101. Визначення переміщень у кривих стрижнях 434

Розділ 16. **Розрахунок товстостінних циліндрів і обертових дисків**

§ 102. Товстостінний циліндр, що зазнає дії внутрішнього і зовнішнього тисків 437
§ 103. Розрахунок складених циліндрів 443
§ 104. Температурні напруження в товстостінних циліндрах 445
§ 105. Приклади розрахунку товстостінних циліндрів 449
§ 106. Розрахунок обертових дисків 453

Розділ 17. **Елементи теорії тонкостінних оболонок**

§ 107. Вступ 460
§ 108. Напруження у вісесиметричній оболонці 461
§ 109. Розпірні кільця в оболонках 467
§ 110. Крайова задача для тонкостінної циліндричної оболонки 469
§ 111. Приклади врахування згинальних напружень в оболонках 477

Розділ 18. **Розрахунок конструкцій за граничними станами**

§ 112. Основні відомості про граничний стан 479
§ 113. Розрахунки при розтяганні й стисканні 481
§ 114. Розрахунки при крученні 484
§ 115. Розрахунки при згинанні 488

Розділ 19. **Стійкість стиснутих стрижнів**

§ 116. Стійка та нестійка пружна рівновага 492
§ 117. Формула Ейлера для визначення критичної сили стиснутого стрижня 493
§ 118. Вплив умов закріплення кінців стрижня на значення критичної сили 496
§ 119. Поняття про втрату стійкості при напруженнях, що перевищують границю пропорційності 499
§ 120. Розрахунки на стійкість за допомогою коефіцієнтів зменшення основного допустимого напруження 502
§ 121. Про добір матеріалу і раціональних форм поперечних перерізів для стиснутих стрижнів 507
§ 122. Поздовжньо-поперечне згинання 508

Розділ 20. **Пружні коливання**

§ 123. Вступ. Класифікація механічних коливань 516
§ 124. Власні гармонічні коливання пружної системи з одним ступенем вільності 521
§ 125. Змушені коливання пружних систем з одним ступенем вільності 527
§ 126. Власні коливання з в'язким демпфуванням 531
§ 127. Змушені коливання механічної системи з в'язким демпфуванням 534
§ 128. Критична швидкість обертання вала 538
§ 129. Власні коливання системи з двома або кількома ступенями вільності 541
§ 130. Крутильні коливання валів і систем передач 546
§ 131. Поперечні коливання стрижнів із зосередженими масами 549
§ 132. Коливання пружних тіл з розподіленими масами 552
§ 133. Поперечні коливання призматичних стрижнів 559

Розділ 21. **Опір матеріалів дії повторно-змінних напружень**

§ 134. Явище утоми матеріалів 562
§ 135. Методи визначення границі витривалості. Діаграма утоми 568

§ 136. Вплив конструктивно-технологічних факторів на границю витривалості 573
§ 137. Розрахунок на міцність при повторно-змінних навантаженнях 581

Розділ 22. **Розрахунки при ударних навантаженнях**

§ 138. Розрахунок при осьовій дії ударного навантаження 590
§ 139. Напруження при скручувальному ударі 603
§ 140. Напруження і деформації при згинальному ударі 605
§ 141. Механічні властивості матеріалів при ударі 611

Розділ 23. **Контактні напруження**

§ 142. Основні поняття 613
§ 143. Формули для визначення контактних напружень 613
§ 144. Перевірка міцності при контактних напруженнях 617

Розділ 24. **Основи механіки руйнування**

§ 145. Загальні поняття 622
§ 146. Крихке руйнування. Теорія Гріффітса 623
§ 147. Силові критерії руйнування 627
§ 148. Оцінювання розмірів пластичної зони вздовж тріщини 632
§ 149. Методика експериментального визначення тріщиностійкості конструкційних матеріалів 634

Додатки 639

Список використаної та рекомендованої літератури 655

Наше сьогодення — час, коли у світі господарюють високорозвинені технології, — потребує швидкого поліпшення якості продукції, впровадження новітніх технологій, інтенсифікації виробничих процесів, а стосовно такої важливої галузі промисловості, як машинобудування, — підвищення надійності й довговічності машин — основних показників їхньої якості.

Нині у світі кожні п'ять — сім років створюються нові покоління багатьох типів машин. Незалежній Україні потрібно прагнути різкого підвищення якості машин, щоб вони стали конкурентоспроможними на світовому ринку. У виконанні цього завдання важлива роль належить розвитку наукової бази для вирішення питань міцності машинобудівних конструкцій, забезпечення надійності й довговічності машин. Основною наукою, яка навчає методам розрахунку на міцність та надійність конструкцій, саме й є опір матеріалів.

Цей підручник розрахований на студентів механічних спеціальностей вищих навчальних закладів України, написаний відповідно до чинних програм і містить основні розділи сучасного курсу опору матеріалів. Водночас ним можуть користуватися студенти й інших спеціальностей, оскільки матеріали, передбачені будь-якою програмою, стисло викладено у відповідних розділах та параграфах.

Для кращого засвоєння студентами складного матеріалу увагу приділено однаковості виведення основних розрахункових формул, наведено багато докладно проаналізованих прикладів. Розглянуто розрахунки на міцність та жорсткість не тільки стрижнів, а й стрижневих систем (ферм, рам). У підручнику докладно розглянуто основні питання розрахунку на міцність та жорсткість при динамічному навантаженні.

Розділ 1 ВСТУП

§ 1. Наука про опір матеріалів. Об'єкти вивчення

Опором матеріалів називають науку про інженерні методи розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість елементів машин та споруд.

У процесі експлуатації машин та споруд їхні елементи (стрижні, балки, пластини, болти, заклепки тощо) так чи інакше беруть участь у роботі конструкції й зазнають дії різних сил — навантажень. Для забезпечення нормальної роботи конструкція має задовольняти необхідні умови міцності, жорсткості та стійкості.

Під *міцністю* розуміють здатність конструкції, її частин та деталей витримувати певне навантаження не руйнуючись.

Жорсткість — це здатність конструкції та її елементів протистояти деформуванню (змінюванню форми і розмірів) під дією зовнішніх навантажень. При заданих навантаженнях деформації не повинні перевищувати певного значення, встановленого відповідно до вимог, що ставляться до конструкції.

Стійкістю називають здатність конструкції або її елементів зберігати певну початкову форму пружної рівноваги.

Для того щоб конструкція цілком відповідала вимогам міцності, жорсткості та стійкості, а отже, була надійною в експлуатації, треба надати її елементам найбільш раціональної форми і, знаючи властивості матеріалів, з яких вони виготовлятимуться, визначити відповідні розміри залежно від навантаження та його характеру.

На перший погляд може здатися, що для надійного опору елементів конструкції зовнішньому навантаженню досить збільшити їхні розміри. Дійсно, іноді це приводить до бажаних результатів. Однак тоді, коли власна вага становить значну частину навантажень, що діють на конструкцію, збільшення розмірів її елементів, а отже, і ваги не підвищує міцності. Збільшення розмірів рухомих деталей механізмів і машин спричинює зростання сил інерції, підвищує навантаження, а це небажано, оскільки також може призвести до руйнування. Збільшення розмірів, яке не обумовлене вимогами надійності роботи конструкції, призводить до зайвої витрати матеріалів і підвищення її вартості. Машини і споруди треба будувати міцними і надійними в експлуатації, але водночас легкими й дешевими.

Опір матеріалів розв'язує зазначені задачі міцності, ґрунтуючись на теоретичних і дослідних даних, що мають однаково важливе значення. У теоретичній частині ця наука базується на теоретичній механіці й математиці, а в експериментальній — на фізиці та матеріалознавстві.

Опір матеріалів є конче важливою інженерною наукою, потрібною для формування інженерів будь-якого фаху. Без фундаментальних знань у цій галузі не можна створити такі конструкції, як різноманітні машини і механізми, цивільні й промислові споруди, мости, лінії електропередач та антени, ангари, кораблі, літаки й вертольоти, турбомашини й реактивна техніка, та ін.

Отже, опір матеріалів — це найбільш загальна наука про міцність машин і споруд. Проте вона не вичерпує всіх питань механіки деформівних тіл. Цими питаннями займаються й інші суміжні дисципліни: будівельна механіка стрижневих систем, теорія пружності й теорія пластичності. Між цими дисциплінами немає чіткої межі. Основна ж роль у розв'язанні задач міцності належить опору матеріалів.

Усю різноманітність видів конструктивних елементів, що застосовуються в спорудах і машинах, можна звести до порівняно невеликої кількості основних форм. Тіла, які мають ці основні форми, і є об'єктами розрахунку на міцність, жорсткість і стійкість. До них належать стрижні, оболонки, пластинки й масивні тіла.

Стрижнем або *брусом* називається тіло, в якого один розмір (довжина) значно перевищує два інших (поперечних) розміри.

У машинах та спорудах застосовуються стрижні як прямолінійні (рис. 1, *а*), так і криволінійні (рис. 1, *б*), як призматичні (рис. 1, *а*), так і змінного перерізу (рис. 1, *в*). Прикладами прямих стрижнів є вали, осі, балки, прикладами кривих — вантажопідйомні гаки, кільця ланцюгів тощо.

Стрижні, товщина стінки яких значно менша від габаритних розмірів поперечного перерізу, називають тонкостінними (рис. 1, *г*). Нині вони широко застосовуються в будівельних конструкціях, судно- і особливо авіабудуванні.

Оболонка — це тіло, обмежене криволінійними поверхнями, які розташовані на близькій відстані одна від одної.

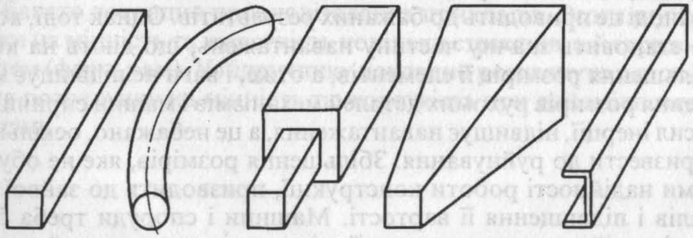


Рис. 1

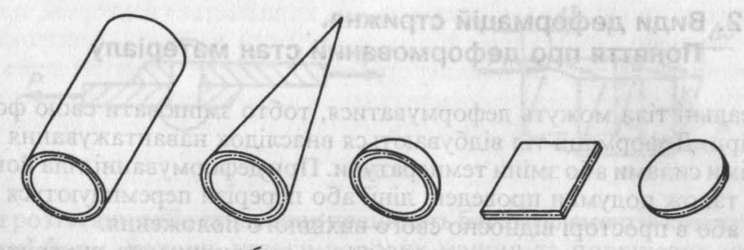


Рис. 2

Поверхня, рівновіддалена від твердих поверхонь оболонки, називається серединною. За формою серединної поверхні розрізняють оболонки циліндричні (рис. 2, *а*), конічні (рис. 2, *б*), сферичні (рис. 2, *в*) та ін. До оболонок належать неплоскі стінки тонкостінних резервуарів, котлів, куполи будинків, обшивки фюзеляжу, крила та інших частин літальних апаратів, корпуси підводних човнів тощо.

Якщо серединна поверхня є площиною, то розрахунковий об'єкт називають *пластинкою* (рис. 2, *г*). Пластинки бувають круглі (рис. 2, *д*), прямокутні (рис. 2, *г*) й інших обрисів. Пластинками можна вважати плоскі днища й кришки резервуарів, перекриття інженерних споруд, диски турбомашин.

Тіла, в яких усі три розміри одного порядку, називають *масивними тілами*. До них належать фундаменти споруд, підпірні стінки тощо.

В опорі матеріалів задачі, як правило, розв'язуються простими математичними методами за допомогою спрощувальних гіпотез та з використанням експериментальних даних; розв'язки при цьому доводять до розрахункових формул, придатних до застосування в інженерній практиці.

Виникнення науки про опір матеріалів пов'язують з ім'ям видатного італійського вченого Галілео Галілея (1564—1642), який провадив досліди щодо вивчення міцності, хоча джерела цієї науки ми бачимо вже в творіннях великого Леонардо да Вінчі.

У 1678 р. англійський вчений Роберт Гук (1635—1703) установив закон деформування пружних тіл, за яким деформація пружного тіла пропорційна діючому на нього зусиллю. Цей закон є основним у теорії опору матеріалів.

Швидкий розвиток науки про опір матеріалів почався наприкінці XVIII ст. у зв'язку з бурхливим розвитком промисловості та транспорту. Проблемами міцності займались академік Петербурзької академії наук Леонард Ейлер, видатні вчені М. О. Белелюбський, М. Г. Бубнов, А. М. Воропаєв, А. В. Гадолін, Х. С. Головін, Д. І. Журавський, Ф. С. Ясинський та ін.

У XX ст. значну роль у розвитку механіки й поширенні наукових знань у галузі опору матеріалів відіграли підручники видатних учених В. Л. Кирпичова, С. П. Тимошенка, М. М. Бєляєва, О. О. Уманського, В. І. Феодосьєва, О. А. Ільюшина, І. А. Біргера та ін.

§ 2. Види деформацій стрижня. Поняття про деформований стан матеріалу

Реальні тіла можуть деформуватися, тобто змінювати свою форму й розміри. Деформації тіл відбуваються внаслідок навантажування їх зовнішніми силами або зміни температури. При деформуванні тіла його точки, а також подумки проведені лінії або перерізи переміщуються в площині або в просторі відносно свого вихідного положення.

При навантажуванні твердого тіла в ньому виникають внутрішні сили взаємодії між частинками, що протидіють зовнішнім силам і намагаються повернути частинки тіла в положення, яке вони займали до деформації.

Деформації бувають *пружні*, тобто такі, що зникають після припинення дії сил, які спричинили їх, та *пластичні*, або *залишкові*, — ті, що не зникають.

Із збільшенням зовнішніх сил внутрішні сили також збільшуються, але до певної межі, яка залежить від властивостей матеріалу. Настає момент, коли тіло вже не здатне опиратися дальшому збільшенню зовнішніх сил. Тоді воно руйнується. Найчастіше для деформацій елементів конструкції встановлюють певні обмеження.

Основним об'єктом, що розглядається в опорі матеріалів, є стрижень з прямолінійною віссю.

В опорі матеріалів вивчають такі основні види деформацій стрижня: розтягання, стискання, зсув (зріз), кручення та згинання.

Розглядають також більш складні деформації, що утворюються внаслідок сполучення кількох основних.

Розтягання або стискання виникає, наприклад, тоді, коли до стрижня вздовж осі прикладені протилежно напрямлені сили (рис. 3). При цьому відбувається переміщення перерізів уздовж осі стрижня, який при розтяганні подовжується, а при стисканні вкорочується. Зміну Δl початкової довжини l стрижня називають *абсолютним подовженням при розтяганні* або *абсолютним укороченням при стисканні*. Відношення абсолютного подовження (укорочення) Δl до початкової довжини l стрижня називають *середнім відносним подовженням на довжині* l і, як правило, позначають $\varepsilon_{ср}$:

$$\varepsilon_{ср} = \Delta l/l.$$

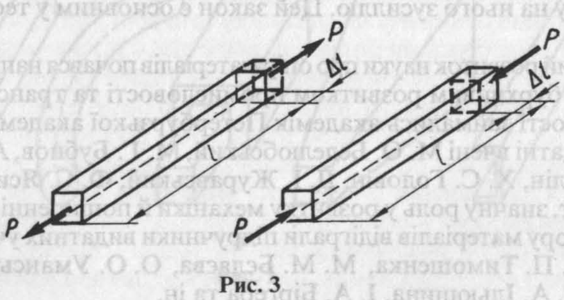


Рис. 3

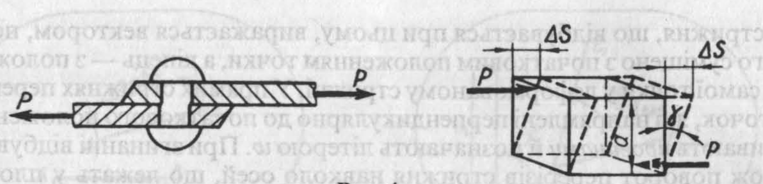


Рис. 4

На розтягання або стискання працюють багато елементів конструкцій: стрижні ферм, колони, штоки парових машин та поршневих насосів, стяжні гвинти тощо.

Зсув або зріз виникає тоді, коли зовнішні сили зміщують два паралельних плоских перерізи стрижня один відносно одного при незмінній відстані між ними (рис. 4). Зміщення Δs називається *абсолютним зсувом*. Відношення абсолютного зсуву до відстані a між площинами, що зміщуються (тангенс кута γ), називають *відносним зсувом*. Унаслідок малості кута γ при пружних деформаціях його тангенс вважають таким, що дорівнює куту перекосу розглядуваного елемента. Отже, відносний зсув

$$\gamma = \Delta s/a.$$

Відносний зсув є кутовою деформацією, яка характеризує перекіс елемента. На зсув або зріз працюють, наприклад, заклепки й болти, що скріплюють елементи, які зовнішні сили намагаються зсунути один відносно одного.

Кручення виникає при дії на стрижень зовнішніх сил, які утворюють момент відносно осі стрижня (рис. 5). Деформація кручення супроводжується поворотом поперечних перерізів стрижня один відносно одного навколо його осі. Кут повороту одного перерізу стрижня відносно іншого, що перебуває на відстані l, називають *кутом закручування на довжині* l. Відношення кута закручування φ до довжини l називають *відносним кутом закручування*:

$$\theta = \varphi/l.$$

На кручення працюють вали, шпинделі токарних і свердлильних верстатів, а також багато інших деталей.

Деформація згинання (рис. 6) полягає у викривленні осі прямого стрижня або в зміні кривини кривого стрижня. Переміщення будь-якої точки

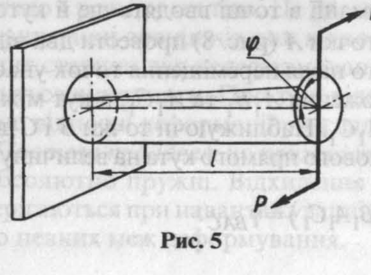


Рис. 5

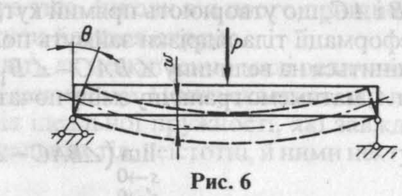


Рис. 6

осі стрижня, що відбувається при цьому, виражається вектором, початок якого суміщено з початковим положенням точки, а кінець — з положенням тієї самої точки у деформованому стрижні. У прямих стрижнях переміщення точок, які напрямлені перпендикулярно до початкового положення осі, називають *прогинами* й позначають літерою w. При згинанні відбувається також поворот перерізів стрижня навколо осей, що лежать у площинах перерізів. Кути повороту перерізів відносно їхніх початкових положень позначають літерою θ. На згинання працюють, наприклад, осі залізничних вагонів, листові ресори, зуби шестерень, спиці коліс, балки міжповерхових перекриттів, важелі та багато інших деталей.

Унаслідок одночасної дії на тіло сил, що спричинюють різні види зазначених основних деформацій, виникає більш складна деформація. Так, часто елементи машин і конструкцій зазнають дії сил, що одночасно спричинюють згинання і кручення, згинання і розтягання або стискання тощо.

Описані деформації стрижня дають уявлення про зміну його форми й розмірів у цілому, однак вони не визначають ступінь та характер деформованого стану матеріалу. Досліди свідчать, що деформований стан тіла взагалі нерівномірний і змінюється від точки до точки.

Для визначення деформації в будь-якій точці A (рис. 7) проведемо в недеформованому тілі відрізок прямої AB, що виходить із цієї точки в довільному напрямі й має довжину s. Після деформації точки A та B перемістяться й займуть положення A_1 та B_1 відповідно, а відстань s між ними зміниться на Δs. Відношення $\Delta s/s = \varepsilon_{ср}$ називається *середньою відносною лінійною деформацією* відрізка AB. Наближуючи точку B до точки A, тобто зменшуючи довжину відрізка s, дістанемо граничне значення:

$$\lim_{s\to 0}\frac{\Delta s}{s}=\varepsilon_{AB}.$$

Величина ε_{AB} є відносною лінійною деформацією в точці A у напрямі AB. Якщо відомо, що відстань між точками A і B збільшується, то ε_{AB} називають *відносним подовженням*, при зменшенні цієї відстані — *відносним укороченням.*

У одній і тій самій точці A відносні лінійні деформації в різних напрямах можуть бути різними. Як правило, основними вважають напрями, паралельні осям вибраної прямокутної системи координат. Тоді відносні лінійні деформації в точці позначають відповідно ε_x, ε_y, ε_z.

Для повної характеристики деформації в точці вводять ще й кутові деформації. Якщо до деформації тіла з точки A (рис. 8) провести два відрізки AB і AC, що утворюють прямий кут, то після переміщення точок унаслідок деформації тіла відрізки займуть положення A_1B_1 та A_1C_1, а кут між ними зміниться на величину $\angle BAC - \angle B_1A_1C_1$. Наближуючи точки B і C до точки A, матимемо граничну зміну початкового прямого кута на величину

$$\lim_{\substack{s\to 0\\ s'\to 0}}\left(\angle BAC - \angle B_1A_1C_1\right)=\gamma_{BAC}.$$

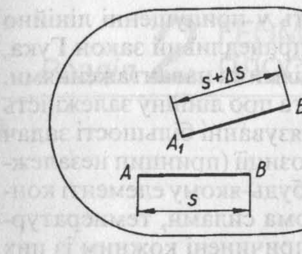


Рис. 7

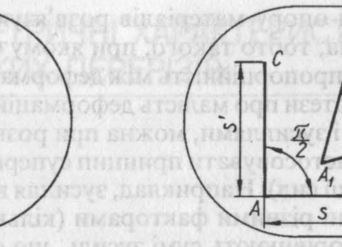


Рис. 8

Ця зміна прямого кута, виражена в радіанах, називається *відносною кутовою деформацією* в точці A у площині, де лежать відрізки AB та AC. У тій самій точці A відносні кутові деформації в різних площинах різні. Як правило, відносні кутові деформації визначають у трьох взаємно перпендикулярних площинах. Тоді їх позначають відповідно γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}.

Деформований стан у точці тіла повністю визначається шістьма компонентами деформації — трьома відносними лінійними деформаціями ε_x, ε_y, ε_z та трьома відносними кутовими лінійними деформаціями γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}.

§ 3. Основні гіпотези науки про опір матеріалів

Для побудови теорії опору матеріалів уводять такі гіпотези щодо структури й властивостей матеріалів та характеру деформацій.

1. *Гіпотеза про суцільність матеріалу.* Припускається, що матеріал суцільно заповнює форму тіла. Атомістична теорія дискретної будови речовини до уваги не береться.

2. *Гіпотеза про однорідність та ізотропність.* Матеріал вважається однорідним та ізотропним, тобто в будь-якому об'ємі та в будь-якому напрямі властивості матеріалу вважаються однаковими. Хоч кристали, з яких складаються метали, анізотропні, проте хаотичне розташування їх дає змогу вважати макрооб'єми металів ізотропними.

Інколи припущення про ізотропію неприйнятне. Наприклад, до анізотропних матеріалів належать деревина, властивості якої вздовж та впоперек волокон істотно різняться, армовані матеріали тощо.

3. *Гіпотеза про малість деформацій.* Припускається, що деформації малі порівняно з розмірами тіла. Це дає змогу здебільшого нехтувати змінами в розташуванні зовнішніх сил відносно окремих частин тіла й складати рівняння статики для недеформованого тіла. Інколи від цього принципу доводиться відступати. Про такі відступи йдеться окремо.

Малі відносні деформації розглядають як нескінченно малі величини.

4. *Гіпотеза про ідеальну пружність матеріалу.* Припускається, що всі тіла абсолютно пружні. Відхилення від ідеальної пружності, які завжди спостерігаються при навантажуванні реальних тіл, неістотні, й ними нехтують до певних меж деформування.

Більшість задач опору матеріалів розв'язують у припущенні лінійно деформованого тіла, тобто такого, при якому справедливий закон Гука, що відбиває пряму пропорційність між деформаціями та навантаженнями.

Прийнявши гіпотези про малість деформацій та про лінійну залежність між деформаціями і зусиллями, можна при розв'язуванні більшості задач опору матеріалів застосовувати принцип суперпозиції (принцип незалежності й додавання дії сил). Наприклад, зусилля в будь-якому елементі конструкції, спричинені різними факторами (кількома силами, температурними впливами), дорівнюють сумі зусиль, що спричинені кожним із цих факторів, і не залежать від порядку прикладання їх. Це справедливо також відносно деформацій.

Зазначені гіпотези, а також деякі інші, про які йтиметься далі, дають змогу розв'язувати широке коло задач на міцність, жорсткість та стійкість. Результати розрахунків добре узгоджуються з даними практики.

Розділ 2 ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

Як уже зазначалось (див. § 1), основним об'єктом, що його вивчають у курсі опору матеріалів, є стрижень.

Опір стрижня різним видам деформації часто залежить не тільки від його матеріалу та розмірів, а й від обрису осі, форми поперечних перерізів та розміщення їх. Тому в цьому розділі, незважаючи на фізичні властивості об'єкта, що вивчається, розглянемо основні геометричні характеристики його поперечних перерізів, які визначають опір різним видам деформацій. До них належать площі поперечних перерізів, статичні моменти та моменти інерції.

§ 4. Статичні моменти площі. Центр ваги перерізу

Розглянемо довільну фігуру (поперечний переріз стрижня), пов'язану з координатними осями Oz та Oy (рис. 9). Виділимо елемент площі dF з координатами z, y. За аналогією з виразом для моменту сили відносно якої-небудь осі можна записати вираз і для моменту площі, який називають *статичним моментом.* Так, добуток елемента площі dF на відстань y від осі Oz

$$dS_z = ydF$$

називається *статичним моментом елемента площі відносно осі Oz.* Аналогічно $dS_y = zdF$ — статичний момент елемента площі відносно осі Oy. Підсумувавши такі добутки по всій площі F фігури, дістанемо відповідно статичні моменти відносно осей z та y:

$$S_z = \int_F ydF; \quad S_y = \int_F zdF. \tag{2.1}$$

Статичний момент виражається в одиницях довжини в третьому степені (наприклад, см^3).

Позначимо z_C, y_C координати центра ваги (ц. в.) фігури. Продовжуючи аналогію з моментами сил, на підставі теореми про момент рівнодійної можна записати такі вирази:

$$S_z = Fy_C; \quad S_y = Fz_C, \tag{2.2}$$

де F — площа фігури.

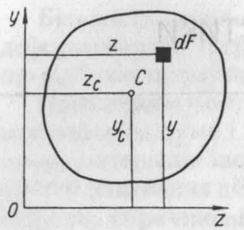


Рис. 9

Звідси координати центра ваги

$$z_C = S_y/F;\quad y_C = S_z/F. \qquad (2.3)$$

Із формул (2.2) випливає, що статичні моменти площі відносно центральних осей, тобто осей, що проходять через центр ваги, дорівнюють нулю.

Як приклад визначимо статичний момент площі *трикутника* (рис. 10) відносно осі, яка проходить через основу. На відстані y від неї виділимо елементарну площадку у вигляді смужки, паралельної осі z. Площа смужки $dF = b(y)dy$. Вважаючи, що

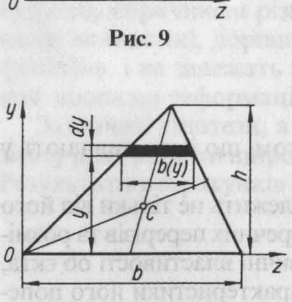


Рис. 10

$$b(y) = (b/h)(h-y),$$

маємо

$$S_z = \int_F y dF = \frac{b}{h}\int_0^h y(h-y)dy = \frac{bh^2}{6}.$$

Простіше можна розв'язати цей приклад, використавши формули (2.2). Очевидно, що

$$F = \frac{1}{2}bh;\quad y_C = \frac{1}{3}h,$$

отже,

$$S_z = \frac{1}{2}bh\frac{1}{3}h = \frac{bh^2}{6}.$$

Для визначення статичних моментів складної фігури її розбивають на прості частини (рис. 11), для кожної з яких відомі площа F_i та положення центра ваги z_i і y_i. Статичний момент площі всієї фігури відносно даної осі визначається як сума статичних моментів кожної частини:

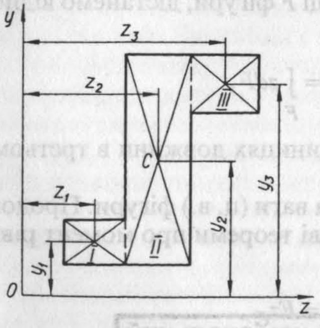


Рис. 11

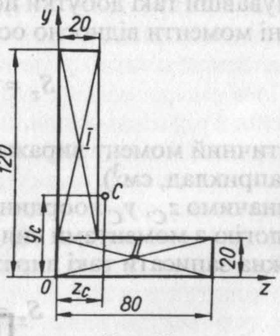


Рис. 12

$$S_z = F_1y_1 + F_2y_2 + \ldots + F_ny_n = \sum_{i=1}^{n} F_iy_i;$$
$$S_y = F_1z_1 + F_2z_2 + \ldots + F_nz_n = \sum_{i=1}^{n} F_iz_i. \qquad (2.4)$$

За формулами (2.3) та (2.4) легко знайти координати центра ваги складної фігури:

$$z_C = \frac{S_y}{F} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_iz_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i};\quad y_C = \frac{S_z}{F} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_iy_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}. \qquad (2.5)$$

Визначимо, наприклад, положення центра ваги фігури, зображеної на рис. 12. Розбиваємо фігуру на два прямокутники. Результати обчислення зводимо в табл. 1.

Таблиця 1

Номер частини фігури	Площа F_i, см²	Координати центра ваги частини в системі zy, см		F_iz_i	F_iy_i	z_C, y_C, см
		z_i	y_i	см³		
I	20	1	7	20	140	—
II	16	4	1	64	16	
Для всієї фігури	36	—	—	84	156	$z_C = \frac{84}{36} = 2,33$ $y_C = \frac{156}{36} = 4,33$

§ 5. Моменти інерції плоских фігур

Осьовим, або *екваторіальним, моментом інерції* площі фігури називають інтеграл добутків площ елементарних площадок на квадрати відстаней їх від розглядуваної осі, що лежить у площині фігури. Так, моменти інерції довільної фігури (рис. 13) відносно осей z та y відповідно

$$J_z = \int_F y^2 dF;\quad J_y = \int_F z^2 dF. \qquad (2.6)$$

Полярним моментом інерції площі фігури відносно даної точки (полюса O) називають інтеграл добутків площ елементарних площадок на квадрати відстаней їх від полюса (рис. 13):

$$J_p = \int_F \rho^2 dF. \qquad (2.7)$$

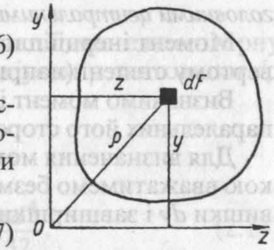


Рис. 13

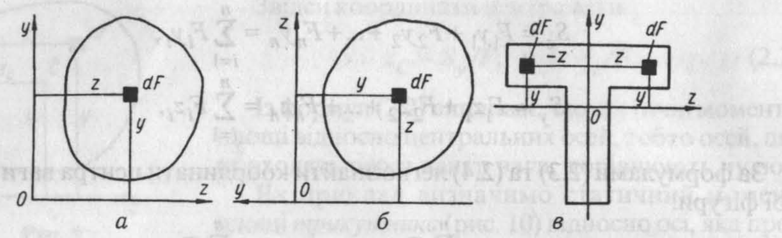


Рис. 14

Якщо через полюс проведено систему прямокутних осей z та y, то $\rho^2 = z^2 + y^2$. Тоді з виразу (2.7) маємо

$$J_p = \int_F \left(y^2 + z^2\right) dF = \int_F y^2 dF + \int_F z^2 dF = J_z + J_y. \tag{2.8}$$

Зазначимо, що осьові та полярні моменти інерції можуть набирати лише додатних значень.

Відцентровим моментом інерції називають інтеграл добутків площ елементарних площадок на відстані їх від осей z та y:

$$J_{zy} = \int_F zy dF. \tag{2.9}$$

Відцентровий момент інерції залежно від положення осей може бути додатним чи від'ємним або дорівнювати нулю. Так, відцентровий момент інерції площі фігури (рис. 14, *а*) відносно осей z та y додатний, оскільки координати z, y всіх елементів площі додатні. При повороті осей навколо початку координат на 90° (рис. 14, *б*) знак відцентрового моменту інерції фігури змінюється на протилежний, оскільки в цьому положенні координати z всіх елементів додатні, а координати y від'ємні.

Очевидно, при поступовому повороті осей можна знайти таке положення їх, при якому відцентровий момент інерції дорівнюватиме нулю. Такі осі називають *головними осями інерції*. Дві взаємно перпендикулярні осі, з яких хоча б одна є віссю симетрії фігури, завжди будуть її головними осями інерції, оскільки в цьому разі кожній додатній величині $zydF$ відповідає така сама від'ємна по інший бік від осі симетрії (рис. 14, *в*) і сума їх по всій площі фігури дорівнює нулю. Головні осі, що проходять через центр ваги перерізу, називають *головними центральними осями*.

Момент інерції площі фігури виражається в одиницях довжини в четвертому степені (наприклад, см^4).

Визначимо момент інерції *прямокутника* відносно центральних осей z, y, паралельних його сторонам (рис. 15).

Для визначення моменту інерції відносно осі z елементарною площадкою вважатимемо безмежно вузький прямокутник, паралельний осі z, заввишки dy і завширшки b. Отже,

$$dF = bdy;$$

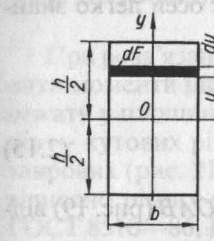


Рис. 15

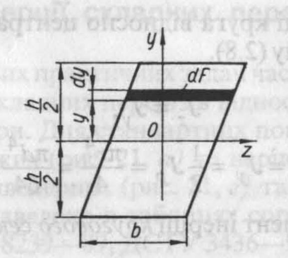


Рис. 16

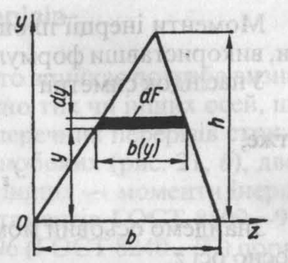


Рис. 17

$$J_z = \int_F y^2 dF = b \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = 2b \int_0^{h/2} y^2 dy = \frac{bh^3}{12}. \tag{2.10}$$

Очевидно, що

$$J_y = (hb^3)/12. \tag{2.11}$$

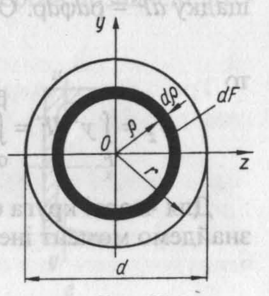


Рис. 18

Зазначимо, що інтеграл J_z не зміниться, якщо всі смужки $dF = bdy$ перемістити паралельно осі z, відносно якої визначається момент інерції. Отже, момент інерції *паралелограма* (рис. 16) відносно центральної осі z, паралельної основі,

$$J_z = (hb^3)/12. \tag{2.12}$$

Визначимо момент інерції *трикутника* відносно осі, яка проходить через основу (рис. 17).

Виділимо елементарну смужку, паралельну зазначеній осі:

$$dF = b(y)dy.$$

Очевидно, ширина смужки, розміщеної на відстані y від осі z,

$$b(y) = (b/h)(h - y).$$

Отже,

$$J_z = \int_F y^2 dF = \frac{b}{n} \int_0^h y^2 (h - y) dy = \frac{dh^3}{12}. \tag{2.13}$$

Визначимо полярний момент інерції площі *круга* відносно його центра, а також момент інерції відносно центральної осі.

При визначенні полярного моменту інерції виділимо елементарну площадку у вигляді безмежно тонкого кільця радіусом ρ завтовшки $d\rho$ (рис. 18). Площа такого елемента

$$dF = 2\pi\rho d\rho.$$

Полярний момент інерції

$$J_p = \int_F \rho^2 dF = 2\pi \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}. \tag{2.14}$$

Моменти інерції площі круга відносно центральних осей легко знайти, використавши формулу (2.8).

Унаслідок симетрії

$$J_z = J_y,$$

отже,

$$J_z = J_y = \frac{1}{2}J_p = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}. \qquad (2.15)$$

Знайдемо осьовий момент інерції *кругового сектора OAB* (рис. 19) відносно осі z.

Використавши полярні координати ρ, φ, виділимо елементарну площадку $dF = \rho d\varphi d\rho$. Оскільки

$$y = \rho \sin\varphi,$$

то

$$J_z = \int_F y^2 dF = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{0}^{r} \rho^2 \sin^2\varphi \cdot \rho\, d\varphi d\rho = \frac{r^4}{8}\left[(\beta-\alpha) - \frac{\sin 2\beta - \sin 2\alpha}{2}\right]. \qquad (2.16)$$

Для чверті круга $\alpha = 0$; $\beta = \pi/2$. Тоді $J_z = (\pi r^4)/16$. Взявши $\beta = \pi$, $\alpha = 0$, знайдемо момент інерції площі півкруга відносно діаметра:

$$J_z = (\pi r^4)/8.$$

Визначимо момент інерції *еліпса* з півосями a, b (рис. 20) відносно центральної осі z.

Задачу можна розв'язати дуже просто, якщо розглядати еліпс як проекцію нахиленого круга. При цьому

$$y/y_1 = b/a.$$

Покажемо момент інерції еліпса як суму моментів інерції елементарних прямокутників заввишки y та завширшки dz:

$$J_z = \int_F \frac{y^3 dz}{12} = \frac{b^3}{a^3}\int_F \frac{y_1^3 dz}{12}.$$

Останній інтеграл у правій частині є моментом інерції площі круга радіусом a відносно осі z; він дорівнює $(\pi a^4)/4$. Отже, момент інерції еліпса

$$J_z = \frac{b^3}{a^3}\frac{\pi a^4}{4} = \frac{\pi a b^3}{4}. \qquad (2.17)$$

Очевидно,

$$J_y = \frac{\pi a^3 b}{4}.$$

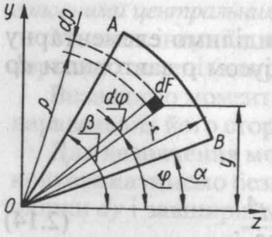


Рис. 19

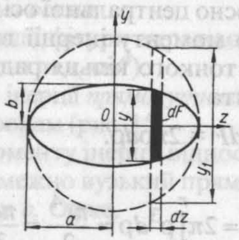


Рис. 20

§ 6. Моменти інерції складних перерізів

При розв'язанні різних практичних задач часто виникає потреба визначити моменти інерції складних перерізів відносно тих чи інших осей, що лежать у площині фігури. Для стандартних поперечних перерізів стрижнів — кутових рівнобоких (рис. 21, *а*) та нерівнобоких (рис. 21, *б*), двотаврових (рис. 21, *в*), швелерних (рис. 21, *г*) та інших — моменти інерції відносно різних осей наведено в таблицях сортаментів ГОСТ 8509—93, ГОСТ 8510—86, ГОСТ 8239—89, ДСТУ 3436—96 (ГОСТ 8240—97) поряд із розмірами, площами перерізів, положеннями центрів ваги та іншими характеристиками. У сортаменті центральні осі перерізів позначені літерами x, y (рис. 21).

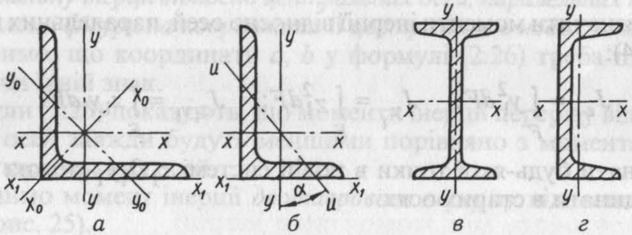


Рис. 21

При визначенні моментів інерції складних перерізів останні можна розбити на прості частини, моменти інерції яких відомі. З основної властивості інтеграла суми випливає, що момент інерції складної фігури дорівнює сумі моментів інерції її складових частин.

Наприклад, треба визначити момент інерції складної фігури відносно осі z (рис. 22):

$$J_z = \int_F y^2 dF. \qquad (2.18)$$

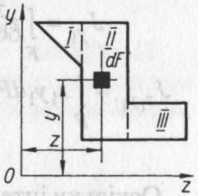


Рис. 22

Розбиваємо фігуру на прості частини I, II, III, наприклад, так, як зображено на цьому рисунку. Інтегруємо (2.18) послідовно по площах F_1, F_2, F_3 простих фігур:

$$J_z = \int_{F_1} y^2 dF + \int_{F_2} y^2 dF + \int_{F_3} y^2 dF.$$

Кожний із цих інтегралів є моментом інерції відповідної простої фігури. Отже,

$$J_z = J_z^{I} + J_z^{II} + J_z^{III}. \qquad (2.19)$$

Якщо в перерізі є отвір, його зручно вважати частиною фігури з від'ємною площею. Наприклад, переріз,

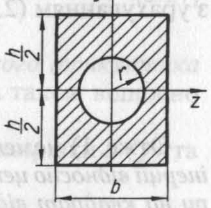


Рис. 23

наведений на рис. 23, можна розбити на прямокутник $b \times h$ та отвір радіусом r від'ємної площі. Тоді

$$J_z = J_z^I - J_z^{II} = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi r^4}{4}.$$

§ 7. Моменти інерції відносно паралельних осей

Припустимо, що відомі моменти інерції фігури відносно центральних осей z, y:

$$J_z = \int_F y^2 dF; \quad J_y = \int_F z^2 dF; \quad J_{zy} = \int_F zy dF. \qquad (2.20)$$

Треба визначити моменти інерції відносно осей, паралельних центральним (рис. 24):

$$J_{z_1} = \int_F y_1^2 dF; \quad J_{y_1} = \int_F z_1^2 dF; \quad J_{z_1 y_1} = \int_F z_1 y_1 dF. \qquad (2.21)$$

Координати будь-якої точки в новій системі $z_1 O_1 y_1$ можна виразити через координати в старих осях:

$$z_1 = z + b; \quad y_1 = y + a.$$

Підставляємо ці величини у формули (2.21) та інтегруємо почленно:

$$J_{z_1} = \int_F y_1^2 dF = \int_F (y+a)^2 dF = \int_F y^2 dF + a^2 \int_F dF + 2a \int_F y dF; \qquad (2.22)$$

$$J_{y_1} = \int_F z_1^2 dF = \int_F (z+b)^2 dF = \int_F z^2 dF + b^2 \int_F dF + 2b \int_F z dF; \qquad (2.23)$$

$$J_{z_1 y_1} = \int_F z_1 y_1 dF = \int_F (z+b)(y+a) dF = \int_F zy dF + ab \int_F dF + a \int_F z dF + b \int_F y dF. \qquad (2.24)$$

Оскільки інтеграли $\int_F y dF = S_z$ та $\int_F z dF = S_y$ дорівнюють нулю як статичні моменти відносно центральних осей, то формули (2.22), (2.23), (2.24) з урахуванням (2.20) набирають вигляду

$$J_{z_1} = J_z + a^2 F; \quad J_{y_1} = J_y + b^2 F; \qquad (2.25)$$

$$J_{z_1 y_1} = J_{zy} + abF. \qquad (2.26)$$

Отже: 1) *момент інерції фігури відносно довільної осі дорівнює моменту інерції відносно центральної осі, паралельної даній, плюс добуток площі фігури на квадрат відстані між цими осями;* 2) *відцентровий момент інерції відносно довільної системи взаємно перпендикулярних осей дорівнює відцентровому моменту інерції відносно центральних осей, паралельних даним, плюс добуток площі фігури на координати її центра ваги в нових осях.*

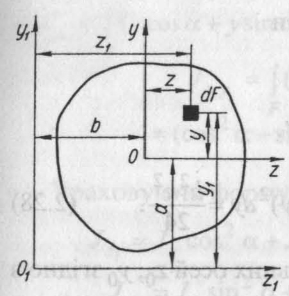


Рис. 24

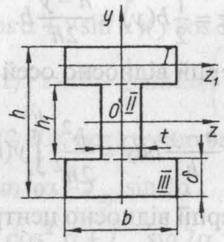


Рис. 25

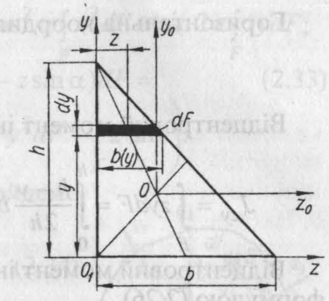


Рис. 26

Зазначимо, що координати a, b у формулі (2.26) треба підставляти, враховуючи їхній знак.

Формули (2.25) показують, що моменти інерції перерізу відносно центральних осей завжди будуть меншими порівняно з моментами інерції відносно паралельних осей.

Визначимо момент інерції *двотаврового перерізу* відносно центральної осі z (рис. 25).

Переріз, що складається з двох однакових полиць $b \times \delta$ та стінки $h_1 \times t$, розбиваємо на ці три прості частини. Тоді

$$J_z = J_z^I + J_z^{II} + J_z^{III}.$$

Момент інерції полиці відносно осі z згідно з формулою (2.25)

$$J_z^I = J_z^{III} = J_{z_1}^I + \left(\frac{h_1 + \delta}{2}\right)^2 F = \frac{b\delta^3}{12} + \left(\frac{h_1 + \delta}{2}\right)^2 b\delta.$$

Момент інерції стінки

$$J_c^{II} = \frac{t h_1^3}{12}.$$

Отже, момент інерції двотавра

$$J_z = 2\left[\frac{b\delta^3}{12} + \left(\frac{h_1 + \delta}{2}\right)^2 b\delta\right] + \frac{t h_1^3}{12}. \qquad (2.27)$$

Визначимо відцентровий момент інерції *прямокутного трикутника* відносно осей z, y (рис. 26), що збігаються з катетами, а також відносно центральних осей z_0, y_0, паралельних їм.

Елементарну площадку беремо у вигляді смужки завширшки $b\,(y)$ та заввишки dy. Її площа

$$dF = b(y)dy = \frac{h - y}{h} b dy.$$

Горизонтальна координата центра ваги смужки

$$z = \frac{1}{2}b(y) = \frac{h-y}{2h}b.$$

Відцентровий момент інерції відносно осей z, y

$$J_{zy} = \int_F zydF = \int_0^h \frac{h-y}{2h} by \frac{h-y}{h} bdy = \frac{b^2}{2h^2}\int_0^h y(h-y)^2\,dy = \frac{b^2h^2}{24}. \qquad (2.28)$$

Відцентровий момент інерції відносно центральних осей z_0, y_0 згідно з формулою (2.26)

$$J_{z_0y_0} = J_{zy} - a_0b_0F,$$

причому

$$a_0 = h/3;\ b_0 = b/3.$$

Тоді

$$J_{z_0y_0} = \frac{b^2h^2}{24} - \frac{bh}{2}\frac{b}{3}\frac{h}{3} = -\frac{b^2h^2}{72}. \qquad (2.29)$$

§ 8. Залежність між моментами інерції при повороті координатних осей

Припустимо, що відомі моменти інерції довільної фігури (рис. 27) відносно координатних осей z, y:

$$J_z = \int_F y^2dF;\quad J_y = \int_F z^2dF;\quad J_{zy} = \int_F zydF. \qquad (2.30)$$

Повернемо осі z, y на кут α проти годинникової стрілки, вважаючи кут повороту осей у цьому напрямі додатним. Знайдемо тепер моменти інерції перерізу відносно повернутих осей z_1, y_1:

$$J_{z_1} = \int_F y_1^2dF;\quad J_{y_1} = \int_F z_1^2dF;\quad J_{z_1y_1} = \int_F z_1y_1dF. \qquad (2.31)$$

Координати довільної елементарної площадки в нових осях z_1, y_1 можна виразити через її координати z, y в початковій системі за формулами

$$z_1 = OC = OE + AD = z\cos\alpha + y\sin\alpha;$$
$$y_1 = BC = BD - EA = y\cos\alpha - z\sin\alpha. \qquad (2.32)$$

Підставивши ці значення у формули (2.31), матимемо

$$J_{z_1} = \int_F (y\cos\alpha - z\sin\alpha)^2\,dF = \cos^2\alpha\int_F y^2dF + \sin^2\alpha\int_F z^2dF - \sin 2\alpha\int_F zydF;$$

$$J_{y_1} = \int_F (z\cos\alpha + y\sin\alpha)^2dF = \sin^2\alpha\int_F y^2dF + \cos^2\alpha\int_F z^2dF + \sin 2\alpha\int_F zydF;$$

$$J_{z_1y_1} = \int_F (z\cos\alpha + y\sin\alpha)(y\cos\alpha - z\sin\alpha)dF = \qquad (2.33)$$
$$= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\int_F zydF + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\left(\int_F y^2dF - \int_F z^2dF\right).$$

Урахувуючи формули (2.30), остаточно знайдемо

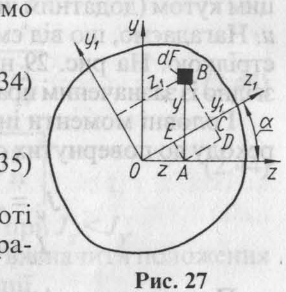


Рис. 27

$$J_{z_1} = J_z\cos^2\alpha + J_y\sin^2\alpha - J_{zy}\sin 2\alpha;$$
$$J_{y_1} = J_z\sin^2\alpha + J_y\cos^2\alpha + J_{zy}\sin 2\alpha; \qquad (2.34)$$

$$J_{z_1y_1} = J_{zy}\cos 2\alpha - \frac{1}{2}(J_y - J_z)\sin 2\alpha. \qquad (2.35)$$

Зазначимо, що ці формули, здобуті при повороті довільної системи прямокутних осей, звичайно справедливі й для центральних осей.

Додаючи почленно вирази (2.34), знаходимо

$$J_{z_1} + J_{y_1} = J_z + J_y = J_p. \qquad (2.36)$$

Отже, при повороті прямокутних осей сума осьових моментів інерції не змінюється і дорівнює полярному моменту інерції відносно початку координат.

При повороті системи осей на кут $\alpha = 90°$

$$J_{z_1} = J_y;\quad J_{y_1} = J_z;\quad J_{z_1y_1} = -J_{zy}.$$

§ 9. Визначення напряму головних осей інерції. Головні моменти інерції

Найбільше практичне значення мають головні центральні осі, відцентровий момент інерції відносно яких дорівнює нулю. Будемо позначати такі осі літерами u, v. Отже,

$$J_{uv} = 0.$$

Для визначення положення головних центральних осей несиметричної фігури повернемо довільну початкову систему центральних осей z, y (рис. 28) на деякий кут α_0, при якому відцентровий момент інерції дорівнюватиме нулю:

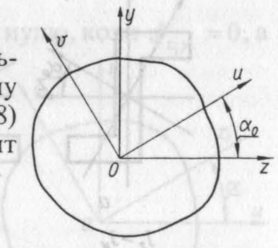


Рис. 28

$$J_{z_1y_1} = J_{uv} = 0.$$

Тоді з формули (2.35)

$$J_{z_1y_1} = J_{zy}\cos 2\alpha_0 - \frac{J_y - J_z}{2}\sin 2\alpha_0 = 0, \qquad (2.37)$$

звідки

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{zy}}{J_y - J_z}. \tag{2.38}$$

Добуті з формули (2.38) два значення кута α різняться між собою на 90° і дають положення головних осей. Менший із цих кутів за модулем не перевищує $\pi/4$. Будемо далі користуватися тільки меншим кутом. Проведену під цим кутом (додатним чи від'ємним) головну вісь будемо позначати літерою *u*. Нагадаємо, що від'ємні кути α_0 відкладаються від осі *z* за годинниковою стрілкою. На рис. 29 наведено деякі приклади позначення головних осей згідно із зазначеним правилом. Початкові осі позначено літерами *z* та *y*.

Головні моменти інерції можна знайти із загальних формул (2.34) переходу до повернутих осей, взявши $\alpha = \alpha_0$:

$$\begin{aligned} J_u &= J_z \cos^2\alpha_0 + J_y \sin^2\alpha_0 - J_{zy} \sin 2\alpha_0; \\ J_v &= J_z \sin^2\alpha_0 + J_y \cos^2\alpha_0 + J_{zy} \sin 2\alpha_0. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Перетворимо формули (2.39) для головних центральних моментів інерції, склавши вирази для їхніх суми та різниці. Маємо

$$J_u + J_v = J_z + J_y; \tag{2.40}$$

$$J_u - J_v = \left(J_z - J_y\right)\cos 2\alpha_0 - 2J_{zy} \sin 2\alpha_0 = \left(J_z - J_y\right)\frac{4}{\cos 2\alpha_0}, \tag{2.41}$$

причому у виразі (2.41) зроблено заміну J_{zy} із формули (2.38):

$$2J_{zy} = \left(J_y - J_z\right)\operatorname{tg}2\alpha_0.$$

Тепер із формул (2.40) та (2.41) знаходимо більш зручні вирази:

$$J_u = \frac{1}{2}\left[\left(J_z + J_y\right) + \left(J_z - J_y\right)\frac{1}{\cos 2\alpha_0}\right]; \quad J_v = \frac{1}{2}\left[\left(J_z + J_y\right) - \left(J_z - J_y\right)\frac{1}{\cos 2\alpha_0}\right]. \tag{2.42}$$

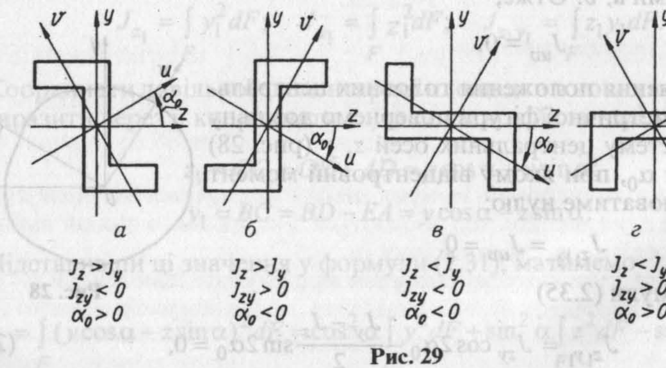


Рис. 29

Очевидно, що при $J_z > J_y$ момент $J_u > J_v$.

Використовуючи формулу (2.38), можна виключити з виразів (2.42) величину

$$\frac{1}{\cos 2\alpha_0} = \pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0} = \pm\sqrt{1 + \frac{4J_{zy}^2}{\left(J_z - J_y\right)^2}}.$$

Тоді матимемо

$$J_u = \frac{1}{2}\left(J_z + J_y\right) \pm \sqrt{\left(J_z - J_y\right)^2 + 4J_{zy}^2}; \tag{2.43}$$

$$J_v = \frac{1}{2}\left[\left(J_z + J_y\right) \mp \sqrt{\left(J_z - J_y\right)^2 + 4J_{zy}^2}\right], \tag{2.44}$$

причому верхні знаки беремо при $J_z > J_y$, а нижні — при $J_z < J_y$.

Отже, формули (2.38), (2.43) і (2.44) дають змогу визначити положення головних осей та головні центральні моменти інерції.

Якщо тепер замість довільної початкової системи центральних осей *zOy* взяти головні осі (рис. 30), то формули (2.34), (2.35) переходу до повернутих осей спростяться:

$$\begin{gathered} J_{z_1} = J_u \cos^2\alpha + J_v \sin^2\alpha; \quad J_{y_1} = J_u \sin^2\alpha + J_v \cos^2\alpha; \\ J_{z_1y_1} = \frac{1}{2}\left(J_u - J_v\right)\sin 2\alpha. \end{gathered} \tag{2.45}$$

Важливо зазначити, що головні моменти інерції мають властивість екстремальності. У цьому легко переконатися, продиференціювавши вираз для моменту інерції відносно довільної осі [див. формули (2.34)] по змінній α:

$$\begin{aligned} \frac{dJ_{z_1}}{d\alpha} &= -J_z \sin 2\alpha + J_y \sin 2\alpha - 2J_{zy} \cos 2\alpha = \\ &= -2\left(J_{zy}\cos 2\alpha - \frac{J_y - J_z}{2}\sin 2\alpha\right) = -2J_{z_1y_1}. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що похідна $dJ_{z_1}/d\alpha$ дорівнює нулю, коли $J_{z_1y_1} = 0$, а це означає, що екстремальні значення мають моменти інерції відносно головних осей.

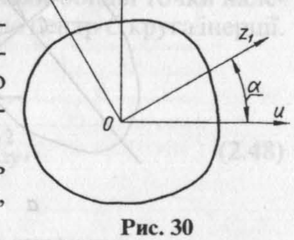


Рис. 30

Ураховуючи, що сума моментів інерції відносно двох взаємно перпендикулярних осей — величина стала, можна дійти висновку, що відносно однієї з головних осей момент інерції має максимальне значення, а відносно іншої — мінімальне.

Зауважимо, що площини, проведені через вісь стрижня та головні осі його поперечного перерізу, називають *головними площинами*.

§ 10. Графічне зображування моментів інерції

Визначення моментів інерції за формулами (2.45) чи (2.43), (2.44) можна замінити простою графічною побудовою. При цьому розрізняють пряму та обернену задачі. Перша полягає у визначенні моментів інерції відносно довільних центральних осей z, y за відомими напрямами головних осей та головними моментами інерції [формули (2.45)]. Найбільше практичне значення має друга задача. Вона полягає у визначенні положення головних осей та значень головних центральних моментів інерції за відомими моментами інерції J_z, J_y, J_{zy} відносно будь-якої системи прямокутних центральних осей [формули (2.43), (2.44) і (2.38)].

Пряма задача. Нехай треба визначити моменти інерції J_z, J_y, J_{zy} відносно осей z, y (рис. 31, *а*) за відомими напрямами головних осей та величинами J_u, J_v. Для певності вважаємо $J_u > J_v$.

Аналітичний розв'язок подається формулами (2.45).

Для графічної побудови введемо в розгляд геометричну площину та віднесемо її до прямокутної системи координат. По осі абсцис відкладатимемо осьові моменти інерції $J_{ос}(J_u, J_v, J_z, J_y, \ldots)$, а по осі ординат — відцентрові $J_{вц}(J_{zy}, \ldots)$.

У певному масштабі від початку координат O вздовж осі абсцис (рис. 31, *б*) відкладаємо відрізки OA та OB, які дорівнюють головним моментам інерції. Відрізок AB ділимо навпіл так, щоб $BC = CA = (J_u - J_v)/2$. Із точки C радіусом CA описуємо коло, яке називають *кругом інерції*. Для визначення моменту інерції відносно осі z, проведеної під кутом α до головної осі u, із центра круга під кутом 2α проводимо промінь CD_z (додатні кути відкладають проти годинникової стрілки).

Покажемо, що ордината точки D_z круга дорівнює відцентровому моменту інерції J_{zy}, абсциса — моменту інерції відносно даної осі z. Маємо

$$D_zK_z = CD_z \sin 2\alpha = \frac{J_u - J_v}{2}\sin 2\alpha. \qquad (2.46)$$

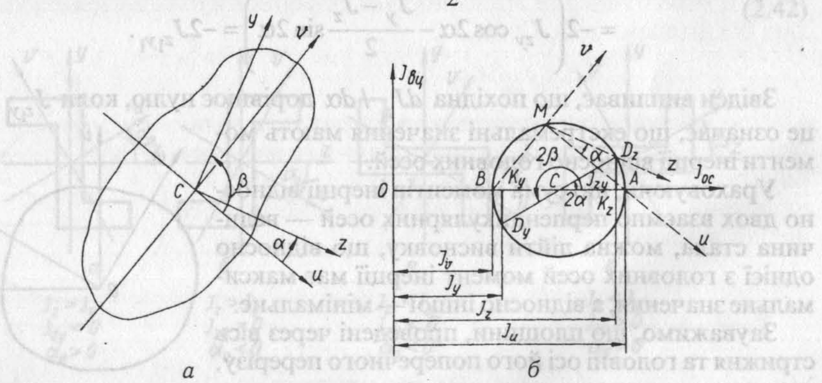


Рис. 31

Порівнюючи формули (2.46) та (2.45), бачимо, що $D_zK_z = J_{zy}$. Отже,

$$OK_z = OB + BC + CK_z = J_v + \frac{1}{2}(J_u - J_v) + \frac{1}{2}(J_u - J_v)\cos 2\alpha = \frac{1}{2}J_u(1+\cos 2\alpha) +$$

$$+\frac{1}{2}J_v(1-\cos 2\alpha) = J_u\cos^2\alpha + J_v\sin^2\alpha. \qquad (2.47)$$

Згідно з формулою (2.45), $OK_z = J_z$. Отже, у певному масштабі абсциси точок круга інерції дають нам значення осьових моментів інерції, а ординати — відцентрових.

Щоб визначити момент інерції відносно осі y, перпендикулярної до осі z і, отже, проведеної під додатним кутом $\beta = \alpha + \pi/2$ до головної осі u, із центра круга проводимо промінь CD_y під кутом $2\beta = 2(\alpha + \pi/2)$. Очевидно, він є продовженням променя CD_z. Абсциса точки D_y (відрізок OK_y) дорівнює моменту інерції J_y. Ордината цієї точки K_yD_y дає нам значення відцентрового моменту інерції з протилежним знаком $(-J_{zy})$, що відповідає повороту осей на 90°.

Зазначимо, що двом взаємно перпендикулярним осям відповідають дві точки круга D_z, D_y, що лежать на одному діаметрі.

Із точки D_z проведемо пряму (штрихова лінія на рис. 31, *б*), паралельну осі z, якій ця точка і належить. Точку M перетину прямої з кругом називають *полюсом круга інерції**. Легко показати, що лінія, яка сполучає полюс з будь-якою точкою круга, дає напрям осі, якій ця точка круга належить.

Покажемо, наприклад, що пряма MA дає напрям головної осі u. За побудовою кут ACD_z дорівнює подвоєному куту α між осями u та z. Кут D_zMA як вписаний та обпертий на ту саму дугу AD_z дорівнює половині центрального кута ACD_z, тобто α. Отже, лінія MA, що утворює з напрямом осі z кут α, паралельна осі u. Аналогічно пряма MB паралельна головній осі v.

Обернена задача. Нехай відомі моменти інерції J_z, J_y, J_{zy} площі перерізу стрижня відносно деякої системи перпендикулярних осей z, y (рис. 32, *а*). Треба визначити головні моменти інерції та положення головних осей. Для певності побудови припустимо, що $J_z > J_y$, $J_{zy} > 0$.

У геометричній площині (рис. 32, *б*) будуємо точки D_z та D_y, які відповідають моментам інерції відносно осей z та y. Абсцисами цих точок є осьові моменти інерції $OK_z = J_z$; $OK_y = J_y$, ординатами — відцентровий момент інерції J_{zy}, причому $K_zD_z = J_{zy}$, $K_yD_y = -J_{zy}$. Оскільки обидві точки належать одному діаметру, то, сполучивши їх, матимемо центр C круга інерції. Із центра C описуємо коло радіусом

$$CD_z = CD_y = \sqrt{\left(\frac{J_z - J_y}{2}\right)^2 + J_{zy}^2}, \qquad (2.48)$$

*Іноді цю точку називають *головною точкою* або *фокусом круга інерції*.

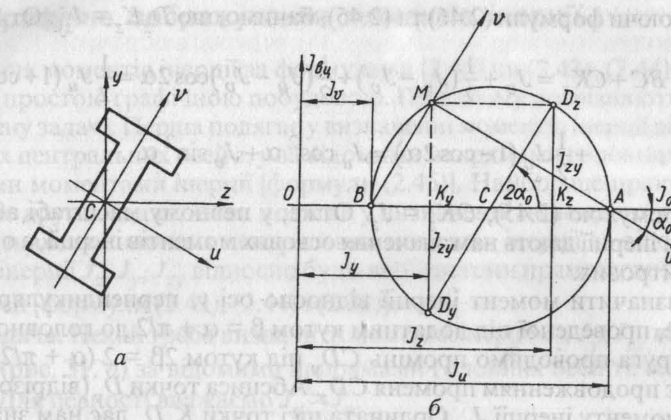


Рис. 32

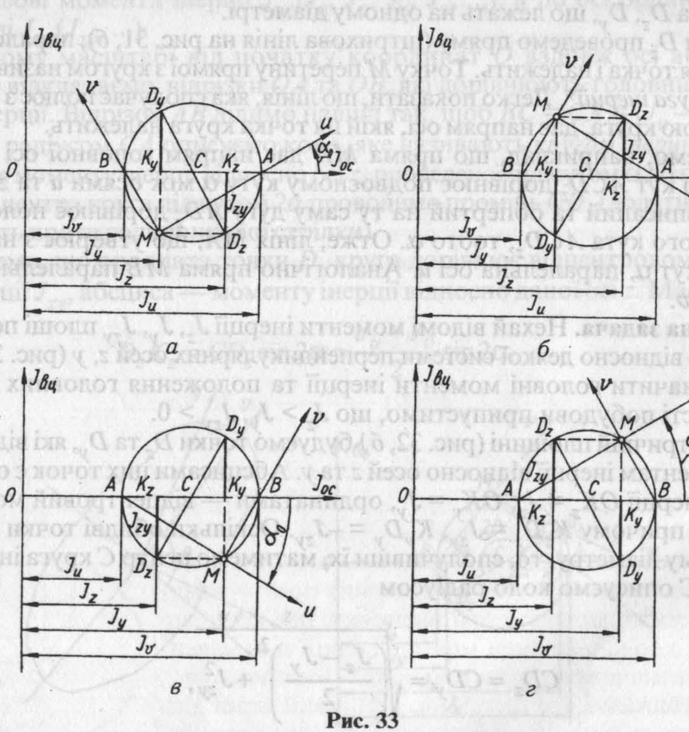


Рис. 33

яке перетинає вісь абсцис у точках A та B. Очевидно, що абсциси цих точок — відрізки OA та OB — і є шуканими головними моментами інерції J_u, J_v. Дійсно,

$$OA = OK_y + K_yC + CA = J_y + \frac{J_z - J_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_z - J_y}{2}\right)^2 + J_{zy}^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(J_z + J_y) + \sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4J_{zy}^2}\right];$$

$$OB = OK_y + K_yC - CB = J_y + \frac{J_z - J_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_z - J_y}{2}\right)^2 + J_{zy}^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(J_z + J_y) - \sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4J_{zy}^2}\right].$$

Для визначення напряму головних осей побудуємо фокус круга інерції. Для цього з точки D_z (D_y) проведемо лінію, паралельну осі z (y), до перетину з кругом у фокусі M. Сполучаючи фокус з точками A, B круга, дістанемо напрям головних осей u та v (рис. 32, *б*).

Графічне розв'язання оберненої задачі відповідно до чотирьох схем, зображених на рис. 29, наведено на рис. 33.

§ 11. Поняття про радіус і еліпс інерції

Момент інерції фігури відносно будь-якої осі можна подати у вигляді добутку площі фігури на квадрат деякої величини, що називають *радіусом інерції*:

$$J_z = \int_F y^2 dF = Fi_z^2, \tag{2.49}$$

де i_z — радіус інерції відносно осі z.

Із виразу (2.49) випливає, що

$$i_z = \sqrt{J_z / F}. \tag{2.50}$$

Аналогічно радіус інерції площі перерізу відносно осі y

$$i_y = \sqrt{J_y / F} \tag{2.51}$$

Головним центральним осям інерції відповідають головні радіуси інерції

$$i_u = \sqrt{J_u / F}; \quad i_v = \sqrt{J_v / F}. \tag{2.52}$$

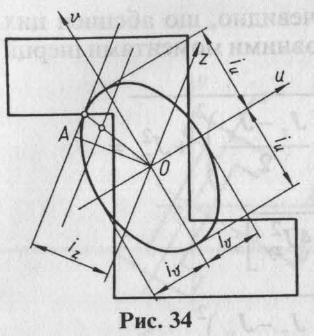


Рис. 34

Наприклад, для прямокутника, зображеного на рис. 15, головні радіуси інерції

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{F}} = \sqrt{\frac{bh^3}{12bh}} = \frac{h}{2\sqrt{3}}; \; i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} = \frac{b}{2\sqrt{3}}.$$

Побудуємо на головних центральних осях інерції фігури еліпс з півосями, що дорівнюють головним радіусам інерції, причому вздовж осі u відкладаємо відрізки i_v, а вздовж осі v — відрізки i_u (рис. 34). Цей еліпс, який називають *еліпсом інерції,* має таку властивість. Радіус інерції відносно довільної осі z визначається перпендикуляром OA, поставленим із центра еліпса на дотичну до еліпса, паралельну цій осі. Для визначення точки дотику досить провести паралельно даній осі z будь-яку хорду. Точка перетину еліпса з прямою, що сполучає центр O із серединою хорди, і є точкою дотику. Виміривши потім відрізок $OA = i_z$, знаходимо момент інерції

$$J_z = Fi_z^2$$

§ 12. Порядок розрахунку

Можна рекомендувати такий порядок визначення положення головних осей та значень головних центральних моментів інерції складного поперечного перерізу, що складається з простих частин, характеристики яких легко дістати.

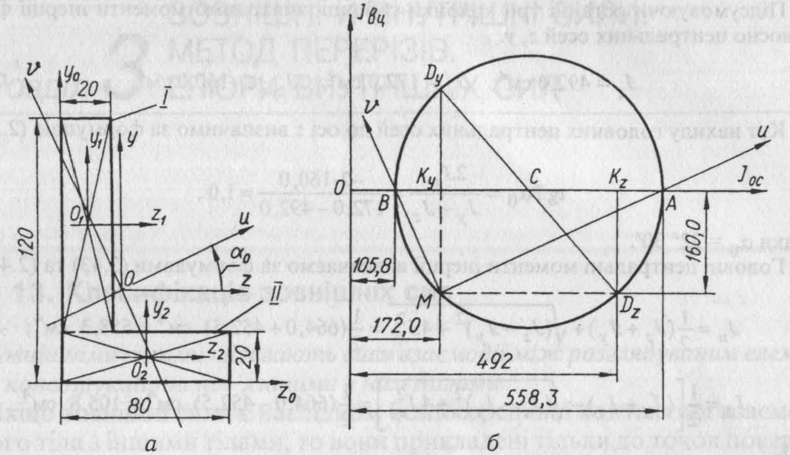
1. Проводимо довільну систему прямокутних координат. Розбиваємо фігуру на прості частини та визначаємо за формулами (2.5) положення її центра ваги.

2. Проводимо початкову систему центральних осей z, y так, щоб можна було найпростіше визначити моменти інерції частин фігури відносно цих осей. Для цього знаходимо моменти інерції частин фігури відносно їхніх власних центральних осей, проведених паралельно осям z, y, та користуємося формулами переходу до паралельних осей (2.25) та (2.26). У такий спосіб знаходимо значення J_z, J_y, J_{zy}.

3. Визначаємо із формули (2.38) кут нахилу головних центральних осей, причому вісь, проведену під меншим кутом (додатним чи від'ємним), позначаємо літерою u, а перпендикулярну до неї — літерою v.

4. За формулами (2.43) та (2.44) визначаємо головні моменти інерції.

Приклад 1. *Для перерізу, зображеного на рис. 35, а, визначимо положення головних осей інерції, головні моменти інерції та радіуси інерції. Координати центра ваги цієї фігури в системі осей z_0y_0 такі (див. табл. 1): $z_0 = 2{,}33$ см; $y_0 = 4{,}33$ см.*



а б

Рис. 35

Проводимо початкову систему центральних осей z, y паралельно сторонам кутника. Для визначення моментів інерції відносно цих осей розбиваємо фігуру на прості частини — прямокутники I і II — та проводимо через їхні центри ваги власні центральні осі z_1, y_1 та z_2, y_2 паралельно сторонам.

Моменти інерції кожного прямокутника відносно власних центральних осей легко визначити за формулами (2.10) і (2.11):

$$J_{z_1}^I = \frac{2 \cdot 10^3}{12} = 166{,}7 \text{ см}^4; \; J_{y_1}^I = \frac{10 \cdot 2^3}{12} = 6{,}7 \text{ см}^4;$$

$$J_{z_2}^{II} = \frac{8 \cdot 2^3}{12} = 5{,}33 \text{ см}^4; \; J_{y_2}^{II} = \frac{2 \cdot 8^3}{12} = 85{,}3 \text{ см}^4.$$

Моменти інерції кожної простої фігури відносно центральних осей z, y знаходимо за формулами переходу до паралельних осей — (2.25) та (2.26). Наприклад:

$$J_z^I = J_{z_1}^I + F_1 a_1^2 = 166{,}7 + 20 \cdot 2{,}67^2 \text{ см}^4 = \overset{309{,}3}{\cancel{308{,}1}} \text{ см}^4;$$

$$J_{zy}^I = J_{z_1 y_1}^I + F_1 a_1 b_1 = 0 - 20 \cdot 2{,}67 \cdot 1{,}33 \text{ см}^4 = -71 \text{ см}^4.$$

Результати обчислень зводимо в табл. 2.

Таблиця 2

Номер частини фігури	Площа частини F_i, см^2	Координати центра ваги частини фігури в системі zOy, см		$F_ia_i^2$	$F_ib_i^2$	$F_ia_ib_i$	Моменти інерції частини, см^4, відносно					
							власних центральних осей			центральних осей фігури		
		a_i	b_i	см^4			J_{z_i}	J_{y_i}	J_{ziyi}	J_z^i	J_y^i	J_{zy}^i
I	20	2,67	–1,33	142,6	35,4	–71	166,7	6,7	0	309,3	42,1	–71
II	16	–3,33	1,67	177,4	44,6	–89	5,3	85,3	0	182,7	129,9	–89

Підсумовуючи останні три колонки таблиці, знаходимо моменти інерції фігури відносно центральних осей z, y:

$$J_z = 492{,}0 \text{ см}^4; \quad J_y = 172{,}0 \text{ см}^4; \quad J_{zy} = -160{,}0 \text{ см}^4.$$

Кут нахилу головних центральних осей до осі z визначимо за формулою (2.38):

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{zy}}{J_y - J_z} = \frac{-2 \cdot 160{,}0}{172{,}0 - 492{,}0} = 1{,}0,$$

звідки $\alpha_0 = 22° \, 30'$.

Головні центральні моменти інерції визначаємо за формулами (2.43) та (2.44)

$$J_u = \frac{1}{2}(J_z + J_y) + \sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4J_{zy}^2} = \frac{1}{2}(664{,}0 + 452{,}5) \text{ см}^4 = 558{,}3 \text{ см}^4;$$

$$J_v = \frac{1}{2}\left[(J_z + J_y) - \sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4J_{zy}^2}\right] = \frac{1}{2}(664{,}0 - 452{,}5) \text{ см}^4 = 105{,}8 \text{ см}^4.$$

Головні центральні радіуси інерції

$$i_u = \sqrt{\frac{J_u}{F}} = \sqrt{\frac{558{,}3}{36}} \text{ см} = 3{,}94 \text{ см}; \quad i_v = \sqrt{\frac{J_v}{F}} = \sqrt{\frac{105{,}8}{36}} \text{ см} = 1{,}71 \text{ см}.$$

Графічне розв'язання задачі наведено на рис. 35, *б*.

Розділ 3 ЗОВНІШНІ Й ВНУТРІШНІ СИЛИ. МЕТОД ПЕРЕРІЗІВ. ЕПЮРИ ВНУТРІШНІХ СИЛ

§ 13. Класифікація зовнішніх сил

Зовнішніми силами називають сили взаємодії між розглядуваним елементом конструкції та пов'язаними з ним тілами.

Якщо зовнішні сили є наслідком безпосередньої контактної взаємодії даного тіла з іншими тілами, то вони прикладені тільки до точок поверхні тіла в місці контакту і називаються *поверхневими силами*. Поверхневі сили можуть бути неперервно розподілені по всій поверхні тіла або її частині, наприклад тиск пари в котлі, вітрове та снігове навантаження, тиск газу в циліндрі двигуна.

Навантаження, що припадає на одиницю площі, називається *інтенсивністю навантаження*. Її, як правило, позначають p й виражають у паскалях (Па) або кратних йому одиницях (кПа, МПа, ГПа). Часто навантаження, розподілене по поверхні (рис. 36, *а*), зводять до головної площини (рис. 36, *б*), унаслідок чого створюється навантаження, розподілене по лінії, або *лінійне навантаження*. Інтенсивністю такого навантаження q, Н/м, кН/м, МН/м, називають навантаження, що припадає на одиницю довжини лінії. Інтенсивність може бути змінною по цій довжині. Характер зміни навантаження, як правило, зображують у вигляді епюри (графіка) q.

У разі рівномірно розподіленого навантаження (рис. 36, *а*) епюра q прямокутна (рис. 36, *б*). При дії гідростатичного тиску епюра навантаження q трикутна (рис. 37). Бувають епюри q і більш складних видів: трапецієподібна, синусоїдна та ін.

Зазначимо, що *рівнодійна розподіленого навантаження чисельно дорівнює площі його епюри і прикладена в центрі її ваги*.

Якщо навантаження розподілене по невеликій частині поверхні тіла, то його завжди замінюють рівнодійною, яку називають *зосередженою силою* P, Н, кН або МН. Крім того, бувають навантаження, які можна подати у вигляді *зосередженого моменту* (пари). Моменти M (Н · м, кН · м або МН · м) зображатимемо одним із двох способів, наведених на рис. 38, *а, б*. Іноді момент зручно подавати у вигляді вектора, перпендикулярного до площини дії пари. Вектор моменту домовимося завжди вважати правогвинтовим. Для того щоб відрізняти його від вектора сили, лінію вектора-моменту зображують хвилястою (рис. 38, *г*) або ставлять дві стрілки (рис. 38, *в*).

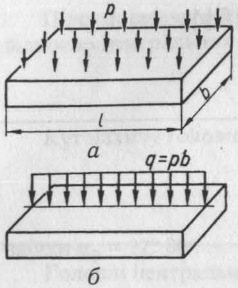


Рис. 36

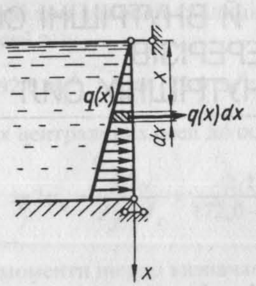


Рис. 37

Бувають такі навантаження, які не є наслідком контакту двох тіл, наприклад власна вага, сили інерції тіла, що рухається, та ін. Ці сили прикладені в кожній точці об'єму, який займає тіло, і тому називаються *об'ємними* або *масовими силами*. Власна вага деталей або частин машин та споруд, як правило, менша, ніж інші навантаження, що діють на них. Тому, якщо немає особливого застереження, далі власну вагу не братимемо до уваги.

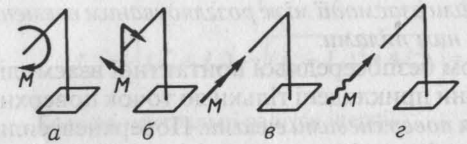


Рис. 38

Залежно від характеру прикладання сил у часі розрізнюють навантаження статичні й динамічні. Навантаження вважається *статичним*, якщо воно відносно повільно й плавно (хоча б протягом кількох секунд) зростає від нуля до свого граничного значення, а далі залишається незмінним. При цьому можна знехтувати прискореннями деформованих мас, а отже, й силами інерції.

Динамічні навантаження супроводжуються значними прискореннями як деформованого тіла, так і тіл, що взаємодіють з ним. При цьому виникають сили інерції, якими не можна нехтувати. Динамічні навантаження поділяють на миттєво прикладені, ударні та повторно-змінні.

Навантаження вважається *миттєво прикладеним*, якщо воно зростає від нуля до свого граничного значення за дуже малий проміжок часу (частки секунди). Таким є навантаження при займанні пального в циліндрі двигуна внутрішнього згоряння або при зрушуванні з місця поїзда.

Для *ударного навантаження* характерне те, що в мить його прикладання тіло, яке спричинює навантаження, має певну кінетичну енергію. Таке навантаження утворюється, наприклад, при забиванні паль за допомогою копра, в деталях механічного ковальського молота.

Багато деталей машин (шатуни, вали, осі залізничних вагонів тощо) зазнають дії навантажень, які безперервно й періодично змінюються в часі. Такі навантаження називають *повторно-змінними*. Вони, як правило, пов'язані з рухами деталей, що циклічно змінюються. Це зворотно-поступальні рухи штока поршня, коливання елементів конструкцій тощо.

§ 14. Внутрішні сили. Метод перерізів. Епюри

Між сусідніми частинками тіла (кристалами, молекулами, атомами) завжди є певні сили взаємодії, тобто внутрішні сили. Ці сили в усіх випадках намагаються зберегти тіло як єдине ціле, протидіють усякій спробі

змінити взаємне розміщення частинок. Отже, внутрішні сили, що діють між двома будь-якими частинками, в навантаженому та ненавантаженому тілі будуть різними.

В опорі матеріалів не розглядають та не беруть до уваги внутрішні сили, що діють в тілі, яке перебуває в своєму природному (ненавантаженому) стані, а вивчають й визначають тільки ті додаткові внутрішні сили, які виникають внаслідок навантажування тіла. Тому надалі, кажучи про внутрішні сили, матимемо на увазі власне ці додаткові сили взаємодії, що виникають внаслідок навантажування. Внутрішні сили часто називають *зусиллями*.

Для виявлення, а потім і визначення внутрішніх сил в опорі матеріалів широко застосовують *метод перерізів*.

Розглянемо довільне тіло, навантажене самозрівноваженою системою сил. У місці, яке нас цікавить, подумки розсічемо його деякою площиною на дві частини — *А* і *В* (рис. 39, *а*). При цьому переріз тепер матиме два боки: один, що належить частині *А* тіла (лівий), і другий, що належить частині *В* (правий). У кожній точці обох боків перерізу діятимуть сили взаємодії (рис. 39, *б*). Виходячи із уведеної гіпотези про суцільність матеріалу, доводиться зважати на те, що внутрішні сили діють в усіх точках проведеного перерізу і, отже, є розподіленим навантаженням. Залежно від форми тіла і характеру зовнішніх навантажень інтенсивність внутрішніх сил у різних точках може бути різною.

Слід зазначити, що внутрішні сили, які діють по перерізу, що належить частині *А* тіла, відповідно до третього закону Ньютона дорівнюють за модулем та протилежні за напрямом внутрішнім силам, які діють по перерізу, що належить частині *В* тіла (рис. 39, *б*). Інакше кажучи, внутрішні сили, що діють на різні частини тіла, взаємні. Як усяку систему сил, їх можна звести до однієї точки (як правило, до центра ваги перерізу), внаслідок чого на кожному боці перерізу матимемо головний вектор та головний момент внутрішніх сил у перерізі (рис. 39, *в*).

Зокрема, стрижень розсікають площиною, перпендикулярною до осі, тобто поперечним перерізом (рис. 40, *а*). Якщо головний вектор та головний момент внутрішніх сил спроекціювати на вісь стрижня *x* та головні центральні осі перерізу *y* та *z*, то на кожному боці перерізу матимемо шість внутрішніх силових факторів (рис. 40, *б*): три сили (N, Q_y, Q_z) і три моменти (M_x, M_y, M_z). Ці величини називають *внутрішніми зусиллями в перерізі стрижня*.

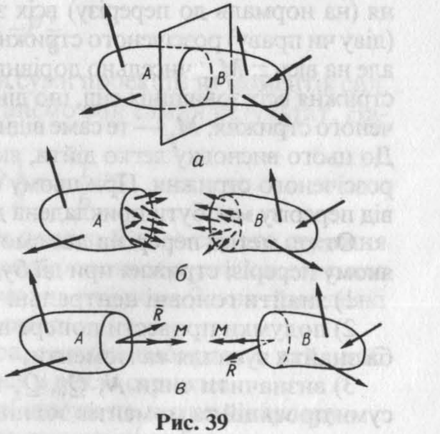


Рис. 39

Зусилля N спричинює поздовжню деформацію стрижня (розтягання або стискання); Q_y та Q_z — зсув боків перерізу відповідно в напрямах осей *y* та *z*; M_x —

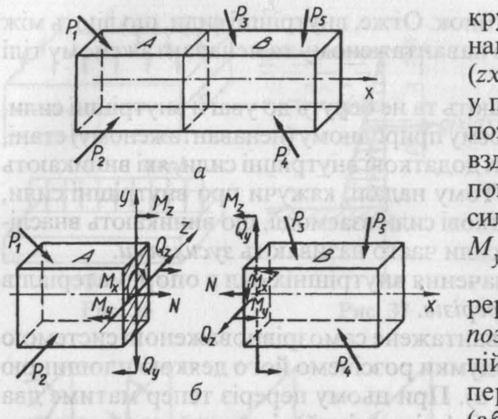


Рис. 40

кручення стрижня; M_y та M_z — згинання стрижня в головних площинах (zx та yz). Тому для зусиль і моментів у перерізі прийняті такі назви: N — поздовжня або осьова (напрямлена вздовж осі стрижня) сила; Q_y, Q_z — поперечні (рідше перерізувальні) сили; $M_x = M_{кр}$ — крутний момент; M_y, M_z — згинальні моменти.

Для зусиль та моментів у перерізі можна дати такі означення: *поздовжня сила N* — це сума проекцій усіх внутрішніх сил, що діють у перерізі, на нормаль до перерізу (або на вісь стрижня); *поперечні сили Q_y* та Q_z — це суми проекцій усіх внутрішніх сил у перерізі на головні центральні осі перерізу y та z відповідно; *крутний момент M_x* (або $M_{кр}$) — це сума моментів усіх внутрішніх сил у перерізі відносно осі стрижня; *згинальні моменти M_y* та M_z — це суми моментів усіх внутрішніх сил у перерізі відносно головних центральних осей перерізу y та z відповідно.

Кожне з цих зусиль або моментів, як уже зазначалось, є наслідком взаємодії частинок розсіченого тіла, а тому має подаватись у вигляді двох протилежно напрямлених, проте однакових за модулем векторів або моментів (рис. 40, *б*). Сукупність величин N, Q_y, Q_z, ..., прикладених до правого боку перерізу, замінює дію вилученої лівої частини стрижня на праву частину; сукупність зусиль та моментів, що прикладені до лівого боку перерізу, визначають дію правої частини стрижня на ліву.

Для практичного обчислення зусиль та моментів у перерізі доводиться зважати на таке: N чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проекцій на вісь стрижня (на нормаль до перерізу) всіх зовнішніх сил, що діють на одну з частин (ліву чи праву) розсіченого стрижня; Q_y — те саме, але на вісь y; Q_z — те саме, але на вісь z; $M_{кр}$ чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів відносно осі стрижня всіх зовнішніх сил, що діють на одну із частин (ліву чи праву) розсіченого стрижня; M_y — те саме відносно осі y; M_z — те саме, але відносно осі z. До цього висновку легко дійти, якщо розглянути рівновагу кожної з частин розсіченого стрижня. При цьому сума проекцій (або моментів) сил ліворуч від перерізу має бути прикладена до правої частини стрижня, і навпаки.

Отже, метод перерізів дає змогу знайти всі зусилля та моменти в будь-якому перерізі стрижня при дії будь-якого навантаження. Для цього треба:

1) знайти головні центральні осі поперечних перерізів стрижня;

2) подумки провести поперечний переріз стрижня в тому місці, де треба знайти зусилля та моменти;

3) визначити сили N, Q_y, Q_z та моменти $M_{кр}$, M_y, M_z як алгебраїчні суми проекцій та моментів зовнішніх сил, що діють на одну із частин (ліву

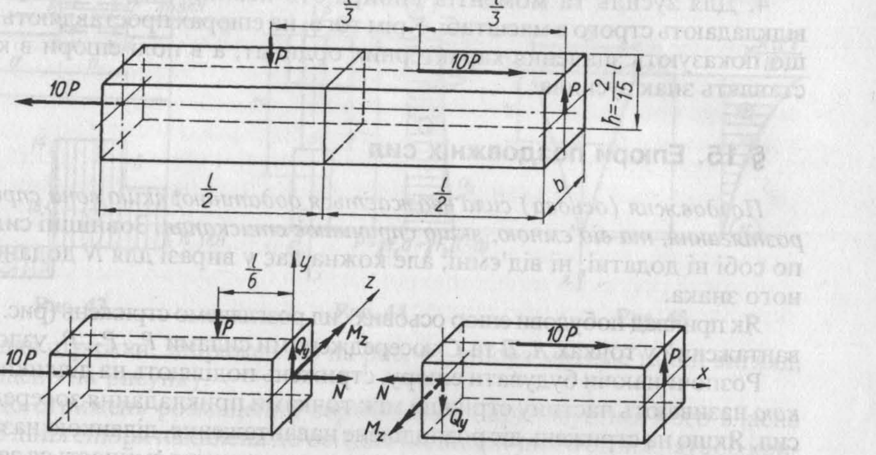


Рис. 41

чи праву відносно перерізу) розсіченого стрижня (як правило, на ту, де проекції та моменти знаходяться простіше).

Як ілюстрацію до використання методу перерізів розглянемо такий приклад: знайти зусилля та моменти в перерізі, що розміщений посередині стрижня (рис. 41).

Оскільки переріз стрижня — це прямокутник, то головними центральними осями перерізу мають бути осі симетрії прямокутника. Зусилля та моменти в перерізі знаходимо як суми проекцій та моментів сил, що діють на ліву частину розсіченого стрижня:

$$N = 10P; \quad Q_y = P; Q_z = 0; \quad M_{кр} = 0;$$

$$M_y = 0; \quad M_z = -P\frac{l}{6}.$$

Неважко перевірити, що, обчислюючи суми проекцій та моментів сил, які діють на праву частину стрижня, дістанемо той самий результат. Наприклад,

$$M_z = -10P\frac{1}{2}\frac{2}{15}l + P\frac{1}{2} = -\frac{1}{6}Pl.$$

Зусилля та моменти в різних перерізах одного й того самого стрижня різні. *Графіки (діаграми), що показують, як змінюється внутрішнє зусилля при переході від перерізу до перерізу, називають епюрами.* Зазначимо деякі правила, що застосовують при побудові епюр:

1. Вісь (базу), на якій будується епюра, завжди вибирають так, щоб вона була паралельна або просто збігалася з віссю стрижня.
2. Ординати епюри відкладають від осі епюри по перпендикуляру.
3. Штрихують епюри лініями, які перпендикулярні до бази.

4. Для зусиль та моментів вибирають певний масштаб. Ординати відкладають строго в масштабі. Крім того, на епюрах проставляють числа, що показують значення характерних ординат, а в полі епюри в кружку ставлять знак зусилля.

§ 15. Епюри поздовжніх сил

Поздовжня (осьова) сила вважається додатною, якщо вона спричинює розтягання, та від'ємною, якщо спричинює стискання. Зовнішні сили самі по собі ні додатні, ні від'ємні, але кожна дає у виразі для N доданок певного знака.

Як приклад побудови епюр осьових сил розглянемо стрижень (рис. 42), навантажений у точках A, B та C зосередженими силами P_1, P_2, P_3 уздовж осі.

Розпочинаючи будувати епюру, стрижень поділяють на ділянки. *Ділянкою* називають частину стрижня між точками прикладання зосереджених сил. Якщо на стрижень діє розподілене навантаження, ділянкою називають частину стрижня, на якій розподілене навантаження змінюється за одним законом.

У розглядуваному прикладі дві ділянки — I (AB) та II (BC).

Щоб побудувати епюри, треба скласти вирази для осьових сил у довільному перерізі кожної ділянки.

Виберемо початок координат у крайній лівій точці стрижня; вісь x напрямлено вздовж його осі. У довільному перерізі будь-якої ділянки на відстані x від початку координат знаходимо осьову силу як суму проекцій усіх зовнішніх сил ліворуч чи праворуч від перерізу, що розглядається:

I ділянка ($0 \le x < a$)

ліворуч: $N(x) = P_1 = 2$ кН;

праворуч: $N(x) = P_2 - P_3 = (5 - 3)$ кН $= 2$ кН;

II ділянка ($a < x \le l$)

ліворуч: $N(x) = P_1 - P_2 = (2 - 5)$ кН $= -3$ кН;

праворуч: $N(x) = -P_3 = -3$ кН.

Оскільки ці величини не залежать від абсциси перерізу, то в усіх перерізах ділянки I поздовжня сила $N = 2$ кН, а для будь-якого перерізу ділянки II $N = -3$ кН. Відкладаючи здобуті ординати від осі епюри, будуємо епюру N. Зазначимо, що *штриховка епюри показує ординати, які відкладаються*. У перерізах A, B та C на епюрі маємо стрибки, що дорівнюють відповідно 2,5 та 3 кН, тобто тим самим силам, які прикладені до стрижня в цих перерізах.

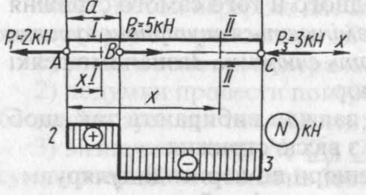


Рис. 42

Якщо на стрижень діють тільки зосереджені сили, то лінії епюри паралельні її осі (епюра N складається з прямокутників і має стрибки в тих перерізах, де прикладені зовнішні сили). Так, неважко переконатися, що для стрижня, зображеного на рис. 43, епюра матиме такий вигляд, як наведено на рисунку.

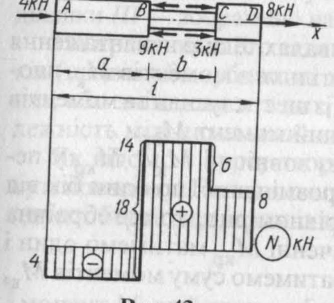


Рис. 43

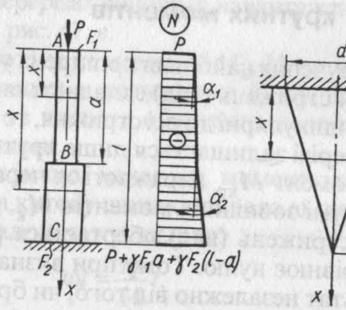


Рис. 44

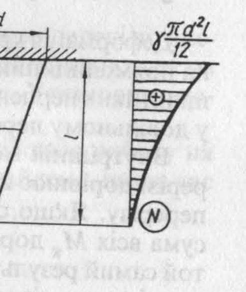


Рис. 45

Якщо стрижень розміщений вертикально і враховується його власна вага, то лінія епюри нахилена до осі (для циліндричного стрижня) або криволінійна (для стрижня з розмірами перерізів, що неперервно змінюються).

Приклад 2. *Побудуємо епюру N для східчастого стрижня з урахуванням його власної ваги (рис. 44). Площа перерізу верхньої частини стрижня — F_1, нижньої — F_2. Питома вага γ, Н/м^3.*

Початок координат вибираємо в точці A (на рисунку наведено тільки вісь x). Поздовжню силу в будь-якому перерізі знаходимо як суму зовнішніх сил (щоб спочатку не визначати реакції в опорі). Тоді для ділянки AB

$$N(x) = -P - \gamma F_1 x, \quad (0 \le x \le a);$$

для BC

$$N(x) = -P - \gamma F_1 a - \gamma F_2 (x - a), \quad (a < x \le l).$$

Це рівняння похилих прямих, отже, епюра N трапецієподібна. Проте, оскільки площі поперечних перерізів на ділянках різні, нахил епюри на ділянках AB та BC неоднаковий:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \gamma F_1; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \gamma F_2.$$

При $x = l$ із другого рівняння знаходимо найбільше за модулем поздовжнє зусилля: $N = -[P + \gamma F_1 a + \gamma F_2 (l - a)]$. Цій самій величині дорівнює й реакція в закріпленні.

Приклад 3. *Побудуємо епюру N для конічного стрижня від його власної ваги (рис. 45).*

При будь-якому значенні x осьове зусилля в перерізі дорівнює вазі нижньої відносно перерізу частини конуса. Діаметр основи цієї частини

$$d(x) = \frac{d}{l}(l - x),$$

тому

$$N(x) = \frac{\gamma}{3}\frac{\pi d^3}{4 l^2}(l - x)^3.$$

Звідси випливає, що крива епюри буде кубічною параболою, причому

$$\left.\frac{dN(x)}{dx}\right|_{x=l} = -\left.\frac{\pi \gamma d^2}{4 l^2}(l - x)^2\right|_{x=l} = 0.$$

Отже, в нижній точці епюра торкається осі. При $x = 0$

$$N_{max} = \frac{\gamma \pi d^2 l}{12}.$$

§ 16. Епюри крутних моментів

Деформація кручення найбільш поширена у валах. Якщо навантаження на прямолінійний стрижень (вал) складається тільки з моментів $M_к$, площини яких перпендикулярні до осі стрижня, то із шести зусиль та моментів у довільному перерізі залишається лише крутний момент $M_{кр}$.

Внутрішній момент $M_{кр}$ виражається через зовнішні $M_к$: $M_{кр}$ у перерізі дорівнює сумі зовнішніх моментів $M_к$, розміщених по один бік від перерізу. Якщо стрижень (вал) обертається рівномірно, то алгебраїчна сума всіх $M_к$ дорівнює нулю. Тому при визначенні $M_{кр}$ матимемо один і той самий результат незалежно від того, чи братимемо суму моментів $M_к$, розміщених ліворуч або праворуч від перерізу.

Крутний момент $M_{кр}$ вважається додатним, якщо при спостеріганні з торця вздовж осі розглядуваної частини він намагається обертати переріз за годинниковою стрілкою (рис. 46).

Розглянемо як приклад побудову епюр крутних моментів для трансмісійного вала (рис. 47, *а*).

Розбиваємо стрижень на ділянки *I, II, III, IV*. Вибираємо початок координат у крайній лівій точці вала. Оскільки тертям у підшипниках нехтуємо, то в будь-якому перерізі на ділянці *I* ($0 \le x < a$)

$$M_{кр} = 0.$$

Провівши довільні перерізи зі змінною абсцисою x, на решті ділянок вала дістанемо відповідно:

II ділянка ($0 < x < 2a$); $M_{кр} = M_{к1} = 160$ Н · м (ліворуч);

III ділянка ($2a < x < 3a$); $M_{кр} = M_{к1} + M_{к2} = (160 + 80)$ Н · м = = 240 Н · м (ліворуч);

IV ділянка ($3a < x < 5a$); $M_{кр} = M_{к1} + M_{к2} - M_{к3} =$ = (160 + 80 – 300) Н · м = – 60 Н · м (ліворуч);

$M_{кр} = -M_{к4} = -60$ Н · м (праворуч).

Крутний момент на кожній ділянці не залежить від абсциси перерізу, тому епюра крутних моментів має вигляд трьох прямокутників (рис. 47, *б*). У перерізах, де прикладені зосереджені зовнішні моменти $M_к$, утворюються стрибки на значення цих моментів. Зазначимо, що в місці стрибка крутні моменти не визначають. Їх обчислюють на нескінченно близьких відстанях ліворуч та праворуч від стрибка.

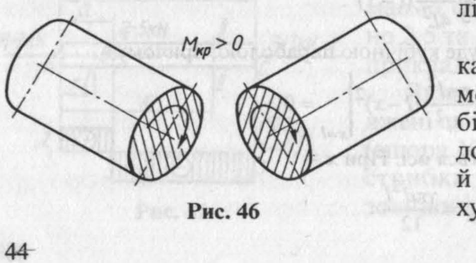


Рис. 46

Побудована епюра (рис. 47, *б*) показує, що хоч до вала й прикладено момент $M_{к3} = 300$ Н · м, проте найбільший крутний момент у перерізі дорівнює лише 240 Н · м. Це значення й треба використовувати при розрахунках на міцність та жорсткість. Напрями крутних моментів у перерізах найбільш навантаженої частини вала — ділянки *III* — зображено на рис. 47, *в*.

На практиці часто задаються не моменти $M_к$, Н · м, прикладені до дисків (шківів або зубчастих коліс), а потужності K, Вт, що передаються на них або знімаються з них, та частота обертання вала n. Установимо залежність між цими величинами.

Як відомо з курсу теоретичної механіки, момент здійснює роботу на куті повороту. Позначивши кутову швидкість вала ω, знайдемо, що за час t диск обернеться разом із валом на кут ωt, рад:

$$\omega t = \frac{\pi n}{30} t,$$

і момент $M_к$ здійснить роботу

$$A = M_к \omega t = \frac{\pi n}{30} M_к t,$$

де A — робота, Дж; $M_к$ — момент, Н · м; n — частота обертання, хв$^{-1}$; t — час, с.

Тоді потужність (робота за 1 с)

$$K = \frac{A}{t} = \frac{\pi n M_к}{30}.$$

Звідси випливає, що

$$M_к = 9{,}549 \frac{K}{n}, \qquad (3.1)$$

де K — потужність, Вт.

Раніше в технічній літературі використовувалася позасистемна одиниця потужності — кінська сила (1 к. с. ≈ 736 Вт). Якщо потужність, що передається або знімається, дорівнює N, к. с., то $K = 736\,N$ і з виразу (3.1)

$$M_к = 9{,}549 \cdot 736 \frac{N}{n} = 7028{,}8 \frac{N}{n}. \qquad (3.2)$$

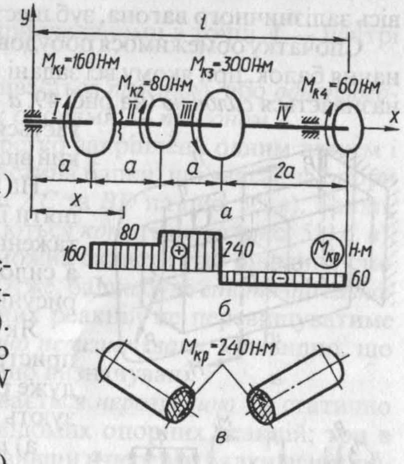


Рис. 47

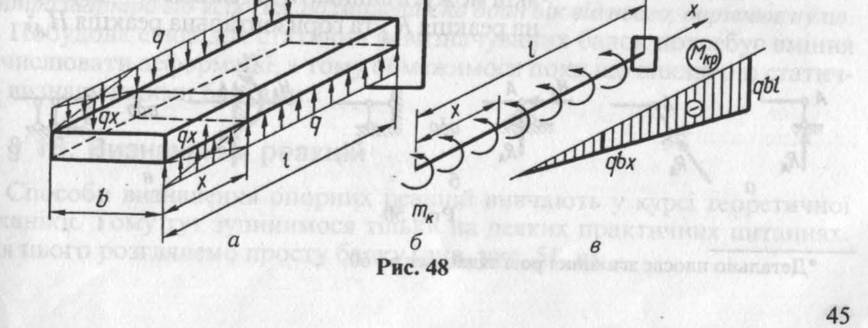


Рис. 48

Приклад 4. *Побудуємо епюру крутних моментів для бруса, який навантажено за схемою (рис. 48, а).*

Легко побачити, що навантаження, яке діє на стрижень, еквівалентне розподіленим крутним моментам $m_к$ (рис. 48, *б*) інтенсивністю qb, Н · м/м.

Брус має лише одну ділянку, в довільному перерізі якої

$$M_{кр}(x) = -m_к x = -qbx, \quad (0 \le x \le l);$$

$$M_{кр}(0) = 0; \quad M_{кр}(l) = -qbl.$$

У результаті матимемо трикутну епюру (рис. 48, *в*), причому $M_{кр\,max} = -qbl$ при $x = l$.

§ 17. Балки та їхні опори

Балками називатимемо прямолінійні стрижні, що працюють на згинання. В опорі матеріалів термін «балка» значно ширший, ніж у звичайному використанні цього слова: з точки зору розрахунків на міцність, жорсткість та стійкість балкою є не тільки будівельна балка, а також і вал, болт, вісь залізничного вагона, зуб шестерні тощо.

Спочатку обмежимося побудовою епюр для найпростішого випадку згинання балок, при якому всі задані навантаження діють в одній площині, що називається *силовою* (на рис. 49, *а* — площина П), причому ця площина збігається з однією із головних площин балки. Такий випадок називатимемо плоским згинанням*.

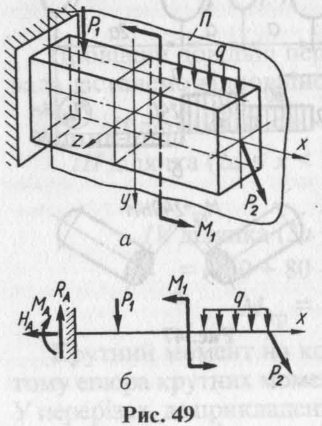


Рис. 49

На розрахунковій схемі балку прийнято замінити її віссю (рис. 49, *б*). При цьому всі навантаження, природно, зводитимуться до осі балки, а силова площина збігатиметься з площиною рисунка.

Як правило, балки мають ті чи інші опорні пристрої — опори. Конструктивні форми опор дуже різноманітні. Для розрахунку їх схематизують у вигляді трьох основних типів опор:

а) *шарнірно-рухома опора* (рис. 50, *а*), в якій може виникати тільки одна складова реакції — R_A, що напрямлена вздовж опорного стрижня;

б) *шарнірно-нерухома опора* (рис. 50, *б*), в якій можуть виникати дві складові — вертикальна реакція R_A та горизонтальна реакція H_A;

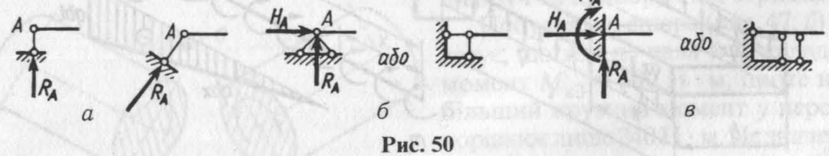


Рис. 50

*Детально плоске згинання розглядається в § 60.

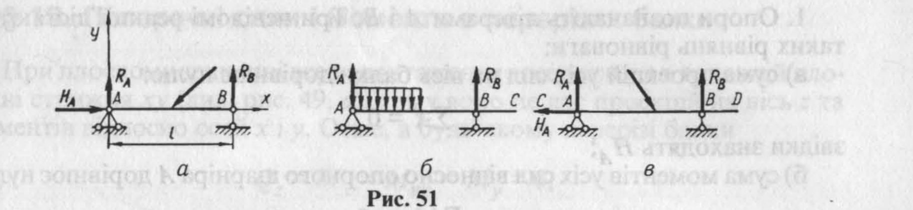


Рис. 51

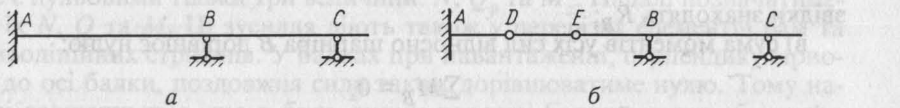


Рис. 52

в) *затиснення* (*жорстке затиснення* або *закріплення*), де можуть бути три складові — вертикальна R_A і горизонтальна H_A реакції й опорний момент M_A (рис. 50, *в*).

Усі реакції та моменти вважаються прикладеними в точці A — центрі ваги опорного перерізу.

Балка, яку наведено на рис. 51, *а*, називається *простою*, або *однопрогоновою*, або *двохопорною*, а відстань l між опорами — *прогоном*.

Консоллю називається балка, яка жорстко закріплена одним кінцем і не має інших опор (див. рис. 49, *б*), або частина балки, що звисає за опори (частина балки BC на рис. 51, *б*; частини AC та BD на рис. 51, *в*). Балки, які мають частини, що звисають, називаються *консольними* (рис. 51, *б*, *в*).

Як відомо, для плоскої системи сил можна скласти три рівняння статики для визначення невідомих реакцій. Отже, балка буде *статично визначувана*, якщо кількість невідомих опорних реакцій не перевищуватиме трьох; у противному разі балка *статично невизначувана*. Очевидно, що балки, зображені на рис. 49 та 51, статично визначувані.

Балка, зображена на рис. 52, *а*, називається *нерозрізною* і є статично невизначуваною, оскільки має п'ять невідомих опорних реакцій: три в опорі A і по одній в опорах B та C. Поставивши в перерізі балки шарніри, наприклад, в точках D і E (рис. 52, *б*), матимемо статично визначувану шарнірну балку, бо кожний такий проміжний шарнір до трьох основних рівнянь статики додає одне додаткове рівняння: *сума моментів відносно центра шарніра від усіх сил, розміщених по один бік від нього, дорівнює нулю.*

Побудова епюр для статично невизначуваних балок потребує вміння обчислювати деформації, а тому обмежимося поки що виключно статично визначуваними балками.

§ 18. Визначення реакцій

Способи визначення опорних реакцій вивчають у курсі теоретичної механіки. Тому тут зупинимося тільки на деяких практичних питаннях. Для цього розглянемо просту балку (див. рис. 51, *а*).

1. Опори позначають літерами A і B. Три невідомі реакції дістають з таких рівнянь рівноваги:

а) сума проекцій усіх сил на вісь балки дорівнює нулю:

$$\sum X = 0,$$

звідки знаходять H_A;

б) сума моментів усіх сил відносно опорного шарніра A дорівнює нулю:

$$\sum M_A = 0,$$

звідки знаходять R_B;

в) сума моментів усіх сил відносно шарніра B дорівнює нулю:

$$\sum M_B = 0,$$

звідки знаходять R_A.

2. Для контролю можна використовувати умову рівності нулю суми проекцій всіх сил на вертикаль:

$$\sum Y = 0$$

або умову рівності нулю суми моментів усіх сил відносно будь-якої точки C, що відрізняється від точок A і B, тобто

$$\sum M_C = 0.$$

Умовою $\sum Y = 0$ користуватися простіше, проте вона дає надійну перевірку тільки тоді, коли на балку не діють зосереджені моменти.

3. Перш ніж скласти рівняння рівноваги, потрібно вибрати (довільно) напрями реакцій і зобразити їх на рисунку. Якщо внаслідок розрахунку яка-небудь реакція буде від'ємною, треба на рисунку поміняти її напрям на обернений і надалі вважати цю реакцію додатною.

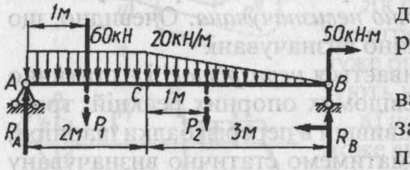


Рис. 53

4. Здебільшого навантаження перпендикулярні до осі балки. Тоді $H_A = 0$, і рівнянням $\sum X = 0$ не користуються.

5. Якщо на балку діє розподілене навантаження, то для визначення реакції її заміняють рівнодійною, яка дорівнює площі епюри навантаження й прикладена в центрі ваги цієї епюри.

Приклад 5. *Визначимо опорні реакції балки (рис. 53).*

Передусім дістаємо рівнодійні P_1 та P_2 навантажень, розподілених на ділянках AC та CB:

$$P_1 = 20 \cdot 2 = 40 \text{ кН}; \quad P_2 = \frac{1}{2} 20 \cdot 3 = 30 \text{ кН}.$$

Сила P_1 прикладена в центрі ваги прямокутника, а P_2 — у центрі ваги трикутника. Визначаємо реакції:

$$\sum M_A = 60 \cdot 1 + 40 \cdot 1 + 30 \cdot 3 + 50 - R_B \cdot 5 = 0; \quad R_B = 48 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = R_A \cdot 5 - 60 \cdot 4 - 40 \cdot 4 - 30 \cdot 2 + 50 = 0; \quad R_A = 82 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum M_C = 82 \cdot 2 - 60 \cdot 1 - 40 \cdot 1 + 30 \cdot 1 + 50 - 48 \cdot 3 = 0.$$

§ 19. Поперечні сили і моменти в перерізах балки

При плоскому згинанні все навантаження зосереджене в головній площині стрижня xy (див. рис. 49, *а*), тому воно не дає проекцій на вісь z та моментів відносно осей x і y. Отже, в будь-якому перерізі балки

$$Q_z = M_x = M_{\text{кр}} = M_y = 0,$$

і не є нульовими тільки три величини: N, Q_y та M_z. Надалі позначатимемо їх N, Q та M. Ці зусилля діють також у перерізах елементів рам та криволінійних стрижнів. У балках при навантаженні, перпендикулярному до осі балки, поздовжня сила також дорівнюватиме нулю. Тому надалі вважатимемо, що в будь-якому перерізі балки можуть бути два внутрішніх зусилля: поперечна сила Q та згинальний момент M.

Установимо такі правила знаків для Q і M у балках:

1) поперечна сила Q у перерізі додатна, якщо її вектори намагаються обертати частини розсіченої балки за годинниковою стрілкою (рис. 54, *а*);

2) згинальний момент M у перерізі додатний, якщо він спричинює стискання у верхніх волокнах балки, і напрямлений так, як зображено на рис. 54, *а*.

Від'ємні напрями Q та M наведено на рис. 54, *б*.

Для практичних розрахунків можна рекомендувати таке.

1. Якщо зовнішня сила намагається повернути балку відносно розглядуваного перерізу за годинниковою стрілкою, то у виразі для Q в цьому перерізі вона дає додатний доданок. Так, реакція R_A (рис. 55, *а*) намагається повернути балку відносно перерізу C за годинниковою стрілкою, а сили P та R — проти. Тому поперечна сила в перерізі C

$$Q_C = P_A - P,$$

або

$$Q_C = -P_B.$$

2. Якщо зовнішнє навантаження створює відносно розглядуваного перерізу момент, який спричинює стискання верхніх волокон балки, то у

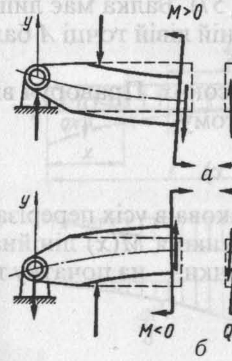


Рис. 54

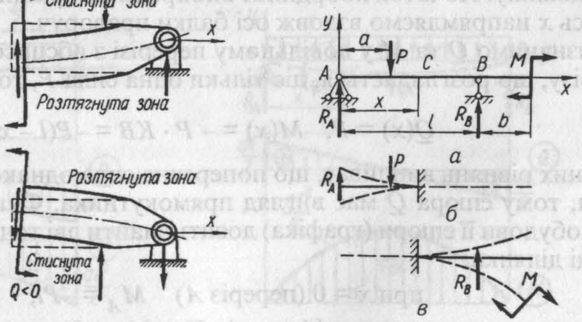


Рис. 55

Рис. 56

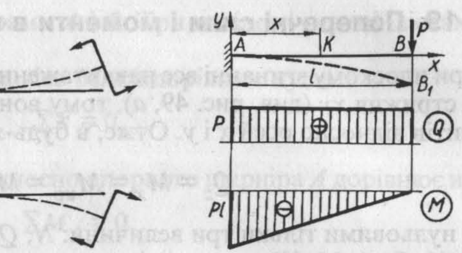


Рис. 57

виразі для M у цьому перерізі воно дає додатний доданок. Найпростіше з'ясувати знак M для консолі. Так, на двох верхніх консолях, наведених на рис. 56, *а*, навантаження відгинає балку вгору; стиснутими будуть верхні волокна, тому згинальний момент додатний. На рис. 56, *б* стиснуті нижні волокна, і $M < 0$.

У більш складних випадках (див., наприклад, рис. 55) можна уявити, що балка звільнена від усіх опор і затиснута в розглядуваному перерізі. Тоді вона перетворюється на дві консолі. Потрібно розглядати ліву консоль, якщо згинальний момент визначається як сума моментів сил, розміщених ліворуч від перерізу (рис. 55, *б*). Тоді

$$M_C = M(x) = R_A x - P(x - a).$$

Якщо M визначається як сума моментів сил, розміщених праворуч від перерізу (рис. 55, *в*), то

$$M_C = M(x) = R_B\,(l - x) - M.$$

§ 20. Побудова епюр *Q* і *M* у балках

Розглянемо порядок побудови епюр Q та M для найхарактерніших випадків навантажування балок.

Зосереджена сила на вільному кінці консолі (рис. 57). Балка має лише одну ділянку. Початок координат вибираємо в крайній лівій точці A балки, вісь x напрямляємо вздовж осі балки праворуч.

Визначимо Q та M у довільному перерізі з абсцисою x. Праворуч від перерізу, що розглядається, діє тільки одна сила P, тому

$$Q(x) = P; \quad M(x) = -P \cdot KB = -P(l - x).$$

Із цих рівнянь випливає, що поперечна сила однакова в усіх перерізах балки, тому епюра Q має вигляд прямокутника. Функція $M(x)$ лінійна. Для побудови її епюри (графіка) досить знайти дві точки — на початку та в кінці ділянки:

при $x = 0$ (переріз A) $\quad M_A = -Pl;$

при $x = l$ (переріз B) $\quad M_B = 0.$

За цими даними будуємо епюру M. Зазначимо, що додаткові ординати епюр Q та M відкладаються вгору від бази.

На рис. 57 штриховою лінією AB_1 зображено балку в деформованому стані. Як бачимо з рисунка, стиснутими є нижні волокна балки. Якщо сумістити базову лінію епюри згинальних моментів з віссю балки, то епюра M буде мовби побудованою на стиснутих волокнах.

Рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю *q*, Н/м, на консолі (рис. 58). Поперечну силу та згинальний момент у довільному перерізі K визначатимемо як наслідок дії розподіленого навантаження ліворуч від перерізу:

$$Q(x) = -q \cdot AK = -qx;$$

$$M(x) = -q \cdot AK \cdot LK = -\frac{q \cdot AK^2}{2} = -\frac{qx^2}{2}.$$

Отже, поперечна сила $Q(x)$ змінюється за законом прямої лінії, а згинальний момент $M(x)$ — за параболічним законом. Для побудови епюри Q визначаємо ординати в двох точках:

при $x = 0 \quad Q_A = 0;$

при $x = l \quad Q_B = -ql$

і проводимо пряму. Враховуючи, що епюра M криволінійна, для її побудови знаходимо ординати в трьох точках:

при $x = 0 \quad M_A = 0;$

при $x = \dfrac{l}{2} \quad M_C = -\dfrac{ql^2}{8};$

при $x = l \quad M_B = -\dfrac{ql^2}{2}$

і проводимо через добуті три точки криву. Це й буде епюра M.

Навантаження інтенсивністю *q*, Н/м, рівномірно розподілене по всій довжині прогону двохопорної балки (рис. 59). У цьому разі треба спочатку

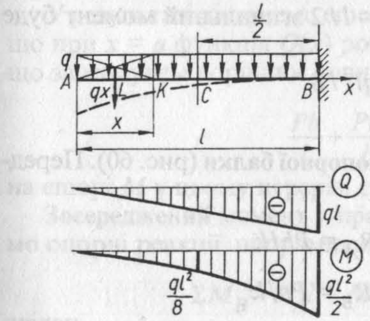


Рис. 58

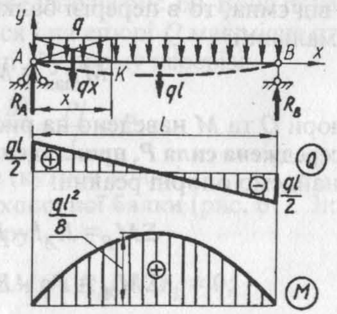


Рис. 59

визначити опорні реакції. Рівнодійна всього розподіленого навантаження дорівнює ql, і лінія її дії проходить через середину балки. Тому

$$\Sigma M_B = R_A l - ql/2 = 0; \; \Sigma M_A = R_B l - ql/2 = 0,$$

звідки

$$R_A = R_B = ql/2.$$

Обчислюючи поперечну силу і згинальний момент у довільному перерізі K як наслідок дії сил ліворуч від перерізу K, матимемо

$$Q(x) = R_A - qx = \frac{ql}{2} - qx;$$

$$M(x) = R_A x - qx\frac{x}{2} = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}.$$

Очевидно, що епюра Q буде прямолінійна, а епюра M — параболічна. Для побудови епюр дістаємо:

$$Q(0) = \frac{ql}{2}; \quad Q(l) = -\frac{ql}{2}; \quad M(0) = 0;$$

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql}{2}\frac{l}{2} - \frac{ql^2}{8} = \frac{ql^2}{8}; \quad M(l) = \frac{ql}{2}l - \frac{ql^2}{2} = 0.$$

Щоб визначити екстремальне значення згинального моменту, прирівняємо до нуля похідну від згинального моменту $M(x)$ по абсцисі x перерізу:

$$\frac{dM(x)}{dx} = \frac{ql}{2} - qx = 0;$$

звідси

$$x = l/2.$$

Оскільки друга похідна

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = -q,$$

тобто від'ємна, то в перерізі балки при $x = l/2$ згинальний момент буде максимальний:

$$M_{max} = M(l/2) = ql^2/8.$$

Епюри Q та M наведено на рис. 59.

Зосереджена сила P, прикладена до двохопорної балки (рис. 60). Передусім знайдемо опорні реакції:

$$\Sigma M_B = R_A l - Pb = 0; \quad R_A = Pb/l;$$

$$\Sigma M_A = Pa - R_B l = 0; \quad R_B = Pa/l.$$

У цьому разі маємо на балці дві ділянки.

Знаходимо Q та M у довільному перерізі K_1, розміщеному на ділянці AC $(0 \le x \le a)$:

$$Q(x) = R_A = Pb/l.$$

Отже, в усіх перерізах ділянки поперечні сили однакові й епюра Q має вигляд прямокутника.

Згинальний момент $M(x)$ змінюється за лінійним законом:

$$M(x) = R_A x = \frac{Pb}{l}x.$$

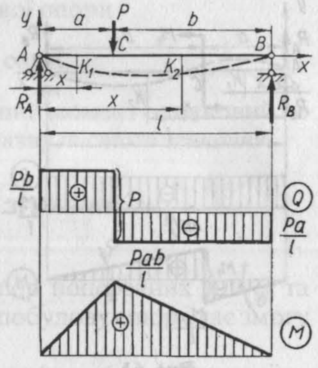


Рис. 60

Для побудови епюри визначимо ординати на межах ділянки:

при $x = 0$ $\quad M_A = 0;$

при $x = a$ $\quad M_C = Pab/l.$

У довільному перерізі K_2 на ділянці CB $(a \le x \le l)$, розглядаючи дію сил, розміщених праворуч від нього, дістанемо

$$Q(x) = -R_B = -\frac{Pa}{l}; \quad M(x) = R_B \cdot K_2B = \frac{Pa}{l}(l-x).$$

До такого самого результату можна дійти, розглядаючи дію сил, розміщених ліворуч:

$$Q(x) = R_A - P; \; M(x) = R_A \cdot AK_2 - P \cdot CK_2.$$

Епюра Q на ділянці CB, як і на ділянці AC, має вигляд прямокутника. Для побудови епюри M знайдемо значення ординат моментів у перерізах C та B:

при $x = a$ $\quad M_C = -\frac{Pa}{l}(l-a) = \frac{Pab}{l};$

при $x = l$ $\quad M_B = 0.$

У результаті дістанемо епюри, які наведено на рис. 60. Вони показують, що при $x = a$ функція $Q(x)$ розривається і на епюрі Q має місце стрибок, що за модулем дорівнює зовнішній силі P у цьому перерізі:

$$\frac{Pb}{l} + \frac{Pa}{l} = \frac{P(a+b)}{l} = \frac{Pl}{l} = P;$$

на епюрі M у цьому перерізі є перелом (кутова точка).

Зосереджений момент у прогоні двохопорної балки (рис. 61). Знаходимо опорні реакції, напрямляючи їх угору:

$$\Sigma M_B = R_A l + M_1 = 0; \quad \Sigma M_A = R_B l - M_1 = 0;$$

звідси

$$R_A = -M_1/l; \; R_B = M_1/l.$$

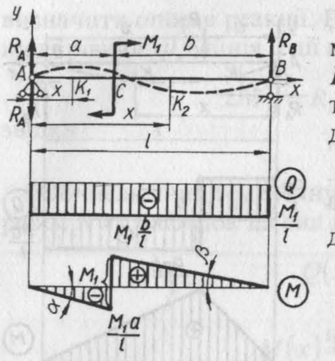


Рис. 61

Змінюємо напрям R_A на обернений. Помітивши на ділянках AC і CB довільні перерізи K_1 і K_2, запишемо рівняння для функцій $Q(x)$ та $M(x)$:

для ділянки $AC\,(0 \le x \le a)$

$$Q(x) = -R_A = -\frac{M_1}{l}; \quad M(x) = -R_A x = -\frac{M_1}{l}x;$$

для ділянки $CB\,(a \le x \le l)$

$$Q(x) = -R_B = -\frac{M_1}{l};$$

$$M(x) = -R_B \cdot K_2B = -\frac{M_1}{l}(l-x).$$

На підставі цих рівнянь будуємо епюри Q та M. Епюра M розміщена частково під віссю, частково над віссю. Оскільки вона побудована на стиснутих волокнах, бачимо, що на ділянці AC стиснутими є нижні волокна, а на ділянці CB — верхні. Цьому відповідає зображена штриховою кривою деформована вісь балки. У тому перерізі, де згинальний момент змінює знак, на осі буде точка перегину.

Неважко бачити, що

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = M_1/l,$$

а тому прямі на епюрі M на ділянках AC та CB паралельні.

Звернемо увагу на те, що там, де прикладений зовнішній момент (переріз C), на епюрі Q ніяких змін немає, функція $M(x)$ розривається, а на епюрі M має місце стрибок, що дорівнює значенню зовнішнього моменту.

У тому разі коли момент прикладений в опорному перерізі, на підставі наведених вище формул при $a = 0$ дістанемо епюри, які зображено на рис. 62.

Зосереджені моменти на опорах однопрогонової балки (рис. 63). Знаходимо опорні реакції:

$$\Sigma M_B = R_A l + M - M = 0; \quad R_A = 0;$$

$$\Sigma M_A = -R_B l + M - M = 0; \quad R_B = 0.$$

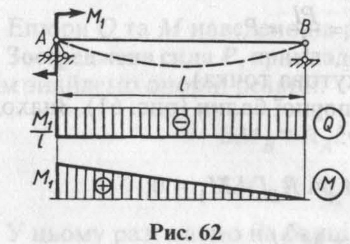


Рис. 62

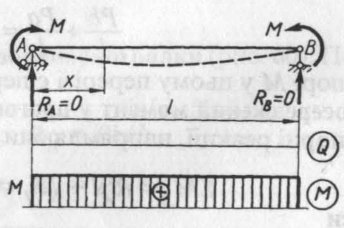


Рис. 63

Тоді для довільного перерізу на відстані x від лівої опори

$$Q(x) = R_A = 0; \quad M(x) = M = \text{const}.$$

Отже, в будь-якому перерізі $Q = 0$, а згинальний момент однаковий по всій довжині балки. Таке згинання балки має назву *чистого згинання*.

§ 21. Диференціальні залежності при згинанні. Деякі особливості епюр Q і M

Визначимо деякі характерні особливості епюр поперечних сил Q та згинальних моментів M, знання яких полегшує побудову епюр і дає змогу певною мірою контролювати правильність їх.

Розглянемо балку з довільним навантаженням (рис. 64, *а*). Розподілене навантаження вважатимемо додатним, напрямленим вгору (таке навантаження дає додатну складову для згинального моменту в будь-якому перерізі).

Виділимо на ділянці, де немає зосереджених сил і моментів, малий елемент O_1O_2. Він перебуває в рівновазі під дією зовнішнього навантаження, поперечних сил та згинальних моментів у перерізах O_1 і O_2, розміщених на відстані dx один від одного (рис. 64, *б*). Оскільки взагалі Q і M змінюються вздовж осі балки, то в перерізі O_1 маємо $Q(x)$ і $M(x)$, а в перерізі O_2 маємо $Q(x) + dQ$ і $M(x) + dM$. Для виводу, як завжди, будемо їх вважати додатними. З умови рівноваги виділеної елементарної ділянки балки завдовжки dx дістанемо

$$\Sigma Y = Q + q dx - (Q + dQ) = 0;$$

$$\Sigma M_{O_2} = M + Q dx + q dx \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0.$$

Перше рівняння дає умову

$$\frac{dQ}{dx} = q. \tag{3.3}$$

Із другого рівняння, нехтуючи членом $q dx(dx/2)$ другого порядку малості, знайдемо

$$\frac{dM}{dx} = 0. \tag{3.4}$$

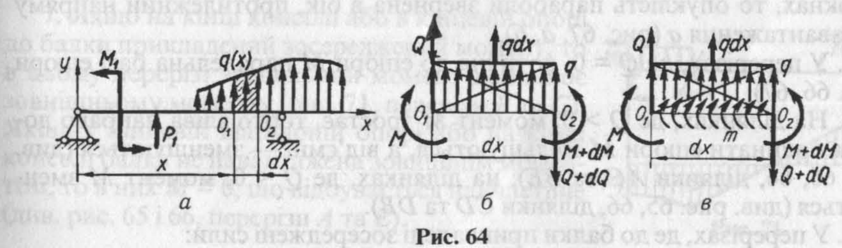


Рис. 64

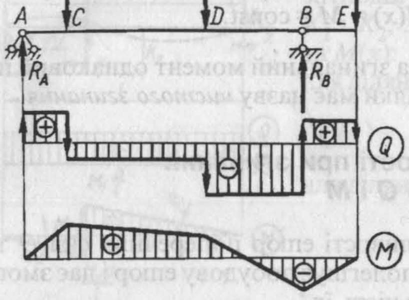


Рис. 65

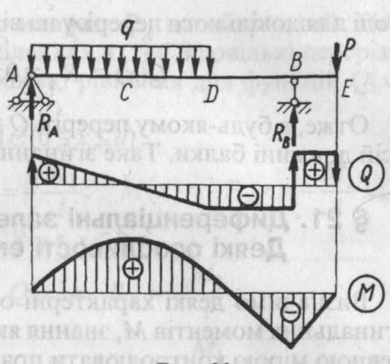


Рис. 66

На підставі формул (3.3) і (3.4) матимемо

$$\frac{d^2M}{dx^2}=q. \qquad (3.5)$$

Якщо на ділянці, яку розглядаємо, крім розподіленого навантаження діє розподілений момент m, Н · м/м (рис. 64, *в*), формула (3.4) набирає вигляду

$$\frac{dM}{dx}=Q+m; \qquad (3.6)$$

при цьому формули (3.3) і (3.5) залишаються без змін.

Співвідношення (3.3) — (3.6) називають *диференціальними залежностями при згинанні*.

Аналіз прикладів § 20 і добуті диференціальні залежності дають змогу встановити деякі особливості епюр поперечних сил та згинальних моментів.

1. На ділянках, де немає розподіленого навантаження, епюри Q окреслюються прямими, паралельними базі, а епюри M у загальному випадку — похилими прямими (рис. 65).

2. На ділянках, де до балок прикладене рівномірно розподілене навантаження q, епюра Q обмежується похилою прямою, а епюра M — квадратичною параболою (рис. 66). Оскільки епюру Q будуємо на стиснутих волокнах, то опуклість параболи звернена в бік, протилежний напряму дії навантаження q (рис. 67, *а*, *б*).

3. У перерізах, де $Q = 0$, дотична до епюри M паралельна базі епюри (рис. 66, 67).

4. На ділянках, де $Q > 0$, момент M зростає, тобто зліва направо додатні ординати епюри M збільшуються, а від'ємні — зменшуються (див. рис. 65, 66, ділянки AC та BE); на ділянках, де $Q < 0$, момент M зменшується (див. рис. 65, 66, ділянки CD та DB).

5. У перерізах, де до балки прикладені зосереджені сили:

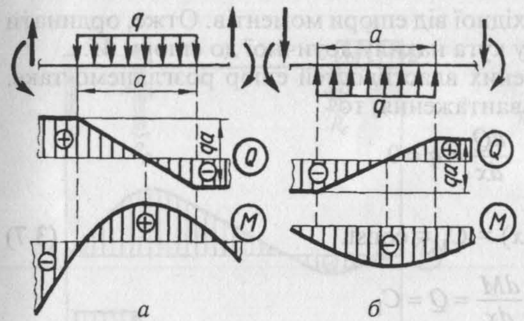


Рис. 67

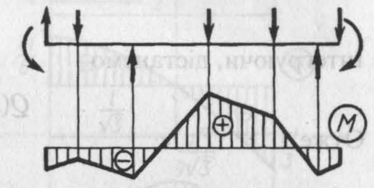


Рис. 68

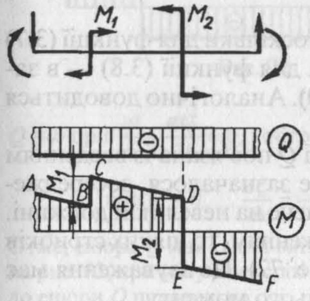


Рис. 69

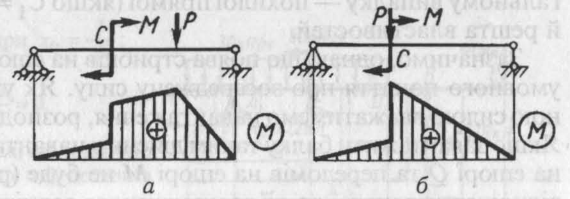


Рис. 70

а) на епюрі Q будуть стрибки на значення прикладених сил у напрямі їхньої дії (на рис. 65 та 66 ці стрибки зображено товстими лініями зі стрілками);

б) на епюрі M будуть переломи (рис. 68), причому вістря перелому напрямлене проти дії сили (див. також перерізи C, D та B на рис. 65 та переріз B на рис. 66).

6. У перерізах, де до балки прикладені зосереджені моменти, на епюрі M будуть стрибки на значення цих моментів (на епюрі Q змін не буде). Напрям стрибка залежить від напряму зовнішнього моменту (рис. 69). Вітки епюри до стрибка і за ним паралельні. Так, на рис. 69 $AB \parallel CD \parallel EF$ (див. також рис. 61 та 70, *а*). Зазначимо, що це не стосується випадку, коли в одній точці прикладені сила і момент (рис. 70, *б*), — сила спричинює перелом і порушує паралельність.

7. Якщо на кінці консолі або в кінцевій опорі до балки прикладений зосереджений момент, то в цьому перерізі згинальний момент дорівнює зовнішньому моменту (рис. 71, перерізи B та C). Якщо у кінцевій шарнірній опорі або на кінці консолі балка не навантажена зовнішнім моментом, то в них $M = 0$, що відбувається найчастіше (див. рис. 65 і 66, перерізи A та E).

Рис. 71

8. Епюра Q є діаграмою похідної від епюри моментів. Отже, ординати епюри Q пропорційні тангенсу кута нахилу дотичної до епюри M.

Для обґрунтування зазначених властивостей епюр розглянемо таке. Якщо немає розподіленого навантаження, то

$$\frac{dQ}{dx} = q = 0.$$

Інтегруючи, дістанемо

$$Q(x) = C_1 = \text{const}. \tag{3.7}$$

Отже,

$$\frac{dM}{dx} = Q = C_1,$$

звідки

$$M(x) = C_1 x + C_2. \tag{3.8}$$

Рівняння (3.7) та (3.8) доводять властивість 1, оскільки для функції (3.7) графік матиме вигляд горизонтальної прямої, а для функції (3.8) — в загальному випадку — похилої прямої (якщо $C_1 \neq 0$). Аналогічно доводиться й решта властивостей.

Зазначимо, однак, що поява стрибків на епюрі Q пов'язана із введенням умовного поняття про зосереджену силу. Як уже зазначалося, зосередженою силою вважатимемо навантаження, розподілене на невеликій довжині. Якщо завантажити балку таким дійсним навантаженням, то ніяких стрибків на епюрі Q та переломів на епюрі M не буде (рис. 72). Це зауваження має відношення також і до дії зосередженого зовнішнього моменту.

Розглянемо більш складні побудови епюр Q та M.

Приклад 6. *Побудуємо епюри Q та M для простої балки, навантаженої за схемою, яку наведено на рис. 73.*

Перш за все визначимо опорні реакції. Рівнодійна всього розподіленого навантаження дорівнює $ql/2$ і проходить через центр ваги вантажної епюри, який віддалений на $l/3$ від правої опори. Тому

$$\Sigma M_B = R_A l - \frac{ql}{2}\frac{l}{3} = 0; \quad \Sigma M_A = R_B l - \frac{ql}{2}\frac{2}{3} l = 0,$$

звідки

$$R_A = ql/6; \quad R_B = ql/3.$$

Поперечну силу та згинальний момент у довільному перерізі K знайдемо як наслідок дії сил, розміщених ліворуч від перерізу K, — реакції R_A та рівнодійної розподіленого навантаження $(1/2)\,q(x)x$. З подібності трикутників

$$q(x) = qx/l.$$

Тому

$$Q(x) = \frac{ql}{6} - \frac{qx^2}{2l}; \quad M(x) = \frac{ql}{6}x - \frac{qx^3}{6l}.$$

Із цих рівнянь видно, що епюра Q окреслена квадратичною параболою, а епюра M — кубічною. Для побудови їх визначимо ординати в характерних точках:

$$\text{при } x = 0 \quad Q_A = \frac{ql}{6};$$

$$\text{при } x = l \quad Q_B = -\frac{ql}{3};$$

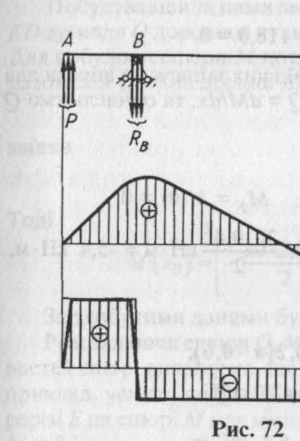


Рис. 72

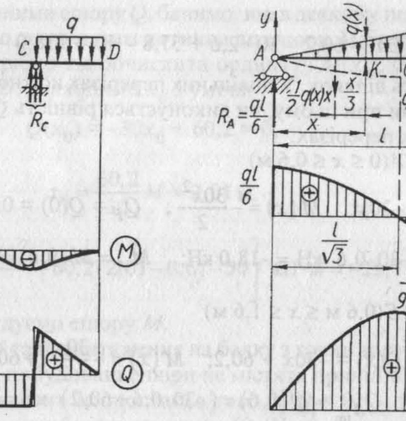


Рис. 73

$$Q = 0 \text{ при } \frac{ql}{6} - \frac{qx_0^2}{2l} = 0, \text{ тобто при } x_0 = \frac{l}{\sqrt{3}};$$

$$\text{при } x = 0 \quad \frac{dQ}{dx} = \frac{qx}{l} = 0.$$

Отже, епюра Q має такий вигляд, як показано на рис. 73, причому в перерізі $A(x = 0)$ дотична до епюри Q паралельна осі.

Далі,

$$\text{при } x = 0 \quad M_A = 0;$$

$$\text{при } x = l \quad M_B = 0.$$

При $x = x_0 = l/\sqrt{3}$ похідна

$$\frac{dM}{dx} = \frac{ql}{6} - \frac{qx_0^2}{2l} = Q(x_0)$$

перетворюється на нуль, а

$$\left(\frac{d^2M}{dx^2}\right)_{x=l/\sqrt{3}} = -\left(\frac{qx}{l}\right)_{x=l/\sqrt{3}} = -\frac{q}{\sqrt{3}} < 0.$$

Отже, у перерізі $x = x_0 = l/\sqrt{3}$ маємо максимум M, причому

$$M_{\max} = \frac{ql}{6}\frac{l}{\sqrt{3}} - \frac{q}{6l}\left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{ql^3}{9\sqrt{3}}.$$

Рис. 74

Приклад 7. *Побудуємо епюри Q та M для балки, яку наведено на рис. 74.* Визначимо опорні реакції.

$$\Sigma M_A = 30 \cdot 2{,}6 \cdot 0{,}7 - 50 - R_B \cdot 2{,}5 + 40 \cdot 3{,}5 = 0; \quad R_B = 57{,}8 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_B = -30 \cdot 2{,}6 \cdot 1{,}8 + R_A \cdot 2{,}5 - 50 + 40 \cdot 1 = 0; \quad R_A = 60{,}2 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\Sigma Y = 60{,}2 - 30 \cdot 2{,}6 + 57{,}8 - 40 = 118{,}0 - 118{,}0 = 0.$$

Балка має п'ять ділянок. У довільних перерізах кожної з них записуємо вирази для Q і M, перевіряючи при цьому, чи виконується рівність $Q = dM/dx$, та обчислюємо Q і M у характерних перерізах.

Для ділянки $FA(0 \le x \le 0{,}6$ м)

$$Q(x) = -30x; \quad M(x) = -\frac{30x^2}{2}; \quad Q_F = Q(0) = 0; \quad M_F = M(0) = 0;$$

$$Q_{A_{\text{лів}}} = Q(0{,}6) = -30 \cdot 0{,}6 \text{ кН} = -18{,}0 \text{ кН}; \quad M_A = M(0{,}6) = -\frac{30 \cdot 0{,}6^2}{2} \text{кН} \cdot \text{м} = -5{,}4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для ділянки $AE(0{,}6$ м $\le x \le 1{,}6$ м)

$$Q(x) = -30x + 60{,}2; \quad M(x) = -\frac{30x^2}{2} + 60{,}2(x - 0{,}6);$$

$$Q_{A_{\text{пр}}} = Q(0{,}6) = (-30 \cdot 0{,}6 + 60{,}2) \text{ кН} = 42{,}2 \text{ кН}.$$

$$M_A = M(0{,}6) = \left(-\frac{30 \cdot 0{,}6^2}{2} + 0\right) \text{ кН} \cdot \text{м} = -5{,}4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$Q_E = Q(1{,}6) = (-30 \cdot 1{,}6 + 60{,}2) \text{ кН} = 12{,}2 \text{ кН};$$

$$M_{E_{\text{лів}}} = M(1{,}6) = \left[-\frac{30{,}1{,}6^2}{2} + 60{,}2(1{,}6 - 0{,}6)\right] \text{ кН} \cdot \text{м} = 21{,}8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для ділянки ED (1,6 м $\le x \le 2{,}6$ м)

$$Q(x) = -30x + 60{,}2; \quad M(x) = -\frac{30x^2}{2} + 60{,}2(x - 0{,}6) - 50;$$

$$Q_E = Q(1{,}6) = (-30 \cdot 1{,}6 + 60{,}2) \text{ кН} = 12{,}2 \text{ кН};$$

$$M_{E_{\text{пр}}} = M(1{,}6) = \left[-\frac{30 \cdot 1{,}6^2}{2} + 60{,}2(1{,}6 - 0{,}6) - 50\right] \text{ кН} \cdot \text{м} = -28{,}2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$Q_D = Q(2{,}6) = (-30 \cdot 2{,}6 + 60{,}2) \text{ кН} = -17{,}8 \text{ кН};$$

$$M_D = M(2{,}6) = \left[-\frac{30 \cdot 2{,}6^2}{2} + 60{,}2(2{,}6 - 0{,}6) - 50\right] \text{ кН} \cdot \text{м} = -31 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для ділянки DB (2,6 м $\le x \le 3{,}1$ м)

$$Q(x) = (-57{,}8 + 40) \text{ кН} = -17{,}8 \text{ кН};$$

$$M(x) = 57{,}8(3{,}1 - x) - 40(4{,}1 - x) = -17{,}8x + 15{,}2;$$

$$M_D = M(2{,}6) = (-17{,}8 \cdot 2{,}6 + 15{,}2) \text{ кН} \cdot \text{м} = -31 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_B = M(3{,}1) = (-17{,}8 \cdot 3{,}1 + 15{,}2) \text{ кН} \cdot \text{м} = -40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для ділянки $BC(3{,}1$ м $\le x \le 4{,}1$ м)

$$Q(x) = 40 \text{ кН}; \quad M(x) = -40(4{,}1 - x);$$

$$M_B = M(3{,}1) = -40(4{,}1 - 3{,}1) = -40 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_C = M(4{,}1) = -40(4{,}1 - 4{,}1) = 0.$$

Побудувавши за цими даними епюру Q, бачимо, що в деякому перерізі x_0 на ділянці ED зусилля Q дорівнює нулю, а отже, там дотична до епюри M буде горизонтальною. Для побудови епюри M потрібно ще обчислити ординату $M(x_0)$. Скориставшись виразом для $Q(x)$ на ділянці ED, знаходимо x_0 з умови

$$Q(x_0) = -30x_0 + 60{,}2 = 0,$$

звідки

$$x_0 = \frac{60{,}2}{30} M = 2{,}01 \text{ м}.$$

Тоді

$$M(x_0) = \left[-\frac{30 \cdot 2{,}01^2}{2} + 60{,}2(2{,}01 - 0{,}6) - 50\right] \text{ кН} \cdot \text{м} = -25{,}7 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

За здобутими даними будуємо епюру M.

Розглядаючи епюри Q, M та навантаження на балку з точки зору загальних властивостей епюр, виявляємо, що побудовані епюри не містять принципових помилок: наприклад, усюди, де $Q > 0$, момент M зростає, а там, де $Q < 0$, — зменшується; в перерізі E на епюрі M має місце стрибок на значення 50 кН · м; у перерізах F та C момент $M = 0$ і т. д.

Приклад 8. *Побудуємо епюри Q та M для шарнірної балки, навантаженої за схемою, яку наведено на рис. 75.*

Ця балка має чотири невідомі складові опорних реакцій — M_A, H_A, K_A та R_E. Наявність проміжного шарніра в точці C додає одне додаткове рівняння статики і перетворює балку на статично визначувану шарнірну. Визначимо опорні реакції:

$$\Sigma X = H_A = 0.$$

$$\sum_{\text{пр}} M_C = 20 \cdot 5{,}5 - R_E \cdot 4 + 60 \cdot 2{,}5 = 0; \quad R_E = 65 \text{ кН};$$

$$\sum Y = R_A - 40 - 60 + 65 - 20 = 0; \quad R_A = 55 \text{ кН};$$

$$\sum_{\text{лів}} M_C = -M_A + 55 \cdot 2 - 40 \cdot 1 = 0; \quad M_A = 70 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

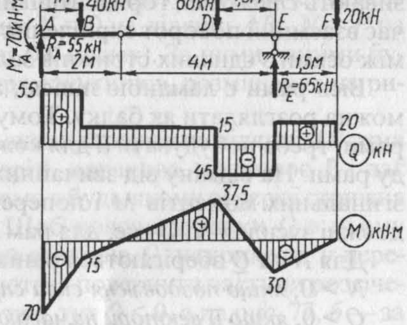


Рис. 75

Перевірка:

$$\sum M_F = -70 + 55 \cdot 7{,}5 - 40 \cdot 6{,}5 - 60 \cdot 3 + 65 \cdot 1{,}5 = 0.$$

Тепер звичайним способом будуємо епюру поперечних сил Q, а потім визначаємо згинальні моменти в характерних перерізах:

$$M_A = -70 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_B = (-70 + 55 \cdot 1) \text{ кН} \cdot \text{м} = -15 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_D = (-20 \cdot 3 + 65 \cdot 1{,}5) \text{ кН} \cdot \text{м} = 37{,}5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_E = -20 \cdot 1{,}5 \text{ кН} \cdot \text{м} = -30 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_F = 0.$$

Користуючись цими даними, будуємо епюру M.

Слід звернути увагу на те, що на епюрі M у перерізі, де розміщено проміжний шарнір, згинальний момент завжди дорівнює нулю.

Іноді можна будувати епюри, не складаючи виразів для Q та M у довільних перерізах ділянок. Досить лише обчислити величини Q та M у характерних перерізах. Для цих випадків можна рекомендувати такий порядок побудови епюр:

1. Знайти опорні реакції (для консолі їх можна не знаходити).

2. За стрибками та нахилами, йдучи вздовж балки, обов'язково зліва направо, побудувати епюру Q (ніяких записів для цього робити не треба).

3. Знайти характерні перерізи балки, тобто ті, в яких прикладені зосереджені сили та моменти, розпочинається або закінчується розподілене навантаження, а також ті, в яких Q перетворюються на нуль.

4. Визначити в характерних перерізах моменти і за знайденими ординатами побудувати епюру M. При цьому слід керуватися загальними властивостями епюр, а для консольних ділянок балок доцільно використати відомі для них епюри (див. рис. 57 і 58).

§ 22. Побудова епюр внутрішніх зусиль для рам

Рамами називають системи, які складаються з прямолінійних стрижнів, з'єднаних жорсткими вузлами. Вертикально розміщені стрижні рами називають *стояками*, горизонтальні — *ригелями*. Жорсткість вузлів виключає взаємний поворот скріплених стрижнів, тобто у вузлових точках кути між осями з'єднаних стрижнів залишаються незмінними.

Вісь рами є ламаною лінією, а кожний прямолінійний елемент рами можна розглядати як балку. Тому щоб побудувати яку-небудь епюру для рами, треба побудувати її для кожної окремої балки, що входить до складу рами. На відміну від звичайних балок у перерізах стрижнів рами, крім згинальних моментів M і поперечних сил Q, як правило, діють ще поздовжні зусилля N. Отже, для рам доводиться будувати епюри N, Q та M.

Для N та Q зберігаються раніше введені правила знаків:

$N > 0$, *якщо поздовжня сила спричинює розтягання;*

$Q > 0$, *якщо її вектори намагаються обертати частини розсіченої рами* (*відносно точок, близьких до перерізу*) *за годинниковою стрілкою.*

Для згинальних моментів спеціального правила знаків не встановлюють, а при складанні виразів для $M(x)$ вибирають за власним розсудом який-небудь момент додатним.

Вирази для $N(x)$, $Q(x)$ та $M(x)$ записують дуже рідко — здебільшого для тих ділянок, де діють розподілені навантаження. Найчастіше просто обчислюють значення N, Q та M у характерних перерізах (на межах ділянок та в екстремальних точках), а потім проводять лінії епюр, зважаючи на їхні властивості, про які йшлося в § 21.

Ординати епюр, як і завжди, відкладаємо перпендикулярно до осей стрижнів рами, що утворюють базу, контур якої збігається з контуром рами, причому додатні ординати N та Q — із зовнішнього боку рами, а від'ємні — з внутрішнього (якщо, звичайно, рама має таку конфігурацію, що можна розрізнити її зовнішній і внутрішній боки). Епюру M домовимося і для рам будувати на стиснутих волокнах.

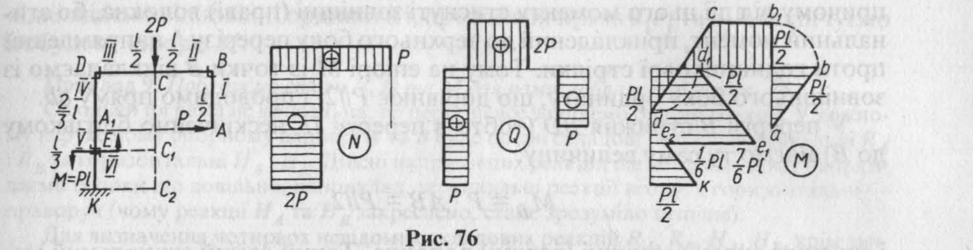


Рис. 76

Якщо рама має більше ніж одну опору, то, починаючи будувати епюри, треба звичайними методами статики знайти опорні реакції.

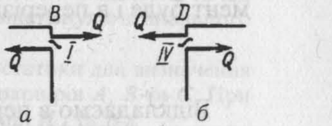


Рис. 77

Побудуємо епюри N, Q та M для рами, зображеної на рис. 76. Зазначимо, що оскільки немає розподілених навантажень, всі епюри окреслюватимуться прямими лініями.

Щоб побудувати епюру N, треба спроекціювати сили, прикладені до частини рами, що лежить з одного боку від перерізу, на вісь стрижня. Отже, для будь-якого перерізу матимемо: $N = 0$ на ділянці AB; $N = P$ на ділянці BD (розтяг); $N = -2P$ на ділянці DK (стиск). За цими даними будуємо епюру N. Вона має вигляд двох прямокутників, розміщених на ригелі та лівому стояку.

Тепер побудуємо епюру Q. Для будь-якого перерізу на ділянці AB сума проекцій сил, що лежать внизу на перерізі, однакова, дорівнює P і дає від'ємну величину Q, тобто $Q = -P$. Так само в будь-якому перерізі стрижня на ділянці DK поперечна сила $Q = P$. Щоб пояснити знаки Q в цьому прикладі, на рис. 77 зображено напрями векторів Q, наприклад, у перерізах I і IV. На рис. 77, *а* вектори намагаються повернути частини розсіченої рами проти годинникової стрілки, отже, тут $Q < 0$, а на рис. 77, *б* — за годинниковою стрілкою, тому тут $Q > 0$.

У перерізі II, як і в будь-якому перерізі ділянки BC, сума проекцій на переріз (на вертикаль) сил, прикладених до частини рами, що лежить праворуч від перерізу (тобто одна сила P), дорівнює нулю. Отже, на ділянці BC зусилля $Q = 0$.

Для перерізу III і взагалі для будь-якого перерізу ділянки CD проекціюватися на переріз буде тільки сила $2P$, тому в цих перерізах $Q = 2P$.

Отже, на ділянці AB $Q = -P$; на ділянці BC $Q = 0$; на ділянці CD $Q = 2P$; на ділянці DK $Q = P$. Епюра Q на цих ділянках має вигляд трьох прямокутників.

Для побудови епюр моментів M обчислюватимемо згинальні моменти в характерних точках A, B, C, D, E та K. Очевидно, $M_A = 0$. У перерізі B стрижня AB (тобто в перерізі I, нескінченно близькому до B) маємо

$$M_B = P \cdot AB = Pl/2,$$

причому від дії цього моменту стиснуті зовнішні (праві) волокна, бо згинальний момент, прикладений до верхнього боку перерізу I, напрямлений проти годинникової стрілки. Тому на епюрі M із точки B відкладаємо із зовнішнього боку ординату, що дорівнює $Pl/2$, і проводимо пряму ab.

У перерізі B стрижня BD (тобто в перерізі II, нескінченно близькому до B) маємо ту саму величину:

$$M_B = P\cdot AB = Pl/2$$

і стиснуті знову зовнішні (верхні) волокна. Такий самий згинальний момент буде і в перерізі C:

$$M_C = Pl/2.$$

Відкладаємо в перерізах B та C із зовнішнього боку ординати, що дорівнюють $Pl/2$, і проводимо пряму b_1c. Продовжувати цю пряму далі ліворуч не можна, оскільки в цьому перерізі на епюрі M має бути перелом.

У перерізі D стрижня DB (у перерізі III) згинальний момент має бути обчислений від дії сил P та $2P$. Вважаючи, наприклад, що для стрижня DB додатним буде такий згинальний момент, який спричинює стискання верхніх волокон, знаходимо, що

$$M_D = P\cdot A_1D - 2P\cdot CD = P\frac{l}{2} - 2P\frac{l}{2} = -\frac{Pl}{2}.$$

Знак «мінус» свідчить про те, що в перерізі III стиснуті нижні волокна. Відкладаємо вниз ординату, що дорівнює $Pl/2$, і проводимо на епюрі M пряму cd.

Переходимо до побудови епюри M на стояку DK, вважаючи, наприклад, що згинальний момент додатний, якщо він спричинює стискання внутрішніх (правих) волокон. Тоді в перерізі IV

$$M_D = -P\cdot A_1D + 2P\cdot CD = -P\frac{l}{2} + 2P\frac{l}{2} = \frac{Pl}{2}.$$

У перерізі E на епюрі M має бути стрибок, тому значення M визначаємо окремо:

в перерізі V

$$M'_E = P\cdot A_1E + 2P\cdot EC_1 = P\frac{l}{6} + 2P\frac{l}{2} = \frac{7}{6}Pl,$$

а в перерізі VI

$$M''_E = P\cdot A_1E + 2P\cdot EC_1 - M = P\frac{l}{6} + 2P\frac{l}{2} - Pl = \frac{1}{6}Pl.$$

Нарешті, в перерізі K

$$M_K = P\cdot A_1K + 2P\cdot KC_2 - M = P\frac{l}{2} + 2P\frac{l}{2} - Pl = \frac{1}{2}Pl.$$

Усі моменти виявилися додатними. Отже, в усіх цих перерізах, згідно з прийнятим для стояка DK правилом знаків, стиснуті праві волокна. Тому

відкладаємо відповідні ординати і, проводячи прямі d_1e_1 та e_2k, закінчуємо побудову епюри M.

Приклад 9. *Побудуємо епюри N, Q та M для рами, зображеної на рис. 78.*

Оскільки ця рама не консольна, то перш за все знайдемо опорні реакції. У кожному нерухомому опорному шарнірі A та B буде по дві складові реакції: вертикальні R_A і R_B та горизонтальні H_A і H_B. Дійсні напрями цих реакцій ще не відомі, тому напрямляємо їх поки що довільно, наприклад, вертикальні реакції вгору, а горизонтальні — праворуч (чому реакції H_A та H_B закреслено, стане зрозуміло пізніше).

Для визначення чотирьох невідомих складових реакцій R_A, R_B, H_A, H_B, крім звичайних рівнянь статики, маємо ще умову рівності нулю суми моментів відносно точки C усіх сил, розміщених по один бік від неї (інакше кажучи, рівність нулю згинального моменту в перерізі C, де є шарнір).

Взагалі можна вибрати різні варіанти чотирьох рівнянь статики для визначення реакцій. Найзручніше розглядати суми моментів відносно шарнірів A, B та C. При складанні рівнянь беремо до уваги закреслений варіант реакцій H_A та H_B:

$$\Sigma M_B = 40\cdot 3 + 20\cdot 1 - R_A\cdot 2 = 0;\quad R_A = 70\ \text{кН};$$

$$\Sigma M_A = 40\cdot 1 + 20\cdot 1 + R_B\cdot 2 = 0;\quad R_B = -30\ \text{кН};$$

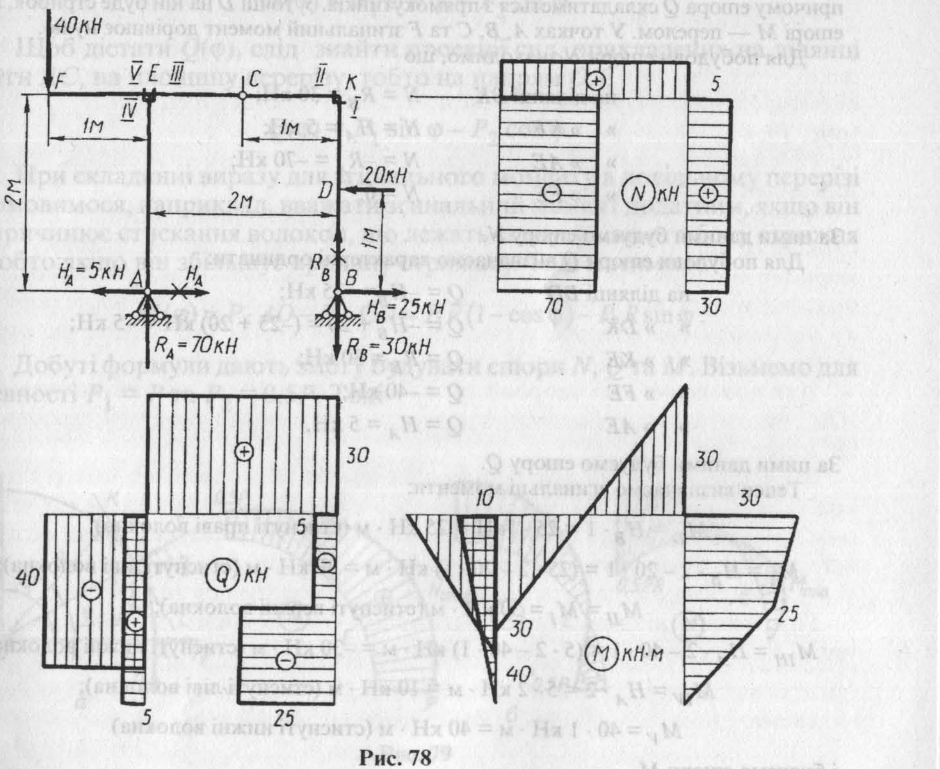


Рис. 78

$$\sum_{\text{лів}} M_C = -70\cdot 1 + 40\cdot 2 + H_A\cdot 2 = 0; \qquad H_A = -5\ \text{кН};$$

$$\sum_{\text{пр}} M_C = -20\cdot 1 - 30\cdot 1 + H_B\cdot 2 = 0; \qquad H_B = 25\ \text{кН}.$$

Реакції R_A та H_B виявилися додатними, отже, вони дійсно напрямлені так, як було вибрано: R_A — вгору, H_B — праворуч; реакції H_A та R_B від'ємні, отже, мають напрям, протилежний вибраному, а саме: H_A напрямлена ліворуч, а R_B — вниз. Змінимо на рисунку напрям цих реакцій на протилежний і вважатимемо всі реакції додатними:

$$R_A = 70\ \text{кН};\quad H_A = 5\ \text{кН};\quad R_B = 30\ \text{кН};\quad H_B = 25\ \text{кН}.$$

Перевіримо, чи правильно знайдено реакції:

$$\Sigma X = -H_A - 20 + H_B = -5 - 20 + 25 = 0;$$

$$\Sigma Y = R_A - 40 - R_B = 70 - 40 - 30 = 0.$$

Тепер можна побудувати епюри M, Q та N таким самим способом, як це було зроблено в попередньому прикладі, оскільки опорні реакції визначено, а тому відомі всі зовнішні сили, прикладені до рами.

Перш за все зробимо деякі зауваження щодо загального вигляду епюр M та Q. Оскільки розподіленого навантаження немає, контури епюр M та Q будуть прямолінійні, причому епюра Q складатиметься з прямокутників. У точці D на ній буде стрибок, а на епюрі M — перелом. У точках A, B, C та F згинальний момент дорівнює нулю.

Для побудови епюри N знаходимо, що

на ділянці BK $\quad N = R_B = 30$ кН;

» » KE $\quad N = H_A = 5$ кН;

» » AE $\quad N = -R_A = -70$ кН;

» » FE $\quad N = 0$.

За цими даними будуємо епюру N.

Для побудови епюри Q визначаємо характерні ординати:

на ділянці BD $\quad Q = -H_B = -25$ кН;

» » DK $\quad Q = -H_B + 20 = (-25 + 20)$ кН $= -5$ кН;

» » KE $\quad Q = R_B = 30$ кН;

» » FE $\quad Q = -40$ кН;

» » AE $\quad Q = H_A = 5$ кН.

За цими даними будуємо епюру Q.

Тепер визначаємо згинальні моменти:

$$M_D = H_B \cdot 1 = 25 \cdot 1\text{кН} = 25\ \text{кН}\cdot\text{м (стиснуті праві волокна)};$$

$$M_1 = H_B \cdot 2 - 20 \cdot 1 = (25 \cdot 2 - 20 \cdot 1)\ \text{кН}\cdot\text{м} = 30\ \text{кН}\cdot\text{м (стиснуті ліві волокна)};$$

$$M_{II} = M_I = 30\ \text{кН}\cdot\text{м (стиснуті верхні волокна)};$$

$$M_{III} = H_A \cdot 2 - 40 \cdot 1 = (5 \cdot 2 - 40 \cdot 1)\ \text{кН}\cdot\text{м} = -30\ \text{кН}\cdot\text{м (стиснуті нижні волокна)};$$

$$M_{IV} = H_A \cdot 2 = 5 \cdot 2\ \text{кН}\cdot\text{м} = 10\ \text{кН}\cdot\text{м (стиснуті ліві волокна)};$$

$$M_V = 40 \cdot 1\ \text{кН}\cdot\text{м} = 40\ \text{кН}\cdot\text{м (стиснуті нижні волокна)}$$

і будуємо епюру M.

§ 23. Побудова епюр внутрішніх зусиль для криволінійних стрижнів

У поперечних перерізах плоского кривого стрижня можуть діяти, як і в рамах, три внутрішніх силових зусилля N, Q та M. Найчастіше мають справу зі стрижнями, вісь яких окреслена по дузі кола. У цьому разі положення будь-якого перерізу зручно визначати за допомогою полярної системи координат, тоді поздовжня, поперечна сили та згинальний момент будуть функціями кута φ: $N(\varphi)$, $Q(\varphi)$ та $M(\varphi)$.

Для N та Q візьмемо звичайні правила знаків (див. § 15 та 19), епюри M, як і в рамках, будуватимемо на стиснутих волокнах.

Як приклад розглянемо плоский кривий брус, схему якого наведено на рис. 79, *а*. Запишемо вирази $N(\varphi)$, $Q(\varphi)$ та $M(\varphi)$ для довільного перерізу C. Щоб дістати $N(\varphi)$, потрібно визначити проекції сил P_1 та P_2 на напрям осі стрижня в перерізі C, тобто на дотичну KL. Для зручності згадані проекції можна уявити перенесеними в точку C (на рис. 79, *а* їх зображено штриховими лініями). Тоді

$$N(\varphi) = P_1 \cos\varphi + P_2 \sin\varphi.$$

Щоб дістати $Q(\varphi)$, слід знайти проекції сил, прикладених на ділянці дуги AC, на площину перерізу, тобто на напрям OS:

$$Q(\varphi) = P_1 \sin\varphi - P_2 \cos\varphi.$$

При складанні виразу для згинального моменту в довільному перерізі домовимося, наприклад, вважати згинальний момент додатним, якщо він спричинює стискання волокон, що лежать із внутрішнього боку стрижня (тобто якщо він збільшує кривину стрижня). Тоді матимемо

$$M(\varphi) = P \cdot AD - P_2 \cdot CD = P_1 R(1 - \cos\varphi) - P_2 R \sin\varphi.$$

Добуті формули дають змогу будувати епюри N, Q та M. Візьмемо для певності $P_1 = P$ та $P_2 = 0{,}5P$. Тоді

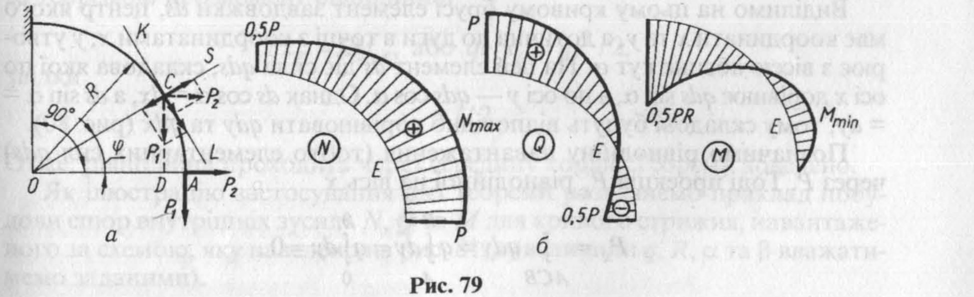


Рис. 79

Таблиця 3

φ,°	sin φ	cos φ	0,5 sin φ	0,5 cos φ	$N(\varphi)/P$	$Q(\varphi)/P$	$M(\varphi)/PR$
0	0	1,000	0	0,500	1,000	–0,500	0
10	0,174	0,985	0,087	0,498	1,072	–0,324	–0,072
20	0,342	0,940	0,171	0,470	1,111	–0,128	–0,111
30	0,500	0,866	0,250	0,433	1,116	0,067	–0,116
40	0,643	0,766	0,322	0,383	1,088	0,260	–0,088
50	0,766	0,643	0,383	0,322	1,026	0,444	–0,026
60	0,866	0,500	0,433	0,250	0,933	0,616	0,067
70	0,940	0,342	0,470	0,171	0,812	0,769	0,188
80	0,985	0,174	0,498	0,087	0,672	0,898	0,328
90	1,000	0	0,500	0	0,500	1,000	0,500

$$N(\varphi) = (\cos\varphi + 0{,}5\sin\varphi)P; \qquad Q(\varphi) = (\sin\varphi - 0{,}5\cos\varphi)P;$$
$$M(\varphi) = PR(1 - \cos\varphi - 0{,}5\sin\varphi). \tag{3.9}$$

Користуючись формулами (3.9), визначимо значення N, Q та M у деяких перерізах (табл. 3).

Розмістивши вісь стрижня, відкладаємо через 10° у масштабі по нормалі до осі стрижня (тобто по радіусу) відповідні ординати для N, Q (додатні — назовні, від'ємні — всередину) та для M (на стиснутих волокнах), сполучаємо кінці ординат плавною кривою і дістаємо епюри N, Q та M (рис. 79, *б*).

Розглянемо деякі загальні питання побудови епюр внутрішніх зусиль для криволінійних стрижнів.

Зокрема, зупинимося на побудові епюр внутрішніх зусиль у кривих стрижнях при дії рівномірно розподіленого навантаження. У цьому разі корисно мати на увазі таку теорему: *рівнодійна рівномірно розподіленого навантаження, яке прикладене до дуги будь-якого обрису, дорівнює добутку інтенсивності навантаження на довжину хорди, яка стягує цю дугу, перпендикулярна до цієї хорди і проходить через її середину.*

Для доведення цієї теореми розглянемо довільний плоский стрижень ABC, навантажений рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю q (рис. 80).

Виділимо на цьому кривому брусі елемент завдовжки ds, центр якого має координати x та y, а дотична до дуги в точці з координатами x, y утворює з віссю абсцис кут α. На цей елемент ds діє сила qds, складова якої по осі x дорівнює $qds\sin\alpha$, а по осі y — $qds\cos\alpha$. Однак $ds\cos\alpha = dx$, а $ds\sin\alpha = dy$, тому складові будуть відповідно дорівнювати qdy та qdx (рис. 80).

Позначимо рівнодійну навантаження (тобто елементарних сил qds) через P. Тоді проекція P_x рівнодійної на вісь x

$$P_x = \int\limits_{ACB} qdy = q\int\limits_A^B dy = q\int\limits_0^0 dy = 0\,.$$

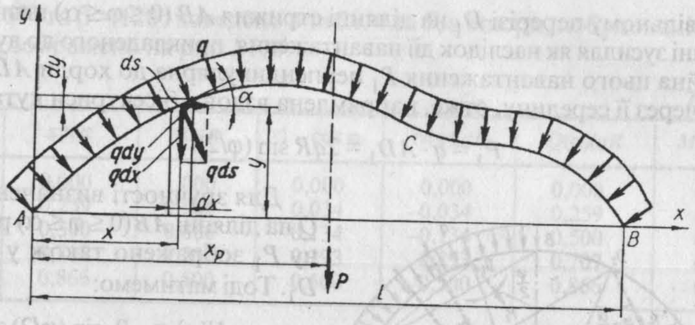


Рис. 80

Аналогічно знаходимо рівнодійну зусиль на вісь y:

$$P_y = \int\limits_{ACB} qdx = q\int\limits_A^B dx = q\int\limits_0^l dx = ql\,.$$

Звідси випливає, що рівнодійна

$$P = P_y = ql,$$

тобто дорівнює добутку інтенсивності навантаження на довжину хорди, що стягує дугу ACB.

Оскільки $P_x = 0$, то рівнодійна перпендикулярна до осі x, тобто до хорди, оскільки вісь x напрямлена вздовж хорди.

Тепер обчислимо суму моментів елементарних сил відносно початку координат:

$$\Sigma M_A = \int\limits_{ACB} qdx\cdot x + \int\limits_{ACB} qdy\cdot y = q\int\limits_A^B xdx + q\int\limits_A^B ydy =$$
$$= q\int\limits_0^l xdx + q\int\limits_0^0 ydy = \frac{ql^2}{2}.$$

Нехай плече рівнодійної відносно початку координат дорівнює x_P. Тоді за теоремою про момент рівнодійної

$$Px_P = \Sigma M_A, \text{ або } ql\cdot x_P = ql^2/2,$$

звідки

$$x_P = l/2.$$

Отже, рівнодійна проходить через середину хорди. Теорему доведено.

Як ілюстрацію застосування цієї теореми розглянемо приклад побудови епюр внутрішніх зусиль N, Q та M для кривого стрижня, навантаженого за схемою, яку наведено на рис. 81, *а* (величини q, R, α та β вважатимемо заданими).

У довільному перерізі D_1 на ділянці стрижня AB $(0 \le \varphi \le \alpha)$ визначаємо внутрішні зусилля як наслідок дії навантаження, прикладеного до дуги AD_1. Рівнодійна цього навантаження P_1 перпендикулярна до хорди AD_1 і проходить через її середину, отже, напрямлена вздовж бісектриси кута AOD_1:

$$P_1 = q \cdot AD_1 = 2qR \sin (\varphi/2).$$

Для зручності визначення N та Q на ділянці AB $(0 \le \varphi \le \alpha)$ рівнодійну P_1 зображено також у перерізі D_1. Тоді матимемо:

$$N(\varphi) = -P_1 \sin (\varphi/2) =$$
$$= -2q\, R\sin^2 (\varphi/2) = -qR\,(1 - \cos\varphi);$$
$$Q(\varphi) = P_1 \cos (\varphi/2) =$$
$$= 2qR \sin (\varphi/2) \cos (\varphi/2) = qR \sin \varphi;$$
$$M(\varphi) = P_1(AD_1/2) = 2qR^2 \sin^2 (\varphi/2) =$$
$$= qR^2(1 - \cos \varphi). \qquad (3.10)$$

Зусилля та згинальний момент у довільному перерізі D_2 ділянки BC $(\alpha \le \varphi \le \beta)$ є наслідком дії всього розподіленого навантаження на ділянці AB, рівнодійна якого

$$P_2 = q \cdot AB = 2qR \sin (\alpha/2)$$

перпендикулярна до хорди AB і напрямлена по бісектрисі кута AOB. Тому при $\alpha \le \varphi \le \beta$

$$N(\varphi) = P_2 \sin (\varphi - \alpha/2) =$$
$$= -2qR \sin (\alpha/2) \sin (\varphi - \alpha/2);$$
$$Q(\varphi) = P_2 \cos (\varphi - \alpha/2) =$$
$$= 2qR \sin (\alpha/2) \cos (\varphi - \alpha/2); \qquad (3.11)$$
$$M(\varphi) = P_2 \cdot D_2K =$$
$$= P_2R \sin (\varphi - \alpha/2) =$$
$$= 2qR^2 \sin (\alpha/2) \sin (\varphi - \alpha/2).$$

Вибравши кути α та β, обчислимо значення $N(\varphi)$, $Q(\varphi)$ та $M(\varphi)$ при різних кутах φ і побудуємо епюри. Результати розрахунків

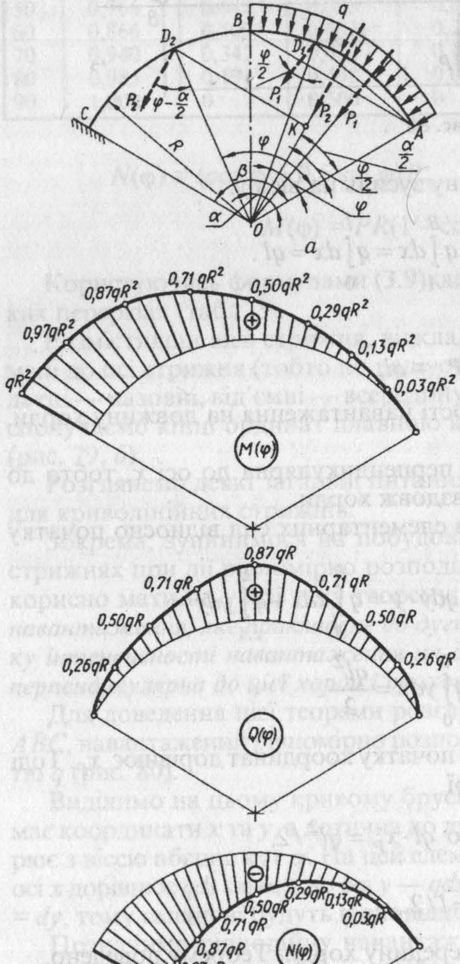


Рис. 81

при $\alpha = 60°$ та $\beta = 120°$ наведено в табл. 4 та 5, а епюри, побудовані за цими даними, зображено на рис. 81, *б*.

Таблиця 4

φ,°	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$1 - \cos\varphi$	$N(\varphi)/qR$	$Q(\varphi)/qR$	$M(\varphi)/qR^2$
0	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000
15	0,259	0,966	0,034	–0,034	0,259	0,034
30	0,500	0,866	0,134	–0,134	0,500	0,134
45	0,707	0,707	0,293	–0,293	0,707	0,293
60	0,866	0,500	0,500	–0,500	0,866	0,500

Таблиця 5

φ,°	$\varphi - 30°$	$\sin(\varphi - 30°)$	$\cos(\varphi - 30°)$	$N(\varphi)/qR$	$Q(\varphi)/qR$	$M(\varphi)/qR^2$
60	30	0,500	0,866	–0,500	0,866	0,500
75	45	0,707	0,707	–0,707	0,707	0,707
90	60	0,866	0,500	–0,866	0,500	0,866
105	75	0,966	0,259	–0,966	0,259	0,966
120	90	1,000	0,000	–1,000	0,000	1,000

§ 24. Диференціальні залежності при згинанні плоских криволінійних стрижнів

Нехай на криволінійний стрижень* діє довільне навантаження (рис. 82). Провівши два перерізи під кутами φ та $\varphi + d\varphi$, виділимо елемент стрижня AB, на якому не буде зосереджених зусиль. Довжина дуги виділеного елемента кривого бруса радіусом r буде $ds = rd\varphi$. Додатний кут φ відкладаємо, як завжди, проти годинникової стрілки.

У перерізах, що обмежують елемент стрижня ds, діють поздовжні сили N та $N + dN$, поперечні сили Q та $Q + dQ$, а також згинальні моменти M та $M + dM$ (рис. 83), які замінюють дію відкинутих частин кривого стрижня.

При виведенні диференціальних залежностей між внутрішніми зусиллями в кривих стрижнях вважатимемо, що *згинальний момент є додатним, якщо він спричинює стискання внутрішніх волокон стрижня (волокон, розміщених на угнутому боці), а розподілене навантаження додатне, якщо воно напрямлене в центр кривини.*

Розглянемо умови рівноваги елемента ds (рис. 83) — суми проекцій всіх сил на осі AB та OK відповідно та суму моментів сил відносно точки B:

$$\Sigma_{\text{пр.на } AB} = (Q + dQ)\sin\frac{d\varphi}{2} + (N + dN)\cos\frac{d\varphi}{2} + Q\sin\frac{d\varphi}{2} -$$
$$- N\cos\frac{d\varphi}{2} = 0;$$

*Обмежимося розглядом стрижня, вісь якого не має точок перегину.

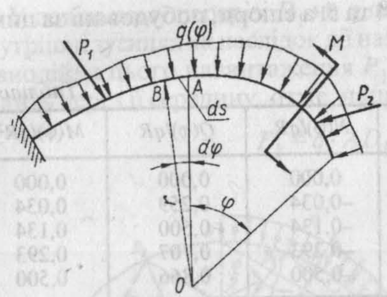


Рис. 82

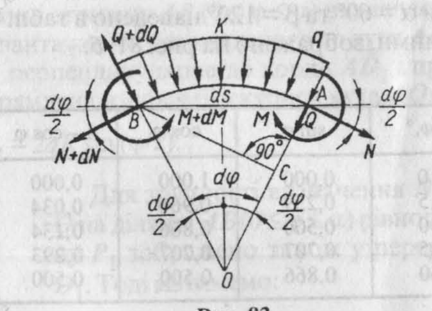


Рис. 83

$$\Sigma_{\text{пр.на}OK} = (Q+dQ)\cos\frac{d\varphi}{2} - (N+dN)\sin\frac{d\varphi}{2} - Q\cos\frac{d\varphi}{2} -$$

$$- N\sin\frac{d\varphi}{2} - q\cdot AB = 0; \tag{3.12}$$

$$\Sigma M_B = -(M+dM) + M + Q\cdot BC + N\cdot AC + q\cdot AB\frac{AB}{2} = 0.$$

Ураховуючи, що

$$\sin\frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}; \quad \cos\frac{d\varphi}{2} \approx 1;$$

$$AB = 2r\sin\frac{d\varphi}{2} \approx r d\varphi;$$

$$AC = r(1-\cos d\varphi) \approx 0; \quad BC = r\cdot\sin d\varphi \approx r d\varphi,$$

та нехтуючи добутком диференціалів, дістанемо:

$$Q d\varphi + dN = 0; \quad dQ - N d\varphi - qr d\varphi = 0;$$

$$-dM + Qr d\varphi = 0.$$

Поділивши кожне з цих рівнянь на $d\varphi$, матимемо

$$\frac{dN}{d\varphi} = -Q; \tag{3.13}$$

$$\frac{dQ}{d\varphi} = N + qr; \tag{3.14}$$

$$\frac{dM}{d\varphi} = Qr. \tag{3.15}$$

Це шукані диференціальні залежності при згинанні криволінійного стрижня. Оскільки $r d\varphi = ds$, їх можна записати ще й в такому вигляді:

$$\frac{dN}{ds} = -\frac{Q}{r}; \tag{3.16}$$

$$\frac{dQ}{ds} = q + \frac{N}{r}; \tag{3.17}$$

$$\frac{dM}{ds} = Q. \tag{3.18}$$

Залежності (3.13) — (3.15) дають змогу перевіряти правильність складання виразів для $N(\varphi)$, $Q(\varphi)$ та $M(\varphi)$ при згинанні, зокрема колового криволінійного стрижня. Отже, легко переконатися, що залежності (3.9)—(3.11) у прикладах, що розглядалися, складено правильно.

Із формул (3.13) та (3.15) випливає, що в перерізах, де M та N досягають екстремальних значень, $Q = 0$. Це дає змогу певною мірою контролювати справедливість побудови епюр N, Q та M. Так, на епюрах рис. 79, *б* у перерізі E, де $Q = 0$, момент $M = M_{\min}$, а зусилля $N = N_{\max}$. Екстремальні значення M та N можна знайти так. Із другого рівняння (3.9) видно, що $Q = 0$, якщо

$$\sin\varphi - 0{,}5\cos\varphi = 0,$$

тобто, якщо $\operatorname{tg}\varphi = 0{,}5$; $\varphi = 26°34'$; $\sin\varphi = 0{,}447$; $\cos\varphi = 0{,}894$. Підставивши ці значення $\sin\varphi$ і $\cos\varphi$ у перше та третє рівняння (3.9), знайдемо:

$$M_{\min} = (1 - 0{,}894 - 0{,}5\cdot 0{,}447)PR = 0{,}118PR;$$

$$N_{\max} = (0{,}894 + 0{,}5\cdot 0{,}447)P = 1{,}118P.$$

Залежність (3.14) дає змогу визначити екстремальні точки на епюрі Q. У тих перерізах, де $Q = Q_{\max}$ або $Q = Q_{\min}$,

$$N = -qr, \tag{3.19}$$

якщо на цій ділянці стрижня є й розподілене навантаження, або

$$N = 0, \tag{3.20}$$

якщо розподіленого навантаження немає. Внаслідок цього на рис. 79, наприклад, зусилля Q ніде не досягає екстремального значення (дотична до епюри Q ніде не буде паралельна дотичній до осі стрижня в тому самому перерізі), оскільки розподіленого навантаження немає, а N ніколи не дорівнює нулю.

Слід зазначити, що умови $Q = 0$, (3.19) та (3.20) необхідні, проте не достатні для досягнення функціями $N(\varphi)$, $Q(\varphi)$ та $M(\varphi)$ екстремальних значень; при виконанні їх екстремума може й не бути, але тоді на відповідній епюрі буде точка перегину, причому дотична до епюри обов'язково буде паралельна осі стрижня в цьому перерізі.

Епюри N, Q та M для криволінійних стрижнів мають такі властивості [(частина з них випливає із визначення N, Q та M, решта — з формул (3.13) — (3.15)]:

1) у кінцевій шарнірній опорі та на вільному кінці консолі, якщо вони не навантажені зовнішніми моментами, $M = 0$;

2) у перерізах, де до стрижня прикладений зосереджений момент, на епюрі M буде стрибок (рис. 84), причому дотичні до епюри до стрибка та за ним будуть паралельні;

3) у перерізах, де до стрижня прикладені зосереджені сили, перпендикулярні до осі стрижня (тобто напрямлені по радіусу), на епюрі Q буде стрибок, а на епюрах M та N — переломи (рис. 85);

4) у перерізах, де прикладені зосереджені сили, напрямлені по дотичній до осі стрижня, на епюрі N будуть стрибки, а на епюрах Q та M — переломи (рис. 86);

5) у перерізах, де $Q = 0$, на епюрах M та N будуть екстремуми, тобто дотичні до епюр будуть паралельні дотичним до осі стрижня в цих перерізах (рис. 86);

6) у перерізах, де $N = 0$, на епюрі Q будуть екстремуми (рис. 85);

7) на ділянках, де $Q > 0$, M зростає, а N зменшується у напрямі відліку φ; там, де $Q < 0$, M зменшується, а N — зростає (рис. 85, 86);

8) на ділянках, де $N > 0$, Q зростає в напрямі відліку φ, а де $N < 0$, — зменшується (рис. 85 та 86).

Якщо стрижень має прямолінійні та криволінійні ділянки, то на прямолінійних ділянках епюри будують так само, як для балок або рам, а на криволінійних — так, як було наведено в попередніх прикладах.

Приклад 10. *Побудуємо епюри N, Q та M для стрижня, наведеного на рис. 87, а.* Склавши рівняння $\Sigma M_A = 0$; $\Sigma X = 0$; $\Sigma Y = 0$, знаходимо: $R_A = 0{,}104P$; $R_E = 1{,}104P$; $H_A = P$.

Рис. 84

На ділянці CE (йдучи справа) будуємо епюру так, як для балки (рис. 87, *б*). Потім вибираємо довільний переріз K_1 і записуємо для ділянки CB:

$$M(\varphi) = 1{,}104P(CE + R\sin\varphi) - P(CD + R\sin\varphi) =$$

$$= (0{,}604 + 0{,}104\sin\varphi)PR; \quad (3.21)$$

$$Q(\varphi) = -0{,}104P\cos\varphi; \qquad N(\varphi) = 0{,}104P\sin\varphi.$$

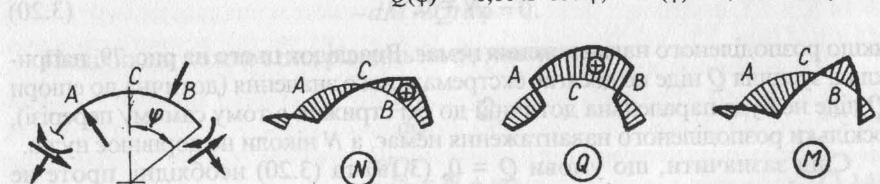


Рис. 85

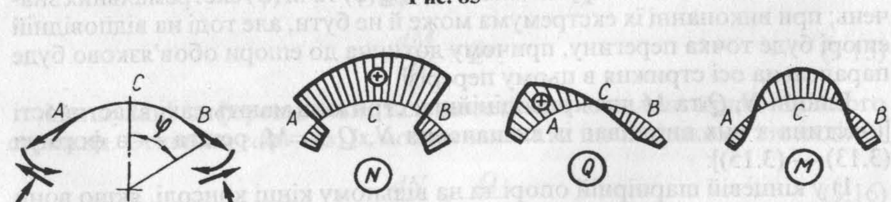


Рис. 86

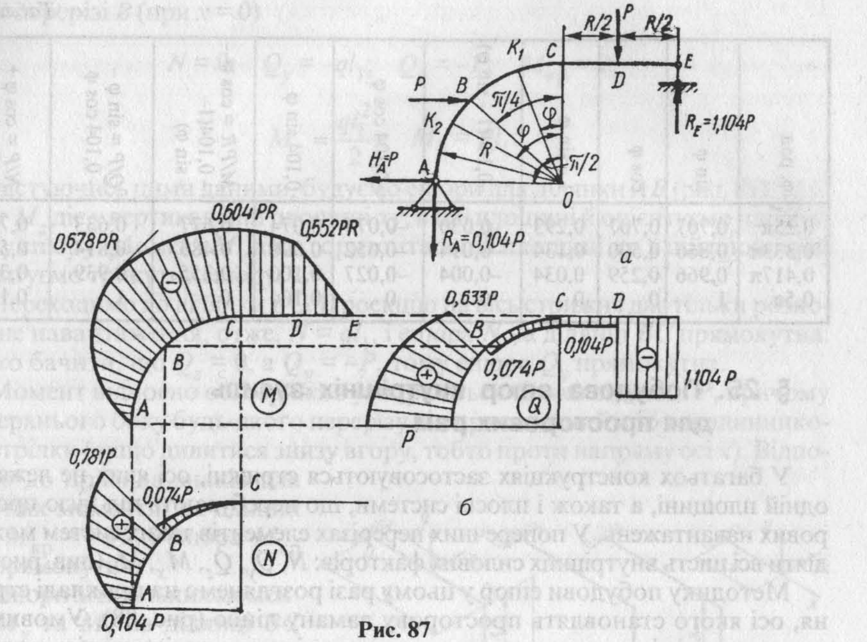


Рис. 87

Ураховуючи навантаження ліворуч від перерізу K_2, записуємо для ділянки BA:

$$M(\varphi) = [\cos\varphi - 0{,}104(1 - \sin\varphi)]RP;$$

$$Q(\varphi) = (\sin\varphi - 0{,}104\cos\varphi)P; \quad (3.22)$$

$$N(\varphi) = (\cos\varphi + 0{,}104\varphi)P.$$

Перевіряємо ці вирази за формулами (3.13) — (3.15) і складаємо табл. 6 для ділянки CB та табл. 7 для ділянки AB.

За добутими значеннями M, N та Q будуємо епюри на криволінійній ділянці стрижня (рис. 87, *б*).

Таблиця 6

φ, рад	sin φ	cos φ	$N/P = 0{,}104\sin\varphi$	$M/PR = 0{,}604 + 0{,}104\sin\varphi$	$Q/P = -0{,}104\cos\varphi$
0	0	1	0	0,604	–0,104
0,0834π	0,259	0,966	0,027	0,631	–0,100
0,166π	0,500	0,866	0,052	0,656	–0,090
0,250π	0,707	0,707	0,074	0,678	–0,074

Таблиця 7

φ, рад	sin φ	cos φ	1 – sin φ	–0,104(1 – sin φ)	–0,104 cos φ	0,104 sin φ	M/PR = cos φ – – 0,104(1– – sin φ)	Q/P = sin φ – – 0,104 cos φ	N/P = cos φ + + 0,104 sin φ
0,25π	0,707	0,707	0,293	–0,030	–0,074	0,074	0,677	0,633	0,784
0,333π	0,866	0,500	0,134	–0,014	–0,052	0,090	0,486	0,814	0,590
0,417π	0,966	0,259	0,034	–0,004	–0,027	0,100	0,255	0,939	0,359
0,5π	1	0	0	0	0	0,104	0	1	0,104

§ 25. Побудова епюр внутрішніх зусиль для просторових рам

У багатьох конструкціях застосовуються стрижні, осі яких не лежать в одній площині, а також і плоскі системи, що перебувають під дією просторових навантажень. У поперечних перерізах елементів таких систем можуть діяти всі шість внутрішніх силових факторів: N, Q_y, Q_z, M_x, M_z (див. рис. 40).

Методику побудови епюр у цьому разі розглянемо на прикладі стрижня, осі якого становлять просторову ламану лінію (рис. 88). Умовимося при переході від одного стрижня системи до іншого суміщати вісь x з віссю розглядуваного стрижня, відповідно розміщуючи додатні напрями осей y та z (рис. 88, *а*, *б*).

Епюри згинальних моментів, як і раніше, будуватимемо на стиснутих волокнах, причому *орієнтувати їх треба так, щоб площина епюри збігалася з площиною дії пари того згинального моменту, для якого її побудовано.* Знак згинального моменту береться довільно і до того ж тільки у разі потреби записати відповідне рівняння (як для плоских рам та криволінійних стрижнів). Для поздовжніх сил і крутних моментів залишаються раніше взяті правила знаків. Епюри N та $M_{кр}$ можуть бути орієнтовані довільно, проте ординати завжди відкладаються по нормалі до осі стрижня. Поперечні сили в перерізі вважаються додатними, якщо їхній напрям збігається з додатним напрямом осей y та z.

Побудову розпочинаємо з ділянки AB. Для довільного перерізу на відстані x від точки B визначаємо результат дії сил, розміщених ліворуч від перерізу (тобто сили P та рівнодійної розподіленого навантаження q):

$$N \equiv 0; \quad Q_y = -q(l_1 - x); \quad Q_z = -P; \quad M_{кр} \equiv 0;$$

$$M_z = \frac{q\,(l_1 - x_2)}{2} \text{ (стиснуті нижні волокна);} \qquad (3.23)$$

$$M_y = P(l_1 - x) \text{ (стиснуті ліві волокна).} \qquad (3.24)$$

У перерізі B (при $x = 0$)

$$N = 0; \quad Q_y = -ql_1; \quad Q_z = P; \quad M_{кр} = 0;$$

$$M_z = \frac{ql_1^2}{2}; \quad M_y = Pl_1.$$

Користуючись цими даними, будуємо епюри для ділянки AB (рис. 89). Момент M_z діє у вертикальній площині xy, в цій площині й орієнтуємо параболічну епюру. Момент M_y діє в горизонтальній площині xz, у цій площині й орієнтуємо трикутну епюру.

Переходимо до ділянки BC. Проекцію на вісь стрижня дає тільки розподілене навантаження, отже, $N = ql_1$, і епюра N на ділянці BC прямокутна. Легко бачити, що $Q_z = 0$, а $Q_y = -P$, тому епюра Q_y прямокутна.

Момент відносно осі стрижня утворюється тільки від сили P, причому до верхнього боку будь-якого перерізу він прикладений проти годинникової стрілки (якщо дивитися знизу вгору, тобто проти напряму осі x). Відповідно до правила знаків для крутних моментів на ділянці BC $M_{кр} = -Pl_1$, і епюра $M_{кр}$ тут прямокутна.

Епюри згинальних моментів M_y та M_z на ділянці BC прямокутні, оскільки розподіленого навантаження на ній немає. Отже, досить визначити згинальні моменти в двох перерізах, наприклад у B та C. У перерізі B момент $M_z = 0$, оскільки сила P та рівнодійна розподіленого навантаження проходять через вісь z цього перерізу. В перерізі C момент

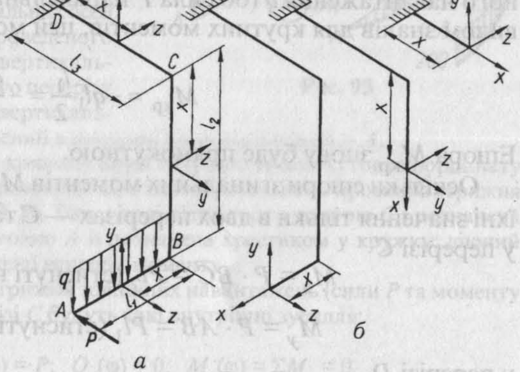


Рис. 88

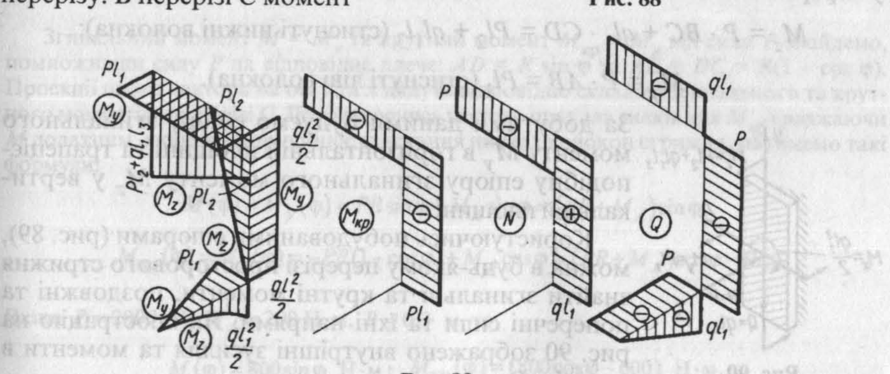


Рис. 89

$M_z = Pl_2$. Рівнодійна розподіленого навантаження не дає в цьому перерізі моменту M_z, оскільки перетинає вісь z перерізу C. За цими даними будуємо трикутник епюри M_z (рис. 89) на стиснутих волокнах, розміщуючи його в площині xy, в якій діє згинальний момент M_z.

Для згинального моменту M_y в перерізах B та C

$$M_y = ql_1 \frac{l_1}{2} = \frac{ql_1^2}{2}.$$

Сила P не дає моменту відносно осей y в перерізах B та C, оскільки вона паралельна цим осям. Отже, епюра M_y на ділянці BC прямокутна. На рис. 89 прямокутник побудовано на стиснутих волокнах і розміщено в площині xz.

Залишилося побудувати епюри на ділянці CD. На вісь x проекціюється тільки сила P, яка спричинює стискання. Тому тут $N = -P$, і епюра поздовжніх сил прямокутна.

У довільному перерізі ділянки $Q_z = 0$, а $Q_y = -ql_1$, тому епюра Q_y прямокутна.

Крутний момент відносно осі x утворюється тільки від дії розподіленого навантаження q (бо сила P паралельна осі x), причому, згідно з правилом знаків для крутних моментів, цей момент від'ємний:

$$M_{кр} = -ql_1 \frac{l_1}{2} = -\frac{ql_1^2}{2}. \tag{3.25}$$

Епюра $M_{кр}$ знову буде прямокутною.

Оскільки епюри згинальних моментів M_y та M_z прямокутні, визначимо їхні значення тільки в двох перерізах — C та D:

у перерізі C

$$M_z = P \cdot BC = Pl_2 \text{ (стиснуті нижні волокна);}$$

$$M_y = P \cdot AB = Pl_1 \text{ (стиснуті ліві волокна);}$$

у перерізі D

$$M_z = P \cdot BC + ql_1 \cdot CD = Pl_2 + ql_1 l_3 \text{ (стиснуті нижні волокна);}$$

$$M_y = P \cdot AB = Pl_1 \text{ (стиснуті ліві волокна).}$$

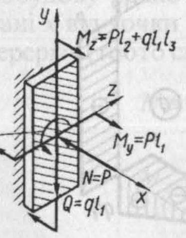


Рис. 90

За добутими даними будуємо епюру згинального моменту M_y в горизонтальній площині та трапецієподібну епюру згинального моменту M_z у вертикальній площині.

Користуючись побудованими епюрами (рис. 89), можна в будь-якому перерізі просторового стрижня знайти згинальні та крутні моменти, поздовжні та поперечні сили та їхні напрями. Як ілюстрацію на рис. 90 зображено внутрішні зусилля та моменти в перерізі D.

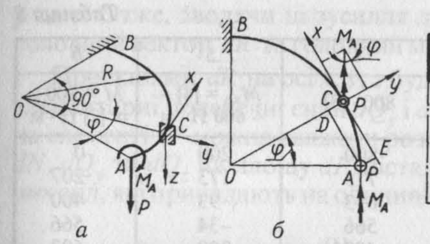


Рис. 91

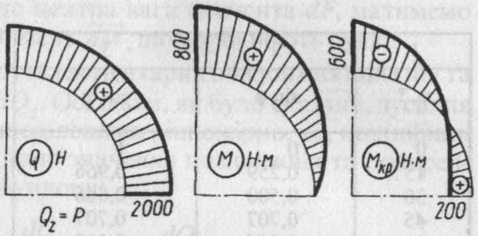


Рис. 92

Побудову епюр внутрішніх зусиль при просторовому навантаженні кривих стрижнів покажемо на такому прикладі.

Приклад 11. *Побудуємо епюри внутрішніх зусиль для просторового навантаженого криволінійного стрижня (рис. 91, а), розміщеного в горизонтальній площині.*

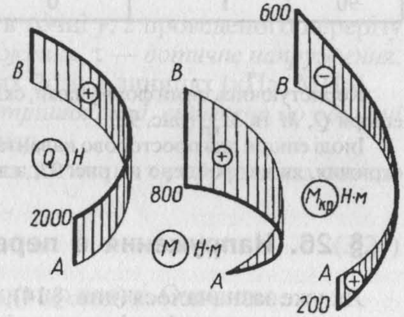


Рис. 93

Перерізи стрижня (наприклад, який наведено на рисунку заштрихованим прямокутником) такі, що одна з головних центральних осей y збігається з напрямом радіуса, проведеного в центр ваги перерізу, а друга z — вертикальна. Дотична до кола дає для кожного перерізу напрям осі стрижня (осі x). Сила P вертикальна, а зовнішній момент M прикладений в площині кінцевого перерізу A.

Для побудови епюр N, Q та M у кривому брусі потрібно ввести кутову координату φ та записати формули для зусиль і моментів. При цьому розглянемо проекцію стрижня на горизонтальну площину (рис. 91, б). Вісь z тоді збігається з точкою C і позначена точкою в кружку, а сила P — з точкою A й позначена хрестиком у кружку; діючий зовнішній момент зображено у вигляді вектора-моменту.

Унаслідок дії прикладених до стрижня зовнішніх навантажень (сили P та моменту M) у будь-якому довільному перерізі C будуть такі внутрішні зусилля:

$$N(\varphi) = \Sigma X = 0; \quad Q(\varphi) = P; \quad Q_y(\varphi) = 0; \quad M_z(\varphi) = \Sigma M_z = 0.$$

Згинальний момент $M = M_y$ та крутний момент $M_{кр} = M_x$ від сили P знайдемо, помноживши силу P на відповідне плече: $AD = R\sin\varphi$ та $AE = DC = R(1 - \cos\varphi)$. Проекції цього вектора на осі y та x дадуть відповідно складові згинального та крутного моментів у перерізі C. Дотримуючись взятого правила знаків для $M_{кр}$ і вважаючи M додатним, якщо він спричинює стискання нижніх волокон стрижня, матимемо такі формули:

$$M(\varphi) = M_y(\varphi) = PR\sin\varphi + M_A\sin\varphi = (PR + M_A)\sin\varphi;$$

$$M_{кр}(\varphi) = M_x(\varphi) = -PR(1-\cos\varphi) + M_A\cos\varphi = (PR + M_A)\cos\varphi - PR.$$

Якщо $P = 2000$ Н, $M_A = 200$ Н·м, $R = 0{,}3$ м, то

$$M(\varphi) = 800\sin\varphi \ \text{Н·м}; \quad M_{кр}(\varphi) = (800\cos\varphi - 600) \ \text{Н·м}.$$

Таблиця 8

1	2	3	4	5	6
φ, °	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$800\cdot[3]$	$M_{кр}=[4]-$ $-\,600$ Н · м	$M=800\times$ $\times[2]$ Н · м
0	0	1	800	200	0
15	0,259	0,966	773	173	207
30	0,500	0,866	693	93	400
45	0,707	0,707	566	–34	566
60	0,866	0,500	400	–200	693
75	0,966	0,259	207	–393	773
90	1	0	0	–600	800

Користуючись цими формулами, складаємо табл. 8* і за добутими даними будуємо епюри Q, M та $M_{кр}$ (рис. 92).

Іноді епюри для просторово навантажених кривих стрижнів будують не на проекції стрижня, як це зроблено на рис. 92, а в перспективі (рис. 93).

§ 26. Напруження в перерізі

Як уже зазначалося (див. § 14), в перерізі навантаженого стрижня діють неперервно розподілені по перерізу внутрішні зусилля. Зводячи їх до центра ваги перерізу, дістаємо головний вектор $\overline{R}$ та головний момент $\overline{M}$, проекції яких на головні центральні осі y, z перерізу та вісь x стрижня дають величини Q_y, Q_z, N, M_y, M_z, $M_x = M_{кр}$, що називаються зусиллями та моментами в перерізі. На рис. 94, *а* зображено розподілені по лівому перерізу зусилля, які є наслідком дії правої частини стрижня (зображено штриховими лініями) на ліву, їхні головний вектор $\overline{R}$ та головний момент $\overline{M}$. Вектор $\overline{R}$ є сумою зусиль, розподілених по всій площі перерізу.

Розглянемо нескінченно малий елемент площі dF (рис. 94, *б*). Унаслідок малості елемента можна вважати, що внутрішні зусилля, які діють в його різних точках, однакові за модулем та напрямом. Тоді їхня рівнодійна $\overline{dR}$ проходитиме через центр ваги елемента dF, координати якого

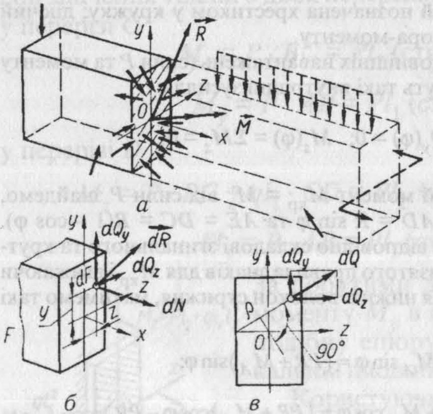


Рис. 94

*Тут і далі цифри в квадратних дужках у головках таблиць вказують значення відповідної графи.

y та z. Отже, зводячи ці зусилля до центра ваги елемента dF, матимемо головний вектор $\overline{dR}$ та головний момент $\overline{dM}$, що дорівнюють нулю.

Проекціями $\overline{dR}$ на осі x, y, z будуть елементарна поздовжня сила dN та елементарні поперечні сили dQ_y і dQ_z. Оскільки, як було сказано, зусилля на елементі dF можна вважати розподіленими рівномірно, то, поділивши dN, dQ_y та dQ_z на площу dF, дістанемо значення поздовжніх та поперечних сил, які припадають на одиницю площі:

$$\sigma = \frac{dN}{dF};\quad \tau_y = \frac{dQ_y}{dF};\quad \tau_z = \frac{dQ_z}{dF}. \tag{3.26}$$

Ці величини називають напруженнями в точці y, z проведеного перерізу стрижня, причому σ — *нормальне напруження*, τ — *дотичне напруження*. Їх виражають у паскалях (Па) та кратних йому одиницях (кПа, МПа).

Отже, *напруженням називається внутрішня сила, віднесена до одиниці площі в даній точці розглядуваного перерізу.*

Іноді крім нормальних напружень σ та дотичних τ_y, τ_z розглядають ще й повне напруження

$$p = \frac{dR}{dF}, \tag{3.27}$$

тобто повне зусилля, яке припадає на одиницю площі. Очевидно,

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2}. \tag{3.28}$$

У загальному випадку навантажування тіла напруження в різних точках перерізу різні (як кажуть, напруження розподілені по перерізу нерівномірно), однак бувають також і рівномірно розподілені напруження.

Поняття «напруження» відіграє дуже важливу роль у розрахунках на міцність. Тому значна частина курсу опору матеріалів приділяється вивченню способів визначення напружень σ та τ.

Неважко визначити загальні залежності між σ та τ, з одного боку, та N, Q_y, Q_z, M_y, M_z та M_x — з іншого. Виходячи з означень зусиль та моментів (див. § 14) і враховуючи формули (3.26), маємо:

$$N = \int_F dN = \int_F \sigma dF; \tag{3.29}$$

$$Q_y = \int_F dQ_y = \int_F \tau_y dF; \tag{3.30}$$

$$Q_z = \int_F dQ_z = \int_F \tau_z dF; \tag{3.31}$$

$$M_y = \int_F z dN = \int_F \sigma z dF; \tag{3.32}$$

$$M_z = \int_F y dN = \int_F \sigma y dF; \tag{3.33}$$

$$M_{\text{кр}} = \int_F \left(ydQ_z - zdQ_y \right) = \int_F \left(y\tau_z - z\tau_y \right) dF = \int_F \rho\tau dF. \quad (3.34)$$

У формулі (3.34) τ є повним дотичним напруженням у точці перерізу з координатами y, z:

$$\tau = \frac{dQ}{dF} = \frac{\sqrt{dQ_y^2 + dQ_z^2}}{dF} = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2},$$

а ρ — відстань від центра ваги перерізу до лінії дій dQ (рис. 94, *в*).

Добуті формули (3.29) — (3.34), які встановлюють зв'язок між напруженнями та внутрішніми зусиллями, називатимемо *статичними рівняннями* або *інтегральними рівняннями рівноваги*.

Незважаючи на те що компоненти внутрішніх зусиль у будь-якому перерізі стрижня, як правило, легко визначити, наприклад з епюр, для практичних розрахунків добуті залежності безпосередньо використати не можна, оскільки невідомий закон розподілу напружень по перерізу. Отже, задача обчислення напружень у перерізі завжди є статично невизначуваною. Наприклад, знаючи згинальний момент M_y у перерізі, не можна знайти нормальні напруження із формули (3.32). Однак, якщо скористатися тими чи іншими міркуваннями, вдається не тільки встановити закон розподілу σ та τ по перерізу, а й за формулами (3.29) — (3.34) знайти самі напруження.

Узагалі при виведенні формул для досліджування напруженого стану стрижнів завжди слід дотримуватися такої схеми:

1. Розглядаємо статичний аспект задачі, тобто записуємо ті з рівнянь (3.29) — (3.34), які потрібні для розглядуваної задачі.

2. Розглядаємо геометричний аспект задачі: на базі експериментального вивчення даного виду деформації стрижня та певних гіпотез (зокрема, гіпотези плоских перерізів) установлюємо залежності між переміщеннями точок стрижня та їхнім положенням у перерізі відносно вибраної системи координат. Ці залежності називають *геометричними рівняннями*.

3. Розглядаємо фізичний аспект задачі: на підставі експериментальних досліджень фізичних властивостей матеріалу визначаємо залежності між напруженнями та деформаціями (або переміщеннями). Ці залежності називають *фізичними рівняннями*.

4. Виконуємо синтез, тобто разом розв'язуємо всі рівняння, здобуті в п. 1 — 3, і через виключення деформацій (або переміщень) дістаємо формули, що виражають напруження через зусилля або моменти в перерізі.

Розділ 4 РОЗТЯГ І СТИСК. МЕХАНІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРІАЛІВ

§ 27. Напруження і деформації при розтяганні й стисканні. Розрахунок на міцність і жорсткість

Розтягання або стискання стрижня спричинюється силами, що діють уздовж його осі. У цьому разі в поперечних перерізах стрижня із шести внутрішніх силових факторів виникає лише один — поздовжня (осьова) сила N. Найпростіший приклад розтягання стрижня й епюру поздовжніх сил наведено на рис. 95, *а*, *б*. Осьова сила в перерізі є рівнодійною нормальних напружень, що виникають у кожній із точок перерізу. Відсутність поперечних сил дає підставу припустити, що дотичні напруження в кожній точці поперечного перерізу дорівнюють нулю.

Виведемо формулу для визначення нормальних напружень. При розв'язанні цієї задачі будемо дотримуватися послідовності, наведеної в § 26.

Розсічемо стрижень довільним поперечним перерізом n — n (рис. 95, *в*). *Статичний аспект* задачі виражається вже відомим рівнянням (3.29)

$$N = \int_F \sigma dF. \quad (4.1)$$

Із рівняння (4.1) не можна визначити напруження σ, оскільки невідомий закон розподілу їх у точках поперечного перерізу.

Розглянемо *геометричний аспект задачі*. При спостеріганні деформації розтягання стрижня, на поверхні якого нанесено лінії, перпендикулярні до осі бруса (рис. 95, *а*), можна помітити, що ці лінії, зміщуючись паралельно самим собі, залишаються прямими і перпендикулярними до осі бруса. Припускаючи, що зазначена картина переміщування перерізів має місце й усередині стрижня, приходимо до *гіпотези плоских перерізів: поперечні перерізи стрижня, плоскі до деформації, залишаються плоскими і після неї, переміщуючись поступово вздовж осі стрижня*. Поділимо тепер стрижень на поздовжні (паралельні осі стрижня) елементи нескінченно малих поперечних перерізів і відтак називатимемо їх *волокнами*. На підставі гіпотези плоских перерізів можна дійти висновку, що всі волокна подовжуються на одну і ту саму величину і їхні відносні подовження є однакові:

$$\varepsilon = \Delta l / l = \text{const}. \quad (4.2)$$

Це аналітичний вираз геометричного аспекту задачі.

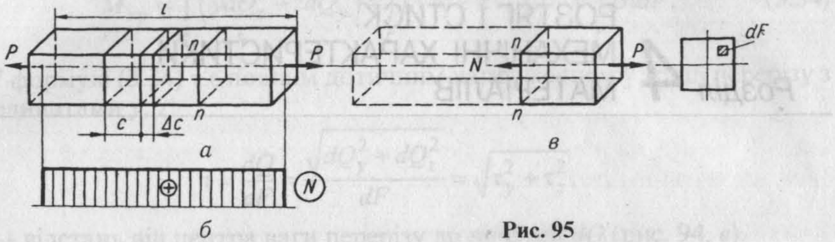


Рис. 95

Фізичний аспект задачі полягає у встановленні залежності деформацій від напружень. При пружних деформаціях ця залежність лінійна і, як відомо, називається *законом Гука*:

$$\varepsilon = \sigma/E, \quad \text{або} \quad \sigma = E\varepsilon, \tag{4.3}$$

де E — коефіцієнт пропорційності, що називається *модулем поздовжньої пружності, модулем пружності першого роду* або *модулем Юнга*. Модуль пружності — це одна з фізичних констант матеріалу. Виражається модуль пружності в паскалях.

Ураховуючи сталість модуля пружності E для однорідного й ізотропного матеріалу, а також вирази (4.2) і (4.3), знаходимо, що

$$\sigma = E\varepsilon = \text{const}. \tag{4.4}$$

Підставляючи вираз (4.4) у формулу (4.1), маємо

$$N = \int_F E\varepsilon dF = E\varepsilon \int_F dF = E\varepsilon F = \sigma F, \tag{4.5}$$

звідки

$$\sigma = N/F. \tag{4.6}$$

Знак напруження залежить від знака поздовжньої сили в розглядуваному перерізі. У разі стискання напруження вважають від'ємними.

Зазначимо, що формула (4.6) справедлива лише для перерізів, досить віддалених від місць прикладання зосереджених навантажень. Поблизу місць прикладання навантажень розподіл напружень має складний характер і потребує більш точних методів досліджування.

Визначаючи напруження при розтяганні, стисканні й інших видах деформування, в опорі матеріалів, а також у теорії пружності широко користуються таким дуже важливим положенням, яке має назву *принципу Сен-Венана*: *якщо тіло навантажується статично еквівалентними системами сил, тобто такими, в яких головний вектор та головний момент однакові, й при цьому розміри зони прикладення навантажень невеликі порівняно з розмірами тіла, то в перерізах, які достатньо віддалені від місць прикладення сил, напруження мало залежать від способу навантажування*. Загального теоретичного обґрунтування принципу Сен-Венана немає, проте

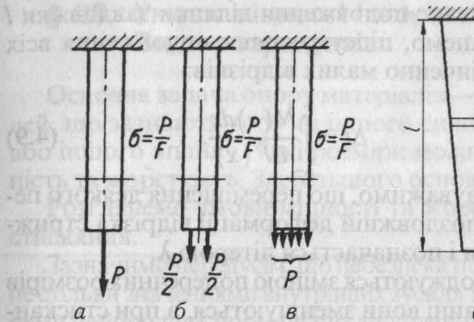


Рис. 96

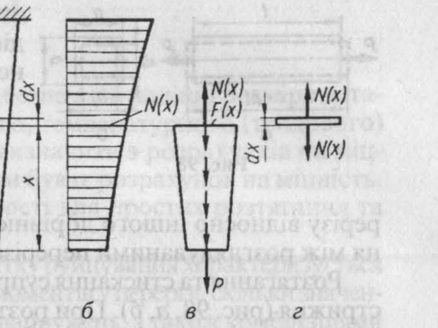


Рис. 97

його справедливість підтверджується численними теоретичними й експериментальними дослідженнями.

Пояснимо цей принцип на такому прикладі. Один і той самий стрижень, закріплений верхнім кінцем (рис. 96), навантажується на вільному кінці статично еквівалентними навантаженнями, рівнодійні яких визначаються вектором P. Навантаження прикладено різними способами: *а* — у вигляді зосередженої сили; *б* — у вигляді двох сил; *в* — у вигляді розподіленого навантаження. Дослідження показують, що в усіх цих прикладах у поперечному перерізі, віддаленому на відстань, що перевищує в 1,5...2 рази його поперечні розміри, напруження практично однакові. Проте в перерізах поблизу місця прикладення сил напруження та характер розподілу їх різні.

Перейдемо до визначення деформацій стрижня. Із виразу (4.5) можна знайти відносне подовження:

$$\varepsilon = \frac{N}{EF}. \tag{4.7}$$

У межах призматичної ділянки стрижня завдовжки l, виготовленого з однорідного матеріалу (E = const) і у перерізах якого діють однакові поздовжні сили N, подовження кожної одиниці довжини однакові й, отже, абсолютне подовження

$$\Delta l = \varepsilon l = \frac{Nl}{EF}. \tag{4.8}$$

Формула (4.8) виражає закон Гука для абсолютних подовжень. Добуток EF у знаменнику формули називається *жорсткістю поперечного перерізу стрижня при розтяганні та стисканні* й має розмірність сили. Величину $c = EF/l$ називають *жорсткістю стрижня*.

Якщо на розглядуваній ділянці поздовжня сила та поперечний переріз змінні (рис. 97, *а—в*), то для елемента нескінченно малої довжини dx (рис. 97, *г*) на підставі формули (4.8) можна записати

$$\Delta(dx) = \frac{N(x)dx}{EF(x)}.$$

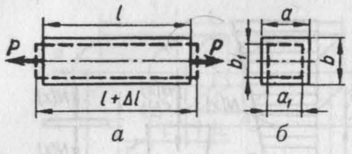


Рис. 98

Повне подовження ділянки завдовжки l дістанемо, підсумувавши подовження всіх нескінченно малих відрізків:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(x)dx}{EF(x)}. \tag{4.9}$$

Зауважимо, що переміщення деякого перерізу відносно іншого дорівнює поздовжній деформації відрізка стрижня між розглядуваними перерізами і позначається літерою λ.

Розтягання та стискання супроводжуються зміною поперечних розмірів стрижня (рис. 98, *а*, *б*). При розтяганні вони зменшуються, а при стисканні збільшуються.

За аналогією з поздовжньою деформацією різницю відповідних поперечних розмірів після деформації й до неї назвемо *абсолютною поперечною деформацією*:

$$\Delta a = a_1 - a; \quad \Delta b = b_1 - b. \tag{4.10}$$

При розтяганні поперечні деформації від'ємні, а при стисканні — додатні.

Поділивши абсолютну поперечну деформацію на відповідний початковий розмір, дістанемо *відносну поперечну деформацію*, яку позначимо ε'. Відносна поперечна деформація для ізотропних матеріалів в усіх поперечних напрямах однакова:

$$\varepsilon' = \Delta a/a = \Delta b/b. \tag{4.11}$$

Між поперечною та поздовжньою відносними деформаціями при простих розтяганні та стисканні в межах застосування закону Гука існує постійне співвідношення. Абсолютне значення цього відношення має назву *коефіцієнта Пуассона* і позначається літерою μ:

$$\mu = |\varepsilon'/\varepsilon|. \tag{4.12}$$

Коефіцієнт Пуассона — безрозмірна величина.

Ураховуючи, що поздовжня й поперечна деформації завжди мають протилежні знаки, маємо

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon, \tag{4.13}$$

або, згідно з формулою (4.3),

$$\varepsilon' = -\mu\frac{\sigma}{E}. \tag{4.14}$$

При стисканні напруження у формулу (4.14) слід підставляти зі знаком «мінус».

Коефіцієнт Пуассона μ, як і модуль пружності E, характеризує пружні властивості матеріалу. Для всіх ізотропних матеріалів значення коефіцієнта Пуассона перебуває в межах 0...0,5. Зокрема, для корка μ наближається до нуля, для каучуку — до 0,5, для сталі $\mu \approx 0{,}3$. Значення модулів пружності E та коефіцієнтів μ для деяких матеріалів наведено в дод. 9.

§ 28. Умови міцності і жорсткості. Види розрахунків

Основна задача опору матеріалів — забезпечити надійні розміри деталей, що зазнають того чи іншого силового, температурного (теплового) або іншого впливу. Такі розміри можна визначити з розрахунків на міцність та жорсткість. Здебільшого основним буває розрахунок на міцність.

Розглянемо умови міцності та жорсткості для простих розтягання та стискання.

Зазначимо передусім, що небезпека початку руйнування характеризується не стільки значеннями внутрішніх зусиль та моментів у перерізі, скільки значеннями найбільших нормальних та дотичних напружень, а також комбінаціями їх, які діють у небезпечних (тобто найбільш напружених) точках перерізу.

Фізично очевидно, що які завгодно великі напруження матеріал не може витримати. Тому найбільші напруження з умови надійної роботи деталі потрібно обмежувати деякими допустимими значеннями. Їх називають *допустимими напруженнями*. При розтяганні та стисканні допустимі напруження позначають відповідно $[\sigma_+]$ та $[\sigma_-]$, при зсуві — $[\tau]$*.

Якщо відомі допустимі напруження і є формули, що визначають напруження через зусилля і моменти в перерізі, то у принципі можна розрахувати на міцність будь-яку деталь.

У разі розтягання або стискання стрижня знаходять небезпечні перерізи, в яких напруження досягають найбільших за модулем значень, і для цих перерізів записують умову міцності:

$$\sigma_{\max} = \left|\frac{N_{\max}}{F}\right| \le [\sigma]. \tag{4.15}$$

При розтяганні в праву частину цієї умови підставляють допустимі напруження на розтяг $[\sigma_+]$, а при стисканні — допустимі напруження на стиск $[\sigma_-]$.

Використовуючи умову міцності (4.15), можна розв'язувати три типи задач:

1) за відомими навантаженнями для вибраного матеріалу знайти надійні з погляду міцності розміри поперечного перерізу стрижня (проектувальний розрахунок);

2) за відомими розмірами та матеріалом деталі перевірити, чи зможе вона витримати задане навантаження (перевірний розрахунок);

3) за відомими розмірами деталі, матеріалом і схемою навантажування визначити допустиме навантаження.

Іноді для забезпечення нормальної роботи машин та споруд розміри їхніх деталей потрібно вибирати так, щоб задовольнити умову жорсткості. При розтяганні (стисканні) умова жорсткості має такий вигляд:

$$\Delta l = \Sigma \int \frac{N(x)dx}{EF(x)} \le [\Delta l], \tag{4.16}$$

де Δl — зміна довжини деталі; $[\Delta l]$ — допустиме значення цієї зміни.

*Деякі міркування щодо вибору допустимих напружень наведено в § 34.

Нагадаємо, що розрахунок за умовою жорсткості завжди слід доповнювати розрахунком на міцність. Якщо умова жорсткості виконується, а умова міцності ні, то задачу слід розв'язувати з умови міцності.

Аналогічно розраховують на міцність та жорсткість при інших простих деформаціях стрижня. Міркування щодо розрахунку на міцність при складних напружених станах викладено в розділі 7.

§ 29. Випробування матеріалів на розтягання

Під час проектування й розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість елементів механізмів, машин та споруд треба знати властивості матеріалів. Тому матеріали випробовують на розтягання, стискання, зсув, кручення, згинання та твердість. Докладні описи всіх видів механічних випробувань, а також машин та приладів, що при цьому застосовуються, наведено в спеціальних курсах і посібниках з лабораторних робіт з опору матеріалів. Обмежимося лише коротким описом деяких поширених видів механізмів випробувань та здобутих при цьому результатів.

Одним із основних видів випробувань матеріалів є випробовування на розтягання, оскільки при цьому виявляються найважливіші їхні властивості. З випробуваного матеріалу виготовляють спеціальні зразки. Найчастіше їх роблять циліндричними (рис. 99, *а*); з листового металу, як правило, виготовляють плоскі зразки (рис. 99, *б*).

У циліндричних зразках має витримуватися співвідношення між розрахунковою довжиною зразка l_0 та діаметром d_0: у довгих зразків $l_0 = 10\,d_0$, у коротких — $l_0 = 5\,d_0$. Ці співвідношення можна виразити в дещо іншій формі. Враховуючи, що

$$d_0 = \sqrt{\frac{4F_0}{\pi}} = 1{,}13\sqrt{F_0},$$

де F_0 — площа поперечного перерізу зразка, маємо:
для довгого зразка

$$l_0 = 11{,}3\sqrt{F_0}; \tag{4.17}$$

для короткого —

$$l_0 = 5{,}65\sqrt{F_0}. \tag{4.18}$$

Щоб дотриматися подібності при випробуваннях, ці співвідношення мають поширюватися і на плоскі зразки.

Як основні використовують зразки з діаметром $d_0 = 10$ мм; при цьому робоча довжина $l_0 = 100$ мм. Допускається застосування зразків інших діаметрів за умови, що їхня робоча довжина $l_0 = 10\,d_0$ або $l_0 = 5\,d_0$. Такі зразки називають *пропорційними*.

Діаграми розтягання. Для випробувань на розтягання застосовують розривні машини, що дають змогу в процесі випробування визначити зусилля та відповідні до них деформації зразка. За цими даними будують

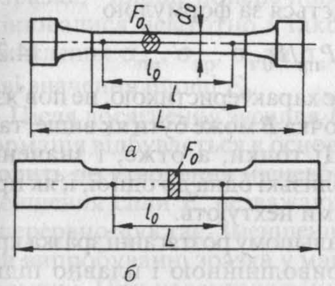


Рис. 99

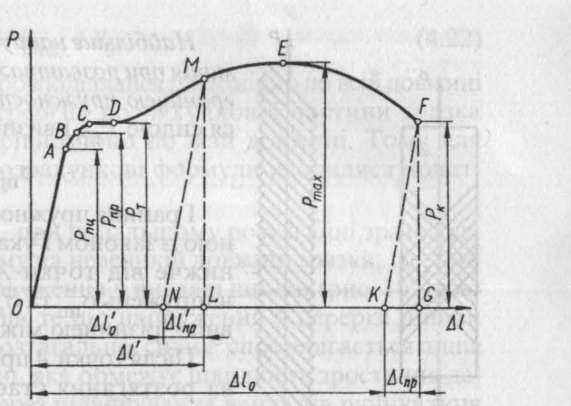


Рис. 100

початкову діаграму розтягання, в якій по осі ординат відкладають зусилля, а по осі абсцис — відповідні до них подовження. Діаграму розтягання можна зняти й автоматично за допомогою спеціальних діаграмних апаратів. Характер діаграми розтягання залежить від властивостей випробуваного матеріалу. Типовий вигляд такої діаграми для маловуглецевої сталі зображено на рис. 100.

Розглянемо характерні ділянки й точки цієї діаграми, а також відповідні до них стадії деформування зразка.

Від початку навантажування до певного значення розтягальної сили має місце прямо пропорційна залежність між подовженням зразка та силою. Ця залежність на діаграмі визначається прямою OA. На цій стадії розтягання справедливий закон Гука.

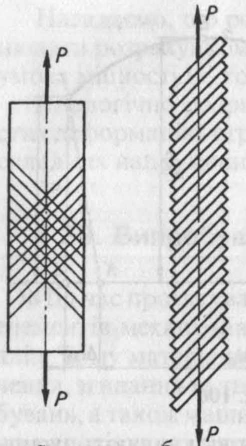
Позначимо силу, за якої закон пропорційності припиняє свою дію, через $P_{пц}$. Цьому значенню сили на діаграмі відповідає точка A. Напруження, спричинене силою $P_{пц}$, називається *границею пропорційності* й обчислюється за формулою

$$\sigma_{пц} = P_{пц}/F_0. \tag{4.19}$$

Отже, *границею пропорційності називається напруження, після якого порушується закон Гука.*

Як уже зазначалося, *деформація називається пружною, якщо вона повністю зникає після розвантаження*. Припустимо, що поступово підвищуючи навантаження P, при кожному його значенні здійснюватимемо повне розвантаження зразка. Доки сила P не досягне певного значення, доти спричинені нею деформації зникатимуть при розвантаженні. Процес розвантажування при цьому зобразиться тією самою лінією, що й навантажування.

Позначимо через $P_{пр}$ найбільше значення сили, при якому зразок ще не дає при розвантаженні залишкової деформації. Цьому значенню на діаграмі відповідає точка B, а пружній стадії розтягання зразка — ділянка OB.



а б

Рис. 101

Найбільше напруження, до якого залишкова деформація при розвантаженні не виявляється, називається границею пружності. Це напруження спричинюється силою $P_{пр}$ і визначається за формулою

$$\sigma_{пр} = P_{пр}/F_0. \quad (4.20)$$

Границя пружності є характеристикою, не пов'язаною із законом Гука. Точка *B* може бути як вище, так і нижче від точки *A*. Ці точки, а отже, і значення напружень $\sigma_{пц}$ та $\sigma_{пр}$ близькі одна до одної, і, як правило, різницею між ними нехтують.

Після точки *A* при дальшому розтяганні зразка крива розтягання стає криволінійною і плавно піднімається до точки *C*, де спостерігається перехід до горизонтальної ділянки *CD*, що називається *площадкою текучості.* На цій стадії розтягання подовження зразка зростає при сталому значенні розтягальної сили, яку позначають $P_т$. Такий процес деформації, що його називають *текучістю матеріалу*, супроводжується залишковим (пластичним) подовженням, яке не зникає після розвантаження.

Отже, *границею текучості* $\sigma_т$ *зветься найменше напруження, при якому деформація зразка відбувається при постійному розтягальному зусиллі.* Границя текучості визначається за формулою

$$\sigma_т = P_т/F_0. \quad (4.21)$$

Початок пластичної деформації відповідає наставанню деякого критичного стану металу, який можна виявити не тільки за залишковими деформаціями, а й за іншими ознаками. При пластичній деформації підвищується температура зразка; у сталі змінюються електропровідність та магнітні властивості. При цьому на полірованій поверхні зразків, особливо плоских, помітне потьмяніння, що є наслідком появи густої сітки ліній. Ці лінії мають назву *ліній Чернова* (*ліній Людерса*). Вони нахилені до осі зразка приблизно під кутом 45° (рис. 101, *а*) і становлять мікроскопічні нерівності, що виникають внаслідок зсувів у тих площинах кристалів, де діють найбільші дотичні напруження. Внаслідок зсувів по похилих площинах зразок зазнає залишкових деформацій. Механізм утворення їх спрощено зображено на рис. 101, *б*.

Після стадії текучості матеріал знову набуває здатності збільшувати опір подальшому деформуванню і сприймає зусилля, що зростає до деякої границі. Цьому відповідає висхідна ділянка *DE* (див. рис. 100) кривої розтягання, що зветься *ділянкою зміцнення*. Точка *E* відповідає найбільшому зусиллю P_{max}, яке може сприймати зразок.

Напруження, що відповідає максимальній силі P_{max}, *називається тимчасовим опором* або *границею міцності* і позначається $\sigma_в$. Його визначають за формулою

$$\sigma_в = P_{max} / F_0. \quad (4.22)$$

До цього моменту подовження розподілялися рівномірно по всій довжині l_0 зразка; площі поперечних перерізів розрахункової частини зразка змінювалися неістотно і також рівномірно по всій довжині. Тому для обчислення $\sigma_{пц}$, $\sigma_{пр}$, $\sigma_т$ та $\sigma_в$ у розрахункові формули вводилися початкові значення площі F_0.

Після досягнення зусилля P_{max} при подальшому розтяганні зразка деформація відбувається в основному на невеликій довжині зразка. Це призводить до утворення місцевого звуження у вигляді шийки (рис. 102) і до зменшення сили *P*, незважаючи на те що напруження у перерізі шийки неперервно зростає. Зменшення розтягальної сили *P* спостерігається лише при випробуванні зразка у машині, яка обмежує швидкість зростання деформації. При навантажуванні через підвішування вантажів руйнування відбудеться при постійному навантаженні, проте із всезростаючою швидкістю деформації.

Позначивши через $P_{кр}$ розтягальну силу в момент розриву, матимемо

$$\sigma_{кр} = P_{кр} / F_0. \quad (4.23)$$

Визначене таким чином напруження при розриві зразка надто умовне і не може бути використане як характеристика механічних властивостей сталі. Умовність полягає в тому, що його здобуто діленням сили в момент розриву на початкову площу поперечного перерізу зразка, а не на дійсну його площу при розриві, яка значно менша, ніж початкова, внаслідок утворення шийки.

Основними характеристиками пружності та міцності матеріалів, що використовуються у практичних розрахунках, є границя пружності $\sigma_{пр}$, границя текучості $\sigma_т$ та тимчасовий опір (границя міцності) $\sigma_в$. Для маловуглецевої сталі, що має площадку текучості, наприклад для сталі Ст2, ці характеристики такі: $\sigma_{пр}$= 200 МПа, $\sigma_т$ = 220...260 МПа, $\sigma_в$ = 340...420 МПа.

Для металів, що не мають площадки текучості, границю текучості визначають умовно як напруження, при якому залишкова деформація є величиною, регламентованою стандартами або технічними умовами. Згідно з ГОСТ 1497—84, залишкова деформація становить 0,2 % від вимірюваної довжини зразка. Умовні границі текучості позначають нижнім індексом відповідно до заданого значення деформації, наприклад $\sigma_{0,2}$.

Ураховуючи, що практично важко встановити початок відхилення від закону пропорційності й початок появи перших залишкових деформацій, вводять також поняття умовних границі пропорційності та границі пружності.

Умовною границею пропорційності називають найменше напруження, при якому відхилення від лінійної залежності між напруженням та деформацією досягає деякого значення, що встановлюється технічними умовами (наприклад, 0,002 % від вимірюваної довжини зразка).

Рис. 102

Умовною границею пружності називають найменше напруження, при якому залишкова деформація досягає *заданого значення* (як правило, 0,001...0,05 % від вимірюваної довжини зразка). Її позначають нижнім індексом відповідно до заданого значення залишкової деформації (наприклад, $\sigma_{0,001}$ чи $\sigma_{0,05}$).

Найважливіші механічні характеристики деяких матеріалів, що широко застосовуються, наведено в дод. 2...8.

Розвантаження та повторне навантажування. Як уже зазначалось, якщо при зусиллі розтягання, що спричинює напруження не вище за границю пружності, припинити навантажування, а потім розвантажувати зразок, то процес розвантаження зобразиться на діаграмі лінією, яка практично збігається з лінією навантаження. Після остаточного розвантаження зразка його подовження повністю зникає. Повторне навантажування на діаграмі піде по тій самій лінії *OB*, яку здобуто при першому навантажуванні зразка.

Буде інакше, якщо до початку розвантаження напруження у зразку перевищує границю пружності. Виконавши розвантаження, наприклад після досягнення силою значення, зображеного ординатою точки *M* (див. рис. 100), помітимо, що процес розвантаження на діаграмі описується вже не кривою, яка збігається з кривою навантажування *OABCDM*, а прямою *MN*, паралельною прямолінійній ділянці *OA* діаграми. Подовження $\Delta l'$ зразка до початку розвантаження при розвантаженні зникає неповністю. Зникла частина подовження на діаграмі зобразиться відрізком $\Delta l'_{\text{пр}}$, а та частина, що залишилася, — відрізком $\Delta l'_0$. Отже, повне подовження зразка за границею пружності складається із двох частин — пружної та пластичної:

$$\Delta l' = \Delta l'_{\text{пр}} + \Delta l'_0.$$

Так буде до самого розриву зразка. Після розриву пружна складова повного подовження в обох частинах зразка (відрізок $\Delta l_{\text{пр}}$) зникає. Подовження, що залишилося, зображується відрізком Δl_0.

Далі знову навантажуватимемо зразок, який був розтягнутий силою, що спричинила в ньому напруження вище за границю текучості, а потім розвантажений. При цьому виявиться, що лінія повторного навантажування майже збігається на діаграмі з лінією розвантаження *MN*. Границя пропорційності підвищиться й приблизно дорівнюватиме тому напруженню, до якого первісно був розтягнутий зразок. При подальшому підвищенні розтягальної сили крива діаграми збігається з *MEF*. Частина діаграми ліворуч від лінії *NM* виявиться відсіченою, тобто початок координат переміститься в точку *N*. Залишкове подовження після розриву буде меншим, ніж у зразку, що не зазнав попередньої пластичної деформації.

Отже, попереднє витягування за границю текучості змінює деякі механічні властивості сталі — підвищує границю пропорційності й зменшує залишкове подовження після розриву, тобто робить її більш крихкою. Зміна властивостей матеріалу внаслідок деформації за границею текучості зветься *наклепом*. У деяких випадках це явище небажане, і його намагаються усунути, в інших, навпаки, наклеп корисний, і його утворюють штучно.

Відносні подовження та звуження після розриву. Повне подовження, якого зазнав зразок перед руйнуванням, зменшиться після розриву, оскільки в частинах зразка зникнуть пружні деформації. *Відносним подовженням після розриву* δ, %, називають відношення приросту розрахункової довжини зразка після розриву до його початкової довжини:

$$\delta = \frac{\Delta l_0}{l_0} 100 \,. \tag{4.24}$$

Відносне подовження після розриву характеризує пластичність матеріалу. Залежно від цього подовження матеріали поділяють на пластичні й крихкі. Для перших можна умовно взяти $\delta > 5$ %, а для других — $\delta < 5$ %. До пластичних матеріалів належать маловуглецева сталь, чавун, скло, камінь, бетон тощо. Наприклад, для вуглецевої сталі марки Ст2 відносне подовження після розриву $\delta \approx 31$ %.

Відносне звуження зразка після розриву Ψ, %, визначається діленням абсолютного зменшення площі поперечного перерізу в шийці на початкову площу:

$$\Psi = \frac{\Delta F_0}{F_0} 100 \,. \tag{4.25}$$

Чим більше відносне звуження після розриву, тим пластичніший матеріал. Наприклад, для м'якої вуглецевої сталі марки Ст $\Psi = 55...65$ %.

Відносне подовження δ й відносне звуження Ψ є *характеристиками пластичності матеріалу*. Вони певною мірою умовні, оскільки приріст довжини у формулі (4.24) й зменшення площі поперечного перерізу зразка у виразі (4.25) належать до початкової довжини й початкової площі поперечного перерізу. Насправді пластична деформація відбувається на довжині зразка, що неперервно змінюється. Позначивши через *dl* приріст довжини *l* зразка в даний момент випробування, знаходимо так зване *дійсне відносне подовження*:

$$e = \int_{l_0}^{l_\text{к}} \frac{dl}{l} = \ln \frac{l_\text{к}}{l_0}. \tag{4.26}$$

Тут l_0 і $l_\text{к}$ — відповідно початкова та кінцева довжини зразка.

Оскільки

$$l_\text{к} = l_0 + \Delta l \quad \text{i} \quad \delta = \Delta l / l_0, \quad \text{то} \quad e = \ln \frac{l_0 + \Delta l}{l_0} = \ln(1+\delta).$$

Розкладаючи праву частину цієї формули в ряд за степенями δ, дістанемо

$$e = \ln(1+\delta) = \delta - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3} - \ldots$$

Як бачимо, при малих значеннях δ умовна та дійсна деформації практично однакові. Так, уже при $\delta = 10$ % дійсне подовження $e = 9{,}95$ %.

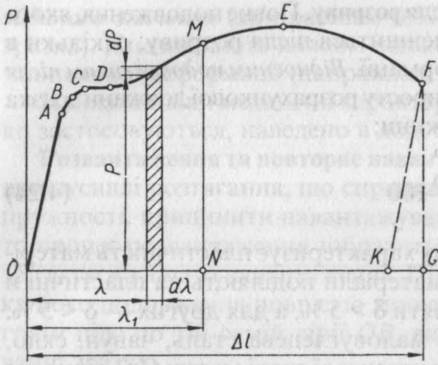


Рис. 103

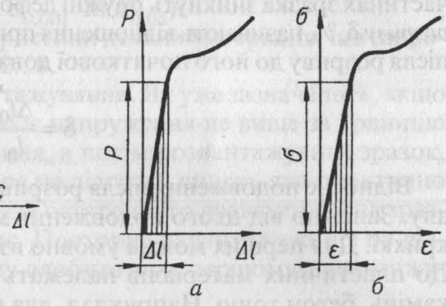


Рис. 104

Аналогічно можна визначити дійсне поперечне звуження:

$$\Psi = -\int_{F_0}^{F_к} \frac{dF}{F} = \ln\frac{F_0}{F_к} = \ln\frac{F_0}{F_0-\Delta F} = \ln\frac{l}{l-\Psi}. \qquad (4.27)$$

Як свідчать експерименти, при пластичній деформації об'єм тіла не змінюється:

$$F_0 l_0 = F_к l_к, \quad \text{або} \quad \frac{l_к}{l_0} = \frac{F_0}{F_к}.$$

Із цього випливає, що $\Psi = e$.

Робота деформації. Крім уже названих характеристик механічних властивостей матеріалу, діаграма розтягання дає змогу визначити ще й енергетичні його характеристики.

Площа діаграми розтягання в координатах $P \sim \Delta l$ характеризує роботу, яку витрачено на розрив зразка. Це можна показати так.

Нехай деякій розтягальній силі P відповідає деформація λ зразка (рис. 103). Надамо силі P нескінченно малого приросту dP, при цьому приріст деформації буде $d\lambda$. Очевидно, робота зовнішніх сил на цьому переміщенні

$$dA = (P + dP)\,d\lambda \approx P\,d\lambda.$$

Робота, яку витрачено на розтягання зразка до подовження λ_1,

$$A = \int_0^{\lambda_1} P\,d\lambda. \qquad (4.28)$$

Як видно з рис. 103, інтеграл є площею *OABCDMNO* діаграми розтягання. Робота, яку витрачено на розрив зразка, дорівнюватиме всій площі *OABCDEFGO* діаграми розтягання.

У межах пружності повна робота деформації визначається площею трикутника (рис. 104, *а*):

$$A_{пр} = \frac{P\Delta l}{2}. \qquad (4.29)$$

Поділивши повну роботу деформації A на об'єм робочої частини зразка, знайдемо *питому роботу деформації*, тобто роботу, яку витрачено на деформування одиниці об'єму матеріалу:

$$a_{пр} = A/V. \qquad (4.30)$$

Підставивши у формулу (4.30) значення A із формули (4.29) та $V = F_0 l_0$, дістанемо

$$a_{пр} = \frac{P\Delta l}{2F_0 l_0} = \frac{\sigma\varepsilon}{2}. \qquad (4.31)$$

Питома робота деформації у межах пружності визначається площею трикутника на діаграмі $\sigma \sim \varepsilon$ (рис. 104, *б*).

Питома робота деформації характеризує здатність матеріалу чинити опір ударній дії навантаження: чим більша питома робота деформації до розриву, тим краще матеріал чинить опір ударним навантаженням.

Діаграма розтягання в координатах $\sigma \sim \varepsilon$. Вигляд діаграми розтягання в координатах $P \sim \Delta l$ залежить не тільки від властивостей матеріалу, а й від розмірів випробуваного зразка.

Щоб здобути діаграму, яка характеризує тільки механічні властивості матеріалу, початкову діаграму розтягання перебудовують у координатах $\sigma \sim \varepsilon$. Ординати такої діаграми дістають діленням розтягальної сили на початкову площу поперечного перерізу зразка ($\sigma = P/F_0$), а абсциси — діленням абсолютних подовжень розрахункової частини зразка на її початкову довжину ($\varepsilon = \Delta l/l_0$). Зокрема, для характерних точок діаграми ординати визначають за формулами (4.19) — (4.23).

Діаграму в координатах $\sigma \sim \varepsilon$, яка відповідає початковій діаграмі (див. рис. 100), зображено на рис. 105, *а*. Точкам *O*, *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* початкової діаграми відповідають точки *O*, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* діаграми $\sigma \sim \varepsilon$.

Із діаграми $\sigma \sim \varepsilon$ бачимо, що

$$\operatorname{tg}\alpha = \sigma/\varepsilon = E, \qquad (4.32)$$

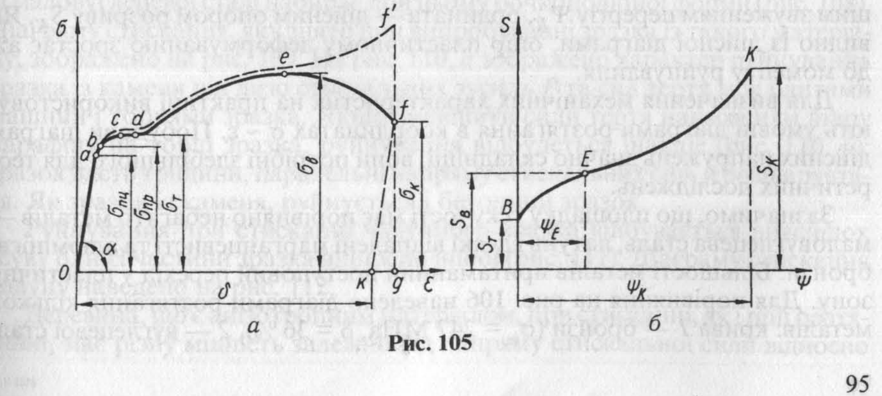


Рис. 105

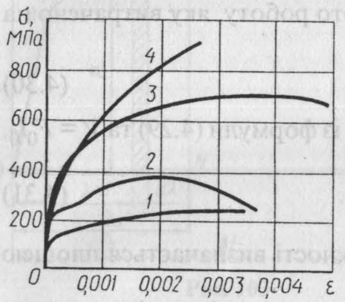


Рис. 106

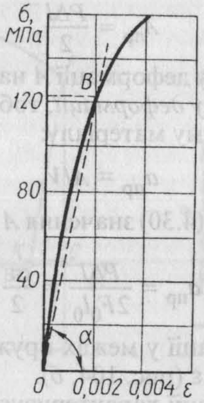


Рис. 107

тобто модуль пружності при розтяганні дорівнює тангенсу кута нахилу прямолінійної ділянки діаграми до осі абсцис.

Площа діаграми напружень σ ~ ε у відповідному масштабі дорівнює питомій роботі деформації. Низхідна ділянка *ef* діаграми має умовний характер, оскільки дійсна площа поперечного перерізу зразка після утворення шийки та початкова площа, за якою визначають ординати діаграми, значно відрізняються одна від одної. Розділивши силу на дійсну площу поперечного перерізу зразка, можна знайти дійсне напруження та побудувати відповідну діаграму (рис. 105, *а* — штрихова лінія).

Оскільки після утворення шийки відносна поздовжня деформація розподіляється по довжині зразка нерівномірно, то дійсні діаграми будують у таких координатах: відносне звуження Ψ поперечного перерізу в шийці ~ дійсне напруження *S*, де $\Psi = (F_0 - F_t)/F_0$, $S = P_t/F_t$, а P_t та F_t — відповідно зусилля та найменша площа поперечного перерізу в певний момент дослідження.

Криву дійсних напружень при розтяганні маловуглецевої сталі наведено на рис. 105, *б*. Точці *B* відповідає початок виникнення залишкової деформації й дійсне напруження, що є границею текучості. Точці *E* відповідає найбільша сила P_{max}, яку витримав зразок під час випробування. За нею визначається дійсний тимчасовий опір $S_в$. Деформація зразка від початку розтягання до моменту, що відповідає точці *E*, рівномірна по довжині зразка. Абсциса точки $E(\Psi_E)$ показує найбільше рівномірне звуження. Точка *K* діаграми відповідає моменту розриву зразка. Її абсциса є найбільшим звуженням перерізу Ψ_K, ордината — дійсним опором розриву S_K. Як видно із дійсної діаграми, опір пластичному деформуванню зростає аж до моменту руйнування.

Для визначення механічних характеристик на практиці використовують умовні діаграми розтягання в координатах σ ~ ε. Побудови діаграм дійсних напружень значно складніші, вони потрібні здебільшого для теоретичних досліджень.

Зазначимо, що площадку текучості має порівняно небагато металів — маловуглецева сталь, латунь і деякі відпалені марганцевисті та алюмінієві бронзи. Більшості металів притаманний поступовий перехід у пластичну зону. Для порівняння на рис. 106 наведено діаграми розтягання кількох металів: крива *1* — бронзи ($\sigma_в$ = 247 МПа, δ = 36 %), *2* — вуглецевої сталі

($\sigma_в$ = 358 МПа, δ = 38 %); *3* — нікелевої сталі ($\sigma_в$ = 715 МПа, δ = 54 %) та *4* — марганцевистої сталі ($\sigma_в$ = 916 МПа, δ = 30 %).

Розрив зразків із крихких металів відбувається при дуже невеликому подовженні й без утворення шийки. На рис. 107 наведено діаграму розтягання сірого чавуну СЧ 28, типову для таких матеріалів. Діаграма не має вираженої початкової прямолінійної ділянки. Однак, визначаючи деформації у чавунних деталях, користуються формулою закону Гука. Значення модуля пружності *E* знаходять як тангенс кута нахилу прямої, проведеної через початкову точку *O* діаграми в точку *B*, що відповідає напруженню, при якому визначають деформацію. Такий модуль називають *січним*.

§ 30. Деякі інші види механічних випробувань

Випробування на стискання, незважаючи на їхню простоту, проводять рідше, ніж на розтягання. Це пояснюється так.

Для пластичних матеріалів модуль пружності, границя пружності та границя текучості при стисканні приблизно ті самі, що і при розтяганні. Напруження, що відповідає руйнівній силі, при стисканні пластичних матеріалів дістати не можна, оскільки зразок не руйнується, а перетворюється на диск, а стискальна сила постійно зростає. При випробуванні пластичних матеріалів на стискання також не можна здобути характеристик, аналогічних відносному подовженню й відносному звуженню при розриві.

Випробуванню на стискання піддають здебільшого крихкі матеріали, що, як правило, краще чинять опір стисканню, ніж розтяганню, і застосовуються для виготовлення елементів конструкцій, які працюють на стискання. Для розрахунку їх на міцність потрібно знати характеристики матеріалу, що дістають при випробуванні на стискання.

Випробування матеріалів на стискання виконують на спеціальних пресах або універсальних випробувальних машинах. Для цього виготовляють зразки у вигляді циліндрів невеликої висоти (як правило, від одного до трьох діаметрів) або кубиків. Тертя, що виникає під час випробування на стискання між плитами машини і торцями зразка, істотно впливає на результати випробування і на характер руйнування. Циліндричний зразок із маловуглецевої сталі набирає при цьому бочкоподібної форми (рис. 108). Діаграму стискання, яку знято при випробуванні зразка із такого матеріалу, зображено на рис. 109. На рис. 110, *а* зображено характер руйнування зразка із каменя під дією стискальних зусиль *P* та сил тертя між плитами машини і торцями зразка. Якщо зменшити сили тертя нанесенням шару парафіну на торці зразка, руйнування відбудеться інакше (рис. 110, *б*): зразок дасть тріщини, паралельні напряму стискальних сил, й розшарується. Як зразок із каменя, руйнується і бетонний зразок.

Руйнування при стисканні чавунного зразка відбувається внаслідок зсуву однієї частини зразка відносно іншої (рис. 111). Діаграму стискання чавуну наведено на рис. 112.

Деревина, що є анізотропним матеріалом, при стисканні, як і при розтяганні, має різну міцність залежно від напряму стискальної сили відносно

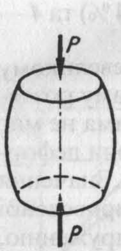


Рис. 108

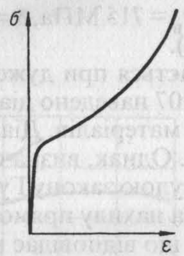


Рис. 109

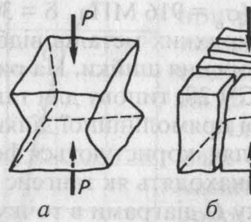


Рис. 110

Рис. 111

напряму волокон. На рис. 113 зображено діаграми стискання двох кубиків із деревини однієї породи. Крива *1* ілюструє стискання кубика вздовж волокон, а крива *2* — впоперек волокон. При стисканні вздовж волокон деревина значно міцніша, ніж при стисканні впоперек волокон. При стисканні вздовж волокон зразок руйнується внаслідок зсуву однієї частини відносно іншої, а при стисканні впоперек волокон деревина має схильність до пресування і не завжди вдається визначити момент початку руйнування.

У табл. 9 наведено значення тимчасового опору при стисканні деяких матеріалів.

Визначення твердості матеріалів. Іноді для оцінки тимчасового опору можна скористатися непрямим методом, зокрема вимірюванням твердості.

Твердістю матеріалу називають здатність чинити опір механічному прониканню в його поверхню іншого, більш твердого тіла. Для визначення твердості найчастіше в поверхню матеріалу з певною силою вдавлюють тіло (індентор) у вигляді кульки, конуса або піраміди. На підставі розмірів здобутого відбитка роблять висновок про твердість випробуваного матеріалу.

Найпоширенішим методом визначення твердості є метод Брінелля. Сталева загартована кулька діаметром D (рис. 114) удавлюється у випробуваний зразок (виріб) під дією навантаження P, прикладеного протягом певного часу. Після віддалення навантаження вимірюється діаметр відбитка, що залишився на поверхні зразка. Число твердості за Брінеллем виражається відношенням заданого навантаження P, кгс, до площі поверхні сферичного відбитка F, мм^2, і може бути визначене за формулою

$$HB = \frac{2P}{\pi D(D - \sqrt{D^2 - d^2})}, \qquad (4.33)$$

де P — навантаження*, кгс; D — діаметр кульки, мм; d — діаметр відбитка, мм.

Число твердості виражається у кілограм-силі на міліметр квадратний (кгс/мм^2), хоч, як правило, одиницю не вказують.

*Одиниці виміру навантаження кілограм-сили наведено у зв'язку з існуючим таруванням приладів.

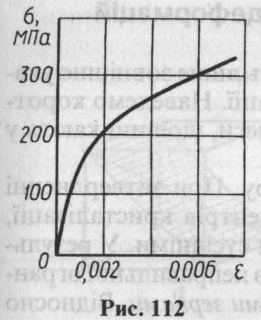


Рис. 112

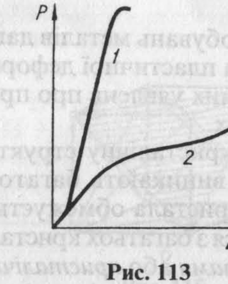


Рис. 113

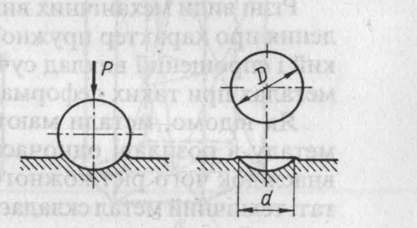


Рис. 114

Якщо твердість вимірюють кулькою діаметром D = 10 мм під навантаженням P = 3000 кгс із витримкою під навантаженням протягом часу t = 10 с, то число твердості за Брінеллем супроводжується позначенням HB, наприклад 300 HB. При інших режимах випробування після літер HB зазначають умови випробувань у такому порядку: діаметр кульки, навантаження і тривалість витримки під навантаженням. Наприклад, 200 HB 5/250/30 означає: 200 — число твердості; HB — твердість за Брінеллем; 5 — діаметр кульки, мм; 250 — навантаження, кгс; 30 — тривалість видержки під навантаженням, с.

Якщо твердість матеріалу HB ≥ 450 кгс/мм^2, то визначити її вдавлюванням кульки не можна у зв'язку з помітною деформацією останньої. Тоді замість кульки вдавлюють алмазний конус (метод Роквелла) або алмазну піраміду (метод Віккерса). Застосовують й інші методи. Наприклад, твердість визначають за висотою відскоку бойка, що падає з певної висоти на поверхню випробуваного матеріалу; за періодом коливань маятника, що упирається у поверхню матеріалу.

Твердість, яку визначено різними методами, за допомогою спеціальних таблиць можна перевести у твердість за Брінеллем.

Визначення твердості — вельми поширене випробування, що пояснюється його надзвичайною простотою. Твердість можна визначити й безпосередньо в умовах виробництва на готових виробах, оскільки відбитки, що залишаються, здебільшого не псують виробів.

Експериментально установлено, що для деяких матеріалів існує певний зв'язок між числом твердості за Брінеллем HB та тимчасовим опором при розриві $\sigma_в$. Наприклад, для маловуглецевої сталі $\sigma_в \approx 0,36$ HB, для сталевих виливків $\sigma_в$ = (0,3...0,4) HB, для сірого чавуну $\sigma_в$ = (HB—40)/6.

Таблиця 9

Матеріал	$\sigma_{в.ст}$, МПа	Матеріал	$\sigma_{в.ст}$, МПа
Чавун сірий звичайний	600...1000	Сосна (вологість 15 %):	
Граніт	120...260	уздовж волокон	40
Цегла	8...30	впоперек волокон	5
Бетон	7...50	Дуб (вологість 15 %)	
Текстоліт	130...250	уздовж волокон	50
Гетинакс	150...180	впоперек волокон	15

§ 31. Поняття про механізм утворення деформацій

Різні види механічних випробувань металів дають лише зовнішнє уявлення про характер пружної та пластичної деформації. Наведемо короткий і спрощений виклад сучасних уявлень про процеси, що виникають у металах при таких деформаціях.

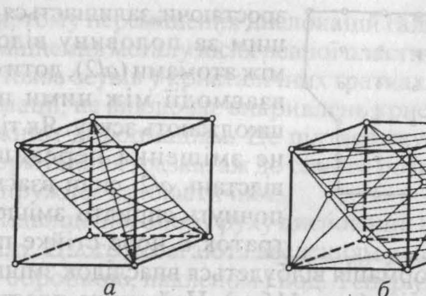
Як відомо, метали мають кристалічну структуру. При затвердненні металу в розплаві одночасно виникають багато центрів кристалізації, внаслідок чого ріст кожного кристала обмежується сусідніми. У результаті технічний метал складається з багатьох кристалів неправильної огранки, що їх називають *кристалітами* або *кристалічними зернами*. Відносно одне одного кристалічні зерна орієнтовані по-різному. Разом з тим у кожному з них атоми розміщені цілком певно й утворюють так звані *кристалічні ґратки*, які складаються з однакових комірок, що повторюються.

Атоми електрично нейтральні, оскільки негативні заряди електронів нейтралізовані позитивним зарядом ядра. У металах при достатньому зближенні атомів виникає можливість відриву валентного електрона одного атома позитивно зарядженим іоном іншого. Отже, частина валентних електронів починає переміщуватися. Ці електрони називають *вільними*, оскільки вони не зв'язані з певними атомами.

Метал можна уявити собі як структуру з нейтральних атомів та іонів, що перебувають в атмосфері електронного газу, який наче утримує іони. Зв'язок між атомами, що здійснюється електростатичними силами внаслідок взаємодії позитивних іонів та електронного газу, називається *металічним*. Оскільки ці атоми за своєю природою однакові, то розміщуватися вони мають на таких відстанях один від одного та у таких точках простору, де сили притягання й відштовхування, що діють на них, були б однакові. У результаті відбувається закономірне розміщення атомів, яке спостерігається у кристалічних ґратках.

Кристалічні ґратки утворюють уявні лінії й площини, що проходять крізь точки простору, в яких розміщені іони металу. Правильніше ці точки визначити як центри найбільш імовірного розміщення іонів, оскільки останні не залишаються нерухомими, а коливаються навколо цих центрів. Ці центри зазвичай називають *вузлами кристалічних ґраток*. Найпоширенішими типами таких ґраток металів є кубічні об'ємноцентровані (рис. 115, *а*), кубічні гранецентровані (рис. 115, *б*) та гексагональні щільноупаковані (рис. 115, *в*). У них атоми перебувають у стійкій рівновазі й мають мінімальну потенціальну енергію.

Якщо метал деформується, відстані між атомами під дією зовнішніх сил змінюються у певних напрямах, лінії та площини, що проходять крізь атоми, а отже, і кристалічні ґратки викривлюються. Оскільки при цьому рівнодійні сил притягання й відштовхування між атомами вже не дорівнюють нулю, то в ґратках діятимуть внутрішні сили, що намагаються повернути атоми в положення рівноваги. Залежність між малими зміщеннями атомів та силами взаємодії з певним ступенем наближення можна вва-



а *б* *в*

Рис. 115

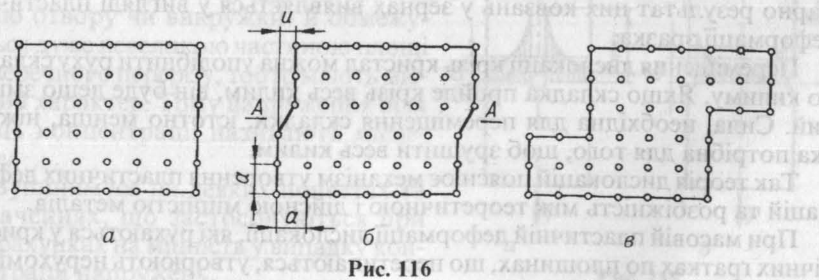
жати лінійною. Сумарно це виявляється в лінійній залежності між зміщеннями точок тіла та зовнішніми силами, яка виражається законом Гука.

При усуненні зовнішніх сил атоми знову займають свої попередні місця в кристалічних ґратках, внаслідок чого відбувається пружне відновлення форми металевого тіла. Так пояснюється пружна деформація.

Якщо зовнішні сили збільшуються, то зростають і внутрішні. Тоді в зернах металу відбуваються зміщення однієї частини відносно іншої, що зветься *ковзанням*. Дослідженнями встановлено, що воно відбувається по площинах і напрямах, уздовж яких атоми розміщуються найбільш щільно. У кожній з кристалічних ґраток, які зображено на рис. 115, одну таку площину заштриховано, а напрями ковзання показано стрілками. Важливою характеристикою цих площин та напрямів є напруження зсуву τ, що спричинює ковзання.

Розглянемо механізм утворення пластичної деформації в межах одного кристала з довершеними кристалічними ґратками, спрощену модель яких наведено на рис. 116, *а*.

Нехай у таких ґратках верхній шар атомів зміщується відносно нижнього по площині *А—А*. Якщо припустити, що в процесі зсуву кристалічні ґратки не викривлюються, тобто у частинах її вище та нижче площини *А—А* відстані між атомами залишаються незмінними, то можна дійти висновку, що всі атоми верхнього шару зміщуються відносно нижнього одночасно і на одне й те саме значення. Доки взаємне зміщення *u* (рис. 116, *б*),



а *б* *в*

Рис. 116

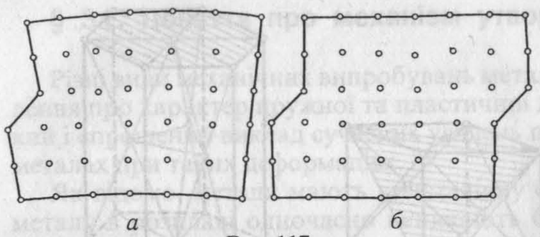


Рис. 117

зростаючи, залишається меншим за половину відстані між атомами ($a/2$), доти сили взаємодії між ними перешкоджають зсуву. Як тільки це зміщення перевищить відстань $a/2$, сили взаємодії почнуть сприяти зміщенню ґраток в нове стійке положення рівноваги. Пластична деформація відбудеться внаслідок зміщення частини ґраток на відстані, кратні a (рис. 116, *в*). Найменша пластична деформація відповідає зміщенню на a. Внаслідок таких зміщень кожний попередній атом займає місце наступного, всі атоми опиняються на місцях, що властиві даним кристалічним ґраткам. Кристал зберігає свої властивості, змінюючи лише конфігурацію.

Точні теоретичні розрахунки, що ґрунтуються на описаній картині деформації, дають змогу визначити максимальні дотичні напруження, які мають виникнути в кристалі для того, щоб з'явилася пластична деформація. В дійсності вона починає утворюватися, якщо напруження в сотні разів менші, ніж дає теорія. Така розбіжність між теоретичним і дійсним опором зсуву в кристалах пояснюється тим, що перехід атомів з одного положення в інше здійснюється не одночасно, а у часі, подібно до хвилі, з місцевими викривленнями ґраток, що називаються *дислокаціями*.

На рис. 117, *а* наведено так звану крайову дислокацію. Верхня частина ґраток зсунута відносно нижньої на одну міжатомну відстань, причому зафіксовано положення, якщо зсув охопив ще не всю площину ковзання. У результаті виникло викривлення ґраток: одна вертикальна атомна площина верхньої половини не має продовження у нижній.

Зазначимо, що реальні кристали або із самого свого виникнення містять дислокації, або мають якісь інші недосконалості, й у них дислокації утворюються вже при низьких напруженнях зсуву. Тому при низьких напруженнях дислокації рухаються крізь кристалічні ґратки, що і спричинює пластичну деформацію кристала. Після того як дислокація вийде назовні кристала, форма його зміниться, але структура залишиться тією самою (рис. 117, *б*). Виникають нові дислокації й рухаються крізь кристал. Сумарно результат цих ковзань у зернах виявляється у вигляді пластичної деформації зразка.

Переміщення дислокації крізь кристал можна уподібнити руху складки по килиму. Якщо складка пройде крізь весь килим, він буде дещо зміщений. Сила, необхідна для переміщення складки, істотно менша, ніж та, яка потрібна для того, щоб зрушити весь килим.

Так теорія дислокацій пояснює механізм утворення пластичних деформацій та розбіжність між теоретичною і дійсною міцністю металів.

При масовій пластичній деформації дислокації, які рухаються у кристалічних ґратках по площинах, що перетинаються, утворюють нерухомі пороги, тому переміщення дислокацій гальмується. Сумарно це виявляється як зміцнення металу після певної пластичної деформації.

Поява зсувів у кристалічних ґратках, що призводять до пластичної деформації, не виключає викривлень кристалічних ґраток, які відповідають пружним деформаціям. Це підтверджується тим, що на будь-якій стадії деформування зразка, аж до самого розриву, повна деформація складається з пружної та пластичної.

Підвищення опору руху дислокацій приводить до збільшення міцності металу. Цього досягають введенням у метал спеціальних домішок, термічною обробкою, наклепом і под. Тепер уже зроблено перші кроки до створення металів, що не мають дефектів кристалічних ґраток. Добуто бездислокаційні ниткоподібні металеві кристали («вуса»), що мають дуже велику міцність, яка наближується до теоретичної.

§ 32. Поняття про концентрацію напружень

Теоретичні та експериментальні дослідження показали, що рівномірний розподіл напружень по площі поперечного перерізу розтягнутого або стиснутого стрижня, який дає формула (4.6), буде виключно тоді, коли по довжині стрижня поперечні перерізи однакові або змінюються вельми плавно. Різкі зміни площі поперечного перерізу внаслідок наявності поперечних отворів, викружок, канавок та надрізів призводять до нерівномірного розподілу напружень, спричинюють *концентрацію напружень*. На рис. 118, *а* наведено графік розподілу розтягальних напружень у перерізі штаби, який ослаблений круглим отвором, а на рис. 118, *б* — у перерізі, ослабленому півкруглими викружками.

Зазначимо, що зображена тут і далі картина концентрації напружень дещо спрощена, проте в основному правильно відбиває суть явищ, що відбуваються. Точні досліди свідчать, що напружений стан у місцях концентрації має більш складний характер.

Фактори, що спричинюють концентрацію напружень (отвір, надріз тощо), називають *концентраторами напружень*. Максимального значення напруження досягають у безпосередній близькості від нього (наприклад, біля краю отвору чи викружки) й обмежуються дуже невеликою частиною площі поперечного перерізу, тобто мають місцевий характер. Тому напруження біля місць концентрації називають *місцевими*.

Зупинимося на деяких поняттях та означеннях, що застосовуються при розрахунках на міцність у випадку концентрації напружень.

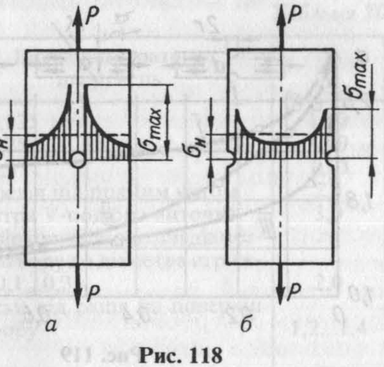


Рис. 118

Номінальним напруженням називають напруження, визначене на підставі припущення про те, що концентрації напружень немає.

У розглянутих прикладах (рис. 118, *а* і *б*) номінальне напруження визначається як середнє напруження в ослабленому перерізі пластини:

$$\sigma_{\text{н}} = N/F_{\min}, \tag{4.34}$$

де N — поздовжня сила в ослабленому перерізі; $F_{\min}$ — площа ослабленого перерізу, що зветься *площею нетто*.

Іноді під номінальним напруженням розуміють напруження, обчислене за площею F суцільного поперечного перерізу без урахування його зменшення за рахунок отвору. Цю площу називають *площею поперечного перерізу брутто*. Тоді

$$\sigma_{\text{н}} = N/F. \tag{4.35}$$

У разі дуже малого отвору в штабі номінальні напруження, обчислені за формулами (4.34) та (4.35), будуть практично однакові. В інших випадках напруження можуть істотно відрізнятися. Тому, використовуючи поняття номінального напруження, потрібно встановити, на базі якого поперечного перерізу його визначено.

Теоретичний та ефективний коефіцієнти концентрації напружень. Кількісною характеристикою концентрації напружень є коефіцієнт концентрації α, який дорівнює відношенню найбільшого місцевого напруження $\sigma_{\max}$ до номінального $\sigma_{\text{н}}$:

$$\alpha = \sigma_{\max}/\sigma_{\text{н}}. \tag{4.36}$$

Найчастіше коефіцієнти концентрації напружень визначають методами теорії пружності, що ґрунтуються на припущенні про однорідність, ізотропність та повну пружність матеріалу. Такі коефіцієнти називають *теоретичними коефіцієнтами концентрації*.

Місцеві напруження залежать від виду й розмірів концентратора. Наприклад, чим менший радіус отвору або викружки у штабі, тим більше максимальні напруження відрізняються від номінальних. У разі дуже малого радіуса отвору в штабі (рис. 118, *а*) біля країв отвору найбільше напруження дорівнює трьом номінальним ($\alpha = 3$), а біля країв півкруглих вирізів (рис. 118, *б*) — приблизно двом номінальним ($\alpha = 2$). Надрізи з гострими вхідними кутами дають ще більші коефіцієнти концентрації напружень біля вершин кутів. Для деяких поширених концентраторів напружень у штабі прямокутного поперечного перерізу значення теоретичних коефіцієнтів концентрації наведено на графіку рис. 119, а в стрижнях круглого поперечного перерізу — в табл. 10. Більш докладні дані про теоретичні коефіцієнти концентрації напружень містяться в довідниках з розрахунку на міцність та в спеціальних курсах.

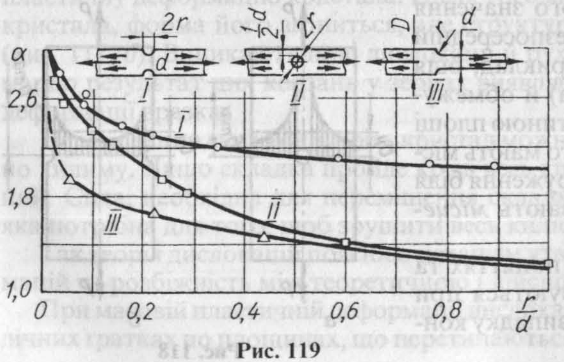


Рис. 119

Визначивши номінальне напруження і знаючи коефіцієнт концентрації напружень для даного концентратора, знаходять максимальне напруження в місці концентрації:

$$\sigma_{\max} = \alpha\sigma_{\text{н}}. \tag{4.37}$$

Концентрацію напружень доводиться враховувати при конструюванні й розрахунку на міцність деталей машин. Слід по можливості уникати глибоких виточок, викружок, різних переходів перерізів, біля яких виникає концентрація напружень, яка за певних умов сприяє передчасному руйнуванню матеріалу. Потрібно також більш старанно обробляти поверхні деталей, особливо виготовлених з високоміцних загартованих сталей. Навіть мілкі сліди від шліфувального круга можуть знизити границю міцності твердозагартованої сталі при розтяганні на 10...20 %.

Теоретичні коефіцієнти напружень залежать від геометрії концентратора і не відображають властивостей реальних матеріалів. Сумісний вплив геометрії концентратора й властивостей матеріалів можна визначити, випробовуючи зразки із даного матеріалу до руйнування. При цьому дістають так звані *ефективні* (*дійсні*) *коефіцієнти концентрації напружень*. Вони є відношенням граничного навантаження зразка без концентратора напружень до граничного навантаження того самого зразка з концентратором напружень. При статичному навантаженні

$$k = P_{\text{I}}/P_{\text{II}}, \tag{4.38}$$

де P_{I} — руйнівне навантаження зразка без концентратора напружень; P_{II} — руйнівне навантаження зразка з концентратором напружень.

Таблиця 10

Вид концентратора напружень	α	Вид концентратора напружень	α
Півкругла виточка при відношенні радіуса до діаметра стрижня		0,125	1,50
		0,25	1,20
		0,5	1,10
0,1	2,0	Перехід під прямим кутом	2,0
0,5	1,6	Гостра V-подібна виточка	3,0
1,0	1,2	Отвір при відношенні діаметра отвору до діаметра стрижня 0,1...0,33	2,0
2,0	1,1		
Галтель при відношенні радіуса галтелі до діаметра стрижня		Риски від різця на поверхні виробу	1,2...1,4
0,0625	1,75		

На міцність пластичних та крихких матеріалів концентрація напружень впливає по-різному. Істотне значення при цьому має також характер навантаження. Якщо матеріал пластичний (діаграма напружень має площадку текучості чималої довжини) і навантаження статичне, то при збільшенні останнього зростання найбільших місцевих напружень припиняється, як тільки вони досягнуть границі текучості. У решті поперечного перерізу напруження будуть ще зростати до границі текучості $\sigma_т$, при цьому зона пластичності біля концентратора збільшуватиметься (рис. 120).

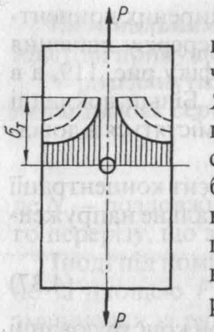


Рис. 120

Отже, пластичність сприяє вирівнюванню напружень. На цій підставі вважають, що при статичному навантаженні пластичні матеріали малочутливі до концентрації напружень. Ефективний коефіцієнт концентрації для таких матеріалів близький до одиниці. При ударних та повторно-змінних навантаженнях, якщо деформації та напруження швидко змінюються в часі, напруження не встигають вирівнюватися, і шкідливий вплив концентрації напружень зберігається. Тому в розрахунках на міцність слід враховувати концентрацію напружень.

Для однорідного крихкого матеріалу нерівномірність розподілу напружень унаслідок концентрації зберігається на всіх стадіях навантажування й при статичному навантаженні. У місцях дії максимальних напружень починається руйнування матеріалу (утворюються тріщини). Особливо чутлива до концентраторів загартована сталь, і тим більше, чим вищі її характеристики міцності. Ефективний коефіцієнт концентрації напружень для крихких однорідних матеріалів дуже близький до теоретичного. Отже, для крихкого матеріалу в розрахунках на міцність при статичному навантаженні можна користуватися теоретичними коефіцієнтами концентрації напружень.

§ 33. Вплив різних факторів на механічні властивості матеріалів

Механічні характеристики матеріалів залежать від багатьох факторів. На властивості металів та сплавів істотно впливають хімічний склад, технологія добування їх, термічна та хімічна обробка, умови експлуатації — температура, середовище, характер навантаження тощо.

Останнім часом розвиваються нові види техніки: реактивна авіація, ракетна техніка, атомні реактори тощо. Матеріали, що застосовуються у несівних конструкціях нової техніки, зазнають дії високих температур, великих швидкостей навантажування, агресивних рідких та газоподібних середовищ, радіоактивних, особливо нейтронних, проникних випромінювань. Для роботи в цих умовах створюють нові спеціальні сплави та композиційні матеріали.

Нижче розглядається вплив деяких факторів на механічні характеристики найбільш важливих у машинобудуванні матеріалів — сталі, чавуну, алюмінію, різних сплавів.

Вплив швидкості деформації. При збільшенні швидкості наростання навантаження і, отже, швидкості зростання напруження та деформації всі матеріали, що перебувають у пластичному стані, виявляють загальну тенденцію до збільшення опору деформуванню. Чим вища швидкість деформування, тим вищі границя текучості та тимчасовий опір. Особливо сильно залежать від швидкості навантажування механічні властивості пластичних мас та інших органічних матеріалів. У металів вплив швидкості навантажування помітний лише при значній різниці у швидкостях.

Порівняння результатів статичних та динамічних випробовувань маловуглецевих сталей на розтягання при нормальній температурі (рис. 121) показує таке:

1) крива *1* динамічного розтягання лежить вище, ніж крива *2* статичного розтягання;

2) максимум діаграми для динамічного навантаження зміщується в бік початку діаграми;

3) тимчасовий опір при динамічному навантаженні підвищується, однак менше, ніж границя текучості;

4) модуль пружності при динамічному навантаженні практично не змінюється.

Вплив технологічних факторів. Елементи сталевих конструкцій можна виготовити литтям або прокатуванням, куванням, штампуванням та волочінням. Механічні властивості сталі одного й того самого складу дуже сильно змінюються залежно від способу її виготовлення та обробки.

Під час лиття заготовки можливе утворення різних внутрішніх дефектів у вигляді пустот, раковин та включень, що знижують міцність виготовлюваних із них заготовок деталей. У зв'язку з цим потрібен старанний контроль якості таких деталей рентгенівським, ультразвуковим або будь-яким іншим способом.

Прокатування робить сталь анізотропною. Прокатна сталь має характерну структуру, в якій зерна, що витягнуті в напрямі прокатування, утворюють свого роду волокна. Механічні властивості сталі в напрямі прокатування істотно відрізняються від властивостей у напрямі, перпендикулярному до нього. Зразки, які вирізано так, що їхня вісь збігається з напрямом прокатування, виявляються міцнішими, ніж ті, в яких вісь перпендикулярна до напряму прокатування.

Попереднє витягування у холодному стані за границю текучості (наклеп) дуже сильно підвищує границю текучості та границю міцності, проте знижує залишкове подовження після розриву. Матеріал стає більш пружним та міцним, але менш пластичним.

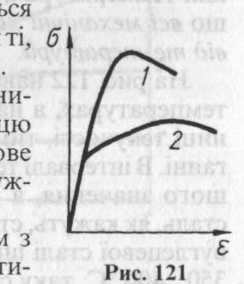


Рис. 121

Волочіння у холодному стані, що є витягуванням з обтискуванням, ще сильніше впливає на механічні власти-

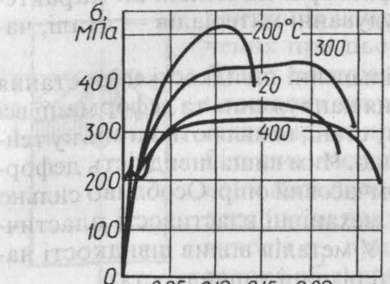


Рис. 122

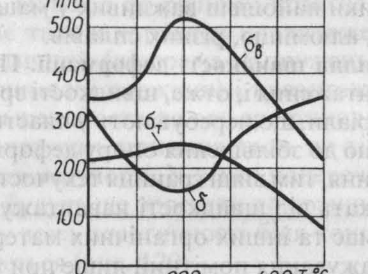


Рис. 123

вості сталі. Сталевий дріт та сталеві стрічки, які виготовлено волочінням, дуже міцні.

Токарна обробка, обробка поверхні роликами, обдування дробом, хромування, нікелювання, алітування, азотування й інші види поверхневої обробки можуть істотно впливати на міцність деталей, особливо тих, що працюють при змінному навантаженні.

Вплив термічної обробки. Загартування сталі значно підвищує її твердість, границю текучості й границю міцності, однак сильно знижує пластичність. Модуль пружності сталі загартування практично не змінює. Якщо потрібна висока поверхнева твердість із збереженням інших властивостей сталі, використовують поверхневе загартування струмами високої частоти. Для маловуглецевих сталей з цією метою застосовують цементацію — збільшення у поверхневому шарі вуглецю — з подальшим загартуванням. При цьому загартовується лише цей поверхневий шар, а основна частина матеріалу зберігає властивості маловуглецевої сталі.

Для усунення наклепу використовують відпалювання. Щоб вирівняти й поліпшити структуру, а також покращити механічні властивості сталі, застосовують нормалізацію. Докладніше ці способи термічної обробки розглядають у металознавстві.

Вплив температури. Багато деталей сучасних машин (наприклад, парових та газових турбін, реактивних двигунів та ін.) працюють при високих температурах, що досягають 800...1000 °С. Випробування показали, що *всі механічні характеристики металів істотно змінюються залежно від температури.*

На рис. 122 наведено діаграми напружень вуглецевої сталі при різних температурах, а на рис. 123 — графіки залежності від температури границі текучості, тимчасового опору й відносного подовження при розтяганні. В інтервалі температур 150...250 °С тимчасовий опір досягає найбільшого значення, а відносне подовження після розриву — найменшого; сталь, як кажуть, стає синьоламкою. За більш високих температур міцність вуглецевої сталі швидко зменшується, тому при температурах, вищих за 350...400 °С, таку сталь не застосовують.

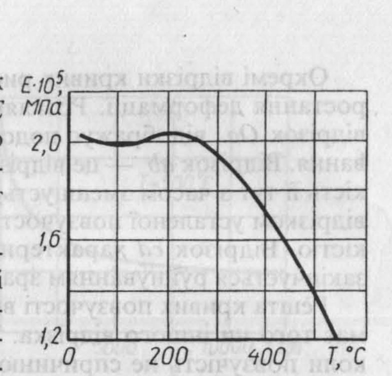


Рис. 124

З підвищенням температури також істотно зменшується модуль пружності E (рис. 124), а коефіцієнт Пуассона дещо збільшується. Так, при зростанні температури від кімнатної до 500 °С коефіцієнт Пуассона збільшується від 0,28 до 0,33.

Вуглецеві сталі при високих температурах дуже окислюються, на їхній поверхні утворюється окалина. У зв'язку з цим застосовують спеціальні жаростійкі та жароміцні сталі, які містять у собі різні легуючі добавки. *Жаростійкістю* називають властивість матеріалу протистояти хімічному руйнуванню поверхні при високих температурах, а *жароміцністю* — здатність зберігати при високих температурах механічні властивості. Останнім часом створено спеціальні сплави, а також металокерамічні матеріали, що надійно працюють при температурах до 100 °С.

Повзучість. При високих температурах істотне значення має явище повзучості матеріалів (крип), яке характеризується зростанням пластичної деформації з часом при постійному напруженні, що не спричинює пластичних деформацій під час короткочасної дії навантаження. Залежно від напруження та температури деформація, що виникає внаслідок повзучості, може або припинитися, або продовжуватися до руйнування матеріалу.

На рис. 125, *а* наведено криві повзучості сталі при постійній температурі для різних напружень $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < \sigma_4 < \sigma_5$, а на рис. 125, *б* — криві повзучості при постійному напруженні, але різних температурах, причому $T_1 < T_2 < T_3 < T_4 < T_5$. Як видно із порівняння графіків, збільшення напруження при постійній температури й підвищення температури при постійному напруженні однаково впливають на повзучість матеріалу, а саме — швидкість повзучості збільшується.

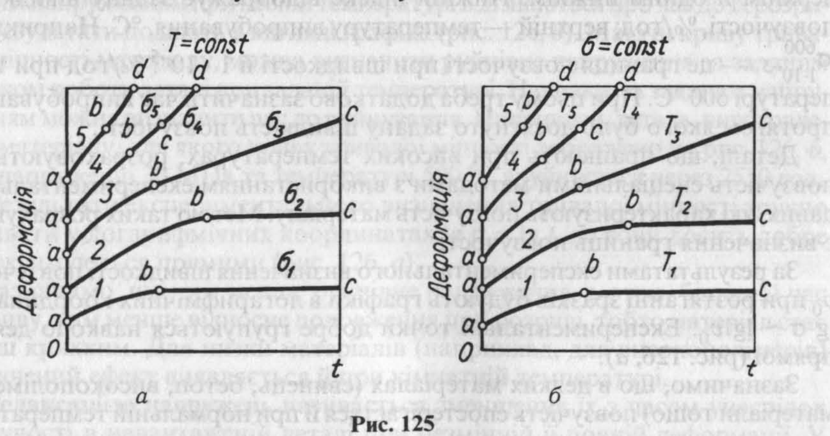


Рис. 125

Окремі відрізки кривих рис. 125 характеризують різні швидкості наростання деформації. Розглянемо, наприклад, криву *4*. Вертикальний відрізок *Oa* відображує подовження, здобуте відразу після навантажування. Відрізок *ab* — це відрізок неусталеної повзучості, оскільки швидкість її тут з часом зменшується. Прямолінійний відрізок *bc* називається відрізком усталеної повзучості, що характеризується її постійною швидкістю. Відрізок *cd* характеризує зростання швидкості повзучості, що закінчується руйнуванням зразка (точка *d*).

Решта кривих повзучості відрізняється від кривої *4* тим, що в них немає того чи іншого відрізка. Так, криві *1*, *2* та *3* зображують випадки, коли повзучість не спричинює руйнування (на них немає відрізка *cd*). Крива *5* не має відрізка усталеної повзучості (точки *b* та *c* збігаються). Ця крива відповідає випадку, коли період неусталеної повзучості заміняється відразу періодом із зростаючою її швидкістю, який закінчується руйнуванням. Межа між цими двома періодами визначається точкою перегину *b*.

Границею повзучості називається найбільше напруження, при якому швидкість або деформація повзучості при даній температурі за певний проміжок часу не перевищує встановленого значення (наприклад, швидкості 0,0001 %/год або деформації 1 % за 10 000 год).

Якщо границю повзучості визначають за деформацією, то позначають її літерою σ з трьома числовими індексами: двома нижніми й одним верхнім. Перший нижній індекс відображує задане подовження (сумарне або залишкове), %; другий нижній індекс — заданий час випробування, год; верхній індекс — температуру, °C. Наприклад, запис $\sigma^{700}_{0,2/100}$ означає границю повзучості при допуску на деформацію 0,2 % за 100 год випробування при температурі 700 °C. При цьому треба додатково зазначити, за сумарною чи залишковою деформацією визначалася границя повзучості.

Якщо границя повзучості визначається за швидкістю повзучості, то її потрібно позначати літерою σ з двома числовими індексами: одним верхнім й одним нижнім. Нижній індекс відображує задану швидкість повзучості, %/год; верхній — температуру випробування, °C. Наприклад, $\sigma^{600}_{1\cdot10^{-5}}$ — це границя повзучості при швидкості її $1\cdot10^{-5}$ %/год при температурі 600 °C. При цьому треба додатково зазначити час випробування, протягом якого було досягнуто задану швидкість повзучості.

Деталі, що працюють при високих температурах, розраховують на повзучість спеціальними методами з використанням експериментальних даних, які характеризують повзучість матеріалу. Метою таких розрахунків є визначення границь повзучості.

За результатами експериментального визначення швидкості повзучості v_0 при розтяганні зразків будують графіки в логарифмічних координатах $\lg\sigma \sim \lg v_0$. Експериментальні точки добре групуються навколо деякої прямої (рис. 126, *a*).

Зазначимо, що в деяких матеріалах (свинець, бетон, високополімерні матеріали тощо) повзучість спостерігається й при нормальній температурі.

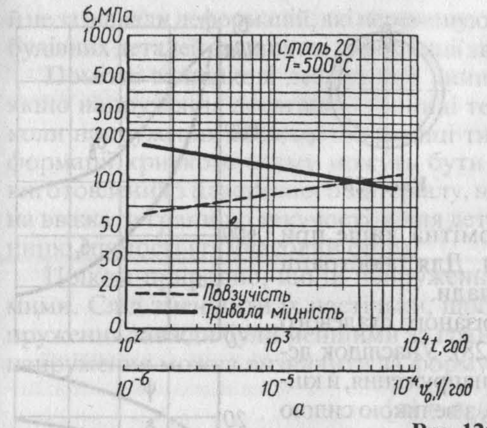


Рис. 126

Тривала міцність. У разі високої температури й довгочасної дії навантаження відбувається руйнування матеріалу при напруженні, яке менше за тимчасовий опір матеріалу при даній температурі. У зв'язку з цим виникає потреба визначити тривалу міцність матеріалів.

Границею тривалої міцності називається напруження, що спричинює розрив зразка після заданого строку безперервної дії цього напруження при певній температурі. Позначається границя тривалої міцності літерою σ з двома числовими індексами. Верхній індекс дає температуру випробування, °C, нижній — задану тривалість випробування до руйнування, год. Останню можна позначити кількістю годин або цифрою 10 з показником степеня. Наприклад, $\sigma^{700}_{10^3}$ або σ^{700}_{1000} — границя тривалої міцності за 1000 год випробування при температурі 700 °C.

Випробування на тривалу міцність полягає в тому, що зразки піддають різним напруженням при певній температурі й дізнаються про час до їх розриву. Результати подають у вигляді графіка (рис. 126, *б*). Маючи криву тривалої міцності матеріалу, можна визначити руйнівне напруження за заданим строком роботи деталі при заданій температурі. Навпаки, за заданим напруженням можна визначити час до руйнування. Наприклад, деталь, виготовлена з матеріалу, для якого криву тривалої міцності зображено на рис. 126, *б*, при напруженні 30 МПа та температурі 500 °C зруйнується через 2550 год.

Результати експериментального визначення тривалої міцності зручно подавати у логарифмічних координатах $\lg\sigma \sim \lg t$, де вони досить добре апроксимуються прямими (рис. 126, *a*).

Зазначимо, що чим менше руйнівне напруження, а отже, більший час розриву, тим менше відносне подовження при розриві, тобто матеріал стає більш крихким. Для низки матеріалів (наприклад, для високополімерів) зазначений ефект виявляється й при кімнатній температурі.

Релаксацією напружень називається зменшення їх з часом унаслідок повзучості в навантаженій деталі при незмінній її повній деформації. У

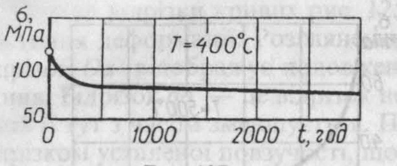


Рис. 127

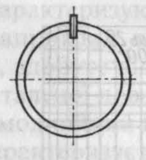


Рис. 128

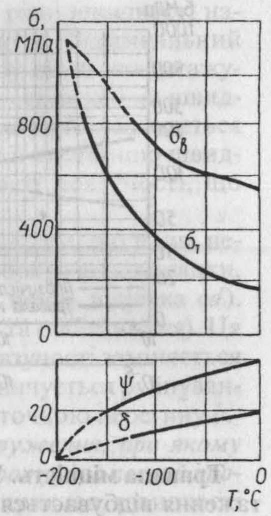


Рис. 129

більшості металів релаксація помітна лише при великих температурах (рис. 127). Для ілюстрації цього явища наведемо такі приклади.

Між розведеними кінцями розрізаного сталевого кільця вставимо пластинку (рис. 128). Унаслідок деформації кільця в ньому виникнуть напруження, й кінці кільця, намагаючись зблизитися, з великою силою стиснуть пластинку. Якщо це з'єднання витримати деякий час при високій температурі, то в кільці відбудеться релаксація напружень, сила затискання пластинки зменшиться і її можна буде легко вийняти.

Відомо, що початкове затягування болтів, які працюють при високій температурі, з часом слабшає, і це спричинює потребу підтягувати їх.

Вплив низьких температур. На механічні властивості деяких матеріалів істотно впливають низькі температури. Це виявляється в тому, що матеріали, пластичні при нормальній температурі, стають крихкими при низьких температурах. Такі матеріали називають *холодноламкими*.

Холодноламкість характерна для металів, що мають кристалічні ґратки у вигляді об'ємноцентрованого куба або гексагональні. До них належать більшість чорних металів, зокрема сталі, а також цинкові сплави. Виявляється холодноламкість як при статичній дії навантаження, так і при динамічній. Як приклад на рис. 129 наведено графіки зміни границі текучості, тимчасового опору, відносних подовження й звуження при статичних випробуваннях вуглецевої сталі при низьких температурах.

Метали, що кристалізуються в системі куба з центрованими гранями (мідь, алюміній, нікель, срібло, золото тощо), не виявляють холодноламкості ні за якого зниження температури. Наприклад, алюміній при температурі рідкого азоту (–196 °С) збільшує міцність приблизно в 2 рази, одночасно збільшуючи відносне подовження в 4 рази. Аналогічно поводять себе мідь та нікель. Багато сплавів алюмінію, міді, а також деякі сталі не виявляють холодноламкості.

§ 34. Допустимі напруження

Як уже зазначалося, деякі деталі машин та інших конструкцій мають задовольняти умови міцності та жорсткості. Розміри деталей потрібно добирати такими, щоб під дією прикладених навантажень вони не руйнувалися

й не зазнавали деформацій, які перевищують допустимі. У більшості машинобудівних деталей залишкові деформації звичайно не допускаються.

Помітні залишкові деформації виникають у пластичних матеріалах, якщо напруження досягають границі текучості. Руйнування настає тоді, коли напруження досягають границі тимчасового опору; при цьому деформації крихкого зламу можуть бути невеликими. Отже, для деталей, виготовлених з пластичного матеріалу, небезпечними напруженнями можна вважати границю текучості, а для деталей з крихкого матеріалу — границю міцності (тимчасовий опір).

Цілком природно, що ці напруження не можуть вважатися допустимими. Слід зменшити їх настільки, щоб в умовах експлуатації діючі напруження завжди були меншими за границю пружності. Отже, допустимі напруження можна визначити за формулою

$$[\sigma] = \sigma_н / n, \tag{4.39}$$

де $\sigma_н$ — небезпечне напруження ($\sigma_т$ або $\sigma_в$); n — коефіцієнт запасу міцності, що показує, у скільки разів допустиме напруження менше, ніж небезпечне.

Вибір коефіцієнта запасу міцності залежить від стану матеріалу (крихкий або пластичний), характеру прикладання навантаження (статичне, динамічне чи повторно-змінне) й деяких загальних факторів, що мають місце майже в усіх випадках. До таких факторів належать:

а) неоднорідність матеріалу, а отже, різні його механічні властивості у малих зразках та в деталях;

б) неточність задавання зовнішніх навантажень;

в) наближеність розрахункових схем та певна наближеність розрахункових формул.

Зазначені фактори й враховуються коефіцієнтом запасу міцності n, який іноді називають основним.

Запас міцності залежить від того, яке напруження вважати небезпечним.

Для пластичних матеріалів у разі статичного навантаження небезпечним напруженням, як уже зазначалось, є границя текучості, тобто $\sigma_н = \sigma_т$, а $n = n_т$. Тоді

$$[\sigma] = \frac{\sigma_н}{n} = \frac{\sigma_т}{n_т}. \tag{4.40}$$

На підставі даних тривалої практики конструювання, розрахунку й експлуатації машин та споруд запас міцності $n_т$ для сталей при статичному навантаженні вибирають таким, що дорівнює 1,4...4,6. Очевидно, менші значення $n_т$ слід брати тоді, коли матеріал більш однорідний, краще вивчено його властивості, повніше враховано навантаження, точніші метод розрахунку й розрахункові схеми.

Для крихких матеріалів при статичних навантаженнях небезпечним напруженням є тимчасовий опір (границя міцності), і тоді

$$[\sigma] = \frac{\sigma_н}{n} = \frac{\sigma_в}{n_в}. \tag{4.41}$$

Вибирають запас міцності $n_в$ = 2,5...3,0.

Допустимі напруження $[\sigma]$, що знаходять за формулами (4.40) та (4.41), зазвичай називають *основними допустимими напруженнями.* Оскільки тимчасовий опір визначити простіше, ніж границю текучості, то іноді й для пластичних матеріалів при визначенні допустимих напружень виходять з тимчасового опору, користуючись формулою

$$[\sigma] = \sigma_в / n_в. \tag{4.42}$$

У цьому разі, враховуючи, що тимчасовий опір перевищує границю текучості на 50...70 %, запас міцності $n_в$ для пластичних матеріалів вибирають 2,4...2,6. Це значення для пластичних матеріалів беруть дещо меншим, ніж для крихких, оскільки пластичні матеріали, як правило, більш однорідні за своїми фізичними та механічними властивостями.

Іноді допустимі напруження на розтяг позначають як $[\sigma_+]$, а на стиск — як $[\sigma_-]$. Крихкі матеріали краще чинять опір стисканню, ніж розтяганню, і для них $\left|[\sigma_-]\right| > \left|[\sigma_+]\right|$. Для сталей та більшості інших пластичних матеріалів можна взяти $\left|[\sigma_+]\right| = \left|[\sigma_-]\right|$ та позначити допустимі напруження в цьому разі як $[\sigma]$ без індексу.

Вибір допустимих напружень дуже важливий, оскільки від правильного визначення їхніх значень залежать міцність та безпечність проектованої конструкції, а також економічний аспект розрахунку — кількість матеріалу, що витрачається. Тому встановленням допустимих напружень для основних марок матеріалів, що використовуються у машинобудуванні та будівництві, займаються державні нормувальні установи. Вони видають відповідні норми, якими й слід керуватись у звичайних умовах проектування. В міру поліпшення якості матеріалів і уточнення методів розрахунку допустимі напруження підвищують. Орієнтовні значення основних допустимих напружень, прийнятих зараз для найпоширеніших матеріалів, наведено в дод. 10. Тоді, коли немає даних про допустимі напруження для того чи іншого матеріалу, їх треба визначати на підставі вище викладених міркувань та рекомендацій.

Зупинимося коротко на складанні умов міцності у випадках, що найчастіше трапляються.

У пластичних матеріалах при статичному навантаженні концентрація напружень не дуже впливає на міцність, тому діючим робочим напруженням можна вважати середнє (номінальне) напруження в небезпечному перерізі та записати умову міцності так:

$$\sigma \le [\sigma]. \tag{4.43}$$

У випадку однорідних крихких матеріалів (наприклад, загартованих сталей) при статичному навантаженні треба враховувати концентрацію напружень та розраховувати на міцність за найбільшим місцевим напруженням. У цьому разі умова міцності запишеться так:

$$\sigma_{max} = \alpha \sigma_н \le [\sigma]. \tag{4.44}$$

До питання щодо вибору допустимих напружень будемо неодноразово повертатися, розглядаючи умови міцності при різних деформаціях.

Розділ 5 РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ ЖОРСТКІСТЬ ПРИ РОЗТЯГАННІ Й СТИСКАННІ

§ 35. Приклади розрахунків при дії зосереджених сил

Розглянемо деякі задачі на розтягання і стискання стрижнів.

1. Визначимо діаметр стрижня однакового поперечного перерізу завдовжки $l = 0,6$ м (рис. 130). Матеріал стрижня — сталь Ст3, модуль пружності $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Побудуємо також епюру переміщень поперечних перерізів стрижня та визначимо зміну його початкової довжини.

Перш за все будуємо епюру поздовжніх зусиль, з якої видно, що стрижень має три відрізки. У крайніх діють розтягальні зусилля $N_I = N_{III} = P = 12$ кН, а у середньому — зусилля стискання $N_{II} = 2P = 24$ кН.

Оскільки стрижень, який проектується, повинен мати однаковий поперечний переріз, то потрібно його добирати за найбільшим абсолютним значенням зусилля, що діє в середньому відрізку. Напруження в поперечних перерізах цього відрізка

$$\sigma_{II} = N_{II} / F = 2P / F.$$

Умова міцності має вигляд

$$\sigma_{II} \le [\sigma],$$

або

$$2P / F \le [\sigma],$$

звідки

$$F \ge 2P / [\sigma].$$

Для сталі марки Ст3 допустимі напруження $[\sigma]$ на розтяг та стиск однакові. При статичному навантаженні його можна взяти таким, що дорівнює 160 МПа (див. дод. 10).

Підставивши числові значення, дістанемо площу поперечного перерізу стрижня

$$F \ge \frac{2 \cdot 12 \cdot 10^{-3}}{160} \text{м}^2 = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 1,5 \text{ см}^2$$

та його діаметр

$$d = \sqrt{\frac{4}{\pi} F} = 1,13\sqrt{1,5} \text{ см} = 1,38 \text{ см}.$$

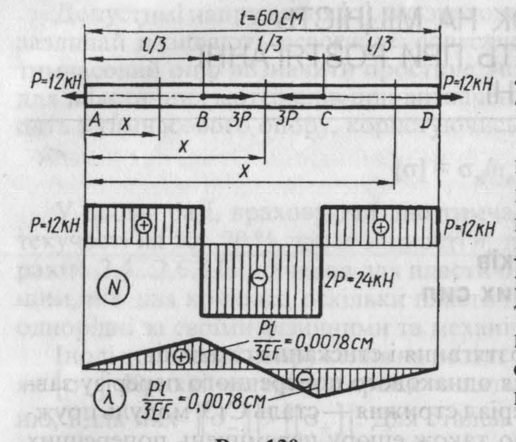


Рис. 130

Діаметр треба змінити на найближчий найбільший згідно з державним стандартом. Слід взяти $d = 14$ мм $\left(F = 1{,}54\ \text{см}^2\right)$.

Зауважимо, що розрахунок на міцність при стисканні є достатнім тільки для коротких стрижнів, зокрема для сталевих круглих, коли $(l/d) < 20$. При стисканні довгих стрижнів може втратитися стійкість*. У розглянутому прикладі зазначена умова для стиснутої частини стрижня виконується.

Визначимо переміщення перерізів стрижня. Виберемо, наприклад, за початок відліку лівий кінець стрижня (переріз A), умовно вважаючи, що він нерухомий. Нагадаємо, що переміщення будь-якого перерізу відносно початку відліку дорівнює зміні довжини відрізка стрижня між нерухомим та розглядуваним перерізами.

На першому відрізку переміщення перерізу, який розміщений на відстані x від лівого кінця стрижня $[0 \le x \le (l/3)]$,

$$\lambda(x) = Px/(EF);$$

при $x = 0$

$$\lambda_A = 0;$$

при $x = l/3$

$$\lambda_B = \frac{Pl/3}{EF} = \frac{12 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}6}{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1{,}54 \cdot 10^{-4}}\ \text{м} = 7{,}8 \cdot 10^{-5}\ \text{м} = 0{,}0078\ \text{см}.$$

На другому відрізку $(l/3 \le x \le 2l/3)$ переміщення перерізу x

$$\lambda(x) = \frac{Pl/3}{EF} - \frac{2P(x - l/3)}{EF};$$

при $x = l/3$

$$\lambda_B = \frac{Pl/3}{EF} = 0{,}0078\ \text{см};$$

при $x = 2l/3$

$$\lambda_C = \frac{Pl/3}{EF} - \frac{2Pl/3}{EF} = -0{,}0078\ \text{см}.$$

*Розрахунки стиснутих стрижнів на стійкість наведено в розд. 19.

На третьому відрізку, де $2l/3 \le x \le l$,

$$\lambda(x) = \frac{Pl/3}{EF} - \frac{2Pl/3}{EF} + \frac{P(x - 2l/3)}{EF};$$

при $x = 2l/3$

$$\lambda_C = \frac{Pl}{3EF} = -0{,}0078\ \text{см};$$

при $x = l$

$$\lambda_D = \frac{Pl/3}{EF} - \frac{2Pl/3}{EF} + \frac{Pl/3}{EF} = 0.$$

Епюру поздовжніх переміщень наведено на рис. 130. У цьому прикладі довжина всього стрижня не змінюється, бо переміщення правого кінця відносно лівого дорівнює нулю.

2. Побудуємо епюри поздовжніх сил, нормальних напружень, відносних деформацій та переміщень для східчастого стрижня (рис. 131).

Стрижень складається з трьох відрізків. У межах першого із них у перерізі, що розміщений на відстані x від закріпленого кінця $(0 \le x \le l)$, поздовжня сила, нормальне напруження і відносне подовження не залежать від координати x, тобто від положення перерізу, і мають такі значення:

$$N_1 = 2P; \quad \sigma = \frac{2P}{1{,}5F} = \frac{4P}{3F}; \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{4P}{3EF}.$$

Переміщення перерізу, який розміщений на відстані x від закріпленого кінця стрижня,

$$\lambda(x) = \varepsilon x = \frac{4Px}{3EF}.$$

Отже, переміщення змінюються за лінійним законом. У початковій і кінцевій точках відрізка вони мають такі значення:

при $x = 0$

$$\lambda_A = 0;$$

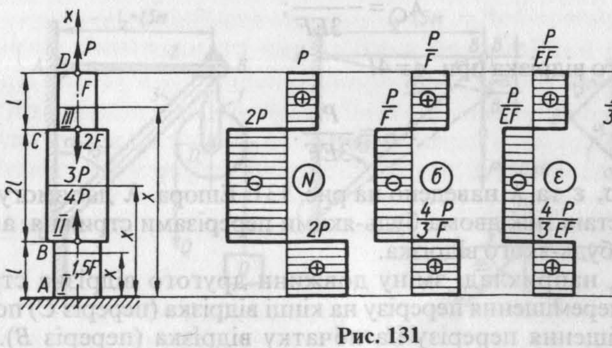


Рис. 131

при $x = l$

$$\lambda_B = \frac{4Pl}{3EF}.$$

Аналогічно на другому відрізку $(l \le x \le 3l)$

$$N_{\text{II}} = -2P; \quad \sigma = -\frac{2P}{2F} = -\frac{P}{F}; \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = -\frac{P}{EF}.$$

Переміщення перерізу, який розміщений на відстані x від закріпленого кінця стрижня,

$$\lambda(x) = \frac{4Pl}{3EF} - \frac{P(x-l)}{EF}.$$

На початку другого відрізка при $x = l$

$$\lambda_B = \frac{4Pl}{3EF},$$

на кінці відрізка при $x = 3l$

$$\lambda_C = \frac{2Pl}{3EF}.$$

Знак «мінус» вказує на те, що розглядуваний переріз переміщується в напрямі до перерізу, який вибрано за початок відліку.

На третьому відрізку $(3l \le x \le 4l)$

$$N_{\text{III}} = P; \quad \sigma = \frac{P}{F}; \quad \varepsilon = \frac{P}{EF}.$$

Переміщення перерізу, який розміщений на відстані x від кінця A,

$$\lambda(x) = -\frac{2Pl}{3EF} + \frac{P(x-3l)}{EF}.$$

На початку третього відрізка при $x = 3l$

$$\lambda_C = -\frac{2Pl}{3EF};$$

на кінці третього відрізка при $x = 4l$

$$\lambda_D = \frac{Pl}{3EF}.$$

Епюри N, σ, ε та λ наведено на рис. 131. Епюра λ дає змогу визначити зміну відстані між двома будь-якими перерізами стрижня, а отже, і зміну довжини будь-якого відрізка.

Визначимо, наприклад, зміну довжини другого відрізка стрижня. Для цього від переміщення перерізу на кінці відрізка (переріз C) потрібно відняти переміщення перерізу на початку відрізка (переріз B). Отже,

маємо

$$\Delta l_{BC} = -\frac{P2l}{2EF} - \frac{4Pl}{3EF} = -\frac{2Pl}{EF}.$$

Знак «мінус» вказує на те, що довжина цього відрізка зменшилась.

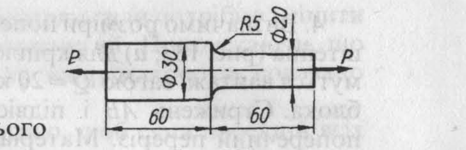


Рис. 132

3. Перевіримо міцність східчастого стрижня круглого поперечного перерізу (рис. 132). Матеріал стрижня — загартована високовуглецева сталь з тимчасовим опором $\sigma_в = 900$ МПа. Стрижень розтягується силами $P = 80$ кН.

Унаслідок різкої зміни розмірів поперечних перерізів стрижня виникає концентрація напружень. Оскільки загартована сталь чутлива до неї, то перевірку міцності потрібно виконувати за найбільшим місцевим напруженням. Для визначення цього напруження треба знати коефіцієнт концентрації напружень, який залежить від відношення радіуса галтелі до найменшого діаметра стрижня. У цьому прикладі $r / d = 5/20 = 0,25$. З табл. 10 теоретичний коефіцієнт концентрації напружень $\alpha = 1,2$.

Номінальне напруження визначаємо за найменшою площею поперечного перерізу стрижня:

$$\sigma_н = \frac{N}{F_{\min}} = \frac{80 \cdot 10^{-3}}{\dfrac{\pi \cdot 2^2}{4} 10^{-4}} \text{ МПа} = 255 \text{ МПа}.$$

Найбільші місцеві напруження знайдемо за формулою (4.37):

$$\sigma_{\max} = \alpha\sigma_н = 1,2 \cdot 255 \text{ МПа} = 306 \text{ МПа}.$$

Запас міцності

$$n_в = \frac{\sigma_в}{\sigma_{\max}} = \frac{900}{306} = 2,95.$$

Для крихких матеріалів при статичному навантаженні вибирають, як уже зазначалося, коефіцієнт запасу міцності $n_в = 2,5...3$. Отже, стрижень при даному навантаженні має достатній запас міцності.

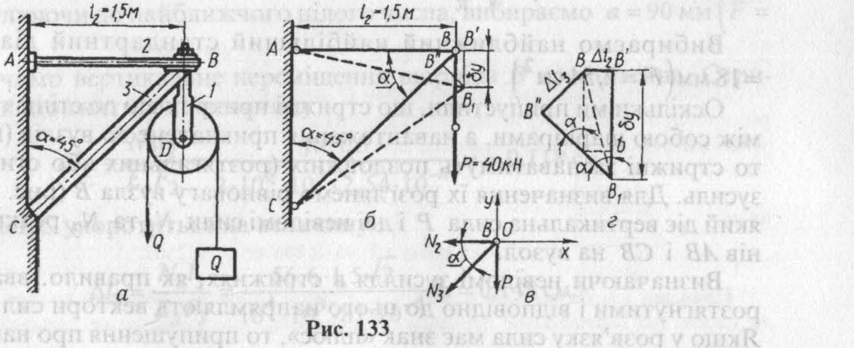


Рис. 133

4. Визначимо розміри поперечних перерізів стрижнів AB та BC кронштейна (рис. 133, *а*) для кріплення блока, за допомогою якого підніматимуться вантажі вагою $Q = 20$ кН, а також поперечний переріз підвіски BD блока. Стрижень AB і підвіска BD (у верхній частині) мають круглий поперечний переріз. Матеріал — сталь Ст3. Стрижень BC виготовлятиметься із сосни, він матиме квадратний поперечний переріз. Визначимо також вертикальне переміщення вузла B кронштейна.

Конструкція кронштейна дає змогу наближено вважати кріплення стрижнів до стіни та з'єднання їх між собою шарнірними. Розрахункову схему кронштейна наведено на рис. 133, *б*.

Насамперед визначимо зусилля у підвісці блока і зусилля, що дорівнює йому і діє на вузол B. Оскільки при підніманні вантажу вагою Q до другої вітки троса, перекинутого через блок, треба прикласти силу, яка дорівнює вазі Q вантажу, що піднімається (якщо знехтувати тертям), то у перерізі підвіски буде діяти зусилля $N_1 = 2Q = 40$ кН. Отже, до вузла B кронштейна прикладено силу $P = N_1 = 40$ кН.

Для сталі Ст3 допустиме напруження на розтяг $[\sigma_+] = 160$ МПа, для сосни допустиме напруження на стиск $[\sigma_-] = 8$ МПа. Модуль пружності для сталі $E_с = 2 \cdot 10^5$ МПа, для сосни $E_д = 10^4$ МПа.

Знайдемо потрібну площу поперечного перерізу підвіски BD. Нормальне напруження в підвісці визначається за формулою

$$\sigma = N_1 / F_1.$$

Умова міцності

$$\sigma = N_1 / F_1 \leq [\sigma],$$

звідки потрібна площа поперечного перерізу підвіски

$$F_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{40 \cdot 10^{-3}}{160} \text{ м}^2 = 2{,}5 \text{ см}^2.$$

Визначаємо діаметр підвіски:

$$d_1 = \sqrt{\frac{4F_1}{\pi}} \geq 1{,}13\sqrt{2{,}5} = 1{,}78 \text{ см} = 17{,}8 \text{ мм}.$$

Вибираємо найближчий найбільший стандартний діаметр $d = 18$ мм $\left(F = 2{,}54 \text{ см}^2\right)$.

Оскільки ми припустили, що стрижні прикріплені до стіни та з'єднані між собою шарнірами, а навантаження прикладене до вузлів (шарнірів), то стрижні зазнаватимуть поздовжніх (розтягальних або стискальних) зусиль. Для визначення їх розглянемо рівновагу вузла B (рис. 133, *в*), на який діє вертикальна сила P і дві невідомі сили N_2 та N_3 реакцій стрижнів AB і CB на вузол.

Визначаючи невідомі зусилля в стрижнях, як правило, вважають їх розтягнутими і відповідно до цього напрямляють вектори сил від вузла. Якщо у розв'язку сила має знак «плюс», то припущення про напрям сили

підтверджується. Знак «мінус» покаже, що напрям сили потрібно змінити на протилежний, і відповідний стрижень стиснутий. Припускаючи, що обидва стрижні розтягнуті, зусилля N_2 та N_3 напрямляємо, як показано на рис. 133, *в*.

Для рівноваги вузла B у площині достатньо, щоб сума проекцій всіх сил, прикладених до вузла, на координатні осі x та y дорівнювала нулю. Вибраний напрям координатних осей зображено на рис. 133, *в*. Тоді

$$\sum X = -N_2 - N_3 \cos\alpha = 0; \quad \sum Y = -P - N_3 \sin\alpha = 0.$$

Звідси знаходимо:

$$N_3 = -\frac{P}{\sin\alpha} = -\frac{40 \cdot 2}{\sqrt{2}} \text{ кН} = -56{,}6 \text{ кН};$$

$$N_2 = -N_3 \cos\alpha = \left(\frac{40 \cdot 2}{\sqrt{2}}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ кН} = 40 \text{ кН},$$

тобто стрижень AB розтягнутий, а стрижень BC стиснутий.

Із умови міцності стрижня AB

$$\sigma = N_2 / F_2 \leq [\sigma]$$

визначаємо потрібну площу його поперечного перерізу:

$$F_2 \geq \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{40 \cdot 10^{-3}}{160} \text{ м}^2 = 2{,}5 \text{ см}^2.$$

У цьому разі вона виявилася такою, що дорівнює площі поперечного перерізу підвіски. Отже, діаметр стрижня AB має дорівнювати діаметру підвіски, тобто $d = 18$ мм.

Потрібна площа поперечного перерізу дерев'яного стрижня BC

$$F_3 = \frac{N_3}{[\sigma_-]} = \frac{56{,}6 \cdot 10^{-3}}{8} \text{ м}^2 = 70{,}5 \text{ см}^2.$$

Сторона квадрата поперечного перерізу

$$a = \sqrt{70{,}5} \text{ см} = 8{,}4 \text{ см}.$$

Округлюючи до найближчого цілого числа, вибираємо $a = 90$ мм $\left(F = 81 \text{ см}^2\right)$.

Визначимо вертикальне переміщення шарніра B кронштейна. Стрижень AB подовжиться на величину

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_с F_2} = \frac{40 \cdot 1{,}5}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot 2{,}54 \cdot 10^{-4}} \text{ м} = 0{,}118 \text{ см}.$$

Стрижень BC укоротиться на величину

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{E_д F_3} = \frac{56{,}6 \cdot 1{,}5\sqrt{2}}{10^4 \cdot 10^3 \cdot 81 \cdot 10^{-4}} \text{ м} = 0{,}148 \text{ см}.$$

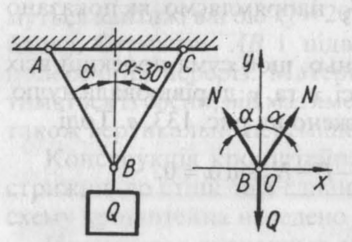


Рис. 134

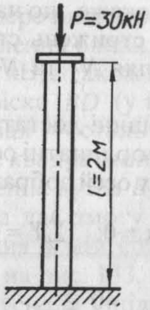


Рис. 135

Урахвуючи, що деформації малі, переміщення вузла B можна визначити так. Припустимо, що стрижні в шарнірі B роз'єднані. Від точки B праворуч, у напрямі стрижня AB, відкладемо його подовження BB', а у напрямі BC — укорочення BB'' стрижня BC (рис. 133, *б*, *г*). На рис. 133, *г* це наведено в масштабі, який значно більший, ніж масштаб довжини стрижнів на схемі конструкції. Положення шарніра B після деформації збігається з точкою перетину дуг, описаних з точок A і C радіусами, які дорівнюють новим довжинам AB' та CB'' стрижнів. Унаслідок малості деформацій стрижнів дуги можна замінити перпендикулярами, які проведено з точок B' і B'' до напрямів AB та BC. Точка B_1 перетину перпендикулярів визначить нове положення вузла B після деформації кронштейна. Відрізок BB_1 зобразить повне переміщення вузла B, а відрізок $B'B_1 = \delta_y$ — вертикальну складову цього переміщення.

Із наведеної побудови легко встановити аналітичну залежність між переміщеннями точки і подовженнями стрижнів. Вертикальне переміщення вузла (рис. 133, *г*)

$$\delta_y = B'B_1 = B_1b + bB' = \frac{\Delta l_2}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{\Delta l_3}{\sin\alpha}.$$

Підставляючи числові значення, матимемо

$$\delta_y = \left(0{,}118 + 0{,}148 \cdot 2/\sqrt{2}\right) \text{см} = 0{,}33 \text{ см}.$$

Приклад 12. *Визначимо найбільшу вагу вантажу Q, який можна безпечно підвісити до вузла B стрижневої системи (рис. 134). Матеріал стрижнів — Ст2, допустиме напруження на розтяг $[\sigma_+] = 140$ МПа. Діаметр стрижнів $d = 2$ см.*

Найбільше безпечне нормальне зусилля, яке можна допустити в кожному стрижні підвіски,

$$N = [\sigma]F = 140 \cdot 10^3 \frac{\pi\left(2 \cdot 10^{-2}\right)^2}{4} \text{ кН} = 44 \text{ кН}.$$

Найбільшу допустиму вагу вантажу Q знаходимо з умови рівноваги вузла B. Прирівнюючи до нуля суму проекцій на вертикальну вісь усіх сил, що діють на вузол B, з урахуванням симетрії системи маємо

$$\sum Y = -Q + 2N\cos\alpha = 0,$$

звідки

$$Q = 2N\cos\alpha = 2 \cdot 44 \cdot 0{,}866 \text{ кН} = 76{,}2 \text{ кН}.$$

Приклад 13. *Визначимо площу поперечного перерізу дерев'яної колони (рис. 135) за умови, що вертикальне переміщення верхнього кінця колони не повинно перевищувати $[\Delta l] = 0{,}2$ см. Матеріал колони — сосна, модуль пружності (див. дод. 9) $E = 10^4$ МПа.*

Для визначення площі колони запишемо умову жорсткості:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} \le [\Delta l],$$

де $N = P$.

Звідси

$$F \ge \frac{Nl}{E[\Delta l]}.$$

Підставляючи числові значення, матимемо

$$F = \frac{30 \cdot 10^{-3} \cdot 2}{10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} \text{ м}^2 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 30 \text{ см}^2.$$

Перевіримо, чи буде виконуватися умова міцності при цій площі поперечного перерізу. Допустиме напруження на стиск для сосни $[\sigma_-] = 12$ МПа (див. дод. 10). Напруження, спричинене силою N,

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-3}} \text{ МПа} = 10 \text{ МПа} < [\sigma_-] = 12 \text{ МПа}.$$

Отже, умова міцності виконується.

§ 36. Урахування власної ваги і сил інерції

Власна вага матеріалу елементів конструкцій, а також сили інерції рухомих частин машин і механізмів є зовнішніми навантаженнями, розподіленими по об'єму. Далі розглянуто деякі задачі визначення напружень і переміщень при дії таких навантажень.

Урахування власної ваги. В машинобудуванні, як правило, вплив власної ваги не враховують, бо деталі машин мають порівняно невеликі розміри, а отже, і вплив власної ваги невеликий. Проте в деяких інженерних конструкціях власна вага — це одне з основних навантажень. При розрахунку канатів шахтних підйомників, штанг бурильних пристроїв, стояків мостів, стін будівель, гребель вплив власної ваги слід враховувати.

Припустимо, що прямий стрижень однакового поперечного перерізу великої довжини закріплено верхнім кінцем і навантажено на вільному кінці силою P (рис. 136, *а*). Визначимо, як змінюються поздовжні сили та

Рис. 136

напруження в поперечних перерізах стрижня, а також осьові переміщення перерізів по довжині стрижня, враховуючи вплив власної ваги.

У довільному поперечному перерізі стрижня, розміщеному на відстані x від вільного кінця, поздовжня сила

$$N(x) = P + \gamma F x, \tag{5.1}$$

де γ — питома вага матеріалу.

Максимальне значення сила має у верхньому закріпленому перерізі:

$$N_{\max} = P + \gamma F l. \tag{5.2}$$

Епюри поздовжніх зусиль зображено на рис. 136, *б*.

Нормальне напруження в розглядуваному перерізі

$$\sigma = \frac{N(x)}{F} = \frac{P}{F} + \gamma x. \tag{5.3}$$

Максимального значення нормальне напруження набуває у верхньому закріпленому перерізі, який у цьому разі буде небезпечним:

$$\sigma_{\max} = P / F + \gamma l. \tag{5.4}$$

У цій формулі перший доданок — це напруження від сили P, а другий — від власної ваги. Епюру нормальних напружень наведено на рис. 136, *в*.

Умова міцності для небезпечного перерізу має вигляд

$$\sigma_{\max} = P / F + \gamma l \le [\sigma]. \tag{5.5}$$

Із виразу (5.5) дістанемо формулу для визначення площі поперечного перерізу стрижня з урахуванням впливу власної ваги:

$$F \ge \frac{P}{[\sigma] - \gamma l}. \tag{5.6}$$

Якщо навантаження на кінці стрижня немає, тобто $P = 0$, то напруження в небезпечному перерізі, спричинене тільки власною вагою, згідно з виразом (5.4),

$$\sigma_{\max} = \gamma l. \tag{5.7}$$

Умова міцності набирає вигляду

$$\gamma l \le [\sigma]. \tag{5.8}$$

Звідси можна визначити довжину стрижня, при якій напруження тільки від дії власної ваги досягає допустимого і стрижень не може нести корисне навантаження. Цю граничну допустиму довжину знайдемо з умови (5.8):

$$l_{\text{гр}} = [\sigma] / \gamma. \tag{5.9}$$

Від дії власної ваги може статися розрив стрижня. Це відбувається, якщо $\sigma_{\max}$ у виразі (5.7) досягне значення тимчасового опору. Довжина стрижня, при якій він розривається від власної ваги, називається *критичною*. Її знайдемо з формули (5.9), замінивши допустиме напруження тимчасовим опором матеріалу:

$$l_{\text{кр}} = \sigma_{\text{в}} / \gamma. \tag{5.10}$$

Гранична та критична довжини не залежать від площі поперечного перерізу стрижня.

Визначимо, наприклад, критичну довжину стрижня із сталі марки Ст2, у якої $\sigma_{\text{в}} = 360$ МПа. Питома вага сталі $\gamma = 7{,}85 \cdot 10^4$ Н/м^3. Підставивши у формулу (5.10) числові значення, матимемо

$$l_{\text{кр}} = \frac{360}{7{,}85 \cdot 10^4 \cdot 10^{-6}} = 4580 \text{ м} \approx 4{,}6 \text{ км}.$$

Для розглядуваного стрижня (рис. 136, *а*) визначимо переміщення перерізу, розміщеного на відстані x від вільного кінця. Переміщення дорівнює подовженню частини стрижня, розміщеної вище цього перерізу.

У перерізі стрижня на відстані ξ від вільного кінця (рис. 136, *а*) маємо $N(\xi) = P + \gamma F \xi$. За формулою (4.9) при $F = \text{const}$ знаходимо

$$\lambda(x) = \int_x^l \frac{N(\xi)\,d\xi}{EF} = \int_x^l \frac{(P + \gamma F \xi)\,d\xi}{EF} = \frac{P(l - x)}{EF} + \frac{\gamma}{E\cancel{F}}\left(l^2 - x^2\right)\cdot\frac{1}{2}. \tag{5.11}$$

Подовження Δl стрижня (чи переміщення λ нижнього кінця стрижня, що дорівнює Δl) визначимо з виразу (5.11), взявши $x = 0$:

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF} + \frac{\gamma l^2}{2E}. \tag{5.12}$$

Перший доданок у цьому виразі є подовженням стрижня від сили P, другий — від власної ваги.

Ураховуючи, що повна вага стрижня $Q = \gamma F l$, замість формули (5.12) матимемо

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF} + \frac{Ql}{2EF}. \tag{5.13}$$

Отже, абсолютне подовження стрижня від власної ваги таке саме, як подовження від зосередженої сили, що дорівнює вазі стрижня і прикладена в його центр ваги. Епюру переміщень перерізів зображено на рис. 136, *г*.

Стрижень однакового опору. Як видно із розрахунку на міцність стрижня однакового поперечного перерізу з урахуванням власної ваги, в усіх перерізах, крім небезпечного, нормальні напруження будуть меншими від допустимих, тобто матеріал недовантажений (див., наприклад, рис. 136, *в*). Проте можна спроектувати стрижень такого змінного перерізу, в якого в усіх поперечних перерізах напруження будуть однаковими і дорівнюватимуть допустимому. Такий стрижень називають *рівноміцним* або *стриж-*

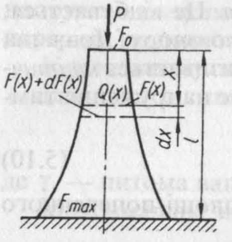


Рис. 137

нем однакового опору розтяганню чи стисканню. Встановимо закон зміни площі його поперечного перерізу. Нехай стрижень стискується силою P (рис. 137). Потрібна площа верхнього перерізу

$$F_0 = P/[\sigma]. \tag{5.14}$$

Площу поперечного перерізу на відстані x від верхнього кінця стрижня позначимо через $F(x)$, а вагу частини стрижня завдовжки x — через $Q(x)$. У цьому перерізі, як і в усіх інших, напруження має дорівнювати допустимому. Рівняння рівноваги частини стрижня завдовжки x має вигляд

$$P+Q(x)=[\sigma]F(x). \tag{5.15}$$

Перейдемо до наступного перерізу, який проведено на відстані dx від першого. Площа цього перерізу $F(x)+dF(x)$, а вага частини стрижня завдовжки $x+dx$ становитиме $Q(x)+\gamma F(x)dx$. Умова рівноваги цієї частини стрижня

$$P+Q(x)+\gamma F(x)\,dx=[\sigma][F(x)+dF(x)]. \tag{5.16}$$

Віднявши вираз (5.15) із виразу (5.16), дістанемо

$$\gamma F(x)\,dx=[\sigma]dF(x), \tag{5.17}$$

або, розділивши змінні,

$$\frac{dF(x)}{F(x)}=\frac{\gamma dx}{[\sigma]}.$$

Проінтегрувавши це рівняння, знайдемо

$$\ln F(x)=\gamma x/[\sigma]+C.$$

Звідси

$$F(x)=e^{\gamma x/[\sigma]+C}. \tag{5.18}$$

Сталу інтегрування C визначимо з умови, що при $x=0$

$$F(x)=F_0.$$

Тоді з формули (5.18) дістанемо

$$F_0=e^{C}.$$

Підставляючи це значення у формулу (5.18), знайдемо закон зміни площі поперечного перерізу стрижня однакового опору:

$$F(x)=F_0e^{\gamma x/[\sigma]}. \tag{5.19}$$

Найбільша площа в місці закріплення $(x=l)$

$$F_{\max}=F_0e^{\gamma l/[\sigma]},$$

або з урахуванням (5.14)

$$F_{\max}=\frac{P}{[\sigma]}e^{\gamma l/[\sigma]}. \tag{5.20}$$

Знайдемо повну вагу Q стрижня однакового опору. З умови рівноваги всього стрижня маємо

$$P+Q=[\sigma]F_{\max}.$$

Звідси

$$Q=[\sigma]F_{\max}-P.$$

Ураховуючи формули (5.20), дістаємо

$$Q=P\left(e^{\gamma l/[\sigma]}-1\right).$$

Легко визначити також укорочення стрижня. Оскільки напруження в усіх поперечних перерізах однакові і дорівнюють допустимому, то і відносна деформація ε по довжині стрижня однакового опору постійна і дорівнює $[\sigma]/E$. Абсолютне укорочення стрижня

$$\Delta l=\varepsilon l=\frac{[\sigma]}{E}l. \tag{5.21}$$

Східчастий стрижень. Стрижень, який складається з окремих відрізків (східців) з однаковою площею поперечного перерізу в межах кожного відрізка, називають *східчастим*. Він займає проміжне місце між стрижнем однакового поперечного перерізу і стрижнем однакового опору.

У східчастому стрижні матеріал використовується краще, ніж у стрижні однакового перерізу, але менш ефективно, ніж у стрижні однакового опору. Проте виготовлення східчастого стрижня значно простіше, тому такі стрижні більш поширені, ніж стрижні однакового опору. Зазначимо, що опори мостів часто виготовляють у вигляді східчастих стрижнів.

Східчасті стрижні проектують так, щоб у небезпечному перерізі, який розміщений у кінці кожного східця, напруження дорівнювали допустимому.

Складемо формули для визначення площі поперечного перерізу кожного східця (рис. 138).

Площу поперечного перерізу першого східця знайдемо з формули (5.6)

$$F_1=\frac{P}{[\sigma]-\gamma l_1}. \tag{5.22}$$

Для нижнього кінця другого східця прикладено силу, що дорівнює $F_1[\sigma]$. Тоді аналогічно

$$F_2=\frac{F_1[\sigma]}{[\sigma]-\gamma l_2}. \tag{5.23}$$

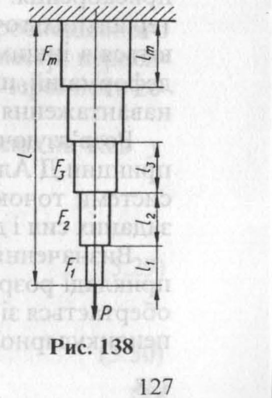


Рис. 138

Ураховуючи формулу (5.22), дістанемо

$$F_2 = \frac{P[\sigma]}{([\sigma]-\gamma l_1)([\sigma]-\gamma l_2)}. \tag{5.24}$$

До нижнього кінця третього східця прикладено силу $F_2[\sigma]$. Отже, площа поперечного перерізу третього східця

$$F_3 = \frac{F_2[\sigma]}{[\sigma]-\gamma l_3}.$$

Підставляючи значення F_2 із формули (5.24), матимемо

$$F_3 = \frac{P[\sigma]^2}{([\sigma]-\gamma l_1)([\sigma]-\gamma l_2)([\sigma]-\gamma l_3)}. \tag{5.25}$$

Формула для площі поперечного перерізу n-го східця має такий вигляд:

$$F_n = \frac{P[\sigma]^{n-1}}{([\sigma]-\gamma l_1)([\sigma]-\gamma l_2)([\sigma]-\gamma l_3)...([\sigma]-\gamma l_n)}.$$

Якщо довжини всіх східців однакові, то

$$l_1 = l_2 = l_3 = ... = l_n = ... = l_m = l/m, \tag{5.26}$$

де l — загальна довжина стрижня; m — кількість східців у стрижні.

Тоді

$$F_n = \frac{P[\sigma]^{n-1}}{\left([\sigma]-\gamma\dfrac{l}{m}\right)^n} = \frac{P}{[\sigma]\left(1-\dfrac{\gamma}{[\sigma]}\dfrac{l}{m}\right)^n}. \tag{5.27}$$

Урахування сил інерції. Під силою інерції матеріальної точки, яка рухається з прискоренням, розуміють силу, що дорівнює за модулем добутку маси точки на її прискорення. Напрям сили інерції протилежний напряму прискорення. У реальному тілі, яке можна розглядати як сукупність матеріальних точок, сили інерції розподілені по об'єму тіла. Вони складаються з іншими навантаженнями і впливають на значення напружень і деформацій, що виникають у тілі. Часто сили інерції становлять основне навантаження на рухомі деталі конструкцій.

Розв'язуючи задачі з урахуванням сил інерції, слід використовувати принцип Д'Аламбера. Він полягає в тому, що рівнянням руху точки (або системи точок) можна надати вид рівнянь рівноваги, якщо до діючих заданих сил і динамічних реакцій зв'язків додати сили інерції.

Визначення напружень і деформацій при дії сил інерції розглянемо на прикладі розрахунку тонкого $[h<(r/20)]$ кільця (рис. 139, *а*), що вільно обертається зі сталою кутовою швидкістю навколо центральної осі, перпендикулярної до площини кільця.

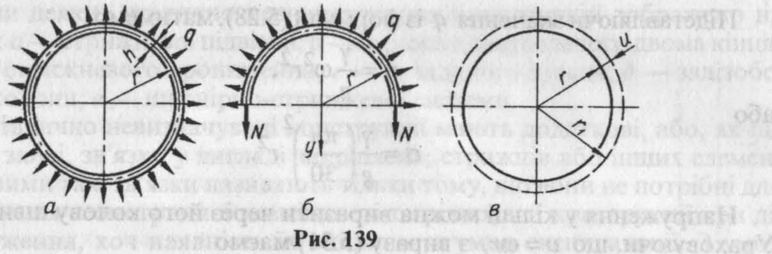


Рис. 139

Нехай кутова швидкість обертання кільця, $с^{-1}$,

$$\omega = \frac{\pi n}{30},$$

де n — частота обертання.

Для тонкого кільця можна вважати, що всі його точки перебувають на однаковій відстані від осі обертання, яка дорівнює радіусу r.

При обертальному русі зі сталою кутовою швидкістю точки кільця зазнаватимуть лише доцентрового прискорення $\omega^2 r$, а сили інерції напрямлятимуться від осі (відцентрові сили).

На елемент кільця завдовжки 1 діє сила інерції

$$q = \frac{\gamma F}{g}\omega^2 r, \tag{5.28}$$

де γ — питома вага матеріалу; F — площа поперечного перерізу кільця; r — радіус середньої лінії кільця.

Отже, при рівномірному обертанні на кільце діють рівномірно розподілені по колу радіальні сили інерції інтенсивністю q. Внаслідок колової симетрії системи і навантаження в усіх поперечних перерізах згинальні моменти і поперечні сили дорівнюють нулю.

Для визначення поздовжніх зусиль N, що діють у поперечних (радіальних) перерізах кільця, розглянемо рівновагу половини кільця (рис. 139, *б*). На половину кільця діють сили N, які прикладені в проведених перерізах, та сили інерції інтенсивністю q.

Згідно з теоремою, що її доведено в § 23, рівнодійна розподіленого навантаження інтенсивністю q дорівнює добутку q на діаметр, перпендикулярна до діаметра і напрямлена по осі, яка проходить через його середину, тобто по осі y.

Умова рівноваги половини кільця при проекціюванні сил на вісь y має вигляд

$$2N - q2r = 0,$$

звідки

$$N = qr. \tag{5.29}$$

Нормальне напруження в поперечному перерізі кільця

$$\sigma = N/F = qr/F. \tag{5.30}$$

Підставляючи значення q із формули (5.28), матимемо

$$\sigma = \frac{\gamma}{g}\omega^2 r^2, \qquad (5.31)$$

або

$$\sigma = \frac{\gamma}{g}\left(\frac{\pi n}{30}\right)^2 r^2. \qquad (5.32)$$

Напруження у кільці можна виразити через його колову швидкість v. Ураховуючи, що $v = \omega r$, з виразу (5.31) маємо

$$\sigma = \frac{\gamma}{g}v^2. \qquad (5.33)$$

Зауважимо, що напруження не залежить від площі поперечного перерізу кільця.

Формули (5.31), (5.33) можна використовувати для наближеного (якщо знехтувати впливом спиць) визначення напруження в ободі маховика.

З умови міцності кільця

$$\frac{\gamma}{g}v^2 \le [\sigma] \qquad (5.34)$$

визначаємо допустиму колову швидкість

$$v \le \sqrt{\frac{[\sigma]g}{\gamma}}. \qquad (5.35)$$

Відносне подовження в напрямі дотичних до середнього кола кільця (колове подовження), згідно із законом Гука та з урахуванням виразу (5.31),

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{\gamma}{gE}\omega^2 r^2. \qquad (5.36)$$

Розглядаючи геометричний аспект деформації (рис. 139, *в*), бачимо, що відносне подовження по колу кільця дорівнює відносному подовженню радіуса:

$$\varepsilon = \frac{2\pi r_1 - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{r_1 - r}{r} = \frac{u}{r}, \qquad (5.37)$$

де u — радіальне переміщення точок середнього кола кільця.

Із формул (5.37) і (5.36) знаходимо

$$u = \varepsilon r = \frac{\gamma}{gE}\omega^2 r^3. \qquad (5.38)$$

§ 37. Статично невизначувані конструкції

Статично невизначуваними називаються конструкції, зусилля в елементах яких не можна визначити тільки з рівнянь статики. Крім рівнянь статики для розрахунку таких систем (конструкцій) треба використати також рівняння, що містять деформації елементів конструкції.

Схеми деяких статично невизначуваних конструкцій зображено на рис. 140: *а* — стрижневої підвіски; *б* — стрижня, закріпленого двома кінцями; *в* — стрижневого кронштейна; *г* — складаного кільця; *д* — залізобетонної колони; *е* — шарнірно-стрижневої системи.

Усі статично невизначувані конструкції мають додаткові, або, як ще кажуть, зайві, зв'язки у вигляді закріплень, стрижнів або інших елементів. Зайвими такі зв'язки називають тільки тому, що вони не потрібні для забезпечення геометричної незмінності та рівноваги конструкції при дії навантаження, хоч наявність їх випливає з умов експлуатації. З умов міцності й жорсткості конструкції зайві зв'язки можуть стати необхідними.

У статично невизначуваній системі кількість невідомих зусиль, що треба визначити, більша, ніж кількість рівнянь статики, які для цього можна використати. Різниця між кількістю невідомих і кількістю рівнянь статики визначає кількість зайвих невідомих, або ступінь статичної невизначуваності конструкції. Коли є одна зайва невідома, конструкцію називають один раз статично невизначуваною, при двох — двічі статично невизначуваною і т. д. Конструкції, зображені на рис. 140, *а*, *б*, *г*–*е*, мають по одному додатковому зв'язку і є один раз статично невизначуваними, а конструкція, яку наведено на рис. 140, *в*, має два зайвих зв'язки і є двічі статично невизначуваною.

Розв'язання статично невизначуваних задач. Для розв'язання статично невизначуваних задач розроблено загальні методи, деякі з яких наведено в розд. 14.

Найпростіші статично невизначувані конструкції, елементи яких працюють на розтягання або стискання, розраховуватимемо сумісним розв'язанням рівнянь, здобутих у результаті розгляду статичного, геометричного і фізичного аспектів задачі. При цьому зручно додержуватися такої послідовності:

1. *Статичний аспект задачі*. Складаємо рівняння рівноваги відокремлених елементів конструкції, що мають невідомі зусилля.

2. *Геометричний аспект задачі*. Розглядаємо систему в деформованому стані, що дає змогу встановити зв'язки між деформаціями або переміщеннями окремих елементів конструкції. Здобуті рівняння називають *рівняннями сумісності (нерозривності) деформації*.

3. *Фізичний аспект задачі*. На підставі закону Гука виражаємо переміщення або деформації елементів конструкції через невідомі зусилля, що діють у них. У разі зміни температури до деформацій, спричинених зусиллями, додають температурні деформації.

4. *Синтез*. Розв'язуючи сумісно статичні, геометричні та фізичні рівняння, знаходимо невідомі зусилля.

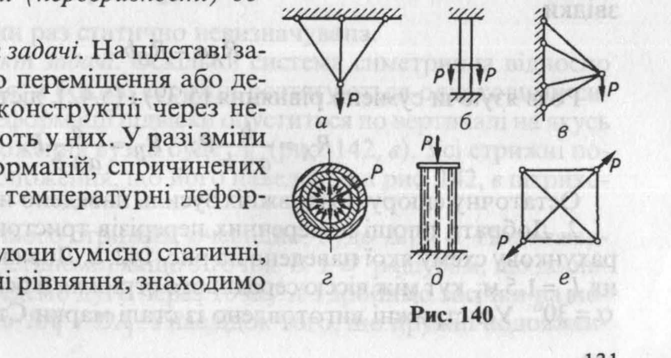


Рис. 140

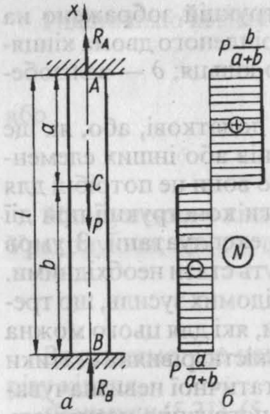


Рис. 141

Розглянемо приклади розрахунку деяких простих статично невизначуваних конструкцій.

1. Нехай до стрижня, закріпленого двома кінцями, прикладено осьову силу P (рис. 141, *а*). Визначимо зусилля, що виникають у нижній та верхній частинах стрижня.

Статичний аспект задачі. Оскільки сила P діє вздовж осі стрижня, в місцях його закріплення виникають тільки вертикальні складові реакцій (R_A і R_B). Напрямляємо їх довільно — так, як зображено на рис. 141, *а*.

Для системи сил, що діють по одній прямій лінії, можна скласти лише одне рівняння рівноваги:

$$\sum X = R_A + R_B - P = 0. \tag{5.39}$$

Отже, задача один раз статично невизначувана (дві невідомі реакції не можна визначити з одного рівняння).

Геометричний аспект задачі. Оскільки кінці стрижня жорстко закріплені, то його загальна довжина не змінюється. Отже,

$$\Delta l = 0. \tag{5.40}$$

Фізичний аспект задачі. У поперечних перерізах верхньої частини стрижня (AC) діють поздовжні зусилля $N_{AC} = R_A$, а в поперечних перерізах нижньої частини (BC) — зусилля $N_{BC} = -R_B$. Використовуючи закон Гука, виразимо деформації через ці зусилля:

$$\Delta l = \frac{N_{AC}a}{EF} + \frac{N_{BC}b}{EF} = \frac{R_A a}{EF} - \frac{R_B b}{EF}. \tag{5.41}$$

Синтез. Підставляючи вираз (5.41) у рівняння (5.40), матимемо

$$\frac{R_A a}{EF} - \frac{R_B b}{EF} = 0,$$

звідки

$$R_A a = R_B b. \tag{5.42}$$

Розв'язуючи сумісно рівняння (5.39) і (5.42), дістанемо

$$R_A = \frac{b}{a+b}P; \quad R_B = \frac{a}{a+b}P.$$

Остаточну епюру поздовжніх зусиль наведено на рис. 141, *б*.

2. Добрати площі поперечних перерізів тристрижневої підвіски, розрахункову схему якої наведено на рис. 142, *а*. Довжина середнього стрижня $l_1 = 1{,}5$ м, кут між віссю середнього стрижня й осями бокових стрижнів $\alpha = 30°$. Усі стрижні виготовлено із сталі марки Ст2. Площі поперечних

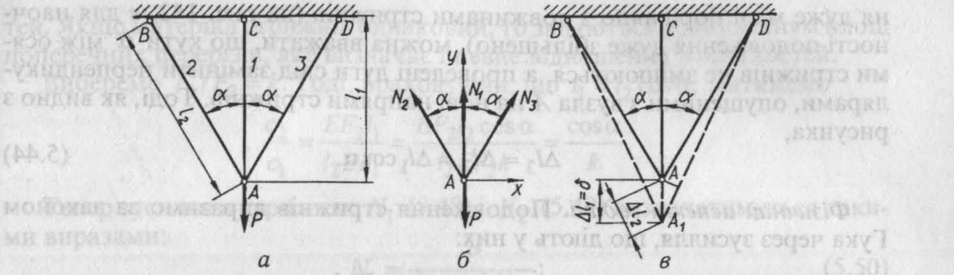


Рис. 142

перерізів бокових стрижнів $F_2 = F_3$. Підвіска у вузлі A навантажуватиметься вертикальною силою $P = 80$ кН.

Із розрахункової схеми конструкції, а також із припущення, що шарніри у вузлах ідеальні, випливає, що при навантажуванні підвіски у вузлі A силою P у стрижнях виникатимуть тільки осьові зусилля, у цьому прикладі — розтягальні.

Площу поперечного перерізу стрижня при розтяганні (проектувальний розрахунок) добирають з умови міцності

$$\sigma = N / F \le [\sigma],$$

звідки, якщо відоме зусилля N, визначають потрібну площу:

$$F \ge N / [\sigma].$$

Знайдемо зусилля в стрижнях підвіски.

Статичний аспект задачі. Рівняння рівноваги вузла (рис. 142, *б*) мають вигляд

$$\sum X = N_3 \sin\alpha - N_2 \sin\alpha = 0;$$

$$\sum Y = N_1 + N_2 \cos\alpha + N_3 \cos\alpha - P = 0.$$

Із першого рівняння випливає, що $N_2 = N_3$. Із другого рівняння маємо

$$N_1 + 2N_2 \cos\alpha = P. \tag{5.43}$$

Отже, конструкція один раз статично невизначувана.

Геометричний аспект задачі. Оскільки система симетрична відносно осі середнього стрижня, а бокові стрижні розтягуються однаковими силами, то вузол A при деформації підвіски опуститься по вертикалі на якусь величину δ. Нове положення вузла буде A_1 (рис. 142, *в*). Усі стрижні подовжаться і займуть положення, що його наведено на рис. 142, *в* штриховими лініями.

Подовження середнього стрижня, очевидно, буде $\Delta l_1 = \delta$. Подовження бокових стрижнів дістанемо, якщо з точок B і D радіусом, що дорівнює BA (чи DA), проведемо дуги через точку A і зробимо засічки на нових довжинах стрижнів BA_1 і DA_1. Унаслідок того, що пружні подовження дуже малі порівняно з довжинами стрижнів (на рис. 142, *в* для наочності подовження дуже збільшено), можна вважати, що кути α між осями стрижнів не змінюються, а проведені дуги слід замінити перпендикулярами, опущеними з вузла A на нові напрями стрижнів. Тоді, як видно з рисунка,

$$\Delta l_3 = \Delta l_2 = \Delta l_1 \cos\alpha. \tag{5.44}$$

Фізичний аспект задачі. Подовження стрижнів виразимо за законом Гука через зусилля, що діють у них:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2}. \tag{5.45}$$

Синтез. Підставляючи значення Δl_1 і Δl_2 з виразів (5.45) у формулу (5.44), дістанемо

$$\frac{N_2 l_2}{EF_2} = \frac{N_1 l_1}{EF_1}\cos\alpha. \tag{5.46}$$

Звідси

$$N_2 = \frac{EF_2 / l_2}{EF_1 / l_1} N_1 \cos\alpha,$$

або

$$N_2 = \frac{c_2}{c_1} N_1 \cos\alpha, \tag{5.47}$$

де $c_1 = \dfrac{EF_1}{l_1}$, $c_2 = \dfrac{EF_2}{l_2}$ — жорсткості відповідно середнього і бокових стрижнів.

Підставивши вираз (5.47) у рівняння (5.43), матимемо

$$N_1 + 2\frac{c_2}{c_1} N_1 \cos^2\alpha = P,$$

звідки

$$N_1 = \frac{P}{1 + 2\dfrac{c_2}{c_1}\cos^2\alpha}. \tag{5.48}$$

Ураховуючи вираз (5.47), знайдемо

$$N_2 = \frac{P\dfrac{c_2}{c_1}\cos\alpha}{1 + 2\dfrac{c_2}{c_1}\cos^2\alpha}. \tag{5.49}$$

Як бачимо, зусилля N_1 і N_2 залежать від співвідношення жорсткостей стрижнів: чим більша жорсткість стрижня, тим більшу частину навантаження він сприймає. У цьому полягає одна з особливостей статично невизначуваних систем. Зауважимо, що в проектувальних розрахунках таких систем при визначенні зусиль потрібно задатися відношенням жорсткостей. Якщо матеріал стрижнів однаковий, то задаються відношенням площ поперечних перерізів, яке визначає і певне відношення жорсткостей.

Виберемо $F_1 / F_2 = k$. Тоді, враховуючи, що $l_1 = l_2 \cos\alpha$, матимемо

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{EF_2 l_1}{l_2 EF_1} = \frac{EF_2 l_2 \cos\alpha}{l_2 EF_2 k} = \frac{\cos\alpha}{k}.$$

Тепер зусилля в стрижнях N_1 (5.48) і N_2 (5.49) визначатимуться такими виразами:

$$N_1 = \frac{P}{1 + \dfrac{2}{k}\cos^3\alpha}; \tag{5.50}$$

$$N_2 = \frac{P\cos^2\alpha}{k + 2\cos^3\alpha}. \tag{5.51}$$

Знайдемо ці зусилля, взявши, наприклад, $k = 2$:

$$N_1 = \frac{80}{1 + 0{,}866^3} = 48{,}5 \text{ кН}; \quad N_2 = \frac{80 \cdot 0{,}866^3}{2\left(1 + 0{,}866^3\right)} = 18{,}2 \text{ кН}.$$

Доберемо площі поперечних перерізів стрижнів, виходячи з припущення, що напруження в середньому стрижні дорівнює допустимому $[\sigma] = 140$ МПа. Тоді

$$F_1 = \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{48{,}5 \cdot 10^{-3}}{140} \text{ м}^2 = 3{,}46 \text{ см}^2.$$

Площі поперечних перерізів бокових стрижнів, згідно з взятим відношенням,

$$F_2 = \frac{F_1}{k} = \frac{F_1}{2} = 1{,}73 \text{ см}^2.$$

Напруження в цих стрижнях

$$\sigma_{II} = \sigma_{III} = \frac{N_2}{F_2} = \frac{18{,}2 \cdot 10^{-3}}{1{,}73 \cdot 10^{-4}} \text{ МПа} = 105 \text{ МПа}.$$

Ці напруження менші, ніж допустиме, тобто стрижні мають надлишковий запас міцності.

Якщо з умови міцності визначити площі поперечних перерізів бокових стрижнів F_2, а потім, згідно з вибраним відношенням, взяти $F_1 = 2F_2$, то напруження в середньому стрижні перевищить допустиме. Отже, цей другий варіант добору площі поперечних перерізів слід відкинути.

Початкові й температурні напруження. Вільне складання статично невизначуваних систем можливе лише за умови точного виготовлення їхніх елементів. А якщо ні, то систему можна скласти, прикладаючи зусилля, які спричинюють деформації елементів. Тому після монтажу в елементах конструкції виникають напруження, що називаються *початковими* або *монтажними*. У статично визначуваних системах зазначені неточності

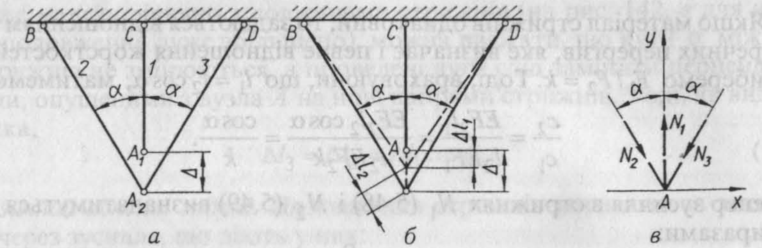


Рис. 143

розмірів елементів не заважають вільному монтажу. Отже, після монтажу не виникають початкові напруження в елементах.

В елементах статично невизначуваних конструкцій зусилля і напруження виникають також при зміні температури.

1. Припустимо, що стрижні конструкції, яку розглянуто в попередньому прикладі, виготовлено із заданими площами поперечних перерізів F_1 та $F_2 = F_3$, а довжина середнього стрижня l_1 виявилася меншою на відрізок Δ (рис. 143, *а*). Якщо значення Δ мале порівняно з довжинами стрижнів, то, приклавши відповідні деформувальні зусилля, можна всі три стрижні з'єднати у вузлі, що займе після монтажу якесь положення A (рис. 143, *б*). Очевидно, при цьому середній стрижень буде розтягнутий, а бокові — стиснуті. Визначимо монтажні зусилля в стрижнях.

Статичний аспект задачі. Рівняння рівноваги вузла (рис. 143, *в*) мають вигляд

$$\Sigma X = N_2 \sin\alpha - N_3 \sin\alpha = 0; \quad \Sigma Y = N_1 - N_2 \cos\alpha - N_3 \cos\alpha = 0.$$

Із першого рівняння знаходимо, що $N_2 = N_3$. Залишається одне рівняння з двома невідомими:

$$N_1 - 2N_2 \cos\alpha = 0. \tag{5.52}$$

Геометричний аспект задачі. З наведеної на рис. 143, *б* побудови випливає, що

$$\Delta l_2 = (\Delta - \Delta l_1)\cos\alpha. \tag{5.53}$$

Фізичний аспект задачі. За законом Гука

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2}. \tag{5.54}$$

Синтез. Підставляючи значення Δl_1 і Δl_2 з виразів (5.54) у формулу (5.53), маємо

$$\frac{N_2 l_2}{EF_2} = \left(\Delta - \frac{N_1 l_1}{EF_1}\right)\cos\alpha.$$

Звідси

$$N_2 = \frac{EF_2}{l_2}\left(\Delta - \frac{N_1 l_1}{EF_1}\right)\cos\alpha,$$

або

$$N_2 = c_2\left(\Delta - \frac{N_1}{c_1}\right)\cos\alpha.$$

Ввівши N_2 у рівняння (5.52), матимемо

$$N_1 - 2c_2(\Delta - N_1/c_1)\cos^2\alpha = 0.$$

Звідси знаходимо розтягальне зусилля в середньому стрижні:

$$N_1 = \frac{2c_2\cos^2\alpha}{1 + 2\dfrac{c_2}{c_1}\cos^2\alpha}\Delta. \tag{5.55}$$

Стискальні зусилля в бокових стрижнях визначаємо з рівняння (5.52):

$$N_2 = N_1 / 2\cos\alpha. \tag{5.56}$$

Зусилля в стрижнях залежать як від відношення жорсткостей, так і від Δ.

Нехай у розглядуваній конструкції (рис. 143) всі стрижні виготовлено із сталі $\left(E = 2\cdot10^5 \text{ МПа}\right)$. Площі поперечних перерізів стрижнів $F_1 = 3$ см^2, $F_2 = F_3 = 2$ см^2; проектна довжина стрижня $l = 2$ м, кути нахилу бокових стрижнів $\alpha = 30°$. Після з'єднання крайніх стрижнів виявилося, що середній стрижень коротший, ніж це треба для вільного складання, на $\Delta = 0{,}15$ см. Знайдемо зусилля і напруження, що виникають після монтажу конструкції.

За формулою (5.55) знаходимо розтягальне зусилля в середньому стрижні:

$$N_1 = \frac{2\dfrac{2\cdot10^5\cdot10^3\cdot2\cdot10^{-4}\cdot0{,}866}{2}0{,}866^2}{1 + 2\dfrac{2\cdot10^5\cdot10^3\cdot2\cdot10^{-4}\cdot0{,}866\cdot2}{2\cdot2\cdot10^5\cdot10^3\cdot3\cdot10^{-4}}0{,}866^2}0{,}15\cdot10^{-2}\text{ кН} = 20{,}9\text{ кН}.$$

Стискальні зусилля в бокових стрижнях, згідно з виразом (5.56),

$$N_2 = N_3 = \frac{20{,}9}{2\cdot0{,}866}\text{ кН} = 12{,}06\text{ кН}.$$

Відповідно напруження в стрижнях

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{20{,}9\cdot10^{-3}}{3\cdot10^{-4}}\text{ МПа} = 69{,}7\text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = -\frac{N_2}{F_2} = -\frac{12{,}06\cdot10^{-3}}{2\cdot10^{-4}}\text{ МПа} = -60{,}30\text{ МПа}.$$

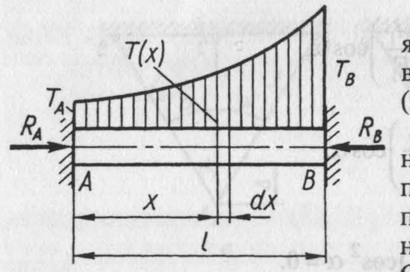


Рис. 144

Отже, порівняно невелика неточність, яку допущено в довжині стрижня при виготовлені, спричинює великі початкові (монтажні) напруження.

2. Визначимо температурні напруження в стрижні AB (рис. 144) завдовжки l і площею поперечного перерізу F. Модуль пружності матеріалу E, коефіцієнт лінійного температурного розширення α. Стрижень закріплено кінцями в непіддатливих стінах і нагріто так, що на кінці A температура його підвищилася до T_A, на кінці B — до T_B, а по довжині стрижня вона змінюється за законом

$$T(x) = T_A + \frac{T_B - T_A}{l^n} x^n. \tag{5.57}$$

При $n = 0$ температура по довжині стрижня не змінюється і дорівнює T_B, при $n = 1$ температура змінюється лінійно, при $n = 2$ — за законом параболи другого порядку і т. д.

Визначимо реакції закріплень і напруження в стрижні.

Статичний аспект задачі. При підвищенні температури стрижень намагається подовжитися. Цьому перешкоджають жорсткі опори, внаслідок чого виникають реакції, напрямлені вздовж осі стрижня (рис. 144).

Для системи сил, які напрямлені по одній прямій, можна скласти одне рівняння рівноваги:

$$\sum X = R_A - R_B = 0,$$

звідки

$$R_A = R_B = R. \tag{5.58}$$

Отже, задача один раз статично невизначувана. Поздовжня сила в стрижні $N = -R$.

Геометричний аспект задачі. Внаслідок закріплення кінців стрижня його довжина не змінюється:

$$\Delta l = 0. \tag{5.59}$$

Фізичний аспект задачі. Укорочення вільного стрижня, спричинене поздовжніми силами, які дорівнюють реакціям закріплень,

$$\Delta l_N = \frac{Nl}{EF}. \tag{5.60}$$

Подовження вільного стрижня внаслідок нагрівання визначимо так. На відстані x від кінця A стрижня виділимо елемент завдовжки dx. Вважатимемо, що в його межах підвищення температури $T(x)$ постійне. Температурне подовження цього елемента

$$\Delta dx_T = \alpha T(x) dx = \alpha\left(T_A + \frac{T_B - T_A}{l^n} x^n\right) dx. \tag{5.61}$$

Температурне подовження всього стрижня знайдемо, проінтегрувавши вираз (5.61) по довжині стрижня:

$$\Delta l_T = \int_0^l \alpha\left(T_A + \frac{T_B - T_A}{l^n} x^n\right) dx = \alpha l\left(T_A + \frac{T_B - T_A}{n+1}\right). \tag{5.62}$$

Повна зміна довжини стрижня

$$\Delta l = \Delta l_N + \Delta l_T = -\frac{Rl}{EF} + \alpha l\left(T_A + \frac{T_B + T_A}{n+1}\right). \tag{5.63}$$

Синтез. Підставивши вираз (5.63) у формулу (5.59), матимемо

$$-\frac{Rl}{EF} + \alpha l\left(T_A + \frac{T_B - T_A}{n+1}\right) = 0, \tag{5.64}$$

звідки знайдемо реакції опор

$$R = \alpha\left(T_A + \frac{T_B - T_A}{n+1}\right) EF \tag{5.65}$$

і напруження в стрижні

$$\sigma = \frac{N}{F} = -\frac{R}{F} = -\alpha\left(T_A + \frac{T_B + T_A}{n+1}\right) E. \tag{5.66}$$

При $n = 0$ дві останні формули переходять у формули для випадку рівномірного нагрівання стрижня по довжині на $\Delta T = T_B$:

$$R = \alpha \Delta T E F \quad \text{та} \quad \sigma = -\alpha E \Delta T.$$

Розглянемо числовий приклад. Визначимо осьову силу і напруження в сталевому стрижні, якщо $l = 80$ см, $F = 20$ см^2, $E = 2\cdot 10^5$ МПа, $\alpha = 125\cdot 10^{-7}$, $T_A = 10$ °C, $T_B = 55$ °C. Температура по довжині стрижня змінюється за законом параболи другого порядку $(n = 2)$.

Підставляючи числові значення у формули (5.65) і (5.66), знайдемо

$$N = -125\cdot 10^{-7}\left(10 + \frac{55 - 10}{3}\right) 2\cdot 10^5 \cdot 20\cdot 10^{-4} \text{ МН} = -125 \text{ кН};$$

$$\sigma = \frac{N}{F} = -\frac{125\cdot 10^{-3}}{20\cdot 10^{-4}} \text{ МПа} = -62{,}5 \text{ МПа}.$$

Зауважимо, що при зниженні температури в системі, яка подібна до зображеної на рис. 144, виникають розтягальні напруження.

На підставі розглянутих у параграфі прикладів можна зазначити такі особливості статично невизначуваних систем.

1. Розподіл зусиль між елементами статично невизначуваних конструкцій залежить від жорсткостей цих елементів. Якщо збільшити жорсткість якого-небудь із них, то він сприйме більше зусилля. Змінюючи

співвідношення жорсткостей елементів конструкції, можна як завгодно змінювати розподіл зусиль в них.

2. У статично невизначуваних конструкціях при зміні температури їхніх елементів порівняно з температурою, при якій конструкції складалися, виникають зусилля і напруження.

3. В елементах статично невизначуваних конструкцій можуть існувати зусилля і напруження, якщо немає зовнішнього навантаження. Ці зусилля і напруження, що їх називають початковими (монтажними), виникають при складанні конструкції. Початкові напруження або виникають внаслідок неточного виготовлення елементів конструкцій, або утворюються з певною метою (наприклад, затягування болтів, пресова посадка).

4. У статично невизначуваних конструкціях у загальному випадку в усіх елементах одночасно не можна дістати напруження, які дорівнюють допустимим. Це потрібно мати на увазі при проектуванні таких конструкцій.

§ 38. Розрахунок гнучких ниток

Абсолютно гнучкою називають нитку, яка здатна чинити опір тільки розтяганню. В поперечних перерізах таких ниток лише осьова розтягальна сила не дорівнює нулю. В інженерній практиці поширені системи, що з певним наближенням можна розглядати як гнучкі нитки. Це повітряні лінії електричних проводів, проводи телеграфних мереж, контактні проводи електрифікованих залізниць і трамваїв, ланцюги висячих мостів, троси канатних доріг та кабельних кранів тощо.

Точки підвішування нитки можуть бути на одному або різних рівнях (рис. 145).

При розрахунку на міцність довгих гнучких ниток, крім інших навантажень, істотне значення має їхня власна вага. Нехай вагому гнучку нитку однакового поперечного перерізу підвішено в двох точках на різних рівнях (рис. 145, *б*) або на одному рівні (рис. 145, *а*). Під дією власної ваги нитка провисає по деякій кривій.

Введемо такі позначення: l_1 — відстань між точками A та B підвішування нитки; l — прогін, що дорівнює горизонтальній проекції відстані l_1; h — різниця між рівнями точок підвішування нитки; f — віддалення

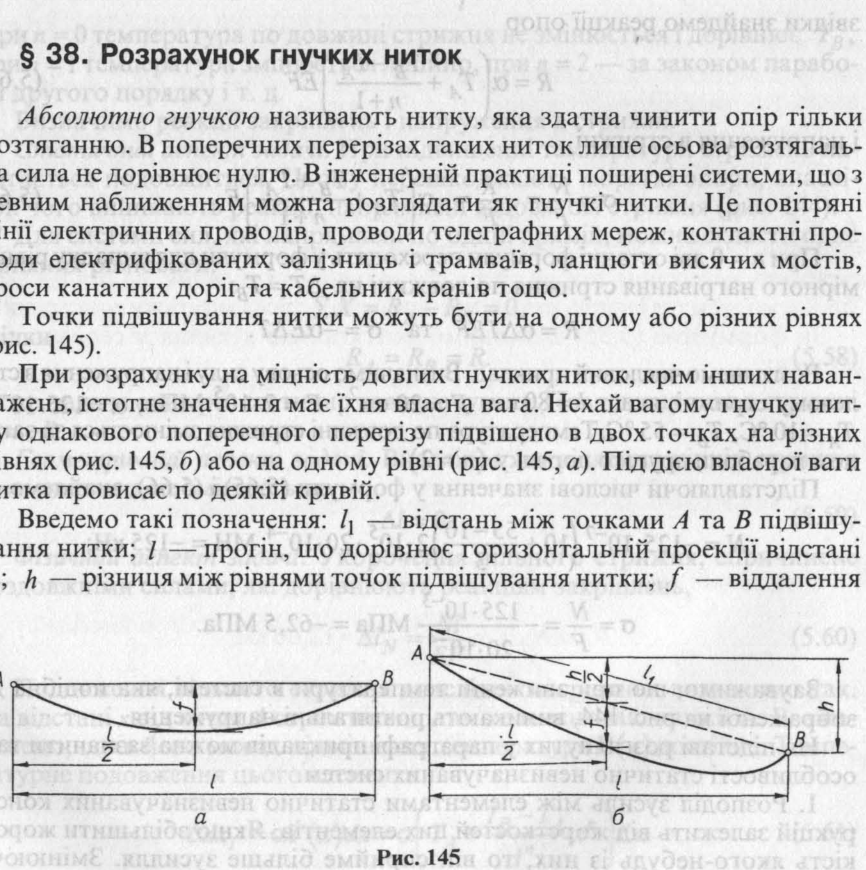


Рис. 145

нитки від прямої AB, що сполучає точки підвішування нитки, виміряне посередині прогону; L — довжина непідвішеної нитки; q — інтенсивність навантаження.

При підвішуванні нитки на одному рівні величина f є віддаленням найнижчої точки нитки від горизонтальної лінії AB і називається *стрілою провисання*. Навантаження q, крім власної ваги, може містити також вагу льоду при обмерзанні ниток, тиск вітру тощо. Ці навантаження вважають рівномірно розподіленими по довжині нитки.

Якщо навантаження становить власну вагу нитки (проводу), то його інтенсивність

$$q = q_п = \gamma F, \tag{5.67}$$

де $q_п$ — вага одиниці довжини проводу; γ — питома вага матеріалу; F — площа поперечного перерізу проводу.

При обмерзанні ниток (проводів)

$$q = q_п + q_л, \tag{5.68}$$

де $q_л$ — вага льоду на одиниці довжини нитки.

Товщину кірки льоду залежно від кліматичного району беруть 0,5...2,5 см.

Зазначені навантаження діють у вертикальній площині, а тиск вітру на нитку — в горизонтальній. Його інтенсивність $q_в$ визначають як добуток тиску вітру p на площу діаметрального перерізу одиниці довжини проводу:

$$q_в = pd,$$

або

$$q_в = k\alpha q_{шв} d, \tag{5.69}$$

де d — діаметр проводу з урахуванням його обмерзання; $k = 1,2$ — аеродинамічний коефіцієнт; $\alpha = 0,85$ — коефіцієнт нерівномірності вітру; $q_{шв}$ — швидкісний напір.

Виражаючи $q_{шв}$, Н/м, через швидкість вітру υ, маємо

$$q_в = 0,636\upsilon^2 d. \tag{5.70}$$

Тут υ — швидкість вітру, м/с; d — діаметр проводу, м.

Сумарну інтенсивність навантаження на нитку знаходимо як геометричну суму вертикального та горизонтального навантажень:

$$q = \sqrt{(q_п + q_л)^2 + q_в^2}. \tag{5.71}$$

Зазначимо, що площина дії сумарного навантаження, яка збігається з площиною провисання нитки, не буде вертикальною.

На практиці провисання нитки найчастіше буває невеликим — таким, що довжина нитки по кривій провисання мало відрізняється від довжини прогону (як правило, не більше ніж на 10 %). Обмежимося розглядом тільки таких пологих ниток. У цьому разі для спрощення розрахунків з достатньою точністю можна вважати, що навантаження, яке діє на підвішену нитку, рівномірно розподілене не по довжині нитки, а по довжині лінії AB, що з'єднує точки підвішування (рис. 146, *а*).

Для зручності розрахунків це навантаження $\tilde{q}$ заміняємо статично еквівалентним навантаженням q, розподіленим уздовж прогону l. Очевидно,

$$ql = \tilde{q}\, l_1,$$

звідки

$$q = \tilde{q}\frac{l_1}{l} = \frac{\tilde{q}}{\cos\beta}. \qquad (5.72)$$

Статичний аспект задачі. Розглянемо рівновагу нитки. На підставі припущення, що нитка абсолютно гнучка, напрями розтягальних сил у кожному поперечному перерізі мають збігатися з напрямом дотичної до кривої провисання нитки. В точках закріплення ці сили дорівнюють реакціям опор, які позначимо відповідно через T_A та T_B. Виберемо початок координат у лівій точці підвішування нитки і напрямимо осі координат так, як зображено на рис. 146, *а*.

Заміняючи реакції опор їхніми горизонтальними та вертикальними складовими, запишемо рівняння рівноваги нитки:

$$\sum X = -H_A + H_B = 0;$$

$$\sum Y = -R_A - R_B + ql = 0; \qquad (5.73)$$

$$\sum M_B = -H_A h + R_A l - ql^2/2 = 0.$$

Із цих рівнянь маємо

$$H_A = H_B = H; \qquad (5.74)$$

$$R_A = \frac{ql}{2} + H\frac{h}{l}; \qquad (5.75)$$

$$R_B = \frac{ql}{2} - H\frac{h}{l}. \qquad (5.76)$$

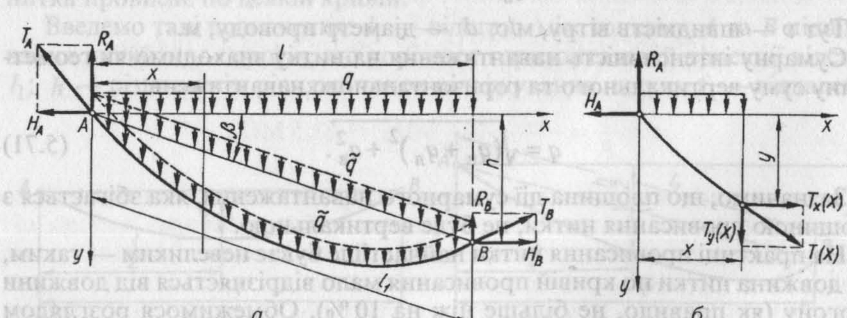


Рис. 146

Оскільки з трьох рівнянь рівноваги не можна визначити чотири невідомих (H_A, R_A, H_B та R_B), то задача є один раз статично невизначувана.

Розглянемо рівновагу частини нитки, відсіченої довільним перерізом (рис. 146, *б*):

$$\sum X = -H + T_x(x) = 0; \quad \sum Y = -R_A + qx + T_y(x) = 0.$$

Звідси, враховуючи формулу (5.75), маємо:

$$T_x(x) = H; \qquad (5.77)$$

$$T_y(x) = H\frac{h}{l} + q\left(\frac{l}{2} - x\right). \qquad (5.78)$$

Як видно з виразу (5.77), горизонтальна складова розтягального зусилля в будь-якому поперечному перерізі нитки постійна і дорівнює H. Зусилля H називають *горизонтальним натягом нитки.*

Отже, розтягальне зусилля в довільному перерізі нитки

$$T(x) = \sqrt{T_x^2(x) + T_y^2(x)} = \sqrt{H^2 + \left[H\frac{h}{l} + q\left(\frac{l}{2} - x\right)\right]^2}. \qquad (5.79)$$

Як бачимо, найбільше розтягальне зусилля $T_{\max}$ діє у найвищій точці підвішування нитки (при $x = 0$):

$$T_{\max} = \sqrt{H^2 + \left(\frac{ql}{2} + H\frac{h}{l}\right)^2}.$$

Для пологих ниток різниця між найбільшим розтягальним зусиллям, що діє у найвищій точці підвішування, та натягом H невелика. Тому з достатньою для практики точністю можна вважати, що розтягальне зусилля в нитці постійне і дорівнює натягу H. За цим зусиллям, як правило, і виконують розрахунок на міцність.

Знайдемо форму кривої провисання нитки. Для цього запишемо рівняння для згинального моменту в будь-якому перерізі (рис. 146, *б*). Оскільки нитка абсолютно гнучка, то в усіх її перерізах згинальний момент дорівнює нулю:

$$M(x) = R_A x - Hy - qx^2/2 = 0. \qquad (5.80)$$

Ураховуючи формулу (5.75), знаходимо

$$\left(\frac{ql}{2} + H\frac{h}{l}\right)x - Hy - \frac{qx^2}{2} = 0, \qquad (5.81)$$

звідки

$$y = \left(\frac{ql}{2H} + \frac{h}{l}\right)x - \frac{qx^2}{2H}, \qquad (5.82)$$

тобто крива провисання нитки визначається квадратичною параболою.

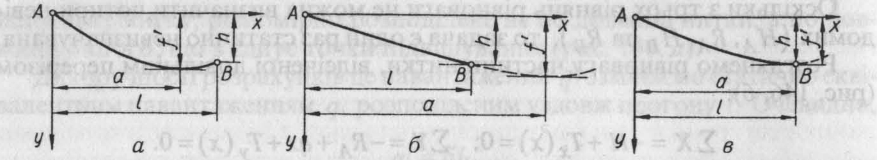


Рис. 147

Зазначимо, що коли задачу розв'язувати точно, вважаючи навантаження розподіленим рівномірно по довжині нитки, а не по прогону, то крива провисання нитки буде ланцюговою лінією. Формула (5.82) є першим членом розкладання ланцюгової лінії у ряд Маклорена за степенями x і дає достатнє наближення при розв'язуванні практичних задач.

Визначимо можливі положення найнижчої точки кривої провисання нитки. Координати цієї точки позначимо через $x = a$, $y = f'$ (рис. 147, *а*). У цій точці координата y має екстремальне значення. Для його визначення візьмемо похідну від виразу (5.82):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ql}{2H} + \frac{h}{l} - \frac{qx}{H} \tag{5.83}$$

і прирівняємо її до нуля:

$$\frac{ql}{2H} + \frac{h}{l} - \frac{qx}{H} = 0. \tag{5.84}$$

Звідси знаходимо значення абсциси, що визначає положення найнижчої точки:

$$x = a = \frac{l}{2} + \frac{Hh}{ql}. \tag{5.85}$$

Найнижча точка кривої провисання нитки завжди розміщена ближче до найнижчої точки підвішування.

Підставляючи вираз (5.85) у формулу (5.82), знайдемо екстремальне значення ординати, тобто найбільше провисання нитки:

$$y_{\max} = f' = \frac{ql^2}{8H} + \frac{Hh^2}{2ql^2} + \frac{h}{2}. \tag{5.86}$$

Будемо розрізняти три характерних випадки розміщення найнижчої точки кривої провисання нитки:

1. Найнижча точка кривої провисання розміщена в межах прогону, тобто $a < l$ (рис. 147, *а*). Згідно з виразом (5.85), це відбувається, якщо

$$H < \frac{ql^2}{2h}. \tag{5.87}$$

2. Найнижча точка кривої провисання лежить за межами прогону, тобто $a > l$ (рис. 147, *б*). Це буде за умови, що

$$H > \frac{ql^2}{2h}. \tag{5.88}$$

3. Найнижча точка кривої збігається з найнижчою точкою підвішування, тобто $a = l$ (рис. 147, *в*). Необхідна умова для цього

$$H = \frac{ql^2}{2h}. \tag{5.89}$$

У всіх трьох прикладах координати a та f' найнижчої точки визначаються за формулами (5.85) і (5.86).

Установимо залежність між горизонтальним натягом H і величиною f. Посередині прогону $x = l/2$, а $y = h/2 + f$ (див. рис. 145, *б*). Підставивши ці значення координат у формулу (5.82), дістанемо

$$f = \frac{ql^2}{8H}, \tag{5.90}$$

або

$$H = \frac{ql^2}{8f}. \tag{5.91}$$

Виразимо натяг нитки H через найбільше провисання f'. Із формули (5.86), розв'язуючи квадратне рівняння відносно натягу H, матимемо

$$H = \frac{ql^2}{h^2}\left[f' - \frac{h}{2} \pm \sqrt{f'(f'-h)}\right]. \tag{5.92}$$

Якщо найнижча точка кривої провисання перебуває в межах прогону, то перед коренем беремо знак «мінус», якщо за межами прогону — знак «плюс», бо, як видно з виразів (5.87) та (5.88), у першому випадку натяг H менший, ніж у другому.

Геометричний аспект задачі. Установимо зв'язок між довжиною підвішеної нитки, прогоном та величиною f, яка характеризує провисання нитки.

Довжина елемента кривої, як відомо,

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2} dx.$$

Для пологої нитки величина $(dy/dx)^2$ мала порівняно з одиницею. Розкладаючи вираз $\left[1 + (dy/dx)^2\right]^{1/2}$ у ряд за формулою бінома Ньютона і обмежуючись першими двома членами розкладання, дістанемо

$$dS = \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] dx. \tag{5.93}$$

Підставляючи сюди dy/dx із виразу (5.83) та інтегруючи по всій довжині прогону, матимемо

$$S = \int_0^l \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{ql}{2H} + \frac{h}{l} - \frac{qx}{H}\right)^2\right] dx = l + \frac{q^2 l^3}{24H^2} + \frac{h^2}{2l}. \tag{5.94}$$

Підставляючи з формули (5.91) $H = ql^2/8f$, дістанемо

$$S = l + \frac{8}{3}\frac{f^2}{l} + \frac{h^2}{2l}. \tag{5.95}$$

З геометричних міркувань подовження ΔS нитки завдовжки L після підвішування

$$\Delta S = S - L = l + \frac{q^2 l^3}{24H^2} + \frac{h^2}{2l} - L. \tag{5.96}$$

Фізичний аспект задачі. Установимо також фізичні залежності, які виражають зміну довжини нитки від розтягального зусилля та від зміни температури. Як зазначалося, для пологих ниток розтягальне зусилля можна взяти таким, що дорівнює натягу H. При визначенні подовжень довжину нитки замінимо довжиною l_1, що достатньо точно, коли провисання мале. Тоді пружне подовження від розтягання

$$\Delta S_H = \frac{Hl_1}{EF} = \frac{Hl}{EF\cos\beta}. \tag{5.97}$$

Температурне подовження нитки визначається за формулою

$$\Delta S_T = \alpha l_1 (T - T_0) = \frac{\alpha l}{\cos\beta}(T - T_0), \tag{5.98}$$

де T_0 — температура в момент підвішування нитки; T — температура, для якої виконується розрахунок нитки.

Сумарна зміна початкової довжини нитки

$$\Delta S = \Delta S_H + \Delta S_T = \frac{Hl}{EF\cos\beta} + \frac{\alpha l}{\cos\beta}(T - T_0). \tag{5.99}$$

Формули (5.96) та (5.99) визначають одну і ту саму величину — подовження підвішеної нитки. Прирівнявши праві частини цих рівнянь, знайдемо, що

$$L = l + \frac{q^2 l^3}{24H^2} + \frac{h^2}{2l} - \frac{Hl}{EF\cos\beta} - \frac{\alpha l}{\cos\beta}(T - T_0). \tag{5.100}$$

Рівняння (5.100) разом із статичним рівнянням (5.90) дає змогу визначити натяг нитки H та стрілу провисання f.

Визначивши з рівняння (5.100) натяг нитки H, можемо за формулою (5.79) знайти розтягальне зусилля в довільному перерізі нитки, а отже, і $T_{\max}$. Знаючи максимальне розтягальне зусилля, можна перевірити міцність нитки:

$$\sigma = T_{\max}/F \approx H/F \le [\sigma];$$

враховуючи формулу (5.91), дістанемо

$$\sigma = \frac{ql^2}{8fF} \le [\sigma]. \tag{5.101}$$

Введемо позначення

$$\tilde{\gamma} = q/F.$$

Цю величину $\tilde{\gamma}$, що є відношенням інтенсивності лінійного навантаження до площі поперечного перерізу, називають *питомим навантаженням*. Якщо діє тільки власна вага, питоме навантаження збігається з питомою вагою матеріалу нитки.

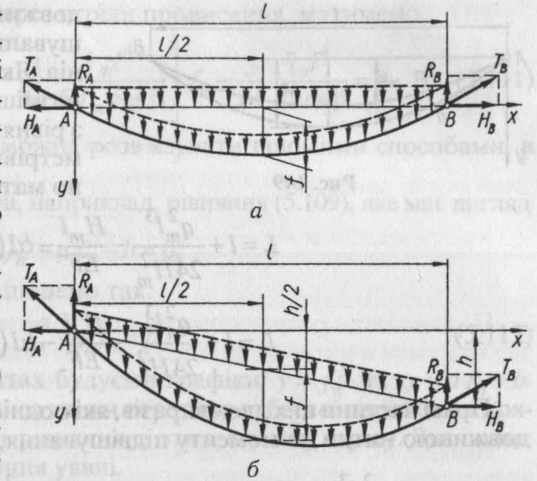


Рис. 148

Ураховуючи сказане, умову міцності можна записати у вигляді

$$\sigma = \frac{\tilde{\gamma} l^2}{8f} \le [\sigma]. \tag{5.102}$$

Зауважимо, що при розрахунку електричних проводів переріз нитки визначають з електротехнічних міркувань, після чого вже виконують перевірний розрахунок на міцність.

Наведемо розрахункові формули для випадку нитки з точками підвішування, які розміщені на одному рівні (рис. 148, *а*), тобто при $\cos\beta = 1$. Таке буває дуже часто.

При такому підвішуванні $h = 0$, реакції в точках підвішування однакові: $R_A = R_B = ql/2$, найбільше провисання f буде посередині прогону. Воно пов'язане з натягом формулами (5.90) та (5.91):

$$f = \frac{ql^2}{8H}; \quad H = \frac{ql^2}{8f}. \tag{5.103}$$

Рівняння сумісності деформацій (5.100) набирає вигляду

$$L = l + \frac{q^2 l^3}{24H^2} - \frac{Hl}{EF} - \alpha l (T - T_0). \tag{5.104}$$

Вплив зміни температури і навантаження на напруження та стрілу провисання нитки. В процесі експлуатації нитка може зазнавати дії різних навантажень та температур. З'ясуємо, як змінюються напруження та стріла провисання нитки при зміні цих факторів. Для цього розглянемо два стани нитки: m-й і n-й (рис. 149).

Нехай у m-му стані температура дорівнює T_m, лінійне навантаження — q_m, а стріла провисання — f_m; при цьому натяг $H_m = q_m l^2/8f_m$, а напруження в нитці $\sigma_m = H_m/F$.

При зміні температури та навантаження в n-му стані до значень T_n та q_n стріла провисання стане f_n, натяг $H_n = q_n l^2/8f_n$, а напруження $\sigma_n = H_n/F$.

Установимо залежність між напруженням та стрілами провисання нитки для цих двох станів. Задачу легко розв'язати, якщо записати вираз для

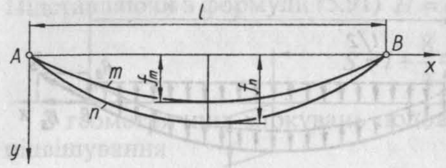


Рис. 149

довжини нитки L до моменту підвішування через параметри обох станів. Якщо точки підвішування нитки розміщені на одному рівні, то, згідно з рівнянням (5.104), виходячи з параметрів m-го та n-го станів, відповідно матимемо

$$L = l + \frac{q_m^2 l^3}{24H_m^2} - \frac{H_m l}{EF} - \alpha l\left(T_m - T_0\right); \tag{5.105}$$

$$L = l + \frac{q_n^2 l^3}{24H_n^2} - \frac{H_n l}{EF} - \alpha l\left(T_n - T_0\right). \tag{5.106}$$

Праві частини цих двох виразів, які є однією і тією самою величиною — довжиною нитки до моменту підвішування, однакові. Отже,

$$l + \frac{q_m^2 l^3}{24H_m^2} - \frac{H_m l}{EF} - \alpha l\left(T_m - T_0\right) = l + \frac{q_n^2 l^3}{24H_n^2} - \frac{H_n l}{EF} - \alpha l\left(T_n - T_0\right).$$

Звідси, позначивши $q_m / F = \tilde{\gamma}_m$; $q_n / F = \tilde{\gamma}_n$ та враховуючи, що $H_m / F = \sigma_m$; $H_n / F = \sigma_n$, знаходимо

$$\sigma_n - \frac{\tilde{\gamma}_n^2 l^2 E}{24\sigma_n^2} = \sigma_m - \frac{\tilde{\gamma}_m^2 l^2 E}{24\sigma_m^2} + \alpha E\left(T_m - T_n\right). \tag{5.107}$$

Цю залежність іноді називають *рівнянням стану нитки*. Його можна записати також у вигляді

$$\sigma_n^3 - \left[\sigma_m - \frac{\tilde{\gamma}_m^2 l^2 E}{24\sigma_m^2} - \alpha E\left(T_n - T_m\right)\right]\sigma_n^2 - \frac{\tilde{\gamma}_n^2 l^2 E}{24} = 0. \tag{5.108}$$

Якщо виразити напруження через стріли провисання:

$$\sigma_m = \frac{\tilde{\gamma}_m l^2}{8 f_m}; \quad \sigma_n = \frac{\tilde{\gamma}_n l^2}{8 f_n},$$

то рівняння (5.108) можна записати так:

$$f_n^3 - \left[f_m^2 + \frac{3}{8}\alpha l^2\left(T_n - T_m\right) - \frac{3}{64}\frac{\tilde{\gamma}_m l^4}{E f_m}\right] f_n - \frac{3}{64}\frac{\tilde{\gamma}_n l^4}{E} = 0. \tag{5.109}$$

Щоб дістати рівняння стану для ниток, підвішених на різних рівнях (рис. 148, *б*), як вихідну формулу для довжини L беремо формулу (5.100). Тоді рівняння стану (5.107) набирає вигляду

$$\sigma_n - \frac{\tilde{\gamma}_n^2 l^2 E\cos\beta}{24\sigma_n^2} = \sigma_m - \frac{\tilde{\gamma}_m^2 l^2 E\cos\beta}{24\sigma_m^2} + \alpha E\left(T_m - T_n\right). \tag{5.110}$$

Виразивши напруження через стріли провисання, матимемо

$$f_n^3 - \left[f_m^2 + \frac{3}{8}\alpha l^2 \frac{\left(T_n - T_m\right)}{\cos\beta} - \frac{3}{64}\frac{\tilde{\gamma}_m l^4}{E f_m \cos\beta}\right] f_n - \frac{3}{64}\frac{\tilde{\gamma}_n l^4}{E\cos\beta} = 0. \tag{5.111}$$

Здобуті кубічні рівняння можна розв'язувати відомими способами, в тому числі й графічним.

При графічному розв'язанні, наприклад, рівняння (5.109), яке має вигляд

$$f_n^3 - a f_n - b = 0,$$

де a та b — відомі числа, запишемо так:

$$f_n^3 = a f_n + b. \tag{5.112}$$

У прямокутних координатах будуємо графіки $y = f_n^3$ та $y = a f_n + b$ (рис. 150). Очевидно, що абсциса точки перетину кубічної параболи з прямою лінією дає дійсний корінь рівняння, а отже, шукану стрілу. Два інших корені цього кубічного рівняння уявні.

Поняття про критичний прогін. Установимо, при якому стані нитки в ній діє найбільше напруження. Це можливо:

а) при найбільшому навантаженні (ожеледь та помірний вітер або сильний вітер без ожеледі);

б) при найнижчій температурі без ожеледі.

Оскільки найбільше навантаження та найнижча температура у часі не збігаються, то для розрахунку важко визначити, який з цих станів буде небезпечним. З'ясуємо вплив навантаження та температури на напруження залежно від довжини прогону нитки.

Виходимо з рівняння стану (5.107). У разі дуже малих прогонів, поклавши в цьому рівнянні $l = 0$, знайдемо, що

$$\sigma_n = \sigma_m + \alpha E\left(T_m - T_n\right),$$

тобто при малих прогонах зміна напруження залежить здебільшого від температури. Зі зменшенням температури T_n напруження σ_n зростають, і найбільше напруження в нитці буде при найнижчій температурі.

Розглянемо тепер приклад дуже великих прогонів. Поділивши рівняння (5.107) на l^2 та поклавши $l \to \infty$, матимемо

$$\sigma_n = \frac{\tilde{\gamma}_n}{\tilde{\gamma}_m}\sigma_m.$$

Отже, якщо прогони великі, то зміна напруження залежить в основному від навантаження на нитку. Найбільші напруження будуть діяти при максимальних навантаженнях.

Знайдемо таку довжину прогону, при якій напруження в нитці однакові в обох небезпечних станах, тобто як при найбільшому навантаженні, так і при найнижчій температурі. Такий прогін називають *критичним* $\left(l_{кр}\right)$.

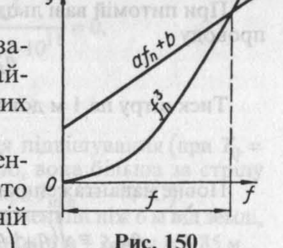


Рис. 150

Нехай T_n відповідає температурі ожеледі, тобто $T_n = T_{ож}$ (як правило, $T_{ож} = -5\ °C$), при цьому $\tilde{\gamma}_n = \tilde{\gamma}_{max}$; T_m відповідає найнижчій температурі, тобто $T_m = T_{min}$; у цьому разі на нитку діє тільки власна вага, отже, $\tilde{\gamma}_m = \tilde{\gamma}_1$.

При $l = l_{кр}$, згідно з означенням,

$$\sigma_n = \sigma_m = [\sigma].$$

Вносячи ці дані у формулу (5.107), знаходимо

$$l_{кр} = [\sigma]\sqrt{\frac{24\alpha(T_{ож} - T_{min})}{\tilde{\gamma}^2_{max} - \tilde{\gamma}^2_1}}. \qquad (5.113)$$

Порівнюючи розрахунковий прогін з критичним, можна встановити, за яких умов в нитці діє найбільше напруження. Так, якщо $l < l_{кр}$, то найбільше напруження буде при найнижчій температурі; якщо $l > l_{кр}$, то небезпечний стан буде при найбільшому навантаженні.

Приклад 14. *Багатожильний мідний провід перерізом $F = 120$ мм² підвішують при температурі $T_0 = 15\ °C$ до опор, які розміщені на одному рівні на відстані $l = 100$ м. Визначимо: а) яку стрілу провисання f_0 потрібно надати проводу, щоб напруження в найбільш небезпечному стані дорівнювало допустимому; б) висоту точок підвішування проводу, щоб відстань його найнижчої точки від землі була не менша за 6 м.*

Розрахунок проводу виконаємо для таких випадків:

1) температура $T_{ож} = -5\ °C$; при цьому провід, крім власної ваги, навантажений шаром льоду завтовшки 1 см (ожеледь), а також горизонтальним тиском вітру $p = 240$ Па;

2) температура $T_{min} = -40\ °C$; діє тільки власна вага проводу;

3) температура $T_{max} = +40\ °C$; діє тільки власна вага проводу.

Перші два випадки можуть бути небезпечними з погляду міцності проводу. У третьому випадку може утворитися найбільша стріла провисання, за якою потрібно визначити мінімальну висоту точок підвішування проводу.

Згідно з сортаментом проводів, багатожильний мідний провід перерізом $F = 120\ мм^2$ має діаметр $d = 14{,}2$ мм та вагу одиниці довжини $q_п = 10{,}9$ Н/м. Модуль пружності матеріалу проводу $E = 1{,}3 \cdot 10^{11}$ Па, коефіцієнт лінійного температурного розширення $\alpha = 17 \cdot 10^{-6}\ °C^{-1}$. Допустиме напруження для проводу $[\sigma] = 80$ МПа.

Знайдемо навантаження q_{max} у першому випадку. Для визначення ваги льоду треба знайти внутрішній та зовнішній діаметри льодового покриття. Внутрішній діаметр дорівнює діаметру проводу, тобто $d = 1{,}42$ см; зовнішній діаметр D при товщині льодової оболонки 1 см буде $D = 3{,}42$ см. Площа поперечного перерізу льодового покриття проводу

$$F_л = \frac{\pi\left(D^2 - d^2\right)}{4} = \frac{3{,}14\left(3{,}42^2 - 1{,}42^2\right)}{4}\ см^2 = 7{,}6\ см^2.$$

При питомій вазі льоду $\gamma_л = 9 \cdot 10^3$ Н/м³ навантаження від льоду на 1 м довжини проводу

$$q_л = \gamma_л F_л = \frac{9 \cdot 10^3 \cdot 7{,}6}{10^4}\ Н/м = 6{,}84\ Н/м.$$

Тиск вітру на 1 м довжини проводу з льодовим покриттям

$$q_в = pD = \frac{240 \cdot 3{,}42}{100}\ Н/м = 8{,}21\ Н/м.$$

Повне навантаження на 1 м довжини обмерзлого проводу

$$q_{max} = \sqrt{(q_п + q_л)^2 + q_в^2} = \sqrt{(10{,}9 + 6{,}84)^2 + 8{,}21^2}\ Н/м = 19{,}6\ Н/м.$$

З'ясуємо, в якому із перших двох станів проводу напруження в ньому будуть більшими. Для цього знаходимо

$$\tilde{\gamma}_{max} = \frac{q_{max}}{F} = \frac{19{,}6}{1{,}2 \cdot 10^{-4}}\ Н/м^3 = 16{,}3 \cdot 10^4\ Н/м^3;$$

$$\tilde{\gamma}_1 = \frac{10{,}9}{1{,}2 \cdot 10^{-4}}\ Н/м^3 = 9{,}08 \cdot 10^4\ Н/м^3.$$

За формулою (5.113) визначаємо довжину критичного прогону:

$$l_{кр} = [\sigma]\sqrt{\frac{24\alpha(T_{ож} - T_{min})}{\tilde{\gamma}^2_{max} - \tilde{\gamma}^2_1}} = 80 \cdot 10^6 \sqrt{\frac{24 \cdot 17 \cdot 10^{-6}[-5 - (-40)]}{\left(16{,}3^2 - 9{,}08^2\right)10^8}}\ м = 70{,}6\ м \approx 71\ м.$$

Оскільки дійсна довжина прогону $l = 100$ м більша, ніж довжина критичного прогону, то найбільше напруження у проводі σ_{max} буде при максимальному навантаженні ($q_{max} = 19{,}6$ Н/м і $T_{ож} = -5\ °C$), тобто в першому стані. Взявши $\sigma_{max} = [\sigma]$, знайдемо стрілу провисання проводу в цьому стані:

$$f_1 = \frac{q_{max} l^2}{8F[\sigma]} = \frac{19{,}6 \cdot 100^2}{8 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-4} \cdot 80 \cdot 10^6}\ м = 2{,}54\ м.$$

Визначимо, яку стрілу провисання потрібно надати проводу при підвішуванні. Для цього скористаємося залежністю (5.109), взявши $q_m = q_{max} = 19{,}6$ Н/м; $f_m = f_1 = 2{,}54$ м; $T_m = T_{ож} = -5\ °C$; $q_n = q_п = 10{,}9$ Н/м; $T_n = T_0 = 15\ °C$; $f_n = f_0$.

Підставивши числові значення в рівняння (5.109), дістанемо

$$f_0^3 - \left[2{,}54^2 + \frac{3}{8}17 \cdot 10^{-6} \cdot 100^2(15 + 5) - \frac{3 \cdot 19{,}6 \cdot 100^4}{64 \cdot 2{,}54 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}3 \cdot 10^{11}}\right] f_0 - \frac{3 \cdot 10{,}9 \cdot 100^4}{64 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}3 \cdot 10^{11}} = 0.$$

Виконавши розрахунки, маємо

$$f_0^3 - 5{,}41 f_0 - 3{,}28 = 0.$$

Розв'язавши рівняння, знайдемо

$$f_0 = 2{,}58\ м.$$

Визначимо тепер стрілу провисання проводу при $T_{max} = 40\ °C$. Для цього також скористаємося залежністю (5.109), взявши $q_m = q_п = 10{,}9$ Н/м; $f_m = f_0 = 2{,}58$ м. $T_m = T_0 = 15\ °C$; $q_n = q_п = 10{,}9$ Н/м; $T_n = T_{max} = 40\ °C$; $f_n = f_3$.

Підставивши числові значення, матимемо

$$f_3^3 - \left[2{,}58^2 + \frac{3}{8}17 \cdot 10^{-6} \cdot 100^2(40 - 15) - \frac{3 \cdot 10{,}9 \cdot 100^4}{64 \cdot 2{,}58 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}3 \cdot 10^{11}}\right] f_3 - \frac{3 \cdot 10{,}9 \cdot 100^4}{64 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}3 \cdot 10^{11}} = 0,$$

або

$$f_3^3 - 7 f_3 - 3{,}28 = 0,$$

звідки знаходимо, що $f_3 = 2{,}85$ м.

Стріла провисання в третьому стані більша, ніж після підвішування (при $T_0 = 15\ °C$), а також більша, ніж у першому випадку. Очевидно, вона більша за стрілу провисання, яку матиме провід також у другому випадку (при $T_{min} = -40\ °C$).

Для того щоб найнижча точка проводу була на відстані не меншій ніж 6 м від землі, потрібно, щоб точки підвішування розміщувалися не нижче ніж $6\ м + 2{,}85\ м = 8{,}85$ м.

Розділ 6 ОСНОВИ ТЕОРІЇ НАПРУЖЕНОГО І ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ

§ 39. Напруження в точці

Напруження є наслідком взаємодії частинок тіла при його навантажуванні. Зовнішні сили намагаються змінити взаємне розміщення частинок, а напруження, що виникають при цьому, перешкоджають зміщенню частинок, обмежуючи його здебільшого деякою малою величиною.

Відповідно до гіпотези про суцільність матеріалу слід вважати, що кожну частинку тіла в скільки завгодно малому околі в усіх напрямах оточують безліч інших частинок. Розміщена в даній точці частинка порізному взаємодіє з кожною із цих сусідніх частинок. Тому в одній і тій самій точці в різних напрямах напруження різні, і тільки дуже рідко трапляється, коли вони однакові в усіх напрямах.

Досліджуючи напружений стан тіла в даній точці A, поблизу неї, як правило, виділяють елемент об'єму у вигляді нескінченно малого паралелепіпеда (рис. 151, *а*), який у збільшеному масштабі зображено на рис. 151, *б*, де початок координат суміщено з точкою A, а координатні осі напрямлено вздовж відповідних ребер, так що грані паралелепіпеда перпендикулярні до напрямів декартових осей x, y, z. До цих граней прикладені внутрішні сили, які замінюють дію відкинутої частини тіла. Позначимо повні напруження на гранях елемента через p_x, p_y, p_z. Тут індекси означають нормалі до площадок, на яких діють напруження. Внаслідок малості виділеного елемента можна вважати, що напруження на кожній його грані розподілені рівномірно. Повні напруження на гранях елемента зображують у

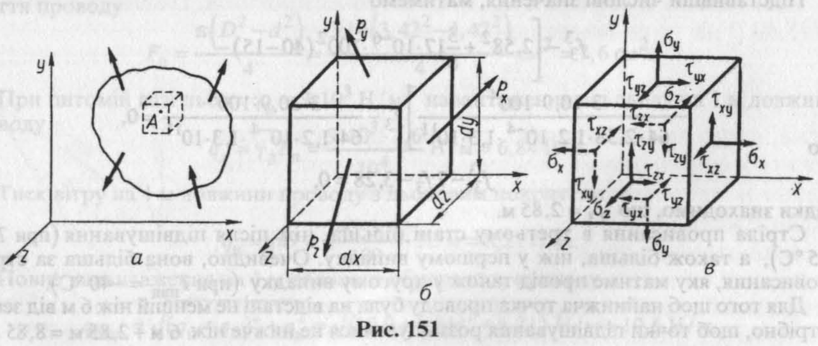


Рис. 151

вигляді нормальних та дотичних складових — проекцій повних напружень на координатні осі (рис. 151, *в*).

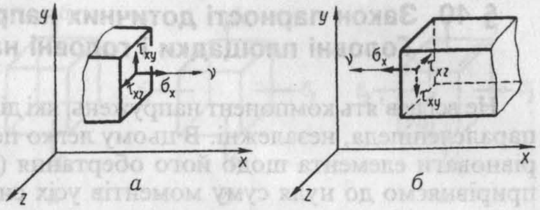


Рис. 152

Нормальні напруження позначають літерою σ з індексом, що відповідає напряму нормалі до площадки, на якій вони діють. Дотичні напруження позначають літерою τ з двома індексами: перший відповідає напряму нормалі до площини, а другий — напряму самого напруження. Так, на площадці, перпендикулярній до осі x, діють напруження σ_x, τ_{xy} та τ_{xz}; на площадках, перпендикулярних до осей y та z, відповідно маємо σ_y, τ_{yx}, τ_{yz}, σ_x, τ_{zx}, τ_{zy} (рис. 151, *в*).

Отже, на гранях елементарного паралелепіпеда, виділеного в околі точки навантаженого тіла, діють дев'ять компонент напружень. Запишемо їх у вигляді такої квадратної матриці:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix},$$

де в першому, другому та третьому рядках наведено складові напружень відповідно на площадках, перпендикулярних до осей x, y, z. Цю сукупність напружень називають *тензором напружень*.

Далі буде показано, що коли відомий тензор напружень, тобто сукупність напружень на трьох взаємно перпендикулярних площадках, то можна визначити напруження на будь-яких площадках, проведених в околі точки.

Введемо правило знаків для компонент напружень. Нормальні напруження, як уже зазначалося в розд. 4, вважаємо додатними, якщо вони спричинюють розтягання, та від'ємними, — якщо стискання.

Нехай напрям зовнішньої нормалі ν до площадки збігається з додатним напрямом будь-якої координатної осі (рис. 152, *а*). Тоді додатне нормальне напруження на цій площадці (на рисунку це σ_x) також збігається з додатним напрямом координатної осі. Дотичні напруження на такій площадці вважаються додатними, якщо вони напрямлені в бік відповідних додатних напрямів координатних осей. Якщо зовнішня нормаль до площадки збігається з від'ємним напрямом координатних осей (рис. 152, *б*), всі три складові напруження на площадці вважаються додатними, коли вони напрямлені в бік від'ємних напрямів відповідних координатних осей.

Отже, за цим правилом, компоненти напружень на рис. 152, *а*, *б* додатні. Зазначимо також, що всі напруження на гранях елемента, зображеного на рис. 151, *в* в осях x, y, z, додатні.

§ 40. Закон парності дотичних напружень. Головні площадки і головні напруження

Не всі дев'ять компонент напружень, які діють на гранях елементарного паралелепіпеда, незалежні. В цьому легко переконатися, склавши умови рівноваги елемента щодо його обертання (див. рис. 151, *в*). Для цього прирівняємо до нуля суму моментів усіх сил, що прикладені до граней елемента, відносно осей *x*, *y*, *z*:

$$\sum M_x = 0; \quad \sum M_y = 0; \quad \sum M_z = 0.$$

Складемо рівняння моментів відносно осі z. Сили, які паралельні цій осі і перетинають її, в рівняння не увійдуть. Моменти сил $\sigma_x dydz$ на двох гранях, перпендикулярних до осі z, зрівноважуються, так само як і моменти сил $\sigma_y dxdz$ на верхній та нижній гранях елемента. Отже, маємо $\tau_{xy} dydzdx - \tau_{yx} dxdzdy = 0$. Звідси випливає, що

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

Аналогічно з двох інших рівнянь знаходимо

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}.$$

Отже, маємо рівності

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tag{6.1}$$

які виражають *закон парності дотичних напружень: дотичні напруження на двох будь-яких, але взаємно перпендикулярних площадках, які напрямлені перпендикулярно до лінії перетину площадок, однакові за модулем і намагаються повернути елемент у різні боки.* Отже, завдяки властивості парності дотичних напружень кількість незалежних компонент напружень у кожній точці тіла зменшується з дев'яти до шести.

При зміні орієнтації граней виділеного елемента змінюються також напруження, що діють на його гранях. При цьому можна провести такі площадки, на яких дотичні напруження дорівнюватимуть нулю. Площадки, на яких дотичних напружень немає, називають *головними площадками*, а нормальні напруження, що діють на цих площадках, — *головними напруженнями*. В § 45 буде показано: як би не було завантажене тіло, в кожній його точці є принаймні три головні площадки, причому вони взаємно перпендикулярні. Отже, в кожній точці можуть діяти також три головних напруження, і вони теж взаємно перпендикулярні. Напрями, паралельні головним напруженням, називають *головними напрямами напружень* або *головними осями в даній точці*.

Головні напруження домовимося позначати $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. При цьому індекси слід розставляти так, щоб виконувалася нерівність

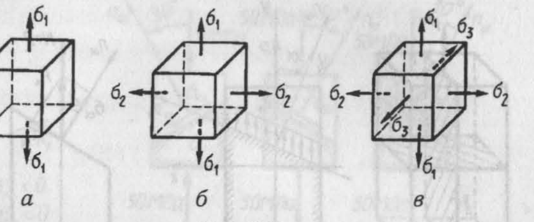
$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3. \tag{6.2}$$

Ця нерівність має алгебраїчний зміст. Тому якщо, наприклад, одне з головних напружень дорівнює нулю, друге (розтягальне) становить 60 МПа, третє (стискальне) дорівнює –140 МПа, то їх позначають так:

$$\sigma_1 = 60 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = 0;$$

$$\sigma_3 = -140 \text{ МПа}.$$

Отже, в точках навантаженого тіла можна виділити елементарні паралелепіпеди, на гранях яких діють тільки нормальні — головні — напруження.



а *б* *в*

Рис. 153

Напружений стан, в якому тільки одне головне напруження не є нульовим, а два інших дорівнюють нулю, називається *одновісним* або *лінійним* (рис. 153, *а*). Якщо два головних напруження не є нульовими, а одне дорівнює нулю, то такий напружений стан називається *двовісним* або *плоским* (рис. 153, *б*). Якщо всі три головних напруження не дорівнюють нулю, маємо *тривісний* або *об'ємний, напружений стан* (рис. 153, *в*).

Крім того, розрізняють *однорідний* та *неоднорідний напружені стани*. В однорідному напруженому стані напруження однакові в кожній точці будь-якого перерізу і всіх паралельних йому перерізів. При однорідному напруженому стані розміри виділених елементів не мають значення, оскільки напруження однакові в усіх точках однієї (будь-якої) грані, а отже, рівномірно розподілені по кожній грані.

У неоднорідному напруженому стані елемент слід вважати нескінченно малим. Тоді припущення про рівномірність розподілу напружень по його гранях виконується з точністю до малих другого порядку.

Отже, незалежно від того, однорідний чи неоднорідний напружений стан буде в усьому тілі, виділені елементи розглядаємо як такі, що перебувають в однорідному напруженому стані.

При розрахунку елементів конструкцій на міцність визначають екстремальні значення нормальних та дотичних напружень в точках навантаженого тіла, а також положення площадок, на яких вони діють. Розв'язуючи таку задачу, вважають, що напруження на гранях паралелепіпеда, виділеного в точці, відомі й слід знайти напруження на будь-яких площадках, проведених в околі точки. Задача легко розв'язується з розгляду рівноваги частини паралелепіпеда, відсіченої даною площадкою. Найпростіше розв'язати поставлену задачу, якщо вихідний елемент виділений головними площадками, а вихідними є головні напруження.

§ 41. Лінійний напружений стан

Елементи, які перебувають в лінійному напруженому стані, можна виділити в околі деяких точок стрижня, що працює на згинання або складний опір, проте здебільшого на розтягання чи стискання.

Розглянемо призматичний стрижень, який зазнає простого розтягання силою *P* (рис. 154, *а*). В перерізах стрижня, досить віддалених від точок прикладання зовнішніх зосереджених сил, напруження розподіляються рівномірно. В поперечних перерізах (довільної форми) нормальні напруження (див. § 27)

$$\sigma_0 = N / F_0 = P / F_0.$$

Дотичні напруження тут дорівнюють нулю. Отже, ці перерізи є головними площадками.

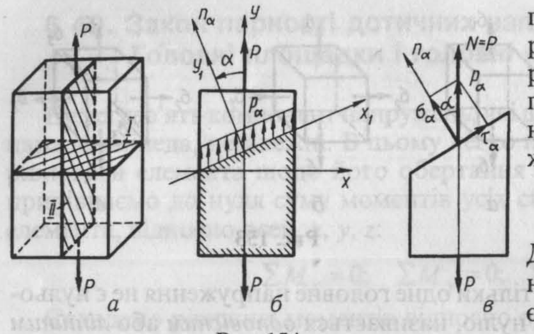


Рис. 154

Перейдемо тепер до визначення напружень у неголовних, похилих площадках. Відтак стрижень, що перебуває в лінійному (а також у плоскому) напруженому стані, будемо зображати у вигляді плоскої фігури (рис. 154, *б*).

Припустимо, що зовнішня нормаль n_α до похилої площадки утворює з віссю стрижня (а отже, і з лінією дії прикладеної сили) кут α. Домовимося, що кут α додатний, якщо він відкладається проти годинникової стрілки. Очевидно, такий самий кут α утворює похила площадка з поперечним перерізом стрижня, тобто головною площадкою F_0. Проведемо також похилі осі x_1, y_1, напрямляючи вісь y_1 по нормалі до площадки, а вісь x_1 — уздовж площадки.

Проведену таким чином похилу площадку будемо називати α-площадкою, а повні, нормальні та дотичні напруження, що діють на ній, відповідно позначати $p_\alpha, \sigma_\alpha, \tau_\alpha$. Для визначення цих напружень застосуємо метод перерізів. Вважаючи, що похила площадка розсікла стрижень на дві частини, відкинемо одну з них, наприклад верхню, й розглянемо рівновагу частини, що залишилася (нижньої).

Осьова сила в перерізі $N = P$ є рівнодійною повних напружень p_α. Вважаємо, що вони напрямлені паралельно осьовій лінії й рівномірно розподілені в точках проведеного похилого перерізу, площа якого

$$F_\alpha = F_0 / \cos\alpha.$$

Отже,

$$p_\alpha F_\alpha = N,$$

звідки

$$p_\alpha = \frac{N}{F_\alpha} = \frac{N}{F_0}\cos\alpha + \sigma_0 \cos\alpha. \qquad (6.3)$$

Проекціюючи p_α на нормаль n_α і площину перерізу, дістанемо формули для визначення нормальних і дотичних напружень, які діють на похилій площадці (рис. 154, *в*):

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cos\alpha; \quad \tau_\alpha = p_\alpha \sin\alpha, \qquad (6.4)$$

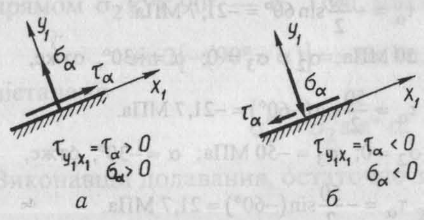


Рис. 155

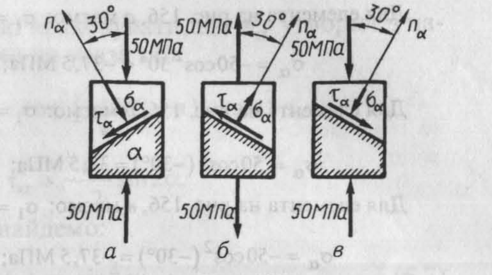


Рис. 156

або, враховуючи (6.3),

$$\sigma_\alpha = \sigma_0 \cos^2\alpha; \qquad (6.5)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_0}{2}\sin 2\alpha. \qquad (6.6)$$

Для напружень на похилих площадках можна взяти викладене в § 39 правило знаків, але щодо похилих осей x_1, y_1 (рис. 155, *а*, *б*). Зазначимо, що при повороті осей на 90° знак дотичних напружень змінюється на протилежний.

У випадку лінійного та плоского напруженого стану, як правило, виходять з більш простого *правила знаків для дотичних напружень: дотичне напруження на площадці вважають додатним, якщо воно намагається повернути частину елемента, яка розглядається, відносно будь-якої точки, взятої всередині її, за годинниковою стрілкою.* На рис. 154, *в* напруження σ_α та τ_α додатні.

Як випливає з формул (6.5) та (6.6), при $\alpha = 0$ у поперечних перерізах стрижня (див. рис. 154, *а*, площадка *I*) $\tau_\alpha = 0$, а $\sigma_\alpha = \sigma_0$, тобто має найбільше значення. При $\alpha = \pi/2$ (див. рис. 154, *а*, площадка *II*) σ_α та τ_α дорівнюють нулю.

Аналогічно можна довести, що в усіх перерізах, паралельних осі стрижня, нормальні та дотичні напруження дорівнюють нулю. Отже, при простому розтяганні (стисканні) в кожній точці тіла головні площадки перпендикулярні та паралельні його осі, а головні напруження на них відповідно:

при розтяганні

$$\sigma_1 = \sigma_0 = N / F_0; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0;$$

при стисканні

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -\sigma_0.$$

Із формули (6.6) бачимо, що дотичні напруження досягають свого найбільшого значення при $\alpha = \pm 45°$, причому

$$\tau_{\alpha\max} = \sigma_1 / 2.$$

Приклад 15. *Визначимо нормальні та дотичні напруження на похилих площадках для елементів, наведених на рис. 156, а—в.*

Для елемента на рис. 156, *а* маємо: $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -50$ МПа; $\alpha = 30°$, звідки

$$\sigma_\alpha = -50\cos^2 30° = -37{,}5 \text{ МПа}; \quad \tau_\alpha = -\frac{50}{2}\sin 60° = -21{,}7 \text{ МПа}.$$

Для елемента на рис. 156, *б* маємо: $\sigma_1 = 50$ МПа; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$; $\alpha = -30°$, отже,

$$\sigma_\alpha = 50\cos^2(-30°) = 37{,}5 \text{ МПа}; \quad \tau_\alpha = \frac{50}{2}\sin(-60°) = -21{,}7 \text{ МПа}.$$

Для елемента на рис. 156, *в* маємо: $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -50$ МПа; $\alpha = -30°$, отже,

$$\sigma_\alpha = -50\cos^2(-30°) = -37{,}5 \text{ МПа}; \quad \tau_\alpha = -\frac{50}{2}\sin(-60°) = 21{,}7 \text{ МПа}.$$

§ 42. Плоский напружений стан

Досліджуючи напружений стан елементів конструкцій, найчастіше доводиться мати справу з плоским (двовісним) напруженим станом. Він буває при крученні, згинанні та складному опорі. Тому на ньому зупинимося дещо докладніше.

Усі означення та правила, які були введені в § 41, дійсні й для плоского напруженого стану. Проте оскільки тут є два ненульових головних напруження, слід уточнити умови для відлічування кутів, що характеризують нахил площадок. Вважатимемо, що цей кут завжди відлічується від напряму алгебраїчно більшого з двох ненульових головних напружень до нормалі до похилої площадки, причому завжди береться гострий кут, але з урахуванням його знака.

Визначимо напруження на похилих площадках. Розглянемо елемент (рис. 157), грані якого є головними площадками. На них діють додатні головні напруження σ_1 і σ_2, а третє головне напруження $\sigma_3 = 0$ (головний напрям, що відповідає σ_3, перпендикулярний до площини креслення).

Проведемо переріз $I - I$, який визначає площадку (α), що характеризується додатним кутом α. Напруження σ_α і τ_α по цій площадці будуть спричинюватись як дією σ_1, так і дією σ_2. Застосовуючи принцип суперпозиції, тобто розглядаючи цей плоский напружений стан як накладання двох ортогональних одновісних напружених станів, можемо записати:

$$\sigma_\alpha = \sigma'_\alpha + \sigma''_\alpha; \quad \tau_\alpha = \tau'_\alpha + \tau''_\alpha,$$

де σ'_α і τ'_α — напруження, спричинені дією σ_1; σ''_α і τ''_α — напруження, спричинені дією σ_2.

Щоб визначити σ'_α і τ'_α, використаємо безпосередньо формули (6.5) та (6.6):

$$\sigma'_\alpha = \sigma_1\cos^2\alpha; \quad \tau'_\alpha = \frac{\sigma_1}{2}\sin 2\alpha.$$

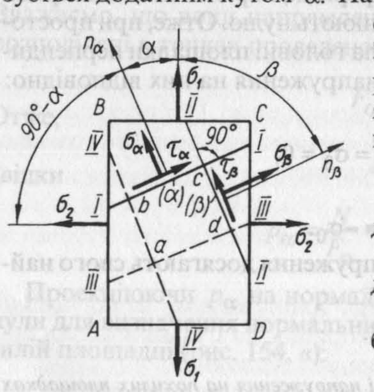


Рис. 157

Для визначення σ''_α та τ''_α потрібно враховувати, що n_α утворює з напрямом σ_2 кут $90° - \alpha$. Тоді, маючи на увазі, що

$$\sin 2[-(90° - \alpha)] = -\sin 2\alpha; \quad \cos^2[-(90° - \alpha)] = \sin^2\alpha,$$

дістанемо

$$\sigma''_\alpha = \sigma_2\sin^2\alpha; \quad \tau''_\alpha = -\frac{\sigma_2}{2}\sin 2\alpha.$$

Виконавши додавання, остаточно знайдемо:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1\cos^2\alpha + \sigma_2\sin^2\alpha; \tag{6.7}$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\alpha. \tag{6.8}$$

Нагадаємо, що стискальні головні напруження підставляють у ці формули зі знаком «мінус», а кут α відлічують від алгебраїчно більшого головного напруження.

Скористаємося формулами (6.7) і (6.8) для визначення напружень на площадці, перпендикулярній до площадки (α). Домовимося таку площадку позначати (β). Нормаль n_β до неї (рис. 157, переріз $II - II$) утворює з напрямом σ_1 кут

$$\beta = -(90° - \alpha).$$

Формули (6.7) і (6.8) справедливі для будь-яких α. Підставивши в них замість α вказане значення β, матимемо:

$$\sigma_\beta = \sigma_1\sin^2\alpha + \sigma_2\cos^2\alpha; \tag{6.9}$$

$$\tau_\beta = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\alpha. \tag{6.10}$$

Сукупність формул (6.7) — (6.10) дає змогу знаходити напруження на будь-яких взаємно перпендикулярних похилих площадках, якщо відомі головні напруження. Проаналізуємо ці формули.

Склавши ліві та праві частини рівнянь (6.7) та (6.9), бачимо, що

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2, \tag{6.11}$$

тобто сума нормальних напружень на двох взаємно перпендикулярних площадках не залежить від нахилу цих площадок і дорівнює сумі головних напружень. Інакше цю властивість можна сформулювати так: *сума нормальних напружень на двох взаємно перпендикулярних площадках інваріантна щодо нахилу цих площадок.*

Із формул (6.8) та (6.10) випливає, що, як і при одновісному напруженому стані, дотичні напруження досягають найбільшого значення при $\alpha = \pm 45°$, тобто на площадках, які нахилені до головних площадок під кутом 45°, причому

$$\tau_{\alpha\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \tag{6.12}$$

Порівнюючи формули (6.8) і (6.10), знаходимо, що

$$\tau_\beta = -\tau_\alpha. \tag{6.13}$$

Ця рівність виражає закон парності дотичних напружень. Знак «мінус» у (6.13) відповідає введеному в § 39 правилу знаків для дотичних напружень, згідно з яким додатні дотичні напруження намагаються повернути елемент за годинниковою стрілкою.

Нарешті з'ясуємо, при якому нахилі площадок нормальні напруження, що діють на ній, мають екстремальне (найбільше чи найменше) значення. Для цього продиференціюємо вираз (6.7) по α і прирівняємо похідну до нуля:

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2\sigma_1 \cos\alpha \sin\alpha + 2\sigma_2 \sin\alpha \cos\alpha = -(\sigma_1 - \sigma_2)\sin 2\alpha = 0.$$

Звідси

$$\sigma_1 = \sigma_2,$$

або

$$\sin 2\alpha = 0.$$

У першому (окремому) випадку (рівномірне всебічне розтягання в площині) з формул (6.7) — (6.10)

$$\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_1; \quad \tau_\alpha = \tau_\beta = 0.$$

Це означає, що будь-яка площадка тут головна. На всіх цих площадках діють однакові напруження.

У другому (загальному) випадку

$$\alpha = 0; \quad \alpha = 90°.$$

Проте площадки, що характеризуються цими кутами, — головні площадки.

Отже, дійдемо висновку, що екстремальними для нормальних напружень σ_α будуть значення головних напружень, причому

$$\sigma_{\alpha\max} = \sigma_1,$$

оскільки при $\alpha = 0$ друга похідна

$$\frac{d^2\sigma_\alpha}{d\alpha^2} = -2(\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2\alpha$$

від'ємна, та

$$\sigma_{\alpha\max} = \sigma_2,$$

оскільки при $\alpha = 90°$

$$\frac{d^2\sigma_\alpha}{d\alpha^2} > 0.$$

На всіх похилих площадках нормальні напруження мають проміжні значення між σ_1 та σ_2.

Проведемо тепер ще два перерізи (рис. 157): переріз *III – III*, паралельний *I – I*, та переріз *IV – IV*, паралельний *II – II*. Оскільки напружений стан елемента однорідний, напруження на площадках, утворених пере-

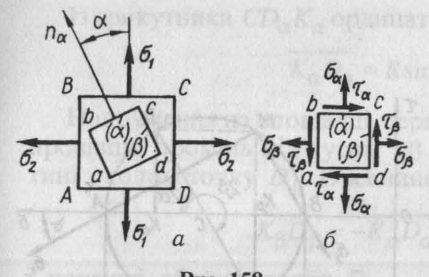


Рис. 158

різами *III – III* та *IV – IV*, будуть такими самими, як відповідно на площадках (α) та (β). Тому елемент *abcd*, виділений чотирма перерізами з елемента *ABCD* (рис. 158, *а*), матиме вигляд, наведений на рис. 158, *б*. Обидва елементи визначають один і той самий напружений стан, проте елемент *ABCD* подає його головними напруженнями, а елемент *abcd* — напруженнями на похилих площадках.

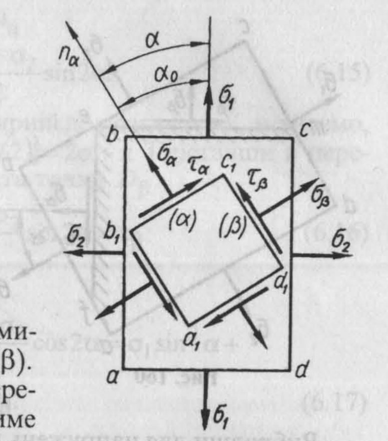


Рис. 159

У теорії напруженого стану можна розмежувати дві основні задачі: пряму і обернену.

Пряма задача. В точці відомі положення головних площадок і відповідні до них головні напруження; потрібно знайти нормальні й дотичні напруження, що діють на площадках, які нахилені під заданим кутом α до головних. Інакше кажучи, дано елемент *abcd* (рис. 159) з головними напруженнями, які діють на його гранях; потрібно знайти напруження на гранях елемента $a_1b_1c_1d_1$.

Обернена задача. В точці відомі нормальні й дотичні напруження, які діють у двох взаємно перпендикулярних площадках, що проходять через дану точку; треба знайти головні площадки і головні напруження. Інакше кажучи, дано елемент $a_1b_1c_1d_1$ (рис. 159) з нормальними та дотичними напруженнями, що діють по його гранях; слід визначити положення елемента *abcd*, тобто кут α_0, і знайти головні напруження.

Обидві ці задачі можна розв'язати як аналітично, так і графічно.

§ 43. Пряма задача в плоскому напруженому стані. Круг напружень

Аналітичне розв'язання прямої задачі задається формулами (6.7) — (6.10).

Проаналізуємо напружений стан, скориставшись простою графічною побудовою. Для цього розглянемо геометричну площину і віднесемо її до прямокутної системи координат $\sigma \sim \tau$, тобто по осі абсцис відкладемо значення головних σ_1, σ_2, а також нормальних σ_α, σ_β напружень, а по осі ординат — значення τ_α і τ_β. Порядок розв'язання задачі покажемо на конкретному прикладі напруженого стану, зображеного на рис. 160.

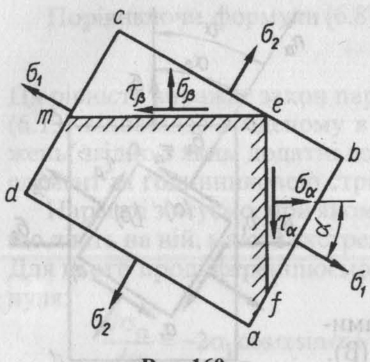


Рис. 160

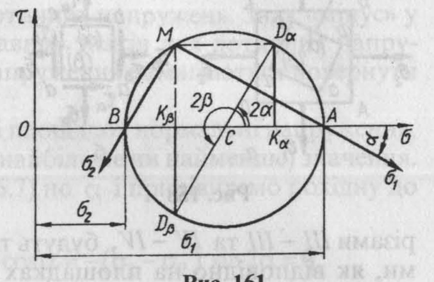


Рис. 161

Вибравши для напружень певний масштаб, відкладаємо по осі абсцис (рис. 161) відрізки

$$\overline{OA} = \sigma_1; \quad \overline{OB} = \sigma_2.$$

На відрізку AB як на діаметрі будуємо коло з центром в точці C. Побудоване таким чином коло називається *кругом напружень* або *кругом Мора*.

Координати точок круга Мора відповідають нормальним та дотичним напруженням на різних площадках. Так, для визначення напружень на площадці, проведеній під кутом α (рис. 160), з центра круга C проводимо промінь під кутом 2α до перетину з колом в точці D_α (додатні кути відкладаємо проти годинникової стрілки). Доведемо, що абсциса точки (відрізок $\overline{OK_\alpha}$) дорівнює нормальному напруженню σ_α, а її ордината (відрізок $\overline{K_\alpha D_\alpha}$) — дотичному напруженню τ_α.

Радіус круга

$$R = \frac{\overline{OA} - \overline{OB}}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Оскільки центр круга C лежить посередині між точками A та B, то

$$\overline{OC} = \frac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}.$$

Крім того,

$$\overline{CK_\alpha} = R\cos 2\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\alpha.$$

Тоді абсциса точки D_α

$$\overline{OK_\alpha} = \overline{OC} + \overline{CK_\alpha} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\alpha = \sigma_1 \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} +$$

$$+ \sigma_2 \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \sin^2\alpha. \qquad (6.14)$$

Із трикутника $CD_\alpha K_\alpha$ ордината точки D_α

$$\overline{K_\alpha D_\alpha} = R\sin 2\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\alpha. \qquad (6.15)$$

Напруження на площадці, перпендикулярній до розглянутої, знайдемо, провівши промінь під кутом $2\beta = 2[\alpha + (\pi/2)] = 2\alpha + \pi$ і діставши в перетині з колом точку D_β. Очевидно, ордината точки D_β

$$\overline{K_\beta D_\beta} = -\overline{K_\alpha D_\alpha} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\alpha = \tau_\beta \qquad (6.16)$$

і, нарешті, абсциса точки D_β

$$\overline{OK_\beta} = \overline{OC} - \overline{CK_\beta} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\alpha = \sigma_1 \sin^2\alpha +$$

$$+ \sigma_2 \cos^2\alpha = \sigma_\beta. \qquad (6.17)$$

Порівнюючи формули (6.14), (6.15) з формулами (6.7), (6.8), бачимо, що дійсно

$$\overline{OK_\alpha} = \sigma_\alpha; \quad \overline{K_\alpha D_\alpha} = \tau_\alpha,$$

що й треба було довести.

Слід зазначити, що дві точки круга — D_α та D_β, які характеризують напруження на двох взаємно перпендикулярних площадках (α) та (β), завжди лежать на кінцях одного діаметра $D_\alpha D_\beta$.

Побудований круг Мора цілком описує напружений стан елемента, зображеного на рис. 160. Якщо змінювати кут α в межах $-90° ... +90°$, то похилі площадки (α) та (β) займуть послідовно всі можливі положення, а точки D_α та D_β опишуть повне коло. Зокрема, при $\alpha = 0$, коли грані *ef* та *em* стануть головними площадками і на них будуть діяти ті самі напруження, що і на гранях елемента *abcd*, точка D_α збігається з A (рис. 161), а D_β — з B.

Як і у випадку круга інерції, знайдемо на крузі напружень положення полюса. Для цього з будь-якої точки кола проведемо пряму, паралельну нормальному напруженню на площадці, якій ця точка належить. Так, провівши з точки D_α лінію, паралельну σ_α [у нашому прикладі (рис. 161) — горизонталь], до перетину з колом, знайдемо шуканий полюс — точку M. Якщо при цьому виходити з точки D_β, то потрібно було б провести лінію паралельно напруженню σ_β, тобто вертикаль.

Як і при розгляданні кругів інерції, можна показати, що лінія, яка сполучає полюс M з будь-якою точкою круга, паралельна напряму нормального напруження на площині, якій ця точка належить. Так, лінія MA паралельна головному напруженню σ_1. Дійсно, $\angle D_\alpha MA = 1/2 \angle D_\alpha CA = \alpha$, тобто він відповідає куту між нормаллю до площадки *fe* і напрямом σ_1. Очевидно, що лінія MB паралельна напряму головного напруження σ_2.

Приклад 16. *На головних площадках діють розтягальні напруження 90 МПа і 60 МПа. Потрібно знайти нормальні й дотичні напруження на гранях елемента, одна з яких нахилена до горизонталі під кутом 20° (рис. 162, а).*

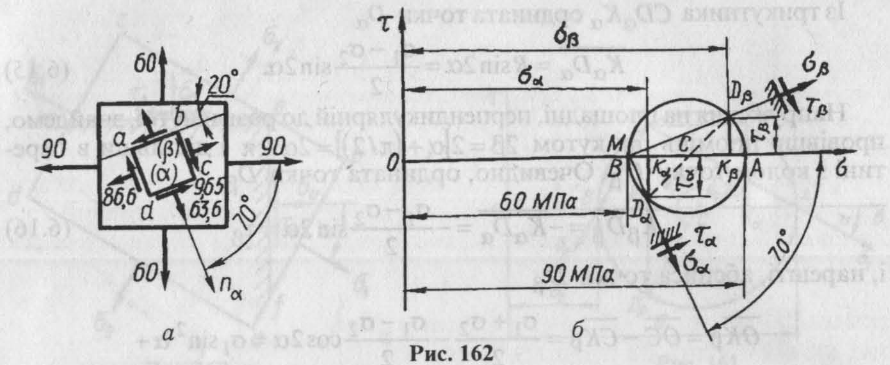


Рис. 162

Довільно позначаємо площадки (α) та (β) (наприклад, так, як показано на рисунку) і проводимо нормаль n_α. Тоді матимемо: $\sigma_1 = 90$ МПа; $\sigma_2 = 60$ МПа; $\sigma_3 = 0$; $\alpha = -70°$. Кут α від'ємний, бо тут він відлічується за годинниковою стрілкою.

Розв'язуючи цю пряму задачу аналітично, за формулами (6.7) — (6.9) знаходимо:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \sin^2\alpha = 90 \cdot 0{,}117 + 60 \cdot 0{,}884 \text{ МПа} = 63{,}6 \text{ МПа};$$

$$\sigma_\beta = \sigma_1 \sin^2\alpha + \sigma_2 \cos^2\alpha = 90 \cdot 0{,}884 + 60 \cdot 0{,}117 \text{ МПа} = 86{,}6 \text{ МПа};$$

$$\tau_\alpha = -\tau_\beta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha = \frac{90 - 60}{2}(-0{,}643) \text{ МПа} = -9{,}65 \text{ МПа}.$$

Ураховуючи знаки визначених напружень, показуємо напруження на гранях елемента *abcd* (рис. 162, *а*).

Графічний розв'язок наведено на рис. 162, *б*. Проводячи вимірювання, дістанемо координати точок $D_\alpha(3{,}18 \text{ см}; -0{,}485 \text{ см})$ та $D_\beta(4{,}33 \text{ см}; 0{,}485 \text{ см})$. Маючи на увазі взятий масштаб (1 см – 20 МПа), приходимо до тих самих значень напружень, які були знайдені аналітично.

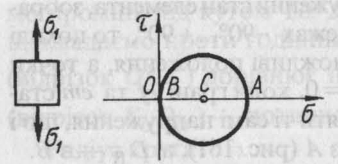


Рис. 163

Зауважимо, що одновісний напружений стан можна розглядати як окремий випадок плоского. При цьому круг напружень буде проходити через початок координат (рис. 163). Нарешті, при всебічному розтяганні $(\sigma_1 = \sigma_2)$ або стисканні $(\sigma_2 = \sigma_3)$ в площині круг Мора перетворюється на точку. В цьому разі, як уже зазначалося раніше, всі площадки будуть головними.

§ 44. Обернена задача в плоскому напруженому стані

При практичних розрахунках найчастіше вдається визначити (теоретично чи експериментально) нормальні та дотичні напруження на будь-яких двох взаємно перпендикулярних площадках. Припустимо, наприклад, що відомі напруження $\sigma_\alpha, \tau_\alpha, \sigma_\beta, \tau_\beta$ на взаємно перпендикулярних

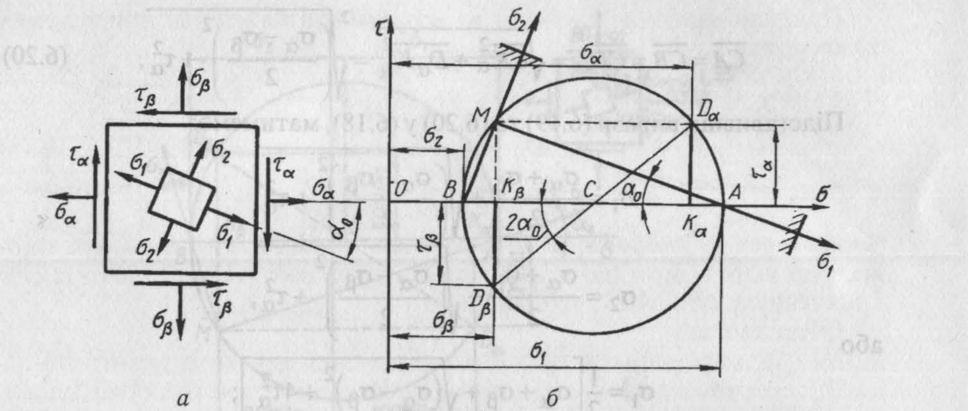


Рис. 164

площадках виділеного елемента (рис. 164, *а*). За цими даними потрібно визначити головні напруження і положення головних площадок.

Спочатку розв'яжемо цю задачу графічно. Для певності припустимо, що $\sigma_\alpha > \sigma_\beta$, а $\tau_\alpha > 0$. У геометричній площині в системі прямокутних координат $\sigma \sim \tau$ виберемо точку D_α з координатами $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$ та точку D_β з координатами σ_β, τ_β (рис. 164, *б*). Як зазначалося при розгляді прямої задачі, точки D_α та D_β лежать на кінцях одного діаметра круга напружень. Отже, сполучивши ці дві точки, знаходимо центр круга Мора — точку C — і радіусом $\overline{CD_\alpha} = \overline{CD_\beta}$ проводимо коло. Абсциси точок перетину кола з віссю σ — відрізки $\overline{OA}$ та $\overline{OB}$ — дадуть відповідно значення головних напружень σ_1 та σ_2.

Для визначення положення головних площадок знайдемо полюс та скористаємось його властивістю. З цією метою з точки D_α проведемо лінію паралельно лінії дії напруження σ_α, тобто горизонталь. Точка M перетину цієї лінії з колом і буде полюсом. Сполучаючи полюс M з точками A та B, дістанемо напрям головних напружень σ_1 та σ_2 відповідно. Головні площадки перпендикулярні до знайдених напрямів головних напружень. На рис. 164, *а* всередині вихідного елемента виділено елемент, обмежений головними площадками. На гранях цього елемента зображено головні напруження σ_1 та σ_2.

Використаємо побудований круг напружень для здобуття аналітичних виразів головних напружень σ_1 та σ_2, що відповідають відрізкам $\overline{OA}$ та $\overline{OB}$. Маємо:

$$\sigma_1 = \overline{OA} = \overline{OC} + \overline{CA};$$

$$\sigma_2 = \overline{OB} = \overline{OC} - \overline{CB}. \tag{6.18}$$

Очевидно,

$$\overline{OC} = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2}; \tag{6.19}$$

$$\overline{CA} = \overline{CB} = \overline{CD}_\alpha = \sqrt{\overline{CK}_\alpha^2 + \overline{D_\alpha K}_\alpha^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2}. \qquad (6.20)$$

Підставивши вирази (6.19) та (6.20) у (6.18), матимемо:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2};$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2},$$

або

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\left[\sigma_\alpha + \sigma_\beta + \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2}\right];$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}\left[\sigma_\alpha + \sigma_\beta - \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2}\right]. \qquad (6.21)$$

Ураховуючи прийняте правило знаків, знайдемо формулу для тангенса кута нахилу напряму головного напруження відносно осі σ. З рис. 164, *б* видно, що

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{MK_\beta}{AK_\beta} = \frac{MK_\beta}{OA - OK_\beta} = \frac{-\tau_\beta}{\sigma_1 - \sigma_\beta}.$$

Отже,

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{-\tau_\alpha}{\sigma_1 - \sigma_\beta}. \qquad (6.22)$$

Ця формула й визначає єдине значення кута α_0, на який потрібно повернути нормаль n_α, щоб знайти напрям алгебраїчно більшого головного напруження. Нагадаємо, що від'ємному значенню α відповідає поворот за годинниковою стрілкою. Слід звернути увагу і на те, що коли одне з головних напружень, визначених за формулою (6.21), виявиться від'ємним, а друге додатним, то їх слід позначити не σ_1 та σ_2, а σ_1 і σ_3, якщо обидва головних напруження від'ємні, — то σ_2 і σ_3.

Приклад 17. *По гранях елемента (рис. 165, а) діють наведені на рисунку напруження. Потрібно знайти головні напруження та відповідні до них головні напрями.*

Якщо позначимо площадки так, як зображено на рисунку, то

$$\sigma_\alpha = 100 \text{ МПа}; \quad \sigma_\beta = -80 \text{ МПа};$$
$$\tau_\alpha = -50 \text{ МПа}; \quad \tau_\beta = 50 \text{ МПа}.$$

За формулою (6.21)

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\left[\sigma_\alpha + \sigma_\beta + \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2}\right] = \frac{1}{2}\Big[100 - 80 +$$
$$+\sqrt{(100+80)^2 + 40 \cdot 50^2}\Big] \text{МПа} = \frac{1}{2}(20 + 206) \text{ МПа} = 113 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2}(20 - 206) \text{ МПа} = -93{,}0 \text{ МПа}.$$

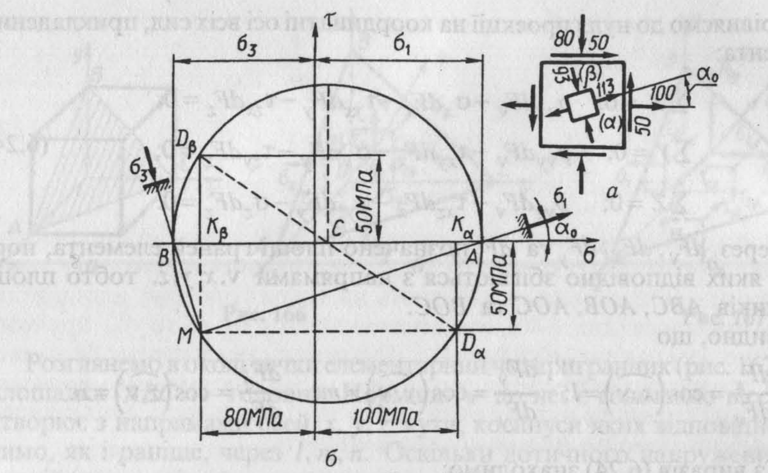


Рис. 165

За формулою (6.22)

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{-\tau_\alpha}{\sigma_1 - \sigma_\beta} = \frac{-(-50)}{113 - (-80)} = \frac{50}{193} = 0{,}259,$$

що відповідає $\alpha_0 = 14°32'$.

Цей кут відкладаємо від горизонталі (напрям нормалі n_α) проти годинникової стрілки і знаходимо напрям напруження σ_1; напрям σ_3 перпендикулярний до нього. На рис. 165 виконано також графічне розв'язання задачі відповідно до викладеного плану.

§ 45. Об'ємний напружений стан. Напруження на довільній площадці

У загальному випадку напруженого стану при довільній орієнтації елементарного паралелепіпеда, виділеного в околі точки навантаженого тіла (див. рис. 151, *а*, *в*), на його гранях діють шість незалежних компонент тензора напружень: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx}. Вважаючи ці напруження вихідними, обчислимо напруження на довільній площадці *ABC*, проведеній в околі точки (рис. 166).

Нормаль ν до площадки утворює з координатними осями x, y, z кути, косинуси яких з метою скорочення позначимо l, m, n:

$$\cos(\widehat{\nu, x}) = l; \; \cos(\widehat{\nu, y}) = m; \; \cos(\widehat{\nu, z}) = n. \qquad (6.23)$$

На проведеній площадці *ABC* проекції повного напруження p_ν на координатні осі x, y, z позначимо відповідно через $p_{\nu x}$, $p_{\nu y}$, $p_{\nu z}$. Вони легко визначаються з умов рівноваги виділеного чотиригранника (рис. 166, *б*). Зауважимо, що відповідно до введеного в § 39 правила знаків компоненти напружень на рис. 166, *б* додатні.

Прирівняємо до нуля проекції на координатні осі всіх сил, прикладених до елемента:

$$\begin{aligned}
&\sum X = 0; \quad p_{\nu x}dF_\nu - \sigma_x dF_x - \tau_{yx}dF_y - \tau_{zx}dF_z = 0;\\
&\sum Y = 0; \quad p_{\nu y}dF_\nu - \tau_{xy}dF_x - \sigma_y dF_y - \tau_{zy}dF_z = 0;\\
&\sum Z = 0; \quad p_{\nu z}dF_\nu - \tau_{xz}dF_x - \tau_{yz}dF_y - \sigma_z dF_z = 0.
\end{aligned} \tag{6.24}$$

Тепер через dF_ν, dF_x, dF_y та dF_z позначено площі граней елемента, нормалі до яких відповідно збігаються з напрямами $\nu, x, y, z,$ тобто площі трикутників ABC, AOB, AOC та BOC.

Очевидно, що

$$\frac{dF_x}{dF_\nu} = \cos\left(\widehat{x,\nu}\right) = l; \quad \frac{dF_y}{dF_\nu} = \cos\left(\widehat{y,\nu}\right) = m; \quad \frac{dF_z}{dF_\nu} = \cos\left(\widehat{z,\nu}\right) = n.$$

Тоді з виразів (6.24) знаходимо:

$$\begin{aligned}
p_{\nu x} &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n;\\
p_{\nu y} &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n;\\
p_{yz} &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n.
\end{aligned} \tag{6.25}$$

Повні напруження на площадці

$$p_\nu = \sqrt{p_{\nu x}^2 + p_{\nu y}^2 + p_{\nu z}^2}. \tag{6.26}$$

Нормальне напруження на довільній площадці знайдемо, склавши суму проекцій на нормаль ν складових повного напруження:

$$\sigma_\nu = p_{\nu x}\cos\left(\widehat{x,\nu}\right) + p_{\nu y}\cos\left(\widehat{y,\nu}\right) + p_{\nu z}\cos\left(\widehat{z,\nu}\right).$$

Ураховуючи (6.25) та (6.23), матимемо

$$\sigma_\nu = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl. \tag{6.27}$$

Знаючи повне p_ν та нормальне σ_ν напруження, легко знайти дотичне напруження на площадці:

$$\tau_\nu = \sqrt{p_\nu^2 - \sigma_\nu^2}. \tag{6.28}$$

Отже, за відомими компонентами напружень на трьох взаємно перпендикулярних площадках можна визначити напруження на будь-якій площадці, проведеній через дану точку.

Визначення головних напружень та положень головних площадок. В окремих випадках лінійного та плоского напружених станів головні напруження та положення головних площадок були визначені (див. § 41, 42). Розв'яжемо тепер цю важливу задачу в загальному випадку напруженого стану.

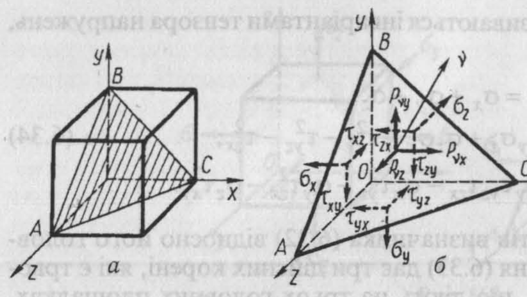


Рис. 166

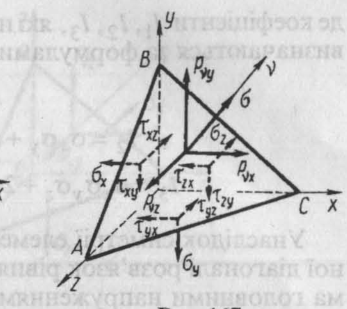


Рис. 167

Розглянемо в околі точки елементарний чотиригранник (рис. 167). Нехай площадка ABC — головна. Нормаль ν до неї є головною віссю. Вона утворює з напрямами осей x, y, z кути, косинуси яких відповідно позначимо, як і раніше, через l, m, n. Оскільки дотичного напруження на головній площадці немає, то повне напруження p_ν на ній напрямлене вздовж нормалі і є головним нормальним напруженням на площадці. Позначимо його через σ. Тоді проекції цього напруження на осі координат

$$p_{\nu x} = \sigma l; \quad p_{\nu y} = \sigma m; \quad p_{\nu z} = \sigma n. \tag{6.29}$$

З іншого боку, проекції повного напруження на площадці виражаються через напруження на координатних гранях елемента формулами (6.25). З них, ураховуючи (6.29), маємо:

$$\begin{aligned}
&(\sigma_x - \sigma)l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n = 0;\\
&\tau_{xy} l + \left(\sigma_y - \sigma\right)m + \tau_{zy} n = 0;\\
&\tau_{xz} l + \tau_{yz} m + (\sigma_z - \sigma)n = 0.
\end{aligned} \tag{6.30}$$

Система (6.30) становить три однорідних рівняння відносно невідомих $l, m, n,$ що визначають положення головної площадки. Нульові розв'язки $l = m = n = 0$ неможливі внаслідок відомого співвідношення між напрямними косинусами:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \tag{6.31}$$

Ненульові розв'язки системи (6.30) бувають лише тоді, коли визначник, складений з коефіцієнтів при шуканих невідомих, перетворюється на нуль:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0. \tag{6.32}$$

Розкриваючи визначник (6.32), дістаємо таке кубічне рівняння відносно нормального напруження σ на головній площадці:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 - I_2\sigma - I_3 = 0, \tag{6.33}$$

де коефіцієнти I_1, I_2, I_3, які називаються інваріантами тензора напружень, визначаються за формулами:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z;$$
$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2; \quad (6.34)$$
$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2.$$

Унаслідок симетрії елементів визначника (6.32) відносно його головної діагоналі розв'язок рівняння (6.33) дає три дійсних корені, які є трьома головними напруженнями, що діють на трьох головних площадках. Як уже зазначалося (див. § 40), вони позначаються σ_1, σ_2 та σ_3, причому алгебраїчно, як і раніше, $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Для визначення напряму будь-якої головної осі, наприклад першої, у рівняння (6.30) підставляємо значення відповідного головного напруження, тобто σ_1, і з будь-яких двох рівнянь знаходимо співвідношення між косинусами кутів:

$$l_1 / n_1 = a_1; \quad m_1 / n_1 = b_1.$$

Підставляючи ці величини в (6.31), знаходимо

$$n_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + a_1^2 + b_1^2}}, \quad (6.35)$$

після чого

$$l_1 = a_1 n_1; \quad m_1 = b_1 n_1. \quad (6.36)$$

Аналогічно визначають напрямні косинуси другої та третьої головних осей. Легко показати, що три головні площадки взаємно перпендикулярні.

Головні напруження в точці даного навантаженого певним чином тіла мають стаціонарні значення, що не залежать від вибору початкової системи координатних осей x, y, z, тобто орієнтації у просторі виділеного вихідного паралелепіпеда. Отже, корені рівняння (6.33) так само, як і коефіцієнти цього рівняння, інваріантні до вибраної системи декартових координатних осей, тобто при повороті осей не змінюються. Тож

$$I_1 = \text{const}; \quad I_2 = \text{const}; \quad I_3 = \text{const}. \quad (6.37)$$

Ці величини називають *першим, другим* та *третім інваріантами тензора напружень*.

Рівняння (6.33), оскільки його корені дорівнюють σ_1, σ_2 та σ_3, можна записати також у вигляді

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = 0. \quad (6.38)$$

Розкриваючи дужки, бачимо, що інваріанти тензора напружень виражаються через головні напруження в більш простому вигляді:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3;$$

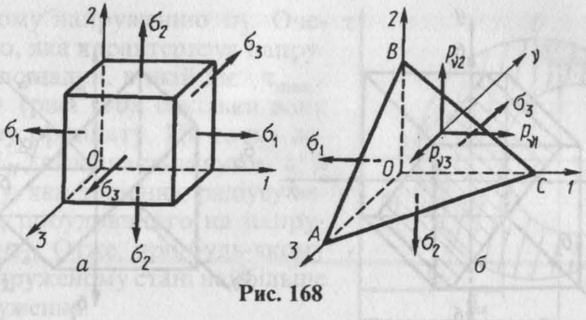


Рис. 168

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1; \quad (6.39)$$
$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

Зауважимо, що, досліджуючи напружений стан у точці, ми знехтували дуже малою різницею напружень на нескінченно близько розташованих паралельних площадках, а також об'ємними силами як малими вищого порядку. Розглядаючи рівновагу елемента, ці малі зусилля слід враховувати.

Формули для визначення напружень на довільній площадці істотно спрощуються, якщо за вихідний вибрати елементарний паралелепіпед, обмежений головними площадками.

Сумістимо координатні осі x, y, z з головними напрямами *1, 2,* 3 (рис. 168, *а*) та визначимо напруження на довільній площадці ABC, нормаль до якої ν (рис. 168, *б*) утворює з головними осями кути $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Тоді

$$l = \cos\alpha_1; \quad m = \cos\alpha_2; \quad n = \cos\alpha_3.$$

З формули (6.25) випливає, що

$$p_{\nu 1} = \sigma_1 \cos\alpha_1; \quad p_{\nu 2} = \sigma_2 \cos\alpha_2; \quad p_{\nu 3} = \sigma_3 \cos\alpha_3. \quad (6.40)$$

Повне напруження на площадці

$$p_\nu = \sqrt{(\sigma_1 \cos\alpha_1)^2 + (\sigma_2 \cos\alpha_2)^2 + (\sigma_3 \cos\alpha_3)^2}. \quad (6.41)$$

Нормальне напруження на площадці визначимо за формулою (6.27):

$$\sigma_\nu = \sigma_1 \cos^2\alpha_1 + \sigma_2 \cos^2\alpha_2 + \sigma_3 \cos^2\alpha_3. \quad (6.42)$$

Нарешті, дотичне напруження на підставі формул (6.28), (6.41) та (6.42) набирає вигляду

$$\tau_\nu = \sqrt{(\sigma_1 \cos\alpha_1)^2 + (\sigma_2 \cos\alpha_2)^2 + (\sigma_3 \cos\alpha_3)^2 - \sigma_\nu^2}. \quad (6.43)$$

Напруження на різних площадках у загальному випадку тривимірного напруженого стану можна визначити також за допомогою кругів Мора.

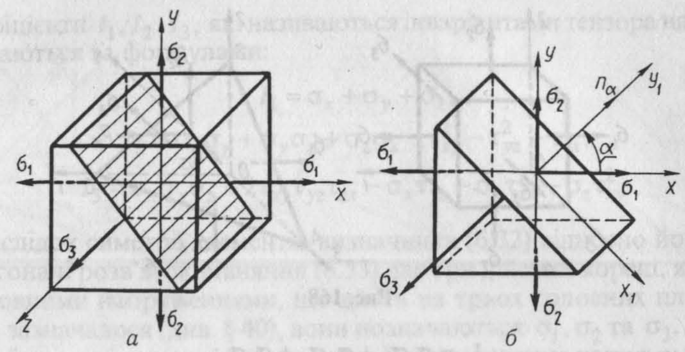


Рис. 169

Нехай відомі головні напруження та положення головних площадок. Потрібно визначити нормальні та дотичні напруження на довільній площадці. Спочатку розглянемо площадки, паралельні одному з головних напружень, наприклад σ_3 (рис. 169, *а*). Нормалі до таких площадок лежать у площині xy і утворюють з напрямом σ_3 кут $\alpha_3 = \pi/2$. Нехай кут між нормаллю до площадки й напрямом σ_1 буде α (рис. 169, *б*). Тоді $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = (\pi/2) - \alpha$, і з формул (6.40) та (6.42) маємо:

$$p_{\alpha_1} = \sigma_1 \cos\alpha; \quad p_{\alpha_2} = \sigma_2 \cos(\pi/2 - \alpha) = \sigma_2 \sin\alpha;$$

$$p_{\alpha_3} = 0; \tag{6.44}$$

$$\sigma_{y_1} = \sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \sin^2\alpha.$$

Дотичне напруження на площадці можна визначити з (6.43). Однак простіше спроекціювати на напрям x_1 проекції повного напруження p_{α_1} та p_{α_2}. Маємо

$$\tau_{y_1x_1} = \tau_\alpha = p_{\alpha_1} \sin\alpha - p_{\alpha_2} \cos\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \tag{6.45}$$

Як видно з (6.44) та (6.45), головне напруження σ_3 не впливає на напруження на площадках, паралельних напряму σ_3. Отже, напруження на будь-яких площадках, паралельних σ_3, можна зобразити графічно за допомогою круга Мора L_{III}, побудованого на головних напруженнях σ_1 та σ_2 (рис. 170). Так само напружений стан на площадках, паралельних головному напруженню σ_1, описується точками кола L_I, побудованого на напруженнях σ_2 та σ_3. Нарешті, сукупність точок кола L_{II}, побудованого на напруженнях σ_1 та σ_3, описує напружений стан усіх перерізів, проведених в елементі паралельно σ_2. Точки O_1, O_2 та O_3 на рис. 170 є центрами кіл L_I, L_{II}, L_{III} відповідно.

Можна показати, що напружений стан на площадках, які перетинають усі три головних напрями, зображується точками D_α, розміщеними в заштрихованій зоні (рис. 170). Як видно з рис. 170, найбільше нормальне напруження в точці дорівнює головному напруженню σ_1, а наймен-

ше — головному напруженню σ_3. Очевидно, точкою, яка характеризує напружений стан площадки, в якій діє τ_{max}, буде точка D (рис. 170), оскільки вона має найбільшу ординату. Ця точка лежить на колі L_{II}, визначається кутом 45° і має ординату, яка дорівнює радіусу великого круга, побудованого на напруженнях σ_1 та σ_3. Отже, при будь-якому об'ємному напруженому стані найбільше дотичне напруження

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \tag{6.46}$$

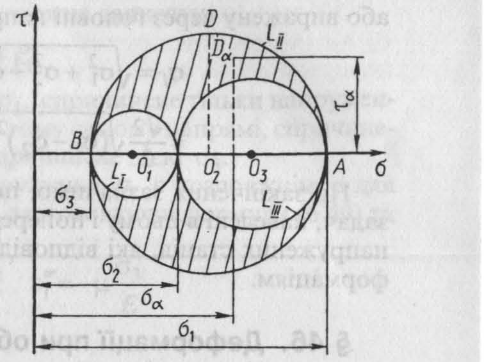


Рис. 170

і діє на площадках, паралельних головному напруженню σ_2 й нахилених під кутом 45° до головних напружень σ_1 та σ_3.

Певний інтерес, особливо при вивченні пластичних деформацій, становлять дотичні напруження, що діють по площадці, рівнонахиленій до всіх головних напрямів. Така площадка називається *октаедричною*, оскільки вона паралельна грані октаедра, який може бути утворений з куба. Нормаль до цієї площадки утворює однакові кути з головними напрямами:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha.$$

Ураховуючи, що

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1,$$

маємо

$$\cos^2\alpha = 1/3.$$

Тоді з формул (6.42) та (6.43) знаходимо:

$$\sigma_{окт} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}; \tag{6.47}$$

$$\tau_{окт} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$

Це дотичне напруження називається *октаедричним*. Нормальне октаедричне напруження $\sigma_{окт}$ є ніби середнім напруженням для даного тривісного напруженого стану.

У теорії пластичності виявилося зручним вводити в розрахунки так звану інтенсивність напружень σ_i, пов'язану з $\tau_{окт}$ залежністю

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}}\tau_{окт}.$$

або виражену через головні напруження формулою

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \qquad (6.48)$$

На закінчення зазначимо, що всі залежності й способи розв'язання задач, наведені в цьому і попередніх параграфах розд. 6, справедливі для напружених станів, які відповідають як пружним, так і пластичним деформаціям.

§ 46. Деформації при об'ємному напруженому стані. Узагальнений закон Гука

Досліджуючи деформації й розглядаючи питання міцності при об'ємному та плоскому напружених станах, згідно з основними гіпотезами та припущеннями вважатимемо, що матеріал відповідає закону Гука, а деформації малі.

Вивчаючи просте розтягання — стискання, було з'ясовано, що відносна поздовжня деформація

$$\varepsilon = \sigma / E, \qquad (6.49)$$

а відносна поперечна деформація

$$\varepsilon' = -\mu\frac{\sigma}{E}. \qquad (6.50)$$

Ці дві рівності виражали закон Гука (залежність між деформаціями і напруженнями) при простому розтяганні або стисканні, тобто при лінійному напруженому стані. Тепер установимо залежність між деформацією та напруженнями в загальному випадку об'ємного напруженого стану.

Узагальнений закон Гука. Розглянемо деформацію елемента тіла, вибравши цей елемент у вигляді прямокутного паралелепіпеда розмірами $a \times b \times c$ (рис. 171, *а*). По гранях паралелепіпеда діють головні напруження $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (вважаємо, що всі вони додатні). Внаслідок деформації ребра елементи змінюють свою довжину й дорівнюють $a + \Delta a$; $b + \Delta b$; $c + \Delta c$. Величини

$$\varepsilon_1 = \Delta a / a; \ \varepsilon_2 = \Delta b / b; \ \varepsilon_3 = \Delta c / c$$

називають *головними подовженнями*, і вони є відносними подовженнями в головних напрямах.

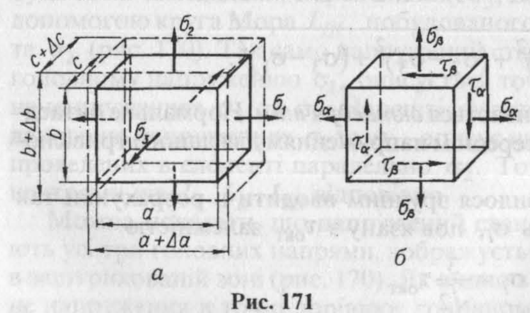


Рис. 171

Застосовуючи принцип суперпозиції, можна записати

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \varepsilon_1'' + \varepsilon_1''',$$

де ε_1' — відносне подовження в напрямі σ_1, спричинене тільки напруженням $\sigma_1 (\sigma_2 = \sigma_3 = 0)$; ε_1'' — подовження в тому самому напрямі, спричинене дією тільки σ_2; ε_1''' — подовження, спричинене дією σ_3.

Оскільки напрям σ_1 для самого напруження σ_1 є поздовжнім, а для напружень σ_2 та σ_3 — поперечним, то, застосовуючи формули (6.49) та (6.50), знаходимо, що

$$\varepsilon_1' = \frac{\sigma_1}{E}; \quad \varepsilon_1'' = -\mu\frac{\sigma_2}{E}; \quad \varepsilon_1''' = -\mu\frac{\sigma_3}{E}.$$

Склавши ці величини, матимемо

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu\frac{\sigma_2}{E} - \mu\frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)].$$

Аналогічно дістанемо формули й для двох інших головних подовжень:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)];$$
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)]; \qquad (6.51)$$
$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)].$$

Формули (6.51) виражають *узагальнений закон Гука для ізотропного тіла*, тобто залежність між лінійними деформаціями та головними напруженнями в загальному випадку тривісного напруженого стану. Зауважимо, що стискальні напруження підставляють у ці формули із знаком «мінус». З формули (6.51) легко дістати формули закону Гука для плоского напруженого стану. Наприклад, при $\sigma_2 = 0$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_3);$$
$$\varepsilon_2 = -\frac{\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_3); \qquad (6.52)$$
$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}(\sigma_3 - \mu\sigma_1).$$

Формули (6.51) справедливі не тільки для головних деформацій, а й для відносних деформацій по будь-яких трьох взаємно перпендикулярних напрямах, оскільки при малих деформаціях вплив зсуву на лінійні деформації є величиною другого порядку малості. Так, відносне подовження в напрямі дії σ_α та σ_β (рис. 171, *б*)

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{E}(\sigma_\alpha - \mu\sigma_\beta);$$
$$\varepsilon_\beta = \frac{1}{E}(\sigma_\beta - \mu\sigma_\alpha). \qquad (6.53)$$

Об'ємна деформація. Установимо залежність відносної зміни об'єму ε_V від головних напружень. До деформації елемент мав об'єм $V_0 = abc$. У деформованому стані його об'єм

$$V = (a+\Delta a)(b+\Delta b)(c+\Delta c) = abc(1+\Delta a/a)(1+\Delta b/b)\times$$
$$\times(1+\Delta c/c) = V_0(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) = V_0(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+$$
$$+\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_1+\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3).$$

Ураховуючи малість відносних лінійних деформацій, останніми чотирма членами можна знехтувати. Тоді відносна зміна об'єму буде

$$\varepsilon_V = \frac{V - V_0}{V_0} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Виразивши головні подовження через головні напруження згідно з (6.51), дістанемо

$$\varepsilon_V = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3). \tag{6.54}$$

Зокрема, при рівномірному всебічному стисканні, якщо $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$,

$$\varepsilon_V = -\frac{p}{K},$$

де

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}. \tag{6.55}$$

Величина K називається *модулем об'ємної деформації*. З формули (6.54) випливає, що при деформуванні тіла, матеріал якого має коефіцієнт Пуассона $\mu = 0{,}5$ (наприклад, гума), об'єм тіла не змінюється.

Приклад 18. *Брус щільно, але без напруження встановлений між двома нерухомими стінками і зазнає стискання рівномірно розподіленими по горизонтальних гранях силами P (рис. 172). Нехтуючи тертям між брусом та стінками, знайдемо силу тиску його на стінки та зміну його розмірів, якщо E та μ матеріалу бруса відомі.*

Унаслідок того, що при дії вертикального навантаження брус не може переміщатися в горизонтальному напрямі (перешкоджають нерухомі стінки), у цьому напрямі виникають напруження стискання. Введемо для напружень позначення згідно з рис. 172 (це будуть головні напруження, оскільки на гранях бруса немає дотичних напружень). Тоді маємо:

$$\sigma_1 = 0; \quad \sigma_2 = -\frac{N}{bh}; \quad \sigma_3 = -\frac{P}{bl}.$$

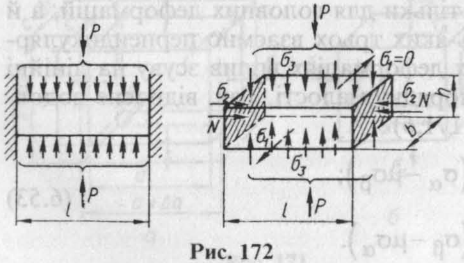


Рис. 172

Через N позначено тиск стінок на брус. Оскільки за умовою задачі розмір l не змінюється, $\varepsilon_2 = 0$. З другої формули (6.51) маємо

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \mu\sigma_3) = 0,$$

тобто

$$\sigma_2 = \mu\sigma_3 = -\frac{\mu P}{bl}.$$

Отже,

$$N = -bh\sigma_2 = \frac{\mu Ph}{l}.$$

Далі:

$$\Delta b = \varepsilon_1 b = -\frac{b\mu}{E}(\sigma_2+\sigma_3) = \frac{\mu(1+\mu)P}{El};$$

$$\Delta h = \varepsilon_3 h = \frac{h}{E}(\sigma_3 - \mu\sigma_2) = -(1-\mu^2)\frac{Ph}{blE}.$$

Відносна зміна об'єму, згідно з формулою (6.54),

$$\varepsilon_V = \frac{1-2\mu}{E}\left(0 - \frac{\mu P}{bl} - \frac{P}{bl}\right) = \frac{-(1-2\mu)(1+\mu)}{blE}P,$$

а зміна об'єму всього бруса

$$\Delta V = \varepsilon_V V = \varepsilon_V blh = -(1-2\mu)(1+\mu)\frac{Ph}{E}.$$

§ 47. Потенціальна енергія деформації

Потенціальною енергією деформації називається енергія, що накопичується в тілі при його пружному деформуванні. Якщо під дією зовнішнього статичного навантаження тіло деформується, то точки прикладення зовнішніх сил переміщуються, і потенціальна енергія положення навантаження зменшується на величину, яка кількісно дорівнює роботі, здійсненій зовнішніми силами. Енергія, втрачена зовнішніми силами, не зникає, а перетворюється в основному на потенціальну енергію деформації тіла. Решта її (незначна частина) розсіюється здебільшого у вигляді теплоти за рахунок різноманітних процесів, які відбуваються в матеріалі при його деформуванні.

Потенціальна енергія деформації U накопичується в оборотній формі — в процесі розвантаження тіла вона знову перетворюється на енергію зовнішніх сил або на кінетичну енергію. Значення потенціальної енергії деформації, яка припадає на одиницю об'єму $\left(1\ \text{см}^3\right)$ тіла, називають *питомою потенціальною енергією деформації* і позначають u. В різних точках тіла величина u може бути різною залежно від напруження в цій точці.

Потенціальну енергію деформації можна легко визначити на підставі закону збереження енергії. Оскільки при статичному навантаженні кінетична енергія системи залишається незмінною, то приріст потенціальної енергії деформації U дорівнює зменшенню потенціальної енергії положення зовнішніх сил $U_п$:

$$U = U_п.$$

Зменшення потенціальної енергії зовнішніх сил чисельно дорівнює роботі A_P, здійсненій ними при деформації:

$$U_п = A_P.$$

Отже, потенціальна енергія деформації чисельно дорівнює роботі зовнішніх сил, затраченій при пружному деформуванні тіла:

$$U = A_P. \tag{6.56}$$

При простому розтяганні або стисканні (рис. 173) на підставі формули (4.29)

$$U = \frac{P\Delta l}{2}.$$

Питома потенціальна енергія

$$u = \frac{P\Delta l}{2Fl} = \frac{\sigma\varepsilon}{2}. \tag{6.57}$$

Ураховуючи, що $\varepsilon = \sigma / E$, матимемо

$$u = \frac{\sigma^2}{2E}. \tag{6.58}$$

Визначимо тепер питому потенціальну енергію в загальному випадку об'ємного напруженого стану. Для цього виріжемо елемент у вигляді кубика з довжинами ребер, що дорівнюють одиниці (рис. 174), грані якого є головними площадками. На цих площадках діють головні напруження σ_1, σ_2 і σ_3. Оскільки площі граней дорівнюють одиниці, то зусилля, що діють на них, чисельно дорівнюють $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Ці зусилля здійснюють роботу на тих переміщеннях, які дістають грані внаслідок деформації кубика. Ці переміщення в даному прикладі чисельно дорівнюють головним відносним подовженням $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, оскільки ребра мають одиничну довжину.

Отже, на підставі формули (6.57) матимемо

$$u = \frac{\sigma_1\varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2\varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3\varepsilon_3}{2}. \tag{6.59}$$

Підставляючи в цю формулу вирази $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ з формул (6.51), знайдемо

$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)\right]. \tag{6.60}$$

Питома потенціальна енергія формозміни. При деформуванні елемента (рис. 174) взагалі змінюються як його об'єм, так і форма (з кубика він перетворюється на паралелепіпед). Відповідно до цього можна вважати, що повна питома потенціальна енергія деформації

$$u = u_V + u_ф, \tag{6.61}$$

де u_V — питома потенціальна енергія зміни об'єму, тобто енергія, накопичена за рахунок зміни об'єму; $u_ф$ — питома потенціальна енергія формозміни, тобто енергія, яка накопичується внаслідок зміни форми елемента.

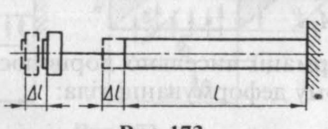


Рис. 173

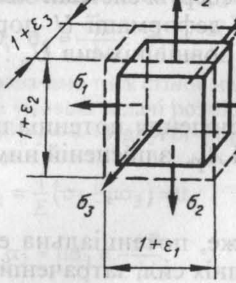


Рис. 174

Безпосередньо обчислити $u_ф$ важко, тому знайдемо спочатку енергію u_V. Це можна зробити, виходячи з припущення про те, що в різних елементах при дії різних головних напружень значення u_V буде однакове, якщо елементи будуть однаково змінювати об'єми ε_V.

Крім розглядуваного елемента (назвемо його A) введемо ще допоміжний елемент A'. Нехай A' — також одиничний кубик, однак по його гранях діють однакові головні напруження $\sigma_1' = \sigma_2' = \sigma_3' = \sigma'$. Для цього елемента, згідно з формулами (6.54), (6.61) та (6.60),

$$\varepsilon_V' = \frac{3(1-2\mu)}{E}\sigma', \text{ а } u' = u_V' + u_ф' = \frac{3(1-2\mu)}{2E}(\sigma')^2.$$

Проте очевидно, що елемент A' при деформуванні, спричиненому однаковими по гранях напруженнями, змінюватиме тільки свій об'єм, а його форма залишатиметься кубічною. Тому $u_ф' = 0$ і, отже,

$$u_V' = \frac{3(1-2\mu)}{2E}(\sigma')^2.$$

Виберемо величину σ' такою, щоб $\varepsilon_V' = \varepsilon_V$, тобто щоб

$$\frac{3(1-2\mu)}{E}\sigma' = \frac{1-2\mu}{E}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right).$$

Звідси

$$\sigma' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}.$$

Оскільки в обох елементів зміни об'ємів однакові, на підставі прийнятого припущення можна стверджувати, що

$$u_V = u_V' = \frac{3(1-2\mu)}{2E}\frac{\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)^2}{9},$$

тобто

$$u_V = \frac{1-2\mu}{6E}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)^2. \tag{6.62}$$

Тепер, згідно з формулою (6.61),

$$u_ф = u - u_V.$$

Підставивши в цю формулу значення u та u_V з виразів (6.60) і (6.62), після простих перетворень остаточно знайдемо:

$$u_ф = \frac{1+\mu}{3E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1\right) =$$

$$= \frac{1+\mu}{6E}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right]. \tag{6.63}$$

Це і є вираз для питомої потенціальної енергії формозміни.

Розділ 7 КРИТЕРІЇ МІЦНОСТІ

§ 48. Завдання теорій міцності

Найважливішим завданням інженерного розрахунку є оцінка міцності елементів машин і споруд за відомим напруженим станом. Найпростіше ця задача розв'язується для простих видів деформації, зокрема для одновісних напружених станів, оскільки в цих випадках граничні (небезпечні) напруження можуть бути визначені безпосередньо експериментально.

Як уже зазначалося, небезпечним вважають напруження, при якому починається руйнування (при крихкому стані матеріалу) або виникають залишкові деформації (у разі пластичного стану матеріалу). Так, випробування зразків матеріалу на одновісне розтягання або стискання дає змогу легко визначити небезпечні напруження:

$$\sigma_н = \sigma_т \quad \text{або} \quad \sigma_н = \sigma_в .$$

За небезпечним напруженням визначають допустимі напруження $[\sigma_+]$ при розтяганні або $[\sigma_-]$ при стисканні (див. § 34), забезпечуючи відомий коефіцієнт запасу проти настання граничного стану. Отже, умова міцності для одновісного напруженого стану (рис. 175, *а*) набирає вигляду

$$\sigma_1 \le [\sigma_+] \quad \text{або} \quad |\sigma_3| \le [\sigma_-].$$

Розглянемо тепер питання про міцність матеріалу при складних напружених станах, якщо в точках деталей два чи всі три головних напруження $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ не дорівнюють нулю (рис. 175, *б*).

У цих випадках, як свідчать досліди, для одного і того самого матеріалу небезпечний стан може настати при різних граничних значеннях головних напружень $\sigma_{1н}, \sigma_{2н}, \sigma_{3н}$ залежно від співвідношень їх. Тому експериментально визначити граничні значення головних напружень дуже важко не тільки внаслідок складності постановки випробувань зразків матеріалів в умовах складних напружених станів при різних співвідношеннях значень головних напружень, а й у зв'язку з великим обсягом випробувань.

Інший спосіб розв'язання цієї важливої задачі полягає у визначенні на підставі низки теоретичних і практичних досліджень критерію міцності (критерію граничного напружено-деформованого стану). Для цього вводять гіпотезу про переважний вплив на міцність матеріалу того чи іншого фактора: вважають, що порушення міцності матеріалу при будь-якому напруженому стані відбудеться тільки тоді, коли певний фактор досягне певного граничного значення. Граничне значення фактора, що визначає міцність, знаходять з випробувань на просте розтягання або стискання, а іноді — на кручення. Отже, введення критерію міцності дає змогу зіставити певний складний напружений стан із простим, наприклад одновісним, розтяганням (рис. 176) і знайти при цьому таке еквівалентне (розрахункове) напруження, яке в обох випадках дає однаковий коефіцієнт запасу.

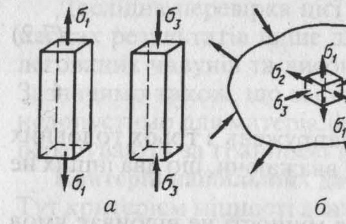


Рис. 175

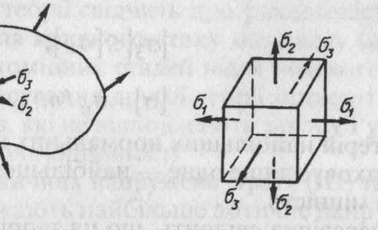


Рис. 176

Під коефіцієнтом запасу в загальному випадку напруженого стану розуміють число n, що показує, в скільки разів потрібно одночасно збільшити всі компоненти напруженого стану $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, щоб він став граничним:

$$\sigma_{1н} = n\sigma_1; \quad \sigma_{2н} = n\sigma_2; \quad \sigma_{3н} = n\sigma_3 .$$

Вибрану таким способом гіпотезу часто називають *механічною теорією міцності*.

Нижче розглянуто деякі з таких теорій.

§ 49. Класичні критерії міцності (теорії міцності)

Критерій найбільших нормальних напружень [перша (I) теорія міцності]. Згідно з цією теорією, переважний вплив на міцність має значення найбільшого нормального напруження. Припускають, що руйнування матеріалу в загальному випадку напруженого стану виникає тоді, коли найбільше нормальне напруження досягає небезпечного значення $\sigma_н$. Останнє визначають при простому розтяганні або стисканні зразків із даного матеріалу.

Умова порушення міцності при складному напруженому стані має вигляд:

$$\sigma_1 = \sigma_{+н}; \quad |\sigma_3| = \sigma_{-н}. \tag{7.1}$$

Умова міцності з коефіцієнтом запасу n

$$\sigma_1 \le [\sigma_+]$$

або

$$|\sigma_3| \le [\sigma_-], \tag{7.2}$$

де

$$[\sigma] = \sigma_н / n.$$

Отже, критерій найбільших нормальних напружень з трьох головних напружень ураховує лише одне — найбільше, вважаючи, що два інших не впливають на міцність.

Дослідна перевірка свідчить, що ця теорія міцності не відбиває умов виникнення пластичних деформацій і дає при деяких напружених станах задовільні результати лише для дуже крихких матеріалів (наприклад, для каменю, цегли, кераміки, інструментальної сталі).

Критерій найбільших лінійних деформацій [друга (II) теорія міцності]. Згідно з цією теорією, критерієм міцності вважають найбільшу за абсолютним значенням лінійну деформацію. Припускають, що руйнування матеріалу в загальному випадку напруженого стану виникає тоді, коли найбільше лінійне відносне подовження ε_{max} досягає небезпечного значення $\varepsilon_н$. Останнє визначають при простому розтяганні або стисканні зразків із даного матеріалу.

Отже, умова руйнування має вигляд

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_н, \tag{7.3}$$

а умова міцності з коефіцієнтом запасу n —

$$|\varepsilon_{max}| \le [\varepsilon] = \varepsilon_н / n. \tag{7.4}$$

Використовуючи узагальнений закон Гука [формули (6.51)], умову міцності (7.4) виразимо через напруження. Нехай найбільше відносне подовження буде ε_1. Тоді

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)\right].$$

Якщо при простому розтяганні допустиме напруження дорівнює $[\sigma]$, то для найбільшого відносного подовження таким чином допускаємо величину

$$[\varepsilon] = [\sigma]/E.$$

Підставимо вирази для ε_{max} і $[\varepsilon]$ в умову міцності (7.4). Тоді

$$\frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)\right] \le \frac{[\sigma]}{E},$$

або

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \le [\sigma]. \tag{7.5}$$

Як випливає з умови міцності (7.5), згідно з цією теорією, з допустимим напруженням слід порівнювати не одне з трьох головних напружень, а комбінацію їх. Еквівалентне напруження в цьому разі

$$\sigma_{екв\,II} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3). \tag{7.6}$$

Дослідна перевірка цієї теорії свідчить про узгодженість у деяких випадках результатів лише для крихкого стану матеріалу (наприклад, для легованих чавунів та високоміцних сталей після низького відпускання). Зазначимо також, що застосування другої теорії міцності у вигляді (7.5) недопустимо для матеріалів, які не відповідають закону Гука або тих, що перебувають за границею пропорційності.

Критерій найбільших дотичних напружень [третя (III) теорія міцності]. Тут критерієм міцності вважають найбільше дотичне напруження. Згідно з цією теорією, припускають, що граничний стан у загальному випадку напруженого стану виникає тоді, коли найбільше дотичне напруження τ_{max} досягає небезпечного значення $\tau_н$. Останнє визначають при досягненні граничного стану у випадку простого розтягання зразків із даного матеріалу.

Умова руйнування має вигляд

$$\tau_{max} = \tau_н, \tag{7.7}$$

умова міцності —

$$\tau_{max} \le [\tau] = \tau_н / n. \tag{7.8}$$

Оскільки, згідно з виразом (6.46),

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3), \text{ а } \tau_н = \frac{1}{2}\sigma_н,$$

то умови руйнування і міцності (7.7), (7.8) можна виразити через головні напруження так:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_н; \tag{7.9}$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 \le [\sigma]. \tag{7.10}$$

Отже, еквівалентним напруженням за третьою теорією є різниця алгебраїчно найбільшого і найменшого головних напружень:

$$\sigma_{екв\,III} = \sigma_1 - \sigma_3. \tag{7.11}$$

Третя теорія міцності взагалі добре підтверджується дослідами для пластичних матеріалів, у яких допустимі напруження на розтяг і стиск однакові. Недоліком цієї теорії є те, що вона не враховує проміжного головного напруження σ_2, яке, згідно з дослідами, справляє також деякий, хоч здебільшого і незначний, вплив на міцність матеріалу.

Зазначимо, що критерій найбільших дотичних напружень зазвичай розглядають як умову початку утворення пластичних (залишкових) деформацій. Останні є наслідком ковзання шарів атомів у кристалі по певних кристалографічних площинах. Це стає можливим тоді, коли на зазначених площинах ковзання дотичні напруження досягають деякого граничного значення.

Отже, як критерій, що визначає виникнення текучості матеріалу, можна взяти найбільше дотичне напруження.

Вважаючи граничним станом настання текучості, з виразу (7.9) маємо

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_т. \qquad (7.12)$$

Ця умова достатньо задовільно описує початок появи пластичної деформації при складному напруженому стані для багатьох металів і сплавів.

Критерій питомої потенціальної енергії деформації формозміни [четверта (IV) теорія міцності]. Як критерій міцності у цьому разі вибирають кількість питомої потенціальної енергії формозміни, накопиченої деформованим елементом. Згідно з цією теорією, небезпечний стан (текучість) у загальному випадку напруженого стану виникає тоді, коли питома потенціальна енергія формозміни досягає свого граничного значення. Останнє можна легко визначити при простому розтяганні в момент настання текучості.

Умова настання текучості —

$$u_ф = u_{ф.т}. \qquad (7.13)$$

Умова міцності —

$$u_ф \le \left[u_ф \right]. \qquad (7.14)$$

Припускаючи, що закон Гука справедливий аж до настання граничного стану, можна питому потенціальну енергію формозміни в загальному випадку напруженого стану записати, згідно з виразом (6.63), у вигляді

$$u_ф = \frac{1+\mu}{3E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \right) \right]. \qquad (7.15)$$

При простому розтяганні в момент текучості $\left(\sigma_1 = \sigma_т;\ \ \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \right)$ маємо

$$u_{ф.т} = \frac{1+\mu}{3E}\sigma_т^2. \qquad (7.16)$$

Отже, умова (7.13) після підставлення виразів (7.15) і (7.16) перетворюється на таку:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \right)} = \sigma_т, \qquad (7.17)$$

або

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2 \right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3 \right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1 \right)^2 \right]} = \sigma_т. \qquad (7.18)$$

Умова міцності має вигляд

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2 \right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3 \right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1 \right)^2 \right]} \le \frac{\sigma_т}{n} = [\sigma]. \qquad (7.19)$$

Отже, еквівалентне напруження за четвертою теорією

$$\sigma_{екв\,IV} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2 \right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3 \right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1 \right)^2 \right]}. \qquad (7.20)$$

Зауважимо, що $\sigma_{екв\,IV}$ збігається з виразом (6.48) для інтенсивності напружень σ_i.

Досліди добре підтверджують четверту теорію для пластичних матеріалів, що однаково працюють на розтягання і стискання. Поява в матеріалі малих пластичних деформацій четвертою теорією визначається більш точно, ніж третьою.

Слід зазначити, що вираз (7.20) з точністю до постійного множника збігається з виразом для дотичного напруження $\tau_{окт}$ на октаедричній площадці, рівнонахиленій до всіх трьох головних напружень (див. § 45). Тому розрахункові рівняння четвертої теорії міцності можна дістати, виходячи з критерію сталості октаедричних дотичних напружень:

$$\tau_{окт} \le [\tau_{окт}],$$

тобто пластична деформація незалежно від виду напруженого стану виникає при певному значенні октаедричного дотичного напруження.

Таке трактування звільняє розглядувану теорію міцності від обмежень, пов'язаних із межами дії закону Гука, і дає змогу встановити умови початку не тільки пластичних деформацій, а й руйнування.

Критерій Мора ґрунтується на припущенні, що міцність матеріалів у загальному випадку напруженого стану залежить в основному від значення і знака найбільшого σ_1 та найменшого σ_3 головних напружень. Середнє за модулем головне напруження, як зазначалося вище, лише неістотно впливає на міцність. Досліди з мідними, нікелевими і чавунними трубками засвідчили, що похибка, яка пов'язана з тим, що не враховується σ_2, не вища за 12...15 %. Виходячи з цього припущення, можна будь-який напружений стан зобразити одним кругом Мора, побудованим на напруженнях σ_1 і σ_3.

Якщо при даних σ_1 і σ_3 міцність матеріалу порушується, то круг, побудований на цих навантаженнях, називають *граничним*. Змінюючи співвідношення між головними напруженнями, дістанемо для даного матеріалу сім'ю граничних кругів (рис. 177). Досліди свідчать, що в міру переходу із зони розтягання в зону стискання опір руйнуванню збільшується. Цьому відповідає збільшення діаметрів граничних кругів у міру руху ліворуч.

Обвідна $ABCDE$ сім'ї граничних кругів обмежує зону міцності (рис. 177). Точка C відповідає всебічному рівномірному розтяганню. Оскільки і при рівномірному всебічному стисканні матеріал здатний, не руйнуючись, витримати дуже великі напруження, то обвідна ліворуч залишається незамкненою.

Якщо гранична обвідна відома, то обчислити міцність досить просто. За визначеними в небезпечній точці деталі значеннями головних напружень σ_1 і σ_3 будують круг.

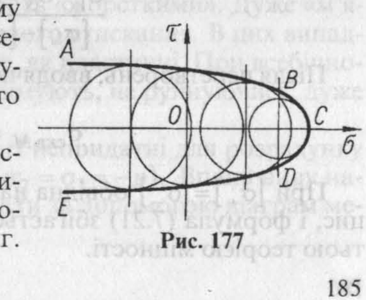


Рис. 177

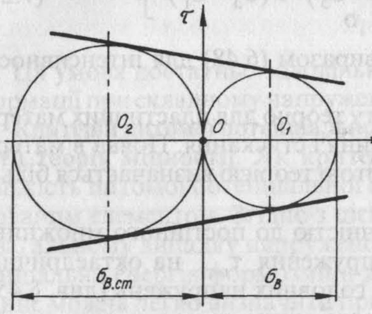


Рис. 178

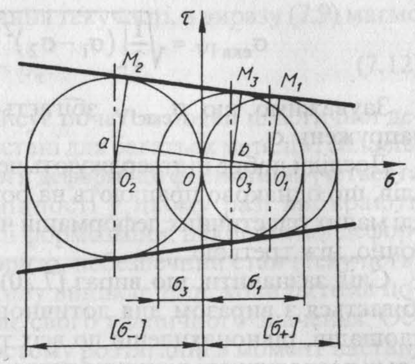


Рис. 179

Міцність буде забезпечена, якщо він цілком ляже всередині обвідної. Збільшуватимемо пропорційно значення головних напружень доти, доки круг, що зображує даний напружений стан, не торкнеться граничних обвідних. Відношення радіусів побудованого таким чином граничного круга і початкового визначить коефіцієнт запасу.

На практиці невелику ділянку обвідної будують на підставі двох дослідів — на розтягання і стискання відповідно до граничних напружень $\sigma_в$ і $\sigma_{в.ст}$, причому граничні криві заміняють прямими лініями, дотичними до кіл (рис. 178). Зменшуючи масштаб креслення в n разів (n — коефіцієнт запасу), дістанемо зону допустимого напруженого стану.

На рис. 179 наведено таку зону для невеликої ділянки обвідної.

Легко здобути умову міцності для проміжного напруженого стану (σ_1, σ_3), центр круга якого O_3 розміщений між точками O_1 і O_2 (рис. 179). Проводимо прямі лінії O_1M_1, O_2M_2 і O_3M_3, сполучаючи центри і точки дотику кіл з обвідними лініями, а також пряму O_1a, паралельну M_1M_2.

З подібності трикутників дістанемо такі залежності:

$$\frac{\overline{O_3b}}{\overline{O_2a}} = \frac{\overline{O_1O_3}}{\overline{O_1O_2}} \text{ або } \frac{\overline{O_3M_3} - \overline{O_1M_1}}{\overline{O_2M_2} - \overline{O_1M_1}} = \frac{\overline{OO_1} - \overline{OO_3}}{\overline{OO_1} + \overline{OO_2}}.$$

Замінивши відрізки ліній значеннями відповідних напружень, матимемо

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3 - [\sigma_+]}{[\sigma_-] - [\sigma_+]} = \frac{[\sigma_+] - (\sigma_1 + \sigma_3)}{[\sigma_+] + [\sigma_-]}.$$

Після перетворень, вводячи знак нерівності, дістанемо умову міцності:

$$\sigma_{екв\,M} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]}\sigma_3 \le [\sigma_+]. \qquad (7.21)$$

При $[\sigma_+] = [\sigma_-]$ обвідна на цій ділянці проходить паралельно осі абсцис, і формула (7.21) збігається з формулою (7.10), яку складено за третьою теорією міцності.

Ґрунтуючись цілком на дослідних даних, теорія Мора взагалі не потребує додаткової експериментальної перевірки. Однак побудувати граничні обвідні для кожного матеріалу можна внаслідок низки складних дослідів із плоскими і об'ємними напруженими станами, що й обмежує її застосування. Крім того, ця теорія, як і третя, не враховує вплив на міцність проміжного напруження σ_2.

Щодо застосовності тієї чи іншої теорії міцності для практичних розрахунків можна зазначити таке.

Руйнування матеріалів відбувається шляхом відриву за рахунок розтягальних напружень або подовжень і шляхом зрізу під дією найбільших дотичних напружень. При цьому руйнування відривом може відбуватися з дуже малими залишковими деформаціями або зовсім без них (крихке руйнування). Руйнування шляхом зрізу відбувається лише після деякої залишкової деформації (в'язке руйнування). Отже, зрозуміло, що першу і другу теорії міцності, які відображають руйнування відривом, можна застосувати лише для матеріалів, що перебувають у крихкому стані. Третю і четверту теорії міцності, які добре відображають настання текучості та руйнування шляхом зрізу, слід застосовувати для матеріалів, що перебувають у пластичному стані.

Теорія міцності Мора дає змогу визначити опір руйнуванню матеріалів, які мають різний опір розтяганню та стисканню. При цьому вітка AB (див. рис. 177) характеризує руйнування від зрізу, а вітка BC — від відриву.

Оскільки перша і друга теорії міцності мають істотні недоліки, то останнім часом панує думка про недоцільність застосування їх. Отже, для практичних розрахунків слід рекомендувати четверту (або третю) теорію міцності для матеріалів з однаковим опором розтяганню та стисканню і теорію Мора — для матеріалів, опір яких розтяганню і стисканню різний, тобто для крихких матеріалів (для них поки що застосовують і другу теорію міцності).

Слід зазначити, що стан матеріалу (крихкий або пластичний) визначається не тільки його властивостями, а й видом напруженого стану, температурою і швидкістю навантажування. Як свідчать досліди, пластичні матеріали за певних умов навантажування і температури поводять себе як крихкі, тоді як крихкі матеріали в певних напружених станах можуть виявляти пластичні властивості. Так, при напружених станах, близьких до всебічного рівномірного розтягання, пластичні матеріали руйнуються, як крихкі. Такі напружені стани називають «жорсткими». Дуже «м'якими» є напружені стани, близькі до всебічного стискання. В цих випадках крихкі матеріали можуть поводити себе, як пластичні. При всебічному рівномірному стисканні матеріали витримують, не руйнуючись, дуже великий тиск.

Зазначимо, що розглянуті теорії міцності непридатні для розрахунку міцності у разі всебічного стискання $(\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p)$. Вплив виду напруженого стану можна наближено врахувати за допомогою діаграм механічного стану, які розглядаються нижче.

§ 50. Поняття про нові теорії міцності

Умови переходу матеріалу в граничний стан, а також умови міцності за різними теоріями були виражені через головні напруження $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, які є інваріантами напруженого стану.

Для тривимірного простору, напрямлюючи осі координат по головних напрямах, зазначені умови можна подати у вигляді деяких граничних поверхонь

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0. \qquad (7.22)$$

Так, гранична поверхня, що відповідає умові появи пластичних деформацій за теорією питомої потенціальної енергії формозміни [див. формулу (7.18)], має вигляд

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2-2\sigma_\tau^2=0. \qquad (7.23)$$

Гранична поверхня (7.23) є круговим циліндром, вісь якого рівнонахилена до координатних осей (рис. 180, *а*), радіусом $r=\sqrt{(2/3)}\,\sigma_\tau$. Для плоского напруженого стану, коли одне з головних напружень дорівнює нулю, умова (7.23) дає еліптичну граничну криву (рис. 180, *б*).

Критерію найбільших дотичних напружень відповідає гранична поверхня у вигляді правильної шестигранної призми, вписаної в циліндр (7.23). Критерію найбільших нормальних напружень відповідає куб із ребром, що дорівнює $\sigma_н$.

Зазначимо, що всі точки, які лежать усередині зони, обмеженої граничною поверхнею, відповідають напруженим станам з коефіцієнтом запасу більшим за одиницю. Напружені стани, які зображені точками поза цієї зони, мають коефіцієнт запасу менший за одиницю.

Недоліки розглянутих теорій, а також поява нових матеріалів були стимулами для розробки нових теорій міцності. Більшість з них ґрунтуються на виборі такої форми граничної поверхні, яка дає змогу найповніше врахувати особливості опору даного класу матеріалів в умовах складного напруженого стану.

Розглянемо деякі нові теорії.

Теорія Ягна. Ю. І. Ягн запропонував граничну поверхню (7.22) взяти у вигляді полінома другого степеня, симетричного відносно всіх трьох головних напружень:

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2+a(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2+$$
$$+b(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)=c, \qquad (7.24)$$

де сталі a, b і c для даного ізотропного матеріалу визначаються з дослідів на одновісне розтягання і стискання та чистий зсув.

Визначивши допустимі напруження $[\sigma_+], [\sigma_-]$ і $[\tau]$ відповідно для розтягання, стискання і зсуву, знаходимо вирази для сталих:

$$a=\frac{6[\tau]^2-2[\sigma_+][\sigma_-]}{[\sigma_+][\sigma_-]};$$

$$b=\frac{6[\tau]^2([\sigma_-]-[\sigma_+])}{[\sigma_+][\sigma_-]}; \quad c=6[\tau]^2.$$

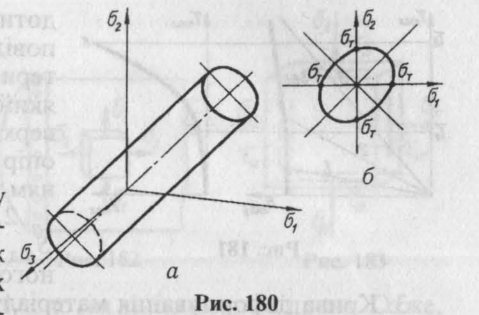


Рис. 180

Отже, теорія Ю. І. Ягна дає змогу врахувати неоднаковий опір матеріалу розтяганню і стисканню, а також опір матеріалу зсуву. При певних співвідношеннях між введеними сталими a, b і c з виразу (7.24) можна здобути низку енергетичних критеріїв міцності, у тому числі і критерій питомої потенціальної енергії формозміни.

Теорія Писаренка і Лебедєва. Виходячи з того, що настання граничного стану обумовлене здатністю матеріалу чинити опір як дотичним, так і нормальним напруженням, автори запропонували шукати критерії міцності у вигляді інваріантних до напружених станів функцій дотичних напружень і максимального нормального напруження. Наприклад, один із таких запропонованих критеріїв має вигляд

$$\tau_{окт}+m_1\sigma_1 \le m_2. \qquad (7.25)$$

Вираз для $\tau_{окт}$ дається формулою (6.47). Сталі m_1 і m_2 матеріалу можна виразити через граничні напруження $\sigma_{+н}, \sigma_{-н}$ при одновісному розтяганні та стисканні. Тоді умова (7.25) набирає вигляду

$$\frac{3}{\sqrt{2}}\chi\tau_{окт}+(1-\chi)\sigma_1 \le \sigma_{+н}, \qquad (7.26)$$

де

$$\chi=\frac{\sigma_{+н}}{\sigma_{-н}}.$$

Для матеріалів, що перебувають у пластичному стані, $\sigma_н=\sigma_{-н}$, $\chi=1$ і формула (7.26) перетворюється на умову граничного стану за четвертою теорією міцності. Для ідеально крихкого матеріалу $\chi=0$, і вираз (7.26) перетворюється на умову руйнування за першою теорією міцності. При $0 \le \chi \le 1$ (переважна більшість реальних матеріалів) гранична поверхня (7.26) є рівнонахиленою до головних осей фігурою, в яку вписано шестигранну піраміду, що відповідає спрощеній теорії міцності Мора [умова (7.21)].

Дослідна перевірка розглянутої теорії показала, що критерій (7.26) добре узгоджується з результатами випробувань широкого класу конструкційних матеріалів.

Діаграми механічного стану (критерій Я. Б. Фрідмана). Вплив типу напруженого стану на характер порушення міцності матеріалів можна наближено врахувати за допомогою діаграм механічного стану. Останні будують на підставі таких положень:

1. Залежно від типу напруженого стану матеріали можуть руйнуватися від розтягальних напружень або подовжень шляхом відриву або від

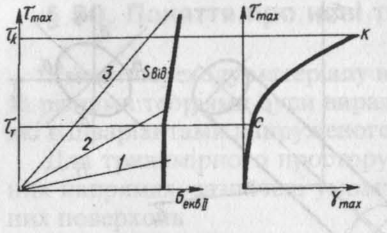


Рис. 181

дотичних напружень шляхом зрізу. Відповідно до цього розрізняють дві характеристики міцності — опір відриву $S_{від}$, який є нормальним напруженням на поверхні руйнування в першому випадку, і опір зрізу τ_K, що є дотичним напруженням у другому випадку.

2. Обидві характеристики міцності $S_{від}$ і τ_K не залежать від типу напруженого стану.

3. Крива деформування матеріалу в координатах $\tau_{max} \sim \gamma_{max}$ також не залежить від напруженого стану.

4. Порушення міцності шляхом відриву описується теорією найбільших відносних подовжень:

$$\sigma_{екв\,II} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = S_{від}, \tag{7.27}$$

а порушення міцності шляхом зрізу — теорією найбільших дотичних напружень:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \tau_K. \tag{7.28}$$

Діаграма механічного стану складається з двох діаграм (рис. 181) — власне діаграми механічного стану (ліворуч) і кривої деформування в координатах $\tau_{max} \sim \gamma_{max}$. При побудові діаграми по осі ординат відкладають найбільше дотичне напруження τ_{max}, а по осі абсцис — найбільше еквівалентне розтягальне напруження за другою теорією міцності $\sigma_{екв\,II}$. На діаграму наносять граничні лінії, що відповідають границі текучості $\tau_т$ при зсуві, опору зрізу τ_K і опору відриву $S_{від}$. Відхилення лінії опору відриву праворуч вище за границю текучості (рис. 181) відповідає зростанню опору відриву з появою залишкових деформацій.

Для характеристики типу напруженого стану вводять коефіцієнт «м'якості», який становить відношення найбільшого дотичного напруження в точці до найбільшого еквівалентного розтягального напруження:

$$\alpha = \frac{\tau_{max}}{\sigma_{екв\,II}}. \tag{7.29}$$

Отже, різні напружені стани зі збільшенням навантаження зображуються на діаграмі променями, тангенси кутів яких дорівнюють відповідному значенню α. Наприклад, при всебічному розтяганні $(\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3)$ $\tau_{max} = 0$, $\alpha = 0$ і промінь збігається з віссю абсцис; при простому розтяганні $(\sigma_1 = \sigma;\ \sigma_2 = \sigma_3 = 0)$

$$\tau_{max} = \sigma/2;\quad \sigma_{екв\,II} = \sigma \quad і \quad \alpha = 1/2;$$

при простому стисканні $(\sigma_1 = \sigma_2 = 0;\ \sigma_3 = -\sigma)$

$$\tau_{max} = \sigma/2;\quad \sigma_{екв\,II} = \mu\sigma;\quad \alpha = 1/(2\mu).$$

Вибравши $\mu = 0{,}25$, знаходимо, що $\alpha = 2$.

Розглядаючи промені, що відповідають різним типам напруженого стану матеріалу, можна наближено визначити вид руйнування і вибрати придатну теорію міцності. Наприклад, промінь *1* на діаграмі перетинає передусім лінію опору відриву. Отже, матеріал зруйнується шляхом відриву без попередньої пластичної деформації. Промінь *2* перетинає спочатку лінію текучості, а потім лінію опору відриву. Отже, при такому напруженому стані руйнування відбудеться шляхом відриву, але з попередньою пластичною деформацією. Для напруженого стану, що відповідає променю *3*, після пластичної деформації руйнування відбудеться шляхом зрізу.

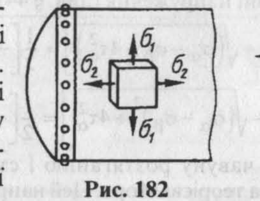


Рис. 182

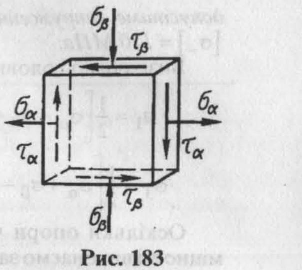


Рис. 183

Тоді, коли промені, що зображують той чи інший складний напружений стан, перетинають передусім лінію опору відриву, розрахунок міцності слід виконувати за теорією Мора, другою або першою теоріями міцності. Якщо спочатку промені перетинають лінію границі текучості, то розрахунок міцності треба робити за четвертою або третьою теорією міцності.

Отже, діаграми механічного стану з певним наближенням відображають залежність форми руйнування від типу напруженого стану. Наближеність побудови полягає в тому, що границя текучості й опір руйнуванню непостійні. Промені, які зображають напружений стан, є прямими лише до досягнення границі текучості.

Приклад 19. *На гранях елемента (рис. 182), вирізаного із циліндричної стінки резервуара, діють напруження $\sigma_1 = 150$ МПа, $\sigma_2 = 75$ МПа, $\sigma_3 = 0$. Резервуар виготовлено з маловуглецевої сталі марки Ст3. Допустиме напруження на розтяг $[\sigma_+] = 160$ МПа. Перевіримо міцність стінки.*

Оскільки матеріал перебуває в пластичному стані, то обчислювати слід за IV або III теорією міцності.

Умова міцності за IV теорією при $\sigma_3 = 0$ має вигляд

$$\sigma_{екв\,IV} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \le [\sigma]. \tag{7.30}$$

Підставляючи у вираз (7.30) значення σ_1 і σ_3, знаходимо

$$\sigma_{екв\,IV} = \sqrt{150^2 + 75^2 - 150 \cdot 75}\ \text{МПа} = 129{,}9\ \text{МПа} < 160\ \text{МПа}.$$

Виходячи з III теорії міцності, маємо

$$\sigma_{екв\,III} = \sigma_1 - \sigma_3 \le [\sigma],$$

або

$$\sigma_{екв\,III} = 150 - 0 < 160.$$

Отже, міцність стінки забезпечено.

Приклад 20. *У небезпечній точці чавунної деталі на гранях виділеного елемента (рис. 183) напруження $\sigma_\alpha = 5$ МПа; $\sigma_\beta = -25$ МПа; $\tau_\alpha = -\tau_\beta = 26$ МПа. Перевіримо міцність, якщо* *допустиме напруження на розтяг* $[\sigma_+] = 35$ *МПа, а допустиме напруження на стиск* $[\sigma_-] = 120$ *МПа.*

Визначимо головні напруження (див. § 44):

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\left[\sigma_\alpha + \sigma_\beta + \sqrt{\left(\sigma_\alpha - \sigma_\beta\right)^2 + 4\tau_\alpha^2}\right] = \frac{1}{2}\left[-20 + \sqrt{30^2 + 4\cdot 26^2}\right]\text{МПа} = 20\text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2}\left[\sigma_\alpha + \sigma_\beta - \sqrt{\left(\sigma_\alpha - \sigma_\beta\right)^2 + 4\tau_\alpha^2}\right] = \frac{1}{2}\left[-20 - \sqrt{30^2 + 4\cdot 26^2}\right]\text{МПа} = -40\text{ МПа}.$$

Оскільки опори чавуну розтяганню і стисканню відрізняються, то перевірку міцності виконаємо за теорією Мора. Цей напружений стан зображується на граничній діаграмі (див. рис. 179) між простим розтяганням і простим стисканням. Отже, для розрахунку міцності можна використати формулу (7.21)

$$\sigma_{\text{екв}\,M} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]}\sigma_3 \le [\sigma_+].$$

Маємо

$$\sigma_{\text{екв}\,M} = 20 + \frac{35}{120}40 = 31{,}7\text{ МПа} < 35\text{ МПа}.$$

Розрахунок за теорією найбільших відносних подовжень, враховуючи, що $\sigma_2 = 0$, дає:

$$\sigma_{\text{екв II}} = \sigma_1 - \mu\sigma_3 \le [\sigma].$$

Для $\mu = 0{,}25$

$$\sigma_{\text{екв II}} = 20 + 0{,}25\cdot 40 = 30\text{ МПа} < 35\text{ МПа}.$$

Приклад 21. *На гранях елемента (рис. 184), виділеного в небезпечній точці стрижня, який зазнав згинання, напруження*

$$\sigma_\alpha = \sigma;\ \ \sigma_\beta = 0;\ \ \tau_\alpha = \tau;\ \ \tau_\beta = -\tau.$$

Визначимо еквівалентні (розрахункові) напруження за чотирма теоріями міцності.

Обчислюємо головні напруження в небезпечній точці за формулами (6.21):

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right);\ \ \sigma_3 = \frac{1}{2}\left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right).$$

Тоді еквівалентні напруження й умови міцності набирають такого вигляду:

а) за I теорією

$$\sigma_{\text{екв I}} = \sigma_1 = \frac{1}{2}\left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right) \le [\sigma]; \tag{7.31}$$

б) за II теорією

$$\sigma_{\text{екв II}} = \sigma_1 - \mu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right) = \frac{1-\mu}{2}\sigma + \frac{1+\mu}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma], \tag{7.32}$$

або, взявши $\mu = 0{,}3$, знаходимо

$$\sigma_{\text{екв II}} = 0{,}35\sigma + 0{,}65\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma]; \tag{7.33}$$

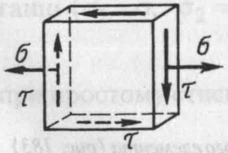


Рис. 184

в) за III теорією

$$\sigma_{\text{екв III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma]; \tag{7.34}$$

г) за IV теорією

$$\sigma_{\text{екв IV}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right]} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \le [\sigma]. \tag{7.35}$$

Розділ 8 ЗСУВ

§ 51. Зсув. Розрахунок на зріз

Деформація зсуву відбувається тоді, коли з шести компонент головного вектора сили та головного вектора моменту внутрішніх зусиль не дорівнюють нулю тільки поперечні сили Q_y або Q_z. З достатнім ступенем наближення деформацією зсуву (зрізу) практично можна вважати випадок, коли на розглядуваний стрижень з протилежних боків на вельми близькій відстані одна від одної діють дві однакові сили, перпендикулярні до осі стрижня й напрямлені в протилежні боки. Прикладом такого навантаження може бути розрізання ножицями прутів, штаби і т. ін. (рис. 185). Зазначимо, що на практиці зсув у чистому вигляді спостерігати досить важко, оскільки деформація зсуву супроводжується іншими видами деформацій і найчастіше — згинанням.

Формули для напружень при розрахунку на зріз стрижневих елементів конструкцій можна дістати, виходячи, наприклад, з випадку навантаження, наведеного на рис. 185. Використовуючи метод перерізів, знаходимо, що на відрізку bc поперечна сила

$$Q_y = P. \tag{8.1}$$

Опускаючи надалі індекс при Q, установимо зв'язок між поперечною силою й напруженням, яке діє в даному перерізі. З формули (3.30)

$$\int_F \tau dF = Q. \tag{8.2}$$

Вважаючи, що дотичні напруження τ рівномірно розподілені по площі поперечного перерізу F (рис. 186), на підставі формул (8.1) та (8.2) мати-

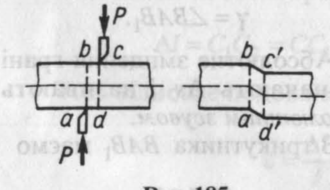


Рис. 185

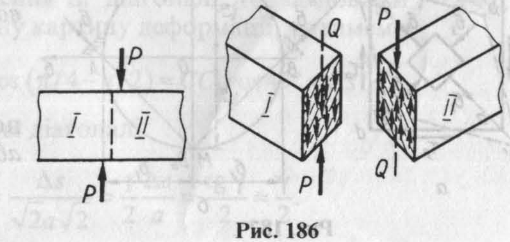


Рис. 186

мемо $Q = P = \tau F$, звідки

$$\tau = P / F. \tag{8.3}$$

Припущення про рівномірний розподіл дотичних напружень по перерізу, як буде показано далі, досить умовне. Проте це припущення в багатьох випадках справедливе, тому в інженерній практиці його широко використовують при розрахунку болтових, заклепочних та зварних з'єднань, шпонок та інших деталей.

§ 52. Чистий зсув

При розрахунках деяких елементів конструкцій трапляються випадки плоского напруженого стану, коли на чотирьох гранях прямокутного елемента діють тільки дотичні напруження (рис. 187, *а*). Такий напружений стан називається *чистим зсувом*.

Знайдемо головні напруження та їхні напрями при такому напруженому стані. Для цього скористаємося побудовою круга напружень (рис. 187, *б*). Оскільки в цьому разі $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 0$; $\tau_\alpha = -\tau$; $\tau_\beta = \tau$, то, побудувавши круг напружень, знаходимо

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau, \tag{8.4}$$

а головні площадки нахилені до граней елемента на кут 45°.

Третя головна площадка збігається з ненавантаженою фасадною гранню елемента, отже,

$$\sigma_2 = 0. \tag{8.5}$$

Розглянемо деформацію елемента *abcd* (рис. 187, *а*). Оскільки по гранях елемента немає нормальних напружень, то вздовж граней немає і лінійних подовжень. Водночас діагональ *ac*, яка збігається з напрямом σ_1, подовжується, а діагональ *bd*, що збігається з напрямом стискального напруження σ_3, укорочується. Внаслідок цього квадрат *abcd* перетворюється на ромб *a'b'c'd'*.

Отже, деформація чистого зсуву характеризується зміною початкових прямих кутів. Заради більшої наочності можна закріпити одну з граней елемента (рис. 188). Малий кут γ, на який змінюється початковий прямий кут, називається *кутом зсуву* або *відносним зсувом*. З рис. 188 випливає, що

$$\gamma = \angle BAB_1.$$

Абсолютне зміщення грані позначають Δs і називають *абсолютним зсувом*.

З трикутника BAB_1 маємо

$$\operatorname{tg}\gamma = \gamma.$$

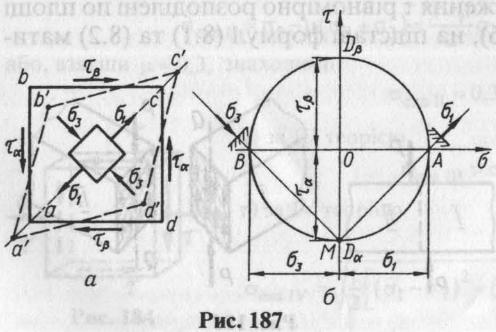


Рис. 187

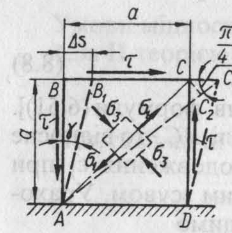


Рис. 188

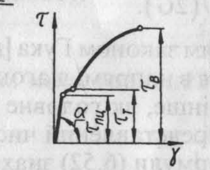


Рис. 189

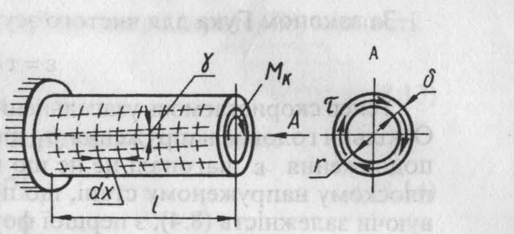


Рис. 190

Ураховуючи малість кута γ, можна вважати, що

$$\operatorname{tg}\gamma = \Delta s / a,$$

тоді

$$\gamma = \Delta s / a. \tag{8.6}$$

Закон Гука при чистому зсуві. Залежність між навантаженням та деформацією при зсуві можна простежити за так званою *діаграмою зсуву* (рис. 189). Для пластичних матеріалів вона схожа на діаграму розтягання. На діаграмі рис. 189 показано характеристики міцності: границю пропорційності $\tau_{пц}$, границю текучості $\tau_т$ та границю міцності $\tau_в$.

Експериментально діаграму зсуву можна зняти при скручуванні тонкостінної труби (рис. 190). Дійсно, уявно виділений елемент стінки труби (комірка ортогональної сітки, яку попередньо нанесено на поверхню труби) перебуває в умовах чистого зсуву, що характеризується напруженим станом, аналогічним наведеному на рис. 188. Розглядаючи деформацію цього елемента в межах пружності, визначимо, що між відносним зсувом та дотичним напруженням, що діють по гранях елемента, згідно з діаграмою зсуву (див. рис. 189), існує лінійна залежність, яку можна виразити формулою

$$\gamma = \tau / G, \quad \text{або} \quad \tau = G\gamma, \tag{8.7}$$

де G — коефіцієнт пропорційності, який називається *модулем пружності при зсуві* або *модулем пружності другого роду* і виражається в мегапаскалях (або паскалях). Значення модуля G для деяких матеріалів наведено в дод. 9.

Для ізотропних матеріалів між модулем пружності G при зсуві та модулем пружності E при розтяганні існує певна залежність. Для визначення її розглянемо деформацію елемента в умовах чистого зсуву (див. рис. 188). Знайдемо спочатку подовження Δl діагоналі AC завдовжки $l = a\sqrt{2}$.

Розглядаючи геометричну картину деформації, матимемо

$$\Delta l = C_1C_2 = CC_1 \cos(\pi/4 - \gamma/2) \approx CC_1 \cos 45° = \Delta s / \sqrt{2}.$$

Тоді відносне подовження діагоналі

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta s}{\sqrt{2}a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\frac{\Delta s}{a} = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{2} \approx \frac{\gamma}{2}.$$

За законом Гука для чистого зсуву $\gamma = \tau / G$, тому

$$\varepsilon = \tau/(2G). \tag{8.8}$$

Тепер скористаємось узагальненим законом Гука [див. формули (6.51)]. Оскільки головне напруження σ_1 діє в напрямі діагоналі AC, то відносне подовження ε діагоналі це не що інше, як головне подовження ε_1 при плоскому напруженому стані, що представлений чистим зсувом. Ураховуючи залежність (8.4), з першої формули (6.52) знаходимо

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \frac{1+\mu}{E}\tau. \tag{8.9}$$

Зіставляючи праві частини формул (8.8) та (8.9), дістаємо шукану залежність

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \tag{8.10}$$

Якщо $\mu = 1/3...1/4$, то $G = (0{,}375...0{,}4)E$.

Запишемо вираз для зміщення однієї грані відносно іншої (тобто абсолютного зсуву Δs) при чистому зсуві. Позначаючи площу грані F, рівнодійну зсувальної сили $Q = F\tau$ та відстань між гранями, які зсуваються, через a (див. рис. 188), матимемо

$$\Delta s = \gamma a = \frac{\tau}{G}a = \frac{Qa}{GF},$$

тобто

$$\Delta s = \frac{Qa}{GF}. \tag{8.11}$$

Формула (8.11) виражає закон Гука для абсолютного зсуву. Повна потенціальна енергія деформації елемента при чистому зсуві

$$U = \frac{\Delta s Q}{2} = \frac{Q^2 a}{2GF},$$

а питома потенціальна енергія деформації при зсуві

$$u = \frac{U}{V} = \frac{Q^2 a}{2GF \cdot aF} = \frac{Q}{2F^2 G},$$

або

$$u = \frac{\tau^2}{2G}. \tag{8.12}$$

Перевірка міцності й допустимих напружень при чистому зсуві. Перевіримо міцність елемента, що зазнає деформації чистого зсуву (див. рис. 187, *а*). Дотичні напруження на гранях елемента дорівнюють τ, допустиме напруження для матеріалу при розтяганні — $[\sigma]$.

Як уже зазначалося, головні напруження при чистому зсуві

$$\sigma_1 = \tau; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -\tau.$$

Умови міцності залежатимуть від вибору теорії (критерію) міцності.

1.За II теорією міцності

$$\sigma_1 - \mu\sigma_3 \le [\sigma]. \tag{8.13}$$

Підставляючи значення головних напружень, знаходимо

$$\tau \le \frac{[\sigma]}{1+\mu}. \tag{8.14}$$

Права частина формули (8.14) є допустимим напруженням при чистому зсуві:

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{1+\mu}. \tag{8.15}$$

Для металів $\mu = 0{,}25...0{,}42$. Отже, за II теорією міцності

$$[\tau] = (0{,}7...0{,}8)[\sigma]. \tag{8.16}$$

2. За III теорією міцності

$$\sigma_1 - \sigma_3 \le [\sigma],$$

або

$$\tau - (-\tau) \le [\sigma],$$

звідки

$$\tau \le [\sigma]/2 = [\tau], \tag{8.17}$$

тобто

$$[\tau] = 0{,}5[\sigma]. \tag{8.18}$$

3. За IV теорією міцності

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3} \le [\sigma].$$

Підставляючи у формулу (8.18) головні напруження, матимемо

$$\tau \le [\sigma]/\sqrt{3}. \tag{8.19}$$

Отже,

$$[\tau] = [\sigma]/\sqrt{3} \approx 0{,}6[\sigma]. \tag{8.20}$$

Добуті значення допустимих напружень застосовують також і при розрахунках на міцність деталей, які зазнають деформації зрізу (болти, заклепки, шпонки тощо). Зазначимо, що для пластичних матеріалів найбільше підходить формула (8.20), яка випливає з енергетичної теорії формозміни. При використанні цієї формули для допустимих напружень на розтяг слід вибирати відповідні значення. Наприклад, для сталі марки Ст3 допустиме напруження на розтяг та стиск при статичному навантаженні $[\sigma] = 160$ МПа. Тоді, згідно з формулою (8.20),

$$[\tau] = 0{,}6 \cdot 160 = 96 \text{ МПа} \approx 100 \text{ МПа}.$$

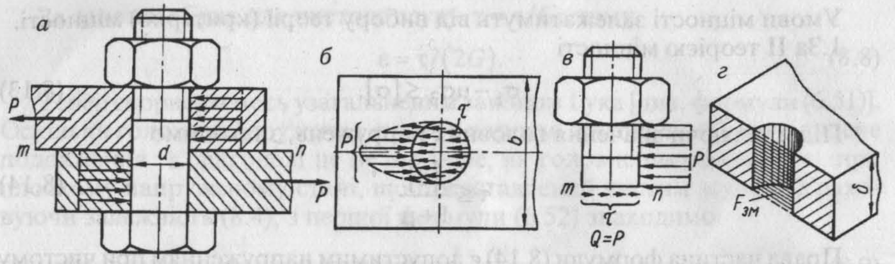


Рис. 191

Умова міцності на зсув (зріз) може бути записана у звичайному вигляді:

$$\tau_{\max} = Q_{\max} / F \le [\tau]. \qquad (8.21)$$

Взагалі слід мати на увазі, що значення допустимих напружень на зріз $[\tau]$ залежать від властивостей матеріалу, характеру навантаження та типу елементів конструкції. Підстави для вибору допустимих напружень на зсув τ наведено вище, а конкретні їхні значення для деяких матеріалів стосовно заклепочних та зварних з'єднань містяться в дод. 11.

Застосування наведеної теорії зсуву проілюструємо на прикладі розрахунку болтового з'єднання (рис. 191).

Сили P намагаються зсунути листи один відносно одного. Цьому перешкоджає болт, на який з боку кожного листа передаються розподілені по контактній поверхні сили (рис. 191, *а* та *б*). Рівнодійні останніх, що дорівнюють P, напрямлені протилежно (рис. 191, *а*). Зусилля намагаються зрізати болт по площині поділу листів $m-n$, оскільки в цьому перерізі діє найбільша поперечна сила $Q = P$ (рис. 191, *в*). Вважаючи, що дотичні напруження розподілені по перерізу болта рівномірно, матимемо

$$\tau = \frac{Q}{F} = \frac{P}{\pi d^2 / 4}.$$

Отже, умова міцності болта на зріз набирає вигляду

$$\tau_{\max} = \frac{4P}{\pi d^2} \le [\tau]. \qquad (8.22)$$

Звідси можна знайти діаметр болта, який забезпечує міцність болтового з'єднання:

$$d \ge \sqrt{\frac{4P}{\pi[\tau]}}.$$

Слід зауважити, що сили P, прикладені до болта, намагаються також зігнути його. Проте згинальний момент невеликий, і спричиненими ним

нормальними напруженнями можна знехтувати, тим більше що при збільшенні зовнішніх сил P руйнування з'єднання відбудеться від зрізу болта.

При розрахунку болтових, заклепочних та інших подібних з'єднань слід ураховувати те, що навантаження, прикладені до елементів з'єднань, крім зрізу спричинюють зминання поверхні болта в місті його контакту з листом. Під зминанням розуміють пластичну деформацію, яка виникає на поверхнях контакту.

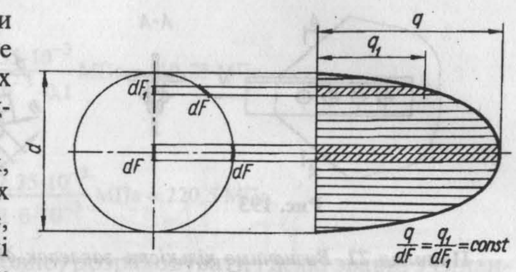


Рис. 192

Розрахунок на зминання також виконують наближено, оскільки закон розподілу тиску по поверхні контакту точно не відомий. Як правило, вибирають криволінійний закон розподілу навантажень (рис. 192), вважаючи, що тиск q по діаметру d змінюється пропорційно зміні проекції площадки dF циліндричної поверхні на діаметральну площину:

$$\frac{q}{q_1} = \frac{dF}{dF_1}.$$

Тоді максимальне напруження зминання на циліндричних поверхнях

$$\sigma_{зм} = P / F_{зм},$$

де $F_{зм}$ — площа проекції поверхні контакту на діаметральну площину листа завтовшки δ (рис. 191, *г*):

$$F_{зм} = d\delta. \qquad (8.23)$$

Умова міцності на зминання має вигляд

$$\sigma_{зм} = \frac{P}{d\delta} \le [\sigma_{зм}]. \qquad (8.24)$$

Допустиме напруження на зминання визначають дослідженнями і вибирають його таким, що дорівнює $\sigma_{зм} = (2...2,5)[\sigma_-]$.

На підставі залежності (8.24) маємо

$$d \ge \frac{P}{\delta[\sigma_{зм}]}.$$

Для забезпечення умов міцності на зріз та зминання потрібно з двох знайдених діаметрів взяти більший, округливши його до стандартного значення.

Ураховуючи, що отвори для болтів чи заклепок ослаблюють листи, останні перевіряють на розрив у найбільш ослаблених перерізах. Якщо болт один (див. рис. 191), умова міцності матиме вигляд

$$\sigma = \frac{P}{F_{\min}} = \frac{P}{\delta(b-d)} \le [\sigma_+]. \qquad (8.25)$$

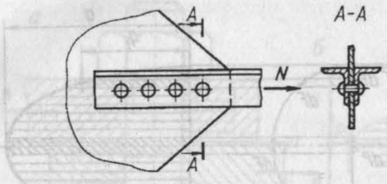


Рис. 193

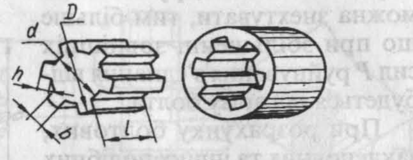


Рис. 194

Приклад 22. *Визначимо кількість заклепок діаметром $d = 23$ мм для закріплення розкосу ферми, який складається з двох нерівнобоких кутників $90 \times 56 \times 8$, до фасонного листа (косинки) завтовшки $\delta = 1{,}2$ см (рис. 193). Розтягальне зусилля в розкосі $N = 300$ кН, матеріал – Ст3, отвори для заклепок продавлено.*

Припускаючи, що зусилля між заклепками розподіляються рівномірно, і зважаючи на те, що вони зазнають подвійного зрізу (одночасно по двох перерізах), кількість заклепок z знайдемо з умови міцності на зріз

$$\tau = \frac{N}{2z\dfrac{\pi d^2}{4}} \le [\tau]$$

або з умови міцності на зминання

$$\sigma_{\text{зм}} = \frac{N}{z\delta d} \le [\sigma_{\text{зм}}].$$

Ураховуючи, що для сталі можна взяти $[\tau] = 100$ МПа і $[\sigma_{\text{зм}}] = 280$ МПа, знайдемо:

а) з розрахунку на зріз

$$z \ge \frac{N}{2\dfrac{\pi d^2}{4}[\tau]} = \frac{300 \cdot 10^{-3}}{2\dfrac{3{,}14\left(2{,}3 \cdot 10^{-2}\right)^2}{4}100} = 3{,}6;$$

б) з розрахунку на зминання

$$z \ge \frac{N}{\delta d[\sigma_{\text{зм}}]} = \frac{300 \cdot 10^{-3}}{1{,}2 \cdot 2{,}3 \cdot 10^{4} \cdot 280} = 3{,}9.$$

Вибираємо кількість заклепок $z = 4$.

У розрахунку на зминання взято товщину фасонного листа $\delta = 1{,}2$ см, оскільки сумарна товщина полиць двох кутників $2\delta = 1{,}6$ см, а отже, напруження зминання в заклепках у місцях контакту з кутниками буде меншим, ніж у місцях контакту з косинкою (вважається, що матеріал заклепок м'якіший, ніж матеріал з'єднуваних елементів).

Приклад 23. *Вал передає крутний момент $M_{\text{кр}} = 27$ кН · м за допомогою шліцьового з'єднання (рис. 194). Діаметр вала $D = 80$ мм, внутрішній діаметр $d = 68$ мм, висота шліца $h = 6$ мм, ширина шліца $b = 12$ мм, довжина з'єднання $l = 100$ мм. Кількість шліців $z = 6$. Визначимо напруження зрізу та зминання шліца.*

Вважаючи, що всі шліци навантажені однаково, знайдемо зусилля, яке припадає на один шліц:

$$P_1 = \frac{M_{\text{кр}}}{\dfrac{d}{2}z} = \frac{27 \cdot 2}{6{,}8 \cdot 10^{-2} \cdot 6} \text{ кН} = 132{,}35 \text{ кН}.$$

Напруження зрізу

$$\tau = \frac{P_1}{bl} = \frac{132{,}35 \cdot 10^{-3}}{12 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}1} \text{ МПа} = 110{,}25 \text{ МПа}.$$

Напруження зминання

$$\sigma_{\text{зм}} = \frac{P_1}{lh} = \frac{132{,}35 \cdot 10^{-3}}{0{,}1 \cdot 6 \cdot 10^{-3}} \text{ МПа} = 220{,}5 \text{ МПа}.$$

На зріз прийнято (також умовно) розраховувати і деякі зварні з'єднання. Виготовляючи металеві конструкції, як відомо, часто застосовують зварювання електричною дугою. Якщо конструкцію з'єднання, матеріали та технологію зварювання вибрано правильно, то зварне з'єднання за надійністю не поступається заклепочному при дії як статичних, так і динамічних навантажень. Крім того, з'єднання елементів конструкції за допомогою зварювання має багато переваг, основна з яких — економічність.

Найпоширенішими є стикові з'єднання та за допомогою кутових, або валикових, швів. Стикові з'єднання застосовують, якщо листи розміщені в одній площині. Якщо листи завтовшки $\delta \le 8$ мм, їхні кромки не обробляють (рис. 195, *а*); при $\delta = 8...20$ мм кромки скошують і заварюють листи з одного боку (V-подібний шов, рис. 195, *б*); при $\delta \ge 20$ мм кромки скошують з двох боків (X-подібний шов, рис. 195, *в*). Розрахункову товщину шва вибирають такою, що дорівнює товщині листа δ, напливи не враховують.

З'єднання за допомогою кутових швів роблять, коли з'єднувані листи паралельні або перпендикулярні. До них належать з'єднання внапуск і таврові. Якщо напрям кутового шва перпендикулярний до напряму дії зусилля, то шов називається *лобовим* (*торцевим*). Шви, паралельні зусиллям, мають назву *флангових* (*бокових*). Застосовують також скісні шви (рис. 196), напрямлені під кутом до напряму дії зусилля. На рис. 197 зображено з'єднання листів внапуск лобовими швами, на рис. 198 — з'єднання з накладками, які приварено фланговими швами, а на рис. 199 — таврове з'єднання.

Рис. 195

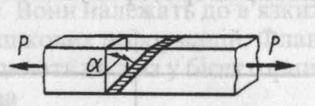


Рис. 196

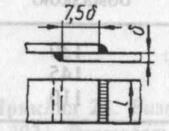


Рис. 197

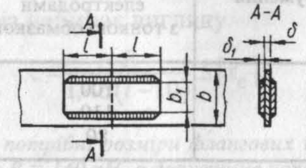


Рис. 198

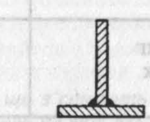


Рис. 199

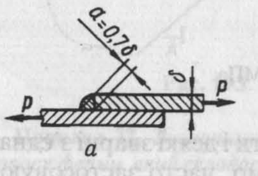


Рис. 200

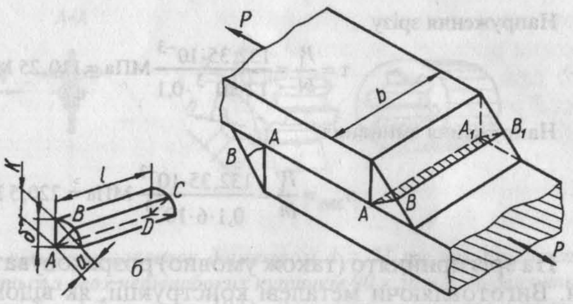


Рис. 201

Якщо не враховувати напливи, то в розрізі кутовий шов має форму рівнобедреного прямокутного трикутника (рис. 200, *а*). Руйнування шва відбуватиметься по його мінімальному перерізу $ABCD$ (рис. 200, *б*) заввишки

$$a = \delta \cos 45° \approx 0{,}7\delta.$$

Розрахункова площа перерізу шва

$$F_e = al = 0{,}7\delta l,$$

де l — розрахункова довжина шва.

Зварні з'єднання, як і заклепочні, умовно розраховують у припущенні рівномірності розподілу напружень по перерізу шва. В табл. 11 наведено деякі значення допустимих напружень для зварних з'єднань. Дані цієї таблиці можна використовувати тільки для конструкцій, виготовлених із сталі марки Ст3.

Незважаючи на розрахунки усіх видів зварних швів, розглянемо на прикладах розрахунок тільки лобових та флангових швів, тобто таких, які в основному мають протидіяти дотичним напруженням.

Враховуючи, що опір сталі зрізу менший, ніж розтяганню, складовою нормального напруження в лобовому шві нехтуємо і розраховуємо його умовно на зріз, припускаючи, що дотичні напруження рівномірно розподі-

Таблиця 11

Вид напруження	Позначення допустимого напруження	Допустиме напруження, МПа	
		Ручне зварювання електродами з тонкою обмазкою	Автоматичне зварювання та ручне зварювання електродами з товстою обмазкою
Розтяг	$[\sigma_e]$	100	130
Стиск	$[\sigma_e]$	110	145
Зріз	$[\tau_e]$	80	110

П р и м і т к а. Індекс «е» означає, що вироби зварюються електричною дугою.

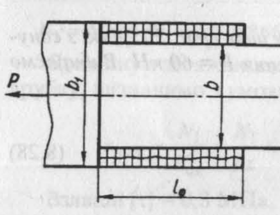


Рис. 202

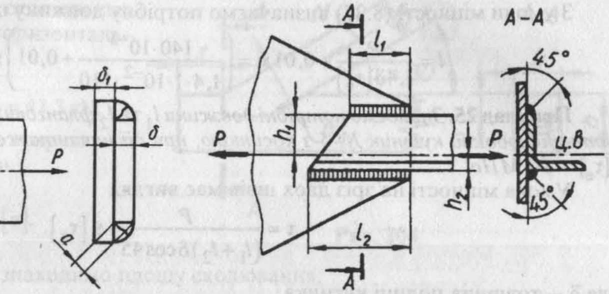


Рис. 203

лені по площі перерізу AA_1B_1B (рис. 201). При цьому для з'єднання внапусток у розрахунок вводимо обидва шви — верхній і нижній. Тоді, припустивши, що обидва шви працюють в однакових умовах, маючи загальну площу небезпечного перерізу

$$F_e = 2al_т = 1{,}4\delta l_т,$$

де $l_т$ — розрахункова довжина торцевого шва, умову міцності шва запишемо в такому вигляді:

$$\tau = \frac{P}{F_e} = \frac{P}{1{,}4\delta l_т} \le [\tau_e]. \qquad (8.26)$$

Оскільки на початку та в кінці шва внаслідок непровару його якість погіршується, дійсну його довжину збільшуємо порівняно з розрахунковою на 10 мм, тобто $l = l_т + 10$, де l — дійсна довжина шва (на рис. 201 $l = b$).

Зазначимо, що внаслідок невеликої деформативності матеріалу шва в напрямі дії сили лобові шви жорсткі, тому вони руйнуються при дуже малих залишкових деформаціях і погано протидіють повторно-змінним та ударним навантаженням.

Більш поширені на практиці флангові шви. Вони належать до в'язких, оскільки руйнуються лише після великих залишкових деформацій. Флангові шви завжди ставлять парами; ці шви працюють на зріз у бісекторних перерізах (рис. 202). Площа зрізу кожного шва

$$al_ф = 0{,}7\delta(l - 10).$$

Умова міцності на зріз набирає вигляду

$$\tau = \frac{P}{1{,}4\delta(l-10)} \le [\tau_e]. \qquad (8.27)$$

Приклад 24. *Визначимо потрібні розміри флангових швів, що з'єднують штаби (рис. 202). Розтягальна сила P = 140 кН, а допустиме напруження на зріз для металу шва* $[\tau_e]$ *= 110 МПа;* δ *= 1 см;* δ_1 *= 0,8 см; b = 10 см;* b_1 *= 12,5 см.*

З умови міцності (8.27) визначаємо потрібну довжину шва:

$$l = \frac{P}{1{,}4\delta[\tau_e]} + 0{,}01\ \text{м} = \left(\frac{140 \cdot 10^{-3}}{1{,}4 \cdot 1 \cdot 10^{-2} \cdot 110} + 0{,}01\right) \text{м} = 10{,}1\ \text{см}.$$

Приклад 25. *Знайдемо потрібні довжини l_1 та l_2 флангових швів (рис. 203), які з'єднують рівнобокий кутник № 5 з косинкою, при дії навантаження P = 60 кН. Вибираємо $[\tau_e]$ = 90 МПа.*

Умова міцності на зріз двох швів має вигляд

$$\tau = \frac{P}{(l_1 + l_2)\delta \cos 45^\circ} \le [\tau_e], \qquad (8.28)$$

де δ —товщина полиці кутника.

Загальна довжина швів при δ = 5 мм

$$l_1 + l_2 \ge \frac{P}{\delta \cos 45^\circ [\tau_e]} = \frac{60 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}7 \cdot 90}\ \text{м} = 19\ \text{см}.$$

Щоб забезпечити однакові умови роботи обох швів, треба співвідношення для швів вибрати зворотним співвідношенню відстаней h_1 та h_2, що визначають положення центра ваги кутника, через який проходить сила P, тобто $l_1/l_2 = h_2/h_1$. При h_1 = 3,6 см та h_2 = 1,4 см

$$l_1 / l_2 = 1{,}4/3{,}6 \approx 0{,}4;\quad l_2 = 19/1{,}4 \approx 13{,}5\ \text{см};\quad l_1 = 19 - 13{,}5 = 5{,}5\ \text{см}.$$

На завершення розглянемо приклад розрахунку врубки, яку використовують для з'єднання дерев'яних елементів конструкцій. Деревина — матеріал анізотропний, тобто її механічні характеристики залежать від напряму силових дій відносно орієнтації поздовжніх волокон (границя міцності для сосни вздовж волокон 40, впоперек — 5 МПа, для дуба відповідно 50 та 15 МПа). Внаслідок цього допустимі напруження для різних напрямів дії сили доводиться вибирати різними (табл. 12).

Приклад 26. *Розрахуємо з'єднання кроквяної ноги з кроквяною затяжкою (рис. 204). Кут між осями кроквяної ноги і затяжки $\alpha = 30°$. Зусилля, що діє вздовж кроквяної ноги, N = 50 кН. Матеріал — сосна, допустиме напруження на зминання вздовж волокон — 8 МПа. Переріз ноги крокви $h \times b$ = 20 × 20 см.*

Таблиця 12

Вид напруження	Позначення допустимого напруження	Допустиме напруження, МПа	
		Сосна	Дуб
Розтяг	$[\sigma_р]$	10	13
Стиск уздовж волокон і зминання торця	$[\sigma_{ст}]$	12	15
Зминання у врубках уздовж волокон	$[\sigma_{зм}]$	8	11
Те саме, перпендикулярно до волокон (на довжині більшій ніж 10 см)	$[\sigma_{зм\ 90°}]$	2,4	4,8
Сколювання у врубках уздовж волокон	$[\tau_{ск}]$	0,5...1,0	0,8...1,4
Те саме, поперек волокон	$[\tau_{ск\ 90°}]$	0,6	0,8
Згин	$[\sigma_{зг}]$	12	15
Сколювання при згині	$[\tau_{ск.зг}]$	2	2,8

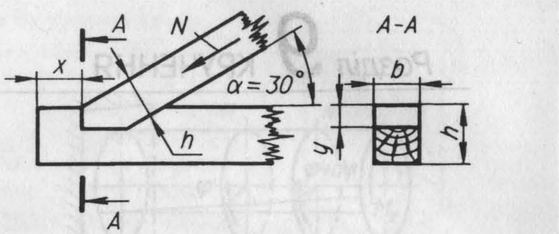


Рис. 204

Кінець затяжки зазнає сколювання вздовж волокон під дією горизонтальної проекції N_1 сили N:

$$N_1 = N \cos 30° = 50 \cdot 0{,}866 = 43{,}3\ \text{кН}.$$

Довжину x затяжки, що стирчить за врубку, визначимо з умови

$$\tau_{max} = \frac{N_1}{F_{ск}} = \frac{N_1}{bx} \le [\tau].$$

Взявши $[\tau]$ = 0,8 МПа, знаходимо площу сколювання:

$$F_{ск} \ge \frac{N_1}{[\tau]} = \frac{43{,}3 \cdot 10^{-3}}{0{,}8}\ \text{м}^2 = 0{,}0541\ \text{м}^2 = 541\ \text{см}^2.$$

Тоді

$$x = \frac{F_{ск}}{b} = \frac{541}{20}\ \text{см} = 27{,}1\ \text{см}.$$

Потрібна площа зминання врубки

$$F_{зм} = \frac{N_1}{[\sigma_{зм}]} = \frac{43{,}3 \cdot 10^{-3}}{8}\ \text{м}^2 = 5{,}41 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^2 = 54{,}1\ \text{см}^2.$$

Глибина врубки

$$y = \frac{F_{зм}}{b} = \frac{54{,}1}{20}\ \text{см} = 2{,}71\ \text{см}.$$

Беремо y = 3 см.

Розділ 9 КРУЧЕННЯ

§ 53. Напруження і деформації при крученні. Умови міцності й жорсткості

Як уже зазначалося (див. § 2), деформація кручення спричинюється парами сил, площини дії яких перпендикулярні до осі стрижня. Тому при крученні в довільному поперечному перерізі стрижня з шести внутрішніх силових факторів має місце тільки один — крутний момент $M_{кр}$ (рис. 205). Як свідчать досліди, поперечні перерізи стрижня при крученні повертаються один відносно одного навколо осі стрижня, при цьому довжина стрижня не змінюється.

Стрижні, що працюють на кручення, як правило, називають *валами*. Розглядаючи кручення вала (наприклад, за схемою, наведеною на рис. 206), легко визначити, що під дією скручувального моменту, прикладеного на вільному кінці, будь-який переріз на відстані x від місця закріплення повертається відносно закріпленого перерізу на певний кут φ — *кут закручування*. При цьому чим більший скручувальний момент $M_к$, тим більший і кут закручування. Залежності $\varphi = f(M_к)$, які називаються *діаграмами кручення*, можна дістати експериментально на відповідних випробувальних машинах за допомогою спеціального записувального пристрою. Вигляд такої діаграми (знятої при поступовому збільшенні навантаження аж до руйнування) для вала завдовжки l, виготовленого з пластичного матеріалу, наведено на рис. 207.

Розглядаючи діаграму кручення, неважко переконатися, що вона дещо подібна до діаграми розтягання — характерні ділянки та точки аналогічні тим, які є на діаграмі розтягання: $M_{пц}$ — момент, до якого зберігається прямолінійна залежність між навантаженням та деформацією; $M_т$ — момент, що відповідає початку текучості; $M_в$ — крутний момент, який спричинює руйнування вала.

Надалі в цьому параграфі при виведенні формул для визначення напружень та кута закручування нас буде цікавити відрізок діаграми кручення, який відповідає роботі матеріалу в межах пропорційності, тобто початковий прямолінійний відрізок, який характеризує лінійну залежність між крутним моментом і кутом закручування, що має місце при нормальних умовах роботи вала.

Для визначення напружень у поперечних перерізах стрижня розглянемо насамперед *статичний аспект задачі.* Оскільки при крученні $M_{кр}$ —

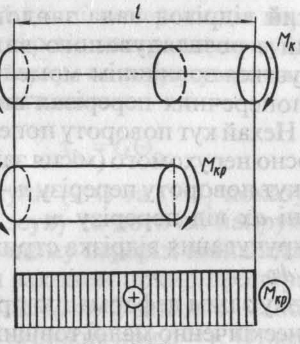


Рис. 205

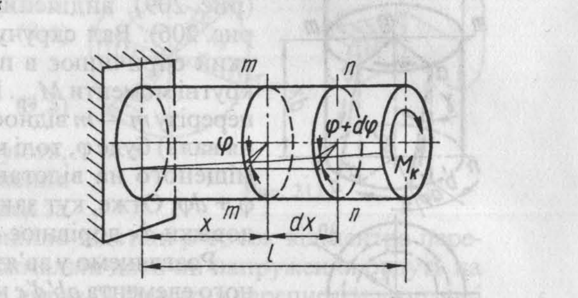


Рис. 206

єдиний внутрішній силовий фактор у поперечному перерізі вала, є підстава вважати, що тут діють тільки дотичні напруження. Тоді п'ять інтегральних рівнянь (3.29) — (3.33) тотожно перетворюються на нуль, а рівняння (3.34) набирає вигляду

$$\int_F \rho\tau dF = M_{кр}, \tag{9.1}$$

де τ — дотичне напруження, що діє на елементарній площадці dF, розміщеній на довільній відстані ρ від центра перерізу (рис. 208, *б*).

Характер розподілу напружень по перерізу з'ясуємо, розглянувши *геометричну картину деформації* вала при крученні. Для цього на поверхні круглого вала нанесемо ортогональну сітку, утворену лініями, паралельними осі, та лініями, що є паралельними колами (рис. 208, *а*). Після прикладання скручувального моменту спостерігаємо таке: поздовжні прямі лінії перетворюються на гвинтові, тобто лінії однаково нахилені до осі стрижня, паралельні кола не викривляються і відстань між ними практично залишається незмінною; радіуси, проведені в торцевих перерізах, залишаються прямими. Вважаючи, що картина, яку ми спостерігаємо на поверхні вала, зберігається і всередині, дійдемо *гіпотези плоских перерізів*: *перерізи, плоскі до деформації, залишаються плоскими при крученні круглого стрижня, повертаючись один відносно одного на деякий кут закручування.*

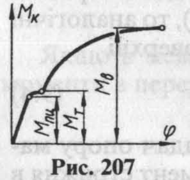


Рис. 207

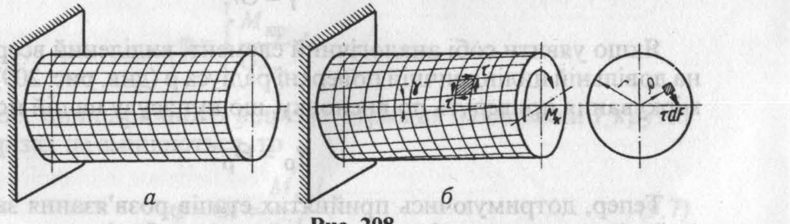


Рис. 208

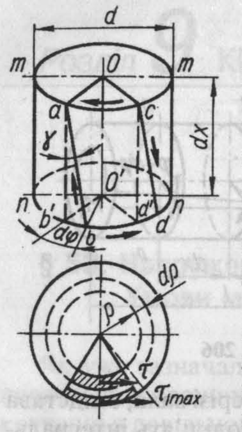


Рис. 209

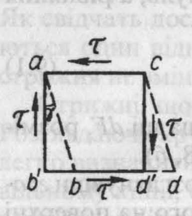


Рис. 210

Розглянемо деякий відрізок вала завдовжки dx (рис. 209), виділений з розглядуваного вала (див. рис. 206). Вал скручується зовнішнім моментом $M_к$, який спричинює в поперечних перерізах внутрішні крутні моменти $M_{кр}$. Нехай кут повороту поперечного перерізу m — m відносно нерухомого (місця закріплення вала) буде φ, тоді кут повороту перерізу n — n, розміщеного на відстані dx від перерізу m — m, буде $\varphi + d\varphi$. Отже, кут закручування відрізка стрижня завдовжки dx дорівнює $d\varphi$.

Розглянемо у зв'язку з цим деформацію прямокутного елемента $ab'd'c$ нескінченно малої товщини, виділеного у поверхні вала. Оскільки радіуси при деформації кручення залишаються прямими, то відрізок $O'b'$, повертаючись в площині поперечного перерізу на кут закручування $d\varphi$, займе положення $O'b'$. При цьому твірна ab' переміститься в нове положення ab, утворивши з початковим кут γ. Аналогічно твірна cd' перейде в положення cd. Оскільки довжина цих відрізків практично залишається незмінною, то деформація прямокутного елемента $ab'd'c$ полягає в зміні початкових прямих кутів на кут γ. Отже, розглянутий елемент перебуває в умовах чистого зсуву, і на його гранях діють дотичні напруження (рис. 209, 210).

Отже, кут γ є *кутом відносного зсуву* і

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{b'b}{ab'} \approx \gamma.$$

Ураховуючи, що $ab' = dx$, а $bb' = rd\varphi$, кут зсуву на поверхні скручуваного стрижня можна подати у вигляді

$$\gamma = r\frac{d\varphi}{dx}. \tag{9.2}$$

Величина $d\varphi/dx$ є *відносним кутом закручування* [виражається в сантиметрах у мінус першому степені (см$^{-1}$)] і позначається Θ. Враховуючи це, формулу (9.2) можна записати так:

$$\gamma = \Theta r. \tag{9.3}$$

Якщо уявити собі аналогічний елемент, виділений всередині стрижня на довільній циліндричній поверхні радіуса ρ (див. рис. 209), то аналогічні міркування приведуть до висновку, що кут зсуву на цій поверхні

$$\gamma_\rho = \Theta\rho. \tag{9.4}$$

Тепер, дотримуючись прийнятих етапів розв'язання задач опору матеріалів, розглянемо *фізичний аспект задачі*. Оскільки елемент стрижня в

будь-якій точці поперечного перерізу на відстані ρ від центра перерізу зазнає чистого зсуву, то з урахуванням (9.4) та (8.7) матимемо

$$\tau_\rho = G\Theta_\rho. \tag{9.5}$$

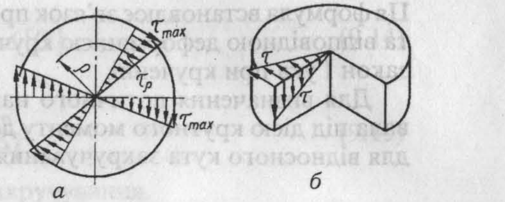


Рис. 211

Формули (9.4) та (9.5) показують, що кути зсуву та дотичні напруження в поперечному перерізі змінюються за лінійним законом прямо пропорційно відстані ρ точок від центра перерізу (рис. 211, *а*). Очевидно, максимальні дотичні напруження будуть на поверхні стрижня при $\rho = r$. Отже, вираз (9.5) можна переписати у вигляді

$$\tau_r = \tau_{max} = G\Theta r.$$

Підставляючи (9.5) в (9.1), дістанемо

$$M_{кр} = G\Theta \int_F \rho^2 dF = G\Theta J_p.$$

Звідси виведемо формулу для визначення відносного кута закручування круглого стрижня

$$\Theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_{кр}}{GJ_p}. \tag{9.6}$$

Тут GJ_p — жорсткість поперечного перерізу стрижня при крученні, $\text{Н}\cdot\text{м}^2$; J_p — полярний момент інерції круглого стрижня, який для суцільного стрижня діаметром d, як відомо (див. § 5), виражається формулою $J_p = \pi d^4/32$, а для трубчастого стрижня з внутрішнім діаметром $d_в$ і зовнішнім $d_з$

$$J_p = \frac{\pi\left(d_з^4 - d_в^4\right)}{32} = \frac{\pi d_з^4}{32}\left(1 - \alpha^4\right),$$

де

$$\alpha = d_в / d_з.$$

На підставі (9.6) можна записати формулу для визначення взаємного кута закручування двох перерізів, розміщених на відстані l:

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_{кр}}{GJ_p} dx.$$

Якщо в межах циліндричного відрізка стрижня завдовжки l крутні моменти в перерізах не змінюються, то

$$\varphi = \Theta l = \frac{M_{кр} l}{GJ_p}. \tag{9.7}$$

Ця формула встановлює зв'язок при крученні між силовим фактором ($M_{кр}$) та відповідною деформацією кручення (кутом закручування φ) і виражає закон Гука при крученні.

Для визначення дотичного напруження τ у будь-якій точці перерізу вала під дією крутного моменту досить у формулу (9.5) підставити вираз для відносного кута закручування Θ за формулою (9.6). Тоді

$$\tau = \frac{M_{кр}\rho}{J_p}. \tag{9.8}$$

Максимальне дотичне напруження, яке діє в зовнішньому шарі матеріалу стрижня,

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}\, r}{J_p} = \frac{M_{кр}}{W_p}, \tag{9.9}$$

де

$$W_p = \frac{J_p}{r}$$

— *полярний момент опору при крученні,* см^4.

Для суцільного круглого перерізу

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}; \quad \tau_{max} = \frac{16 M_{кр}}{\pi d^3}. \tag{9.10}$$

Викладену теорію можна застосовувати також для трубчастого круглого перерізу. Тоді

$$W_p = \frac{\pi d_з^3\left(1-\alpha^4\right)}{16}; \quad \tau_{max} = \frac{16 M_{кр}}{\pi d_з^3\left(1-\alpha^4\right)}. \tag{9.11}$$

Отже, максимальне дотичне напруження в скручуваному круглому стрижні пропорційне крутному моменту $M_{кр}$ та обернено пропорційне кубу зовнішнього діаметра стрижня.

Діставши формули для визначення максимального дотичного напруження та деформації при крученні, можна записати рівняння міцності та жорсткості при крученні.

Згідно з формулою (9.9), умова міцності запишеться так:

$$\tau_{max} = M_{кр}/W_p \le [\tau], \tag{9.12}$$

де [τ] — допустиме напруження при крученні.

Момент опору W_p на підставі (9.12)

$$W_p \ge M_{кр}/[\tau]. \tag{9.13}$$

Умова жорсткості, згідно з формулою (9.6),

$$\Theta_{max} = \frac{M_{кр}}{GJ_p} \le [\Theta], \tag{9.14}$$

звідки

$$J_p \ge \frac{M_{кр}}{G[\Theta]}. \tag{9.15}$$

Тут [Θ] — допустимий відносний кут закручування.

§ 54. Аналіз напруженого стану і руйнування при крученні

Аналізуючи загальну формулу (9.8) для визначення дотичних напружень τ при крученні, бачимо, що в будь-якій точці площини перерізу вала напруження розподілені нерівномірно і залежно від радіуса змінюються за лінійним законом від нуля в центрі перерізу до максимуму на його периферії (рис. 211, *а*). Внаслідок закону парності дотичних напружень в поздовжніх перерізах, що проходять через вісь вала, також виникають такі самі за значенням дотичні напруження (рис. 211, *б*). В елементі матеріалу, уявно виділеного із зовнішніх шарів матеріалу вала перерізами, паралельними та перпендикулярними до твірної (рис. 212) циліндричного вала, по гранях діятимуть тільки дотичні напруження. В перерізах, нахилених до осі, діятимуть також і нормальні напруження, як це зазначалося при розгляді напруженого стану елемента в умовах чистого зсуву. Найбільші нормальні напруження діють на головних площадках, які нахилені під кутом 45° до площадок, де діють дотичні напруження чистого зсуву [при крученні під кутом 45° до осі вала (рис. 212)].

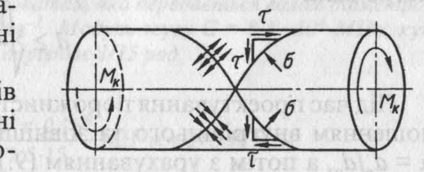


Рис. 212

Отже, при крученні круглих валів небезпечними можуть бути як дотичні напруження в поперечних та поздовжніх перерізах вала, так і нормальні напруження, що виникають в площадках під кутом 45° до перших. У зв'язку з цим характер руйнування вала при крученні залежатиме від здатності матеріалу протидіяти дотичним нормальним напруженням.

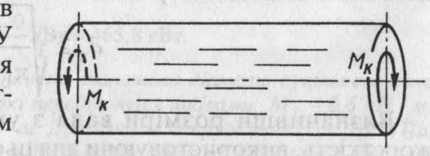


Рис. 213

Так, якщо матеріал погано чинить опір дотичним напруженням (дії зсуву, наприклад, деревини вздовж волокон), то перші тріщини руйнування виникають по твірних у місцях дії максимальних дотичних напружень (рис. 213). Якщо матеріал погано чинить опір дії

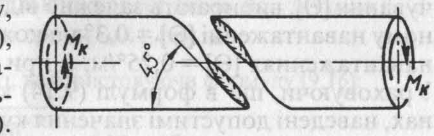


Рис. 214

нормальних напружень, наприклад чавун, то тріщини руйнування при крученні пройдуть по лініях, нормальних до дії головних розтягальних напружень, тобто по гвинтових лініях, дотичні до яких утворюють кут 45° з віссю вала (рис. 214). Сталеві вали на практиці часто руйнуються по поперечному перерізу, перпендикулярному до осі вала. Цей тип руйнування обумовлений дією в поперечному перерізі дотичних напружень.

§ 55. Розрахунок валів на міцність і жорсткість при крученні

При проектуванні можна рекомендувати такий порядок розрахунку валів на міцність і жорсткість при крученні.

За схемою вала і скручувальними моментами, що діють на нього, будують епюри крутних моментів по окремих відрізках (див. § 16). Добирають матеріал для вала і визначають для цього матеріалу допустиме напруження $[\tau]$. Записують умову міцності (9.12) для відрізка вала з максимальним значенням крутного моменту (згідно з епюрою моментів).

Якщо вал досить довгий і по окремих його відрізках діють істотно різні за модулем крутні моменти, то його слід конструювати східчастим. При цьому діаметр вала кожного східця розраховують, виходячи з тієї самої формули (9.12), але крутні моменти при цьому будуть різні для різних відрізків відповідно до епюри крутних моментів.

Ураховуючи, що для суцільного круглого вала $W_p = \pi d^3/16$, можна на підставі виразу (9.13) записати розрахункову формулу для визначення діаметра вала

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{16M_{\text{кр}}}{\pi[\tau]}}. \qquad (9.16)$$

Під час проектування порожнистого вала спочатку задаються співвідношенням внутрішнього та зовнішнього діаметрів, тобто коефіцієнтом $\alpha = d_в/d_з$, а потім з урахуванням (9.11) на підставі формули (9.13) знаходять зовнішній діаметр вала

$$d_з \ge \sqrt[3]{\frac{16M_{\text{кр}}}{\pi[\tau]\left(1-\alpha^4\right)}}. \qquad (9.17)$$

Визначивши розміри вала з умови міцності, перевіряють вал на жорсткість, використовуючи для цього умову жорсткості (9.14). Допустиму відносну жорсткість вала, яка характеризується відносним кутом закручування $[\Theta]$, вибирають залежно від умов навантаження. Так, при статичному навантаженні $[\Theta] = 0{,}3°$ на кожний метр довжини вала; при змінних навантаженнях $[\Theta] = 0{,}25°$/м, а при ударних навантаженнях $[\Theta] = 0{,}5°$/м. Ураховуючи, що в формулі (9.14) кут закручування виражений у радіанах, наведені допустимі значення кутів треба перевести в радіани, помноживши їх на $\pi/180$. Якщо при перевірці виявиться, що умова жорсткості

(9.14) виконується, то на цьому, як правило, закінчують розрахунок вала. Інакше розміри вала треба добирати з умови жорсткості (9.15):

$$J_p \ge \frac{M_{\text{кр}}}{G[\Theta]}.$$

Підставляючи в цю формулу вираз полярного моменту інерції, знайдемо, що для суцільного вала

$$d \ge \sqrt[4]{\frac{32M_{\text{кр}}}{G\pi[\Theta]}}, \qquad (9.18)$$

для порожнистого вала

$$d_з \ge \sqrt[4]{\frac{32M_{\text{кр}}}{G\pi[\Theta]\left(1-\alpha^4\right)}}. \qquad (9.19)$$

Іноді при розрахунку вала відома потужність K, кВт, яка ним передається, та частота обертання n, хв$^{-1}$. Тоді скручувальний момент у розрахункових формулах можна виразити безпосередньо через потужність K та частоту обертання n, виходячи з формули (3.1):

$$M_к = 9549\frac{K}{n}\ \text{Н}\cdot\text{м}. \qquad (9.20)$$

Раніше, коли потужність N виражалася в кінських силах, скручувальний момент визначався за формулою (3.2)

$$M_к = 7028{,}8\frac{N}{n}\ \text{Н}\cdot\text{м}. \qquad (9.21)$$

Приклад 27. *Знайдемо потужність у кіловатах, яка передається валом діаметром $d = 150$ мм з частотою обертання $n = 120$ хв$^{-1}$. Модуль зсуву $G = 8{,}4 \cdot 10^4$ МПа, кут закручування відрізка вала завдовжки 7,5 м дорівнює 1/15 рад.*

З формули (9.7)

$$M_{\text{кр}} = \frac{GJ_p\varphi}{l} = \frac{G\frac{\pi d^4}{32}\varphi}{l} = \frac{8{,}4\cdot10^4\pi\cdot0{,}15^4}{32\cdot7{,}5\cdot15}\ \text{МН}\cdot\text{м} = 37{,}150\ \text{Н}\cdot\text{м}.$$

Тоді, скориставшись формулою (9.21), визначимо потужність, яка передається валом:

$$K = \frac{M_{\text{кр}}n}{9549} = \frac{37\,150\cdot120}{9549}\ \text{кВт} = 465{,}8\ \text{кВт}.$$

Приклад 28. *З умов міцності та жорсткості визначимо діаметр суцільного вала (рис. 215) при таких значеннях моментів, які передаються шківами: $M_1 = 0{,}6$ кН · м; $M_2 = 0{,}8$ кН · м; $M_3 = 2$ кН · м; $M_4 = 0{,}6$ кН · м. Допустиме напруження $[\tau] = 20$ МПа, допустимий відносний кут закручування $[\Theta] = 1/4°$/м, або $[\Theta] = \pi/(180 \cdot 4)$ м$^{-1}$. Модуль пружності сталі при зсуві $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.*

Будуємо епюру крутних моментів. Найбільший момент діє на відрізку вала 2—3:

$$M_{\text{кр max}} = M_1 + M_2 = (0{,}6+0{,}8)\,\text{кН}\cdot\text{м} = 1{,}4\ \text{кН}\cdot\text{м}.$$

Доберемо діаметр вала з умови міцності, використовуючи формулу (9.16):

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{16M_{\text{кр}}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16\cdot1{,}4\cdot10^{-3}}{\pi\cdot20}}\ \text{м} \approx 0{,}07\ \text{м} = 7\ \text{см}.$$

Тепер доберемо діаметр вала з умови жорсткості, використовуючи формулу (9.18):

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{\text{кр}}}{G\pi[\Theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot 180 \cdot 4}{8 \cdot 10^4 \pi^2}} \text{ м} \approx 0{,}08 \text{ м} = 8 \text{ см}.$$

Із двох діаметрів слід вибирати більший (d = 8 см), знайдений з умови жорсткості.

Тепер визначимо відносні кути закручування вала по окремих відрізках, використовуючи формулу (9.6). Підставляючи в цю формулу значення $M_{\text{кр}}$ для різних відрізків, знайдемо:

$$\Theta_I = \frac{M_{\text{кр}I}}{GJ_p} = \frac{0{,}6 \cdot 10^{-3} \cdot 32}{8 \cdot 10^4 \cdot \pi \left(8 \cdot 10^{-2}\right)^4} = 1{,}86 \cdot 10^{-3};$$

$$\Theta_{II} = \frac{M_{\text{кр}II}}{GJ_p} = \frac{1{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot 32}{8 \cdot 10^4 \pi \left(8 \cdot 10^{-2}\right)^4} = 4{,}35 \cdot 10^{-3};$$

$$\Theta_{III} = \frac{M_{\text{кр}III}}{GJ_p} = \frac{0{,}6 \cdot 10^{-3} \cdot 32}{8 \cdot 10^4 \cdot \pi \left(8 \cdot 10^{-2}\right)^4} = 1{,}86 \cdot 10^{-3}.$$

Знаючи відносні кути закручування по окремих відрізках, можна побудувати епюри Θ_i та кутів φ по довжині вала (рис. 215). Епюру кутів закручування φ побудовано при $l_I = l_{II}$ = 50 см та l_{III} = 90 см. При цьому один з перерізів нерухомий (на рис. 215 це переріз *I*). Оскільки в межах кожного відрізка Θ = const, то кут закручування на кожному відрізку змінюється за лінійним законом:

$$\varphi_{2-1} = \Theta_I l_I = 1{,}86 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}5 \text{ рад} = 0{,}93 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_{3-1} = \varphi_{2-1} + \varphi_{3-2} = \left(0{,}93 \cdot 10^{-3} + 2{,}18 \cdot 10^{-3}\right) \text{рад} = 3{,}10 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_{4-1} = \varphi_{2-1} + \varphi_{3-2} + \varphi_{4-3} = \left(0{,}93 \cdot 10^{-3} + 2{,}18 \cdot 10^{-3} - 1{,}67 \cdot 10^{-3}\right) \text{рад} = 1{,}43 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Приклад 29. *Визначимо, на скільки процентів збільшиться максимальне напруження вала при крученні, якщо у валу зроблено аксіальний отвір $d_\text{в} = 0{,}4\, d_\text{з}$ ($\alpha = 0{,}4$).*

На підставі формул (9.10) та (9.11), взявши $d_\text{з} = d$, знайдемо напруження суцільного і порожнистого валів:

$$\tau_{\max} = \frac{16M_{\text{кр}}}{\pi d^3} = \tau_\text{с}; \quad \tau_{\max} = \frac{16M_{\text{кр}}}{\pi d^3\left(1-\alpha^4\right)} = \tau_\text{п}.$$

Шукана різниця в напруженнях

$$\Delta\tau = \frac{\tau_\text{п} - \tau_\text{с}}{\tau_\text{с}} 100 = \frac{16M_{\text{кр}}}{\pi d^3}\left(\frac{1}{1-\alpha^4} - 1\right)\frac{\pi d^3}{16M_{\text{кр}}} 100 = \frac{(0{,}4)^4}{1-(0{,}4)^4} 100 \approx 2{,}6\,\%.$$

Приклад 30. *Замінимо суцільний вал діаметром d = 300 мм порожнистим рівноміцним валом із зовнішнім діаметром $d_\text{з}$ = 350 мм. Знайдемо внутрішній діаметр порожнистого вала $d_\text{в}$ та порівняємо ваги цих валів.*

Максимальні дотичні напруження в обох валах мають бути однаковими:

$$\tau_{\max} = \frac{16M_{\text{кр}}}{\pi d^3} = \frac{16M_{\text{кр}}}{\pi d_\text{з}^3\left(1-\alpha^4\right)}.$$

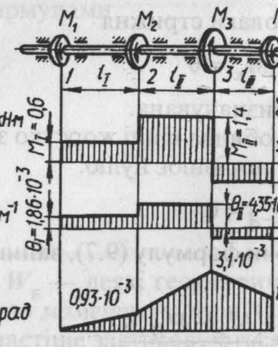


Рис. 215

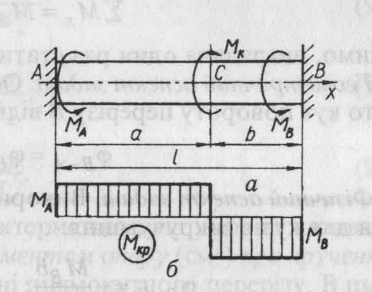


Рис. 216

Звідси визначимо коефіцієнт α:

$$\alpha = \sqrt[4]{1 - \left(\frac{d}{d_\text{з}}\right)^3} = \sqrt[4]{1 - \left(\frac{300}{350}\right)^3} = 0{,}78.$$

Внутрішній діаметр порожнистого вала

$$d_\text{в} = \alpha d_\text{з} = 0{,}78 \cdot 350 = 273 \text{ мм}.$$

Співвідношення ваги дорівнює співвідношенню площ поперечних перерізів:

$$\frac{\pi\left(d_\text{з}^2 - d_\text{в}^2\right)4}{4\pi d^2} = \frac{d_\text{з}^2 - d_\text{в}^2}{d^2} = \frac{350^2 - 273^2}{300^2} = 0{,}534.$$

З прикладів 29 та 30 видно, що виготовлення порожнистих валів, тобто валів, у яких малонавантажену внутрішню частину вилучено, — вельми ефективний засіб зниження затрат матеріалу, а отже, і зниження ваги валів. При цьому максимальні напруження, що виникають у порожнистому валу, мало відрізняються від максимальних напружень у валу суцільного перерізу при тому самому зовнішньому діаметрі. Так, у прикладі 29 за рахунок свердління при $\alpha = d_\text{в}/d_\text{з} = 0{,}4$, яке дає полегшення вала на 16 %, максимальні напруження в зовнішніх волокнах порожнистого вала збільшилися лише на 2,6 %. У другому прикладі рівноміцний порожнистий вал, але з трохи більшим зовнішнім діаметром (350 мм) порівняно з суцільним валом (300 мм), виявився легшим за суцільний на 53,4 %. Ці приклади свідчать про раціональність застосування порожнистих валів, що широко використовуються в деяких галузях сучасного машинобудування, зокрема в моторобудуванні.

Як приклад статично невизначуваного стрижня, який зазнає кручення, розглянемо круглий стрижень, закріплений обома кінцями і навантажений скручувальним моментом $M_\text{к}$ в якомусь перерізі вала *C* (рис. 216, *а*). Побудуємо епюру крутних моментів по довжині стрижня (рис. 216, *б*) і визначимо діаметр стрижня.

При такому навантаженні в місцях закріплення вала виникнуть реактивні моменти M_A та M_B у площинах, перпендикулярних до осі стрижня.

Статичний аспект задачі. З умов рівноваги стрижня

$$\sum M_x = M_A + M_B - M_к = 0 \tag{9.22}$$

бачимо, що задача один раз статично невизначувана.

Геометричний аспект задачі. Оскільки обидва кінці жорстко закріплені, то кут повороту перерізу *B* відносно *A* дорівнює нулю:

$$\varphi_{B-A} = \varphi_{B-C} + \varphi_{C-A} = 0. \tag{9.23}$$

Фізичний аспект задачі. Використовуючи формулу (9.7), запишемо вирази для кутів закручування:

$$\varphi_{B-C} = -\frac{M_B b}{GJ_p}; \quad \varphi_{C-A} = \frac{(M_к - M_B)a}{GJ_p}. \tag{9.24}$$

Синтез. Підставивши формули (9.24) у вираз (9.23), матимемо

$$\varphi_{B-A} = -\frac{M_B b}{GJ_p} + \frac{(M_к - M_B)a}{GJ_p} = 0. \tag{9.25}$$

Звідси з урахуванням (9.22) знайдемо:

$$M_B = \frac{M_к a}{a+b}; \tag{9.26}$$

$$M_A = \frac{M_к b}{a+b}. \tag{9.27}$$

Якщо $a > b$, то $M_{кр\,max} = M_B$, і на підставі формули (9.16) діаметр вала

$$d = \sqrt[3]{\frac{16aM_к}{(a+b)\pi[\tau]}}.$$

§ 56. Кручення стрижнів некруглого перерізу

В інженерній практиці досить часто кручення зазнають стрижні, які мають не круглий переріз, а прямокутний, трикутний, еліптичний та ін. У цих випадках гіпотеза плоских перерізів не може бути застосована, оскільки перерізи викривлюються (депланують). Точні розрахунки стрижнів некруглого перерізу можна виконати методами теорії пружності. Проте, оскільки в даному курсі немає змоги їх викласти, наведемо тут тільки деякі остаточні результати. Зазначимо при цьому, що в стрижнях довільного перерізу, як і в стрижнях круглого перерізу, дотичні напруження при крученні напрямлені по дотичній до контура.

Найбільші дотичні напруження, відносні та повні кути закручування за аналогією з крученням стрижнів круглого перерізу прийнято визначати за формулами

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_к}; \tag{9.28}$$

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{GJ_к}; \tag{9.29}$$

$$\Theta = \frac{M_{кр}}{GJ_к}. \tag{9.30}$$

Тут $J_к$ і $W_к$ — деякі геометричні характеристики, які умовно називають відповідно *моментом інерції* (см^4) і *моментом опору* (см^3) *при крученні.*

Найчастіше застосовуються стрижні прямокутного перерізу. В цьому разі розподіл дотичних напружень має вигляд, як на рис. 217. Найбільші напруження виникають біля поверхні посередині довгих сторін прямокутного перерізу (в точках *C* та *D*). Визначаються вони за формулою (9.28), в якій

$$W_к = \alpha h b^2, \tag{9.31}$$

де h — довга сторона прямокутного поперечного перерізу; b — коротка його сторона; α — коефіцієнт, що залежить від співвідношення сторін h і b.

Напруження, які виникають біля поверхні перерізу посередині коротких сторін (у точках *A* та *B*), менші. Їх можна виразити через τ_{max}:

$$\tau = \gamma \tau_{max}, \tag{9.32}$$

де γ — коефіцієнт, що залежить від співвідношення сторін прямокутного перерізу.

Для визначення відносного кута закручування прямокутного перерізу в формулах (9.29) та (9.30) беруть

$$J_к = \beta h b^3. \tag{9.33}$$

Значення коефіцієнтів α, γ та β залежно від співвідношення сторін прямокутного перерізу h/b наведено в табл. 13. У цій таблиці вміщено також формули для визначення максимальних дотичних напружень та кутів закручування деяких інших некруглих стрижнів. Запишемо умови міцності та жорсткості при крученні стрижнів прямокутного перерізу:

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{\alpha h b^2} \le [\tau]; \tag{9.34}$$

$$\Theta = \frac{M_{кр}}{\beta h b^3 G} \le [\Theta]. \tag{9.35}$$

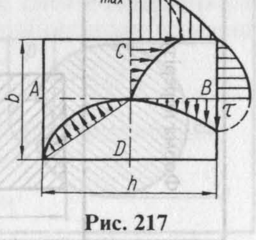
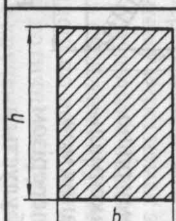
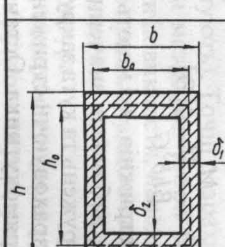
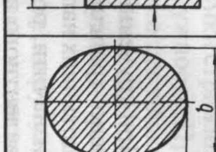
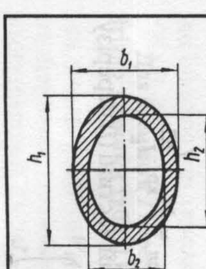
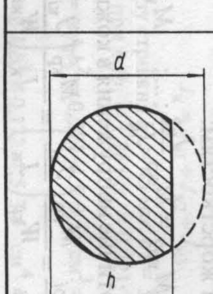
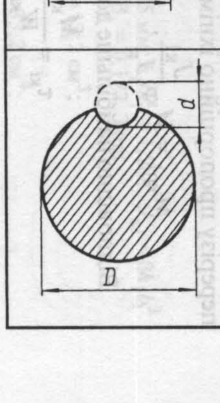


Рис. 217

При крученні стрижнів, які мають форму рівнобедреної трапеції, наближені значення максимальних дотичних напружень та кута закручування можна визначити, розраховуючи стрижень з перерізом еквівалентного прямокутника. Останній будується

Таблиця 13

Форма перерізу	Момент інерції при крученні $J_к$, см$_4$	Момент опору при крученні $W_к$, см^3	Точки з найбільшими дотичними напруженнями $\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_к}$	Примітка
	$J_к = \beta h b^3$	$W_к = \alpha h b^2$	Посередині довгих сторін $\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_к}$; посередині коротких сторін $\tau = \gamma\tau_{max}$; у кутах напруження дорівнюють нулю	h/b — α — β — γ 1 — 0,208 — 0,141 — 1 1,5 — 0,231 — 0,196 — 0,859 1,75 — 0,239 — 0,214 — — 2,0 — 0,246 — 0,229 — 0,795 2,5 — 0,256 — 0,249 — — 3,0 — 0,267 — 0,263 — 0,753 4,0 — 0,282 — 0,281 — 0,745 6,0 — 0,299 — 0,299 — 0,743 8,0 — 0,307 — 0,307 — 0,743 10,0 — 0,313 — 0,313 — 0,743 ∞ — 0,333 — 0,333 — 0, 743
	$J_к = \frac{h_0^2 b_0^2 \delta_1 \delta_2}{h\delta_2 + b\delta_1 - -\delta_1^2 - \delta_2^2}$	$W_{к1} = 2h_0 b_0 \delta_1$; $W_{к2} = 2h_0 b_0 \delta_2$	Посередині довгих сторін $\tau_1 = \frac{M_{кр}}{W_{к1}}$; посередині коротких сторін $\tau_2 = \frac{M_{кр}}{W_{к2}}$;	У внутрішніх кутах має місце висока концентрація напружень, що досягають границі текучості матеріалу. Якщо є заокруглення радіуса r, коефіцієнт концентрації $\alpha_к = 1{,}74\sqrt[3]{\frac{\delta_{max}}{r}}$
	$J_к = \frac{\pi h b}{64}\left(h^2 + b^2\right)$	$W_к = \frac{\pi b^2 h}{16}$	У зовнішніх точках малих півосей $\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_к}$; у зовнішніх точках великих півосей $\tau_1 = \frac{\tau_{max}}{m}$	$\frac{h}{b} = m > 1$
	$J_к = \frac{\pi m^3 b_1^4\left(1-\alpha^4\right)}{16\left(m^2+1\right)}$	$W_к = \frac{\pi b_1^3}{16} \times \left(1-\alpha^4\right)m$	У кінці малих півосей $\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_к}$; у кінці великих півосей $\tau_1 = \frac{\tau_{max}}{m}$	$\frac{h_1}{b_1} = \frac{h_2}{b_2} = m > 1$ $\frac{h_2}{h_1} = \frac{b_2}{b_1} = \alpha < 1$
	$J_к = \frac{d^4}{16} \times \left(2{,}6\frac{h}{d} - 1\right)$	$W_к = \frac{d^3}{8}\frac{2{,}6\frac{h}{d}-1}{\left(0{,}3\frac{h}{d}+0{,}7\right)}$	$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_к}$	$\frac{h}{d} > 0{,}5$
	$J_к = \alpha\frac{D^4}{16}$	$W_к = \beta\frac{D^3}{8}$	По дну канавки $\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{M_к}$	d/D — α — β — d/D — α — β 0,00 — 1,57 — 1,57 — 0,40 — 0,76 — 1,22 0,05 — 0,80 — 1,56 — 0,60 — 0,66 — 0,92 0,10 — 0,81 — 1,56 — 0,80 — 0,52 — 0,63 0,20 — 0,82 — 1,46 — 1,00 — 0,38 — 0,38

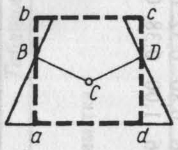


Рис. 218

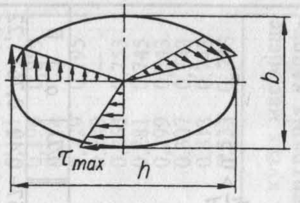


Рис. 219

так (рис. 218). Із центра ваги C трапеції опускають перпендикуляри CB та CD на бокові сторони, а потім проводять вертикалі через точки B та D. Добутий прямокутник $abcd$ і буде тим еквівалентним перерізом розглядуваного трапецієподібного стрижня, до якого мають бути застосовані формули (9.28) — (9.33).

При крученні стрижнів еліптичного поперечного перерізу максимальні дотичні напруження виникають у крайніх точках, які лежать на малих півосях (рис. 219). У цьому разі

$$W_к = \frac{\pi b^2 h}{16},$$

де b та h — відповідно розміри малої та великої осей еліпса.

Найбільші напруження в зовнішніх точках перерізу на великих півосях

$$\tau' = \tau_{max} / m,$$

де $m = h/b$.

Умовний момент інерції при крученні стрижня еліптичного перерізу

$$J_к = \frac{\pi h b}{64}\left(h^2 + b^2\right). \tag{9.36}$$

Значення $J_к$ та $W_к$ для деяких некруглих поперечних перерізів наведено в табл. 13.

Якщо скручуються стрижні складного незамкненого поперечного перерізу, який можна поділити на окремі частини з $J_{кi}$ та $W_{кi}$, то для нього

$$J_к = J_{к1} + J_{к2} + J_{к3} + ... + J_{кn} = \sum J_{кi}, \tag{9.37}$$

де $i = 1; 2; 3; ...; n$ — номери найпростіших частин, на які поділено поперечний переріз.

Оскільки кут закручування для всього перерізу й окремих його частин один і той самий:

$$\Theta = \frac{M_{кр}}{GJ_к} = \frac{M_{кр1}}{GJ_{к1}} = ... = \frac{M_{крn}}{GJ_{кn}},$$

то крутний момент розподіляється між окремими частинами складного перерізу пропорційно їхнім жорсткостям:

$$M_{кр1} = M_{кр}\frac{J_{к1}}{J_к}; \quad M_{кр2} = M_{кр}\frac{J_{к2}}{J_к}; ...; \quad M_{крn} = M_{кр}\frac{J_{кn}}{J_к}.$$

Відповідно найбільше дотичне напруження в кожній частині (i) перерізу

$$\tau_{кi} = \frac{M_{крi}}{W_{кi}} = \frac{M_{кр}}{W_{кi}}\left(\frac{J_{кi}}{J_к}\right) = \frac{M_{кр}}{J_к}\left(\frac{J_{кi}}{W_{кi}}\right).$$

Найбільшого значення напруження τ досягне для того елемента, в якого відношення $J_{кi} / W_{кi}$ буде найбільшим:

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{J_к}\left(\frac{J_{кi}}{W_{кi}}\right)_{max} \cdot = \frac{M_{кр}}{W_к}, \tag{9.38}$$

де

$$W_к = \frac{J_к}{\left(\dfrac{J_{кi}}{W_{кi}}\right)_{max}}. \tag{9.39}$$

Приклад 31. *Сталевий стрижень прямокутного перерізу передає крутний момент $M_{кр} = 1000$ Н · м. Знайдемо розміри перерізу стрижня, коли відомо, що допустиме напруження на кручення $[\tau] = 40$ МПа, а співвідношення $h/b = 2,5$.*

З умови міцності

$$\tau_{max} = M_{кр} / W_к \le [\tau]$$

знаходимо момент опору крученню стрижня:

$$W_к = \frac{M_{кр}}{[\tau]} = \frac{1000 \cdot 10^{-6}}{40}\ м^3 = 0,25 \cdot 10^{-4}\ м^3 = 25\ см^3,$$

а знаючи співвідношення сторін перерізу $h/b = 2,5$ та беручи з табл. 13 відповідне значення $\alpha = 0,256$, розміри перерізу дістанемо з формули (9.31)

$$W_к = \alpha h b^2 = 2,5\alpha b^3.$$

Звідси

$$b = \sqrt[3]{\frac{W_к}{2,5\alpha}} = \sqrt[3]{\frac{25}{2,5 \cdot 0,256}}\ см = 3,38\ см;$$

$$h = 2,5b = 2,5 \cdot 3,38\ см = 8,45\ см.$$

Приклад 32. *Знайдемо найбільше дотичне напруження та кут закручування для сталевого стрижня завдовжки 5 м, який має поперечний переріз, зображений на рис. 220, а. Стрижень скручується моментом $M_{кр} = 500$ Н · м, прикладеним до обох його кінців.*

Розіб'ємо профіль перерізу на окремі елементи, як наведено на рис. 220, *б*. Максимальне напруження визначимо за формулою (9.28)

$$\tau_{max} = M_{кр} / W_к,$$

де

$$W_к = \frac{J_к}{(J_{кi} / W_{кi})_{max}}.$$

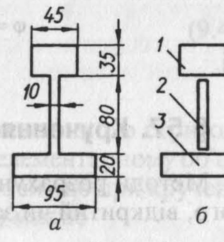


Рис. 220

Відповідно до виразу (9.37)

$$J_к = J_{к1} + J_{к2} + J_{к3}.$$

Для елемента *1* перерізу стрижня $h_1 = 45$ мм; $b_1 = 35$ мм; $h_1/b_1 = 1,285$; $J_{к1} = \beta h_1 b_1^3$. Згідно з даними табл. 13, при $h_1/b_1 = 1,285$ $\alpha_1 = 0,221$; $\beta_1 = 0,172$. Тоді

$$W_{к1} = \alpha_1 h_1 b_1^2 = 0,221 \cdot 4,5 \cdot 3,5^2\ см^3 = 12,2\ см^3;$$

$$J_{к1} = \beta_1 h_1 b_1^3 = 0,172 \cdot 4,5 \cdot 3,5^3\ см^4 = 33,2\ см^4;$$

$$\frac{J_{к1}}{W_{к1}} = \frac{33,2}{12,2}\ \text{см} = 2,72\ \text{см}.$$

Для елемента *2* перерізу стрижня $h_2 = 80$ мм; $b_2 = 10$ мм; $h_2/b_2 = 8$. За даними табл. 13 $\alpha_2 = 0,307$; $\beta_2 = 0,307$;

$$W_{к2} = \alpha_2 h_2 b_2^2 = 0,307 \cdot 8 \cdot 1^2\ \text{см}^3 = 2,5\ \text{см}^3;$$

$$J_{к2} = \beta_2 h_2 b_2^3 = 0,307 \cdot 8 \cdot 1^3\ \text{см}^4 = 2,5\ \text{см}^4;$$

$$\frac{J_{к2}}{W_{к2}} = 1\ \text{см}.$$

Для елемента *3* перерізу стрижня $h_3 = 95$ мм; $b_3 = 20$ мм; $h_3/b_3 = 95/20 = 4,75$; $\alpha_3 = 0,288$; $\beta_3 = 0,288$. Аналогічно

$$W_{к3} = \alpha_3 h_3 b_3^2 = 0,288 \cdot 9,5 \cdot 2^2\ \text{см}^3 = 10,9\ \text{см}^3;$$

$$J_{к3} = \beta_3 h_3 b_3^3 = 0,288 \cdot 9,5 \cdot 2^3\ \text{см}^4 = 21,9\ \text{см}^4;$$

$$\frac{J_{к3}}{W_{к3}} = \frac{21,9}{10,9}\ \text{см} = 2\ \text{см}.$$

Отже,

$$J_к = J_{к1} + J_{к2} + J_{к3} = 33,2 + 2,5 + 21,9\ \text{см}^4 = 57,6\ \text{см}^4.$$

Найбільше співвідношення $J_{кі}/W_{кі}$ відповідає елементу *1* перерізу, тому максимальне дотичне напруження буде посередині його довгих сторін. Момент опору

$$W_к = \frac{J_к}{J_{к1}/W_{к1}} = \frac{57,6}{2,72}\ \text{см}^3 = 21,2\ \text{см}^3,$$

а максимальне напруження

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_к} = \frac{500 \cdot 10^{-6}}{21,2 \cdot 10^{-6}}\ \text{МПа} = 23,6\ \text{МПа}.$$

Кут закручування стрижня

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{G J_к} = \frac{500 \cdot 10^{-6} \cdot 5}{8 \cdot 10^4 \cdot 57,6 \cdot 10^{-8}}\ \text{рад} = 0,0542\ \text{рад}.$$

§ 57. Кручення тонкостінних стрижнів

Методи розрахунку тонкостінних стрижнів на кручення залежать від того, відкритий чи замкнений профіль їхнього поперечного перерізу.

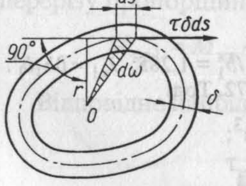


Рис. 221

Замкнені профілі. Розглядаючи кручення замкнених тонкостінних профілів (рис. 221), будемо вважати товщину стінки стрижня настільки малою, що дотичні напруження по ній можна прийняти однаковими, які дорівнюють напруженням посередині товщини стінки, й напрямленими по дотичній до серединної лінії стінки.

Щоб добути формулу для визначення цього напруження, виріжемо з тонкостінного замкненого стрижня елемент завдовжки dx двома поперечними

та двома довільними меридіональними перерізами (рис. 222). Складаючи суму проекцій на вісь x усіх сил, прикладених до елемента, маємо

$$\tau\delta = \tau_1 \delta_1 = \text{const}. \qquad (9.40)$$

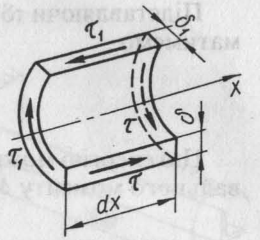


Рис. 222

Момент сили $\tau\delta ds$, що діє на елемент профілю завдовжки ds (див. рис. 221), відносно довільної точки O

$$dM_{кр} = \tau\delta r ds.$$

Ураховуючи, що rds є подвоєною площею елементарного трикутника (на рис. 221 заштрихований), тобто

$$rds = 2d\omega,$$

а тому

$$dM_{кр} = 2\tau\delta d\omega, \qquad (9.41)$$

інтегруючи останній вираз по всьому контуру з урахуванням умови (9.40), знайдемо крутний момент, який діє в поперечному перерізі тонкостінного стрижня:

$$M_{кр} = 2\tau\delta\omega, \qquad (9.42)$$

де ω — площа, яка окреслена серединною лінією тонкостінного перерізу.

З формули (9.42) дістанемо

$$\tau = \frac{M_{кр}}{2\omega\delta}. \qquad (9.43)$$

Ця формула вперше була виведена Бредтом.

Якщо товщина профілю по контуру неоднакова, то максимальне напруження в стінці профілю визначається за формулою

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{2\omega\delta_{min}}, \qquad (9.44)$$

де δ_{min} — мінімальна товщина стінки профілю.

Щоб визначити відносний кут закручування тонкостінного стрижня, розглянемо енергію деформації, яка накопичується в елементарному об'ємі тонкостінного стрижня розмірами ds, dx, δ. Враховуючи, що при крученні відбувається чистий зсув, на підставі формули (8.12) маємо

$$dU = \frac{\tau^2}{2G}\delta dx ds.$$

Повну енергію деформації тонкостінного стрижня завдовжки l знайдемо, проінтегрувавши останній вираз по замкненому контуру s та по довжині l:

$$U = \frac{1}{2G}\int_0^l \oint \tau^2 \delta ds dx = \frac{l\tau^2\delta^2}{G}\oint \frac{ds}{\delta}.$$

Підставляючи τδ з формули (9.42) в праву частину останньої формули, матимемо

$$U = \frac{M_{кр}^2 l}{2G(2\omega)^2}\oint \frac{ds}{\delta}.$$

Цю енергію можна виразити також через роботу зовнішнього скручувального моменту $M_к = M_{кр}$ на шуканому куті закручування, тобто

$$U = A = \frac{M_к \varphi}{2} = \frac{M_к \varphi}{2}.$$

Тоді, прирівнявши праві частини останніх двох формул, знайдемо

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{4G\omega^2}\oint \frac{ds}{\delta}.$$

Відносний кут закручування

$$\Theta = \frac{M_{кр}}{4G\omega^2}\oint \frac{ds}{\delta} \qquad (9.45)$$

Це друга формула Бредта. Її можна переписати у введених позначеннях для кручення:

$$\Theta = \frac{M_к}{GJ_к},$$

де

$$J_к = \frac{4\omega^2}{\oint \frac{ds}{\delta}}.$$

При однаковій по довжині контура s товщині

$$\Theta = \frac{M_{кр} s}{4G\omega^2 \delta} \qquad (9.46)$$

Розглядаючи, наприклад, кручення тонкостінної труби (рис. 223), при $\delta = \mathrm{const}$ матимемо

$$\omega = \pi R^2; \quad \oint \frac{ds}{\delta} = \frac{2\pi R}{\delta}.$$

За формулами (9.43) та (9.46)

$$\tau = \frac{M_{кр}}{2\pi R^2 \delta}; \quad \Theta = \frac{M_{кр}}{2\pi R^3 \delta G}.$$

Відкриті профілі. Визначаючи при крученні напруження та деформації у тонкостінних стрижнях відкритого профілю типу швелера, двотавра (рис. 224) або кутника, можна скористатися теорією розрахунку на кручення стрижнів прямокутного перерізу. В цьому разі незамкнені профілі розбиваються на прямокутні елементи, товщина яких значно менша, ніж їхня довжина. Як видно з табл. 13, для таких прямокутних елементів (при $h/b > 10$) коефіцієнти α та β дорівнюють 1/3. Тоді для складного профілю

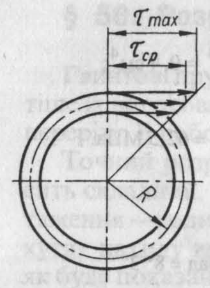


Рис. 223

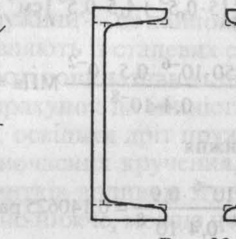


Рис. 224

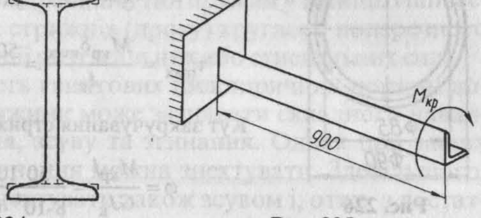


Рис. 225

на підставі формул (9.33) та (9.37)

$$J_к = \eta \frac{1}{3}\sum_i b_i^3 h_i. \qquad (9.47)$$

Тут η — коефіцієнт, який враховує схематизацію реального профілю:

для кутникового перерізу $\eta = 1{,}00$;
» двотаврового » $\eta = 1{,}20$;
» таврового » $\eta = 1{,}15$;
» швелерного » $\eta = 1{,}12$.

У тонкостінних відкритих профілях довжину елемента, як правило, позначають через s, а товщину стінки — через δ. Тоді, заміняючи в формулі (9.47) h на s, а b на δ, дістанемо

$$J_к = \eta \frac{1}{3}\sum_i \delta_i^3 s_i. \qquad (9.48)$$

Кут закручування визначається за формулою (9.30), а найбільше дотичне напруження, яке виникає на ділянці, що має найбільшу товщину стінки δ_{max}, — за формулою (9.28). При цьому для довгих прямокутників

$$\left(\frac{J_{кi}}{W_{кi}}\right)_{max} = \delta_{max}.$$

Тоді

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}\delta_{max}}{J_к}. \qquad (9.49)$$

Розглянемо приклади розрахунку тонкостінних стрижнів відкритого профілю.

Приклад 33. *Визначимо максимальне напруження та кут закручування стрижня завдовжки 900 мм (рис. 225) з поперечним перерізом у вигляді рівнобокого кутника 50 × 50 × 5, який зазнає дії крутного моменту $M_{кр} = 50$ Н · м. Модуль зсуву матеріалу стрижня $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.*

Максимальні дотичні напруження виникають посередині полиць (концентрацію напружень у вхідному куті не враховуємо). Ці напруження визначимо за формулою (9.49)

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}\delta_{max}}{J_к},$$

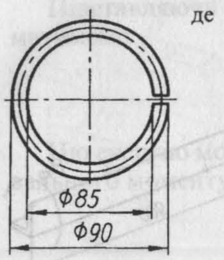


Рис. 226

де

$$J_к = \eta\frac{1}{3}\sum\delta_i^3 s_i = 1\frac{1}{3}\left(5\cdot 0,5^3 + 4,5\cdot 0,5^3\right)\text{см}^4 = 0,4\ \text{см}^4;$$

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}\delta_{max}}{J_к} = \frac{50\cdot 10^{-6}\cdot 0,5\cdot 10^{-2}}{0,4\cdot 10^{-8}}\ \text{МПа} = 62,5\ \text{МПа}.$$

Кут закручування стрижня

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{G J_к} = \frac{50\cdot 10^{-6}\cdot 0,9}{8\cdot 10^4\cdot 0,4\cdot 10^{-8}} = 0,140625\ \text{рад} = 8°\,3'.$$

Приклад 34. *Визначимо напруження та відносний кут закручування сталевої труби, розрізаної вздовж твірної (рис. 226). Зовнішній діаметр труби $d_з = 90$ мм, внутрішній $d_в = 85$ мм. Труба зазнає дії крутного моменту $M_{кр} = 50$ Н · м. Модуль зсуву матеріалу $G = 8\cdot 10^4$ МПа. Порівняємо добуті значення напружень та кута закручування розрізаної труби з відповідними даними для суцільної труби.*

Дотичні напруження в розрізаній трубі визначимо за формулою (9.49)

$$\tau_р = \frac{M_{кр}\delta}{J_к}.$$

Тут

$$J_к = \frac{1}{3}s\delta^3,$$

де s — розгорнута довжина серединної лінії перерізу труби.

Тоді

$$J_к = \frac{1}{3}s\delta^3 = \frac{1}{3}\pi\cdot 8,75\cdot 0,25^3\ \text{см}^4 = 0,143\ \text{см}^4;$$

$$\tau_р = \frac{M_{кр}\delta}{J_к} = \frac{50\cdot 10^{-6}\cdot 0,25\cdot 10^{-2}}{0,143\cdot 10^{-8}}\ \text{МПа} = 87,5\ \text{МПа}.$$

Напруження в суцільній трубі визначимо за формулою (9.43)

$$\tau_с = \frac{M_{кр}}{2\omega\delta} = \frac{50\cdot 10^{-6}\cdot 4}{2\pi\cdot 8,75\cdot 10^{-4}\cdot 0,25\cdot 10^{-2}}\ \text{МПа} = 1,66\ \text{МПа}.$$

Відносний кут закручування розрізаної труби

$$\Theta_р = \frac{M_{кр}}{G J_к} = \frac{50\cdot 10^{-6}}{8\cdot 10^4\cdot 0,143\cdot 10^{-8}}\ \text{рад/м} = 0,437\ \text{рад/м}.$$

Відносний кут закручування нерозрізаної труби визначимо за формулою (9.46):

$$\Theta_с = \frac{M_{кр}s}{4G\omega^2\delta} = \frac{50\cdot 10^{-6}\cdot\pi\cdot 8,75\cdot 10^{-2}}{4\cdot 8\cdot 10^4\left[\pi/4\left(8,75\cdot 10^{-2}\right)^2\right]^2 0,25\cdot 10^{-2}}\ \text{рад/м} = 0,000475\ \text{рад/м}.$$

Отже, у суцільній трубі при крученні напруження менше в 52,5 раза, а кут закручування — в 920 разів, ніж у трубі, розрізаній уздовж твірної.

§ 58. Розрахунок гвинтових циліндричних пружин

Гвинтові пружини — це найпоширеніший тип пружин у техніці. Найчастіше їх виготовляють із сталевих стрижнів (дроту) круглого поперечного перерізу. В роботі вони зазнають дії розтягальних або стискальних сил.

Точний розрахунок на міцність гвинтових циліндричних пружин досить складний, оскільки дріт пружини може зазнавати складного навантаження — одночасних кручення, зсуву та згинання. Однак при малих кутах нахилу витків впливом згинання можна знехтувати. Здебільшого, як буде показано нижче, можна нехтувати також зсувом і, отже, з достатнім наближенням розраховувати такі пружини на міцність та деформативність, виходячи з опору їх крученню.

Розглянемо циліндричну гвинтову пружину з середнім діаметром $D = 2R$ (рис. 227), яка має n витків і діаметр d поперечного перерізу дроту. Пружина зазнає розтягання центрально прикладеною силою P. Щоб вивести формули для визначення напружень у дроті, з якого зроблено пружину, розріжемо її уявно на дві частини по будь-якому витку площиною, що проходить через вісь циліндра, утвореного витками. Застосовуючи метод перерізів (відкидаючи уявно нижню частину пружини), розглянемо умову рівноваги залишеної верхньої її частини (рис. 228). Очевидно, вплив відкинутої частини пружини на розглядувану верхню може бути врахований прикладанням у місці розрізу витка поперечної сили $Q = P$ та крутного моменту $M_{кр} = PR$. Вважаючи, що приблизно кут нахилу витка дорівнює нулю, можна рештою силових факторів (поздовжня сила та згинальний момент) знехтувати.

Отже, в розглядуваному перерізі пружини діють дві групи дотичних напружень: напруження від зрізу, рівномірно розподілені по перерізу,

$$\tau' = \frac{Q}{F} = \frac{4P}{\pi d^2} \qquad (9.50)$$

та напруження від кручення, максимальне значення яких

$$\tau''_{max} = \frac{M_{кр}}{W_p} = \frac{16PR}{\pi d^3}. \qquad (9.51)$$

Розподіл напружень τ' від зрізу показано на рис. 229, *а*, а напружень τ'' від кручення — на рис. 229, *б*.

Як видно з наведеної картини розподілу напружень, у точці A перерізу витка на внутрішньому радіусі пружини дотичні напруження τ' та τ'' за напрямом однакові. Тому максимальні напруження в цій точці

$$\tau_{max} = \tau' + \tau''_{max} = \frac{4P}{\pi d^2} + \frac{16PR}{\pi d^3}.$$

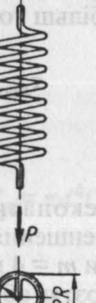


Рис. 227

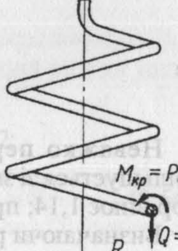


Рис. 228

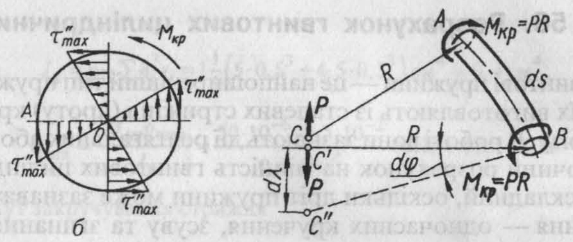


Рис. 229 Рис. 230

або

$$\tau_{\max} = \frac{16PR}{\pi d^3}\left(1+\frac{d}{4R}\right). \qquad (9.52)$$

Здебільшого при розрахунку гвинтових пружин великого середнього радіуса R, виготовлених із тонкого дроту, при $d/4R \ll 1$ напруження від кручення $\tau''_{\max}$ значно вищі, ніж напруження зрізу τ', тому останні можна не враховувати. Тоді максимальні дотичні напруження у гвинтовій пружині з досить високим ступенем точності можна визначити за формулою

$$\tau_{\max} = \frac{16PR}{\pi d^3}. \qquad (9.53)$$

Зазначимо, однак, що при розрахунках потужних гвинтових ресор, таких, наприклад, які застосовуються в залізничному транспорті, слід використовувати формулу (9.52), оскільки напруження від зрізу тут істотні внаслідок відносно великого значення d/R. Досвід експлуатації гвинтових пружин свідчить про те, що перші тріщини при руйнуванні, як правило, виникають з внутрішнього боку витка, де діють найбільші сумарні дотичні напруження τ' та τ''.

Виводячи формулу (9.52), ми не враховували, що на внутрішній та зовнішній поверхнях витків радіуси кривини різні. Іноді, враховуючи це, замість формули (9.52) для визначення найбільших дотичних напружень використовують більш точну формулу

$$\tau_{\max} = \frac{16PR}{\pi d^3}\left(\frac{4m-1}{4m-4}+\frac{0{,}615}{m}\right),$$

де

$$m = 2R/d.$$

Неважко переконатися, що поправковий коефіцієнт у дужках збільшується зі зменшенням співвідношення m: наприклад, при $m = 10$ він дорівнює 1,14; при $m = 4$ цей коефіцієнт становить ~ 1,4.

Визначаючи розтяг або стиск λ пружини, як правило, беруть до уваги тільки кручення витків. Розглянемо деформацію кручення уявно виділеного з пружини елементарного відрізка ds її витка (рис. 230), припустивши, що решта пружини абсолютно жорстка. В перерізах A та B виділеного елемента проведемо радіуси витка в площині, перпендикулярній до осі пружини, продовживши їх до перетину з віссю пружини. Добуті при цьому відрізки AC та BC' будуть радіусами пружини. По цих радіусах витка спрямуємо абсолютно жорсткі стрижні, прикріплені до перерізів A та B витка. Сили P, що розтягують пружину по осі, можна вважати прикладеними до кінців C і C' жорстких стрижнів AC та BC'.

У таких умовах виділений елемент ds витка пружини зазнає деформації кручення. Якщо вважати переріз A нерухомим, то переріз B при навантажуванні пружини повернеться відносно A на кут $d\varphi$, який визначається за формулою

$$d\varphi = \frac{M_{\text{кр}}\,ds}{GJ_p},$$

де

$$M_{\text{кр}} = PR; \qquad J_p = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Унаслідок повороту перерізу B «жорсткий» радіус BC', повернутий на той самий кут $d\varphi$, «перенесе» точку прикладення сили P у нове положення C''. Відрізок $C'C''$ характеризує частину поздовжньої деформації витої пружини, спричинену закручуванням елемента ds витка, тобто

$$C'C'' = d\lambda \approx R\,d\varphi.$$

Оскільки насправді скручуються всі витки пружини, які мають загальну довжину s, то переміщення нижнього кінця пружини відносно верхнього визначається формулою

$$\lambda = \int_{(s)} R\,d\varphi = R\int_{(s)} \frac{M_{\text{кр}}\,ds}{GJ_p} = \frac{RM_{\text{кр}}}{GJ_p}\int_{(s)} ds.$$

Ураховуючи, що наближено довжина дроту, з якого виготовлено циліндричну пружину з числом витків n, буде

$$\int_{(s)} ds = 2\pi Rn,$$

деформацію пружини визначимо за формулою

$$\lambda = \frac{M_{\text{кр}}R}{GJ_p}2\pi Rn,$$

або, підставляючи в цю формулу $M_{\text{кр}} = PR$ та $J_p = \pi d^4/32$:

$$\lambda = \frac{64PR^3n}{Gd^4} = \frac{8PD^3n}{Gd^4}. \qquad (9.54)$$

Формули (9.53) та (9.54) дають змогу перевірити міцність і визначити подовження (або осадку) циліндричної гвинтової пружини.

Допустимі напруження на зріз при розрахунку сталевих пружин вибирають залежно від діаметра дроту пружини; як правило, для загартованої пружинної сталі

$$[\tau] = 500 \text{ МПа} \quad \text{при} \quad d = 6 \text{ мм};$$

$$[\tau] = 400 \text{ МПа} \quad \text{при} \quad d = 10 \text{ мм};$$

$$[\tau] = 350 \text{ МПа} \quad \text{при} \quad d = 12 \text{ мм}.$$

Для хромонікелевих сталей при розтяганні пружин з діаметром дроту 12...16 мм беруть $[\tau] = 700$ МПа. Для фосфористої бронзи з модулем пружності при зсуві $G = 4{,}4 \cdot 10^4$ МПа при $d < 16$ мм вибирають $[\tau] = 130$ МПа. Такі допустимі напруження можна брати тільки при постійних навантаженнях. При повторно-змінних або ударних навантаженнях допустимі напруження істотно менші.

Часто, розраховуючи амортизаційні пружини (пружини для зниження різких поштовхів) або ресори, за основу беруть енергію T, яку має поглинати пружина (ресора) під час експлуатації. При цьому виходять з того, що між зміщенням λ пружини та силою P, яка діє на неї, у межах пружності існує прямолінійна залежність. Тому потенціальну енергію деформації пружини можна виразити формулою

$$U = \frac{1}{2} P\lambda = \frac{32 P^2 R^3 n}{G d^4}.$$

З іншого боку, з формули (9.53) через напруження можна виразити крутний момент:

$$M_{\text{кр}} = PR = \frac{\tau_{\max} \pi d^3}{16}.$$

Тоді потенціальну енергію, яка накопичується в пружині, також можна виразити через напруження:

$$U = \frac{2\pi R n}{4G} \frac{\pi d^2}{4} \tau_{\max}^2.$$

Оскільки $2\pi Rn$ — довжина дроту (s), з якого виготовлено пружину, а $\pi d^2/4$ — площа його перерізу, то

$$2\pi R n \frac{\pi d^2}{4} = V$$

є об'ємом матеріалу пружини. Враховуючи це, потенціальну енергію пружини можна виразити формулою

$$U = \frac{\tau_{\max}^2}{4G} V. \tag{9.55}$$

Отже, задавшись значенням максимального напруження $\tau_{\max} = [\tau]$, можна визначити об'єм пружини, який потрібний для поглинання заданої кінетичної енергії T, для того щоб не було перевищення допустимого напруження:

$$T = U = \frac{[\tau]^2}{4G} V,$$

звідки

$$V = \frac{4GT}{[\tau]^2}. \tag{9.56}$$

Конструюючи пружину за знайденим об'ємом її матеріалу, потрібно вибрати її параметри (R, d та n) з таким розрахунком, щоб при перевірці осадки пружини зазори між витками не закривалися.

На закінчення зазначимо, що крім розглянутих циліндричних гвинтових пружин постійного перерізу з пологим нахилом витків є багато інших конструкцій витих пружин: конічні, призматичні та різноманітні фасонні (параболічні, двійчасті конічні, бочкоподібні тощо). При цьому крок витків пружини може бути як постійний, так і змінний, а переріз витка не тільки круглої, а й прямокутної форми. Методи розрахунку таких пружин досить складні й розглядаються в спеціальній літературі.

Приклад 35. *Запобіжний клапан діаметром $d_к = 75$ мм повинен відкриватися при тиску пари $p = 0{,}6$ МПа, мати змогу підніматися на висоту $\lambda_0 = 20$ мм. Діаметр дроту сталевої пружини $d = 12$ мм, середній діаметр пружини $2R = 60$ мм. Якщо немає навантаження, крок витків пружини $t = 17$ мм; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа. Визначимо потрібну кількість витків пружини для того, щоб при максимальному піднятті клапана ще залишався запас на дальше стискання не менший за $\lambda_2 = 15$ мм. Знайдемо також початкове стискання пружини λ_1 та напруження τ при повному відкритті клапана.*

Сила, яка піднімає клапан,

$$P = p\frac{\pi d_к^2}{4} = 0{,}6 \cdot 10^3 \frac{\pi \left(7{,}5 \cdot 10^{-2}\right)^2}{4} \text{ кН} = 2{,}65 \text{ кН}.$$

При цій силі пружина, згідно з формулою (9.54), має таку початкову осадку:

$$\lambda_1 = \frac{64 P R^3 n}{G d^4} = \frac{64 \cdot 2{,}65 \cdot 10^{-3} \left(3 \cdot 10^{-2}\right)^3 n}{8 \cdot 10^4 \left(1{,}2 \cdot 10^{-2}\right)^4} = 0{,}00276n \text{ м} = 0{,}276n \text{ см}.$$

Повна осадка пружини в навантаженому стані складається з λ_1, потрібного підняття λ_0 та запасу λ_2. Ця сума має дорівнювати різниці кроку пружини t та діаметра дроту пружини, помноженій на кількість витків, тобто

$$\lambda_1 + \lambda_0 + \lambda_2 = n(t - d),$$

або

$$0{,}276n + 2 + 1{,}5 = n(1{,}7 - 1{,}2),$$

звідки

$$n = \frac{3{,}5}{0{,}224} \approx 16 \text{ витків}.$$

Попередня осадка пружини

$$\lambda_1 = 0{,}276n = 0{,}276 \cdot 16 \text{ см} = 4{,}4 \text{ см}.$$

Максимальне напруження в пружині при повному відкритті клапана дістанемо, пов'язавши вирази для λ та $\tau_{\max}$. З формули (9.54)

$$P = \frac{\lambda d^4 G}{64 R^3 n}.$$

Підставляючи це значення P у формулу (9.53) для τ_{max}, знайдемо напруження при повному відкритті клапана:

$$\tau_{max} = \frac{\lambda dG}{4R^2 n\pi} = \frac{6{,}4 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-4} \cdot 8 \cdot 10^4}{4\left(3 \cdot 10^{-2}\right)^2 16\pi} \text{ МПа} \approx 339 \text{ МПа}.$$

Приклад 36. *Гвинтова пружина виготовлена з дроту $d = 4$ мм. Внутрішній діаметр пружини $D_1 = 46$ мм. У напруженому стані зазор на просвіт між витками $t_1 = 1$ мм; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа. Визначимо, яка потрібна сила для стискання пружини, щоб зазора не було.*

Середній діаметр пружини

$$D = 2R = D_1 + d = (46 + 4) \text{ мм} = 50 \text{ мм}.$$

Зазор закривається, якщо осадка одного витка буде дорівнювати йому, тобто

$$\lambda = t_1 = \frac{64PR^3}{Gd^4},$$

звідки

$$P = \frac{Gd^4 t_1}{64R^3} = \frac{8 \cdot 10^7 \left(0{,}4 \cdot 10^{-2}\right)^4 0{,}1 \cdot 10^{-2}}{64\left(2{,}5 \cdot 10^{-2}\right)^3} \text{ кН} = 2{,}05 \cdot 10^{-2} \text{ кН} = 20{,}5 \text{ Н}.$$

Приклад 37. *Дві пружини 1 і 2 (рис. 231), які звиті з дроту однакового діаметра $d = 10$ мм і мають однакову кількість витків $n = 10$, стискаються штоком клапана. Висота зовнішньої пружини 1 у вільному стані на $a = 60$ мм більша, ніж внутрішньої пружини 2. Знайдемо зусилля, осадку та напруження кожної пружини, якщо радіус осьової лінії витка зовнішньої пружини $R_1 = 50$ мм, внутрішньої $R_2 = 30$ мм, зусилля $P = 4$ кН та модуль пружності при зсуві $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.*

Позначимо через P_1 та P_2 зусилля, які припадають на кожну з пружин. З рівняння рівноваги клапана випливає, що

$$\sum X = P_1 + P_2 - P = 0. \tag{9.57}$$

Отже, задача один раз статично невизначувана.

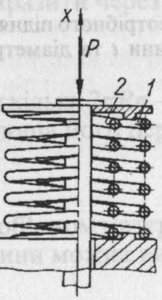


Рис. 231

Друге рівняння, потрібне для визначення невідомих P_1 і P_2, дістанемо з умов сумісності деформацій:

$$\lambda_1 = \lambda_2 + a, \tag{9.58}$$

де λ_1 та λ_2 — осадки відповідно зовнішньої та внутрішньої пружин під дією сил P_1 та P_2:

$$\lambda_1 = \frac{64P_1R_1^3 n}{Gd^4}; \tag{9.59}$$

$$\lambda_2 = \frac{64P_2R_2^3 n}{Gd^4}. \tag{9.60}$$

Підставивши вирази для λ_1 та λ_2 в (9.58), матимемо

$$\frac{64P_1R_1^3 n}{Gd^4} = \frac{64P_2R_2^3 n}{Gd^4} + a,$$

або в числовому виразі:

$$\frac{64P_1\left(5 \cdot 10^{-2}\right)^3 10}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^3 \left(1 \cdot 10^{-2}\right)^4} = \frac{64P_2\left(3 \cdot 10^{-2}\right)^3 10}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^3 \left(1 \cdot 10^{-2}\right)^4} + 6 \cdot 10^{-2},$$

звідки

$$125P_1 - 27P_2 = 75.$$

Розв'язуючи останнє рівняння сумісно з (9.57), яке слід переписати у вигляді

$$P_1 + P_2 = 4,$$

знайдемо

$$P_1 = 1{,}2 \text{ кН}; \quad P_2 = 2{,}8 \text{ кН}.$$

Осадка зовнішньої пружини, згідно з формулою (9.59),

$$\lambda_1 = \frac{64P_1R_1^3 n}{Gd^4} = \frac{64 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-3}\left(5 \cdot 10^{-2}\right)^3 10}{8 \cdot 10^4 \left(1 \cdot 10^{-2}\right)^4} \text{ м} = 0{,}12 \text{ м} = 12 \text{ см}.$$

Для внутрішньої пружини

$$\lambda_2 = \frac{64P_2R_2^3 n}{Gd^4} = \frac{64 \cdot 2{,}8 \cdot 10^{-3}\left(3 \cdot 10^{-2}\right)^3 10}{8 \cdot 10^4 \left(1 \cdot 10^{-2}\right)^4} \text{ м} = 0{,}06 \text{ м} = 6 \text{ см}.$$

Максимальні дотичні напруження у витках зовнішньої та внутрішньої пружин, згідно з формулою (9.52), відповідно

$$\tau_1 = \frac{16P_1R_1}{\pi d^3}\left(1 + \frac{d}{4R_1}\right) = \frac{16 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}05}{3{,}14\left(1 \cdot 10^{-2}\right)^3}\left(1 + \frac{0{,}01}{4 \cdot 0{,}05}\right) \text{МПа} = 321 \text{ МПа};$$

$$\tau_2 = \frac{16P_2R_2}{\pi d^3}\left(1 + \frac{d}{4R_2}\right) = \frac{16 \cdot 2{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}03}{3{,}14\left(1 \cdot 10^{-2}\right)^3}\left(1 + \frac{0{,}01}{4 \cdot 0{,}03}\right) \text{МПа} = 463 \text{ МПа}.$$

§ 59. Концентрація напружень при крученні

Концентрація напружень, або місцеве збільшення напружень, спричинюється різкою зміною форми деталі (наявністю надрізів, отворів, різьби, різкою зміною перерізів стрижнів та ін.).

Найбільше напруження при крученні в зоні концентрації, обумовлене зазначеними концентраторами, виражається як добуток номінального напруження $\tau_н$ на коефіцієнт концентрації напружень α_τ:

$$\tau_{max} = \alpha_\tau \tau_н. \tag{9.61}$$

Тут $\tau_н$ обчислюється за формулами опору матеріалів, зокрема, для вала круглого перерізу

$$\tau_н = \frac{M_{кр}}{J_p} r; \tag{9.62}$$

α_τ є відношенням максимального напруження в зоні концентрації, обчисленого в припущенні абсолютної пружності матеріалу, до номінального напруження, тобто

$$\alpha_\tau = \tau_{max} / \tau_н.$$

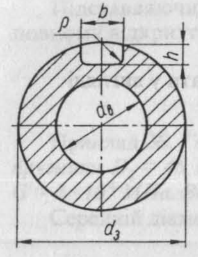


Рис. 232

Як зазначалося раніше, цей коефіцієнт називається *теоретичним коефіцієнтом концентрації* і визначається методами теорії пружності чи експериментально (поляризаційно-оптичним методом, тензометруванням, за методом аналогій).

Зауважимо, що коефіцієнт концентрації напружень для виточки (або надрізу) при даній її глибині і розмірах деталі залежить здебільшого від кривини поверхні по дну виточки.

Для ілюстрації впливу форми виточки на коефіцієнт концентрації напружень розглянемо паз (шпонкову канавку) з різко окресленими кутами (рис. 232). Досліди, проведені з порожнистим валом зовнішнього діаметра $d_з = 254$ мм та внутрішнього $d_в = 147$ мм з глибиною паза $h = 25{,}4$ мм та завширшки $b = 63{,}5$ мм при різних радіусах ρ викружки в кутах, свідчать, що найбільші напруження в заокруглених кутах дорівнюють найбільшим у такому самому валу без паза, помноженим на коефіцієнт концентрації α_τ, значення якого наведено в табл. 14.

Як видно з табл. 14, концентрація напружень може бути знижена збільшенням радіуса заокруглення в кутах.

Другий типовий приклад концентрації напружень, який часто буває на практиці, — це кручення валів змінного східчастого поперечного перерізу (рис. 233). Максимальна концентрація напружень має місце на початку заокруглення, тобто в точках m на рис. 233. При цьому максимальне напруження залежить від співвідношень $\rho : d$ та $D : d$, де ρ — радіус заокруглення, а D та d — діаметри спряжуваних циліндричних частин східчастого вала. Картина розподілу дотичних напружень при крученні в зоні концентрації, тобто в місці спряження двох діаметрів, має приблизно такий вигляд, як показано на рис. 234 для випадку $D/d = 1{,}2$ та $2\rho/d = 0{,}1$. Залежності $\alpha_\tau = f(2\rho/d)$ при різних співвідношеннях $D : d$ наведено на рис. 235.

З аналізу наведених графіків випливає, що при певному співвідношенні діаметрів D і d та малих значеннях радіуса заокруглення ρ місць спряження двох діаметрів вала коефіцієнти концентрації напружень можуть бути більше трьох.

Слід мати на увазі, що для пластичних матеріалів при статичних навантаженнях концентрація напружень не є небезпечною, оскільки за рахунок текучості матеріалу в зоні концентрації відбувається перерозподіл (вирівнювання) напружень. Проте у валах, виготовлених з крихких матеріалів, наприклад із загартованої сталі, внаслідок концентрації напружень в місцях заокруглення двох суміжних діаметрів вала навіть при статичних навантаженнях можуть виникнути тріщини, які призводять до руй-

Таблиця 14

ρ, мм	2,54	5,08	7,62	10,16	12,70	15,24	17,78
α_τ	5,4	3,4	2,7	2,3	2,1	2,0	1,9

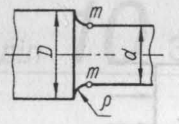


Рис. 233

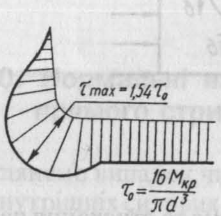


Рис. 234

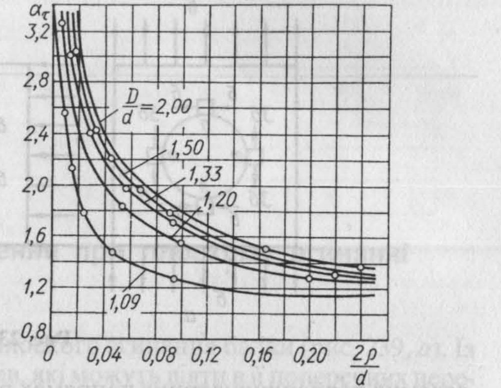


Рис. 235

нування вала. Тому, конструюючи деталі з крихких матеріалів, навіть за умови статичного навантаження їх, слід більше уваги приділяти геометрії відповідних переходів, щоб запобігти великій геометрії відповідних переходів, щоб запобігти великій концентрації напружень. Щодо впливу концентрації напружень при повторно-змінних навантаженнях, то вона, як буде показано в розд. 21, має істотне значення навіть для пластичних матеріалів.

Наприкінці розглянемо приклад концентрації напружень навколо малого радіального отвору в порожнистому тонкостінному валу при крученні (рис. 236). Двома парами взаємно перпендикулярних площадок, нахилених під кутом 45° до твірних вала, виділимо навколо отвору якийсь елемент $abcd$ (рис. 237). Ці площадки для розглядуваної задачі кручення будуть головними, а тому по гранях елемента $abcd$ діятимуть тільки нормальні напруження σ_1 та σ_3, які однакові за модулем, але різні за знаком. Абсолютні значення їх, як відомо, дорівнюють дотичним напруженням τ, що діють в перерізі, де розміщений отвір, і які визначаються у відповідних точках поперечного перерізу за формулами теорії кручення.

Аналізуючи напружений стан розглядуваного елемента і враховуючи, що отвір малий, а стінки вала тонкі, легко переконатися, що цей напружений стан аналогічний тому, який має місце в тонкій пластині з малим отвором, розтягнутій в одному напрямі деяким напруженням $\sigma = \tau$ та стиснутій таким самим за модулем напруженням у напрямі під кутом 90° до першого.

Отже, задача про визначення концентрації напружень біля отвору малого діаметра в стінці скручуваного трубчастого вала зводиться до визначення концентрації напружень в тонкій пластині з малим отвором, яка зазнає у

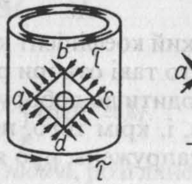


Рис. 236

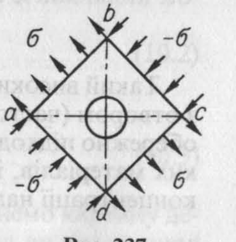


Рис. 237

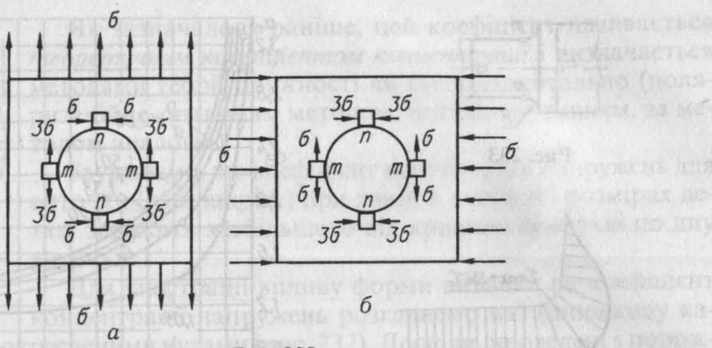


Рис. 238

взаємно перпендикулярних напрямах розтягання та стискання напруженнями $\sigma = \tau$.

Коефіцієнт концентрації напружень в стінці вала з отвором знайдемо, взявши суму концентрацій у відповідних точках, яка має місце в двох окремих випадках (рис. 238).

Як уже зазначалося (див. § 32, рис. 118, *а*), при навантажуванні за схемою рис. 238, *а* значення максимальних розтягальних напружень в точках *m* у три рази вищі за напруження, які діють на контурі пластинки, тобто $\alpha = 3$. Водночас у точках *n*, розміщених під кутом 90°, виникають стискальні напруження, які приблизно дорівнюють за модулем розтягальним напруженням, що діють на контурі пластинки. Очевидно, при схемі навантажування рис. 238, *б* картина напружень в точках *m* та *n* буде іншою. Отже, якщо просумуємо ці два напружених стани, то в точках *m* матимемо

$$\sigma_{max} = 3\sigma + \sigma = 4\sigma,$$

а в точках *n*

$$\sigma_{min} = -3\sigma - \sigma = -4\sigma,$$

тобто коефіцієнт концентрації в стінці трубчастого вала з малим отвором $\alpha_\tau = 4$.

Отже,

$$\tau_{max} = \alpha_\tau \tau_н,$$

де

$$\tau_н = \frac{M_{кр}}{W_p}, \quad \tau_{max} = 4\frac{M_{кр}}{W_p}.$$

Такий високий коефіцієнт концентрації напружень при крученні валів з отвором (часто такі отвори роблять для мащення) зобов'язує особливо обережно підходити до добору розмірів валів, які виготовляються з крихких матеріалів, і, крім того, передбачати технологічні засоби зниження концентрації напружень, про які вже йшлося.

Розділ 10 ЗГИН

§ 60. Нормальні напруження при плоскому згинанні прямого стрижня

Розглянемо випадок чистого плоского згинання балки (рис. 239, *а*). Із шести внутрішніх силових факторів, які можуть діяти в її поперечних перерізах у загальному випадку згинання, при чистому згинанні не дорівнює нулю тільки згинальний момент M. Вісь балки деформується в площині, що збігається з силовою (на рис. 239 — у площині креслення). В § 17 було зазначено умови, необхідні для того, щоб згинання було плоским. У цьому параграфі виведемо формули для обчислення напружень в будь-якій точці перерізу. Поки що не будемо вводити ніяких обмежень щодо форми та розміщення силової площини (за винятком того, що силова площина має проходити через вісь стрижня).

Згідно із загальним планом (див. § 26), розпочнемо виведення зі *статичного аспекту задачі*. Проведемо поперечний переріз *m* — *m* на довільній відстані *x* від початку координат (рис. 239, *а*). В площині перерізу (рис. 239, *б*) проведемо координатні осі *y* та *z*: вісь *y* сумістимо з силовою лінією (лінією перетину силової площини з площиною перерізу), а вісь *z* проведемо на довільній поки що висоті, але перпендикулярно до осі *y*. Вісь *x* спрямуємо перпендикулярно до площини перерізу. Виділимо в перерізі елемент площі dF, координати якого *y* та *z*. Узагалі на елемент могли б діяти напруження σ та τ. Проте при чистому згинанні всі зусилля та моменти, пов'язані з дотичними напруженнями, — Q_y, Q_z та $M_{кр}$ — дорівнюють нулю.

Отже, з усіх умов рівноваги (3.29) — (3.34) залишається тільки три:

$$N = \int_F \sigma dF; \quad M_y = \int_F \sigma z dF; \quad M_z = \int_F \sigma y dF. \tag{10.1}$$

Проте у цьому прикладі в перерізах балки діє тільки згинальний момент M_z, тому

$$N = 0; \quad M_y = 0; \quad M_z = M. \tag{10.2}$$

Із залежностей (10.1) та (10.2) маємо

$$\int_F \sigma dF = 0; \quad \int_F \sigma z dF = 0; \quad \int_F \sigma y dF = M. \tag{10.3}$$

Переходячи до *геометричного аспекту задачі*, розглянемо картину деформацій тієї самої балки (рис. 240). Досліди, проведені на еластичних

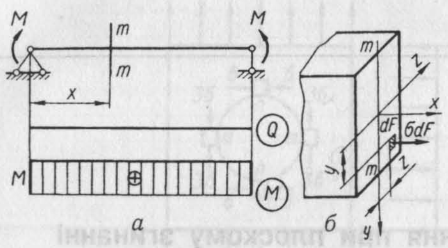


Рис. 239

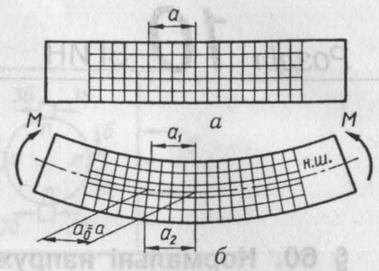


Рис. 240

(наприклад, гумових) моделях, які дають змогу легко добути значні деформації, свідчать, що коли на поверхню моделі нанести прямокутну сітку ліній (рис. 240, *а*), то при чистому згинанні ця сітка деформується таким чином (рис. 240, *б*): поздовжні лінії викривлюються по дузі кола; контури поперечних перерізів залишаються плоскими, про що свідчать поперечні лінії сітки, які залишаються прямими і перетинаються з поздовжніми лініями під прямим кутом.

На підставі сказаного можна зробити висновок, що при чистому згинанні поперечні перерізи балки залишаються плоскими і повертаються так, що залишаються нормальними до зігнутої осі балки. Отже, при чистому згинанні, як і при розтяганні (стисканні) та крученні круглих стрижнів, буде справедливою гіпотеза плоских перерізів.

Вимірюючи відстані між аналогічними точками контуру будь-яких двох перерізів, можна побачити, що при деформуванні ці відстані змінюються. Так, виявляється, що при $a_1 < a$ і $a_2 > a$ (рис. 240, *а, б*). Отже, верхні поздовжні волокна балки укорочуються, а нижні — подовжуються. Проте можна знайти і такі волокна, довжина яких при згинанні залишається незмінною ($a_0 = a$). *Сукупність волокон, які не змінюють своєї довжини при згинанні балки, називається нейтральним шаром* (*н. ш.*). Волокна, що належать нейтральному шару, до деформації лежать в одній площині, а в деформованому стані утворюють деяку циліндричну поверхню. В обох випадках кожний поперечний переріз балки перетинається з нейтральним шаром по прямій, яка називається *нейтральною лінією* (*н. л.*) *перерізу*.

При плоскому згинанні нейтральний шар виявляється перпендикулярним до силової площини, а отже, нейтральна лінія перпендикулярна до силової лінії в перерізі. Будемо вважати, що вісь z (див. рис. 239, *б*) проведена в перерізі таким чином, що вона збігається з нейтральною лінією (проте положення останньої по висоті перерізу поки що невідоме).

Виділимо елемент балки двома суміжними поперечними перерізами m— m та n — n, які розміщені один від одного на відстані dx (рис. 241, *а*), та, взявши до уваги гіпотезу плоских перерізів, розглянемо його деформований стан (рис. 241, *б*). Перерізи m — m та n—n повертаються один відносно одного на кут $d\varphi$ і залишаються плоскими. Елемент a_0b_0 нейтрального шару перетворюється на дугу $a_0'b_0'$ з радіусом ρ, а волокно ab, яке розміщено на відстані y від нейтрального шару, — на криволінійне волокно a_1b_1 з радіусом кривини $\rho + y$. Відносне подовження цього волокна

$$\varepsilon = \frac{a_1b_1 - ab}{ab}.$$

Проте $a_1b_1 = (\rho + y)\, d\varphi$ та $ab = dx$, тому

$$\varepsilon = \frac{(\rho + y)\,d\varphi - dx}{dx}. \qquad (10.4)$$

Щоб спростити цей вираз, розглянемо волокно a_0b_0, яке належить нейтральному шару. Його довжина $a_0b_0 = dx$. Після деформації воно перетворюється на дугу $a_0'b_0' = \rho d\varphi$. Однак волокна нейтрального шару не змінюють своєї довжини при деформуванні, тому

$$dx = \rho d\varphi. \qquad (10.5)$$

Підставивши (10.5) у вираз (10.4) і скоротивши на $d\varphi$, матимемо

$$\varepsilon = y / \rho. \qquad (10.6)$$

Отже, розгляд геометричного аспекту задачі показав, що відносна поздовжня деформація пропорційна відстані волокна від нейтральної осі.

Для того щоб записати закон Гука, що виражає *фізичний аспект задачі*, треба з'ясувати, в якому напруженому стані перебуває волокно ab. На елементарній площадці dF зрізу (див. рис. 239, *б*), як уже зазначалося, дотичних напружень немає. Припускається також, що волокна матеріалу, розміщені вздовж балки, не тиснуть одне на одне, а тому напруження між ними дорівнюють нулю. Отже, волокно ab перебуває в лінійному напруженому стані — зазнає простого розтягання або стискання. Тому для нього закон Гука (у відносних координатах) слід записати так:

$$\varepsilon = \sigma / E. \qquad (10.7)$$

Переходячи до *синтезу* результатів розгляду трьох аспектів задачі, виключимо ε із залежностей (10.6) та (10.7):

$$\sigma = \frac{E}{\rho} y. \qquad (10.8)$$

Підставляючи (10.8) у третє рівняння (10.3) та враховуючи, що E і ρ як величини, що не залежать від положення елемента dF у перерізі, можна винести за знак інтеграла, матимемо

$$\frac{E}{\rho} \int_F y^2 dF = M.$$

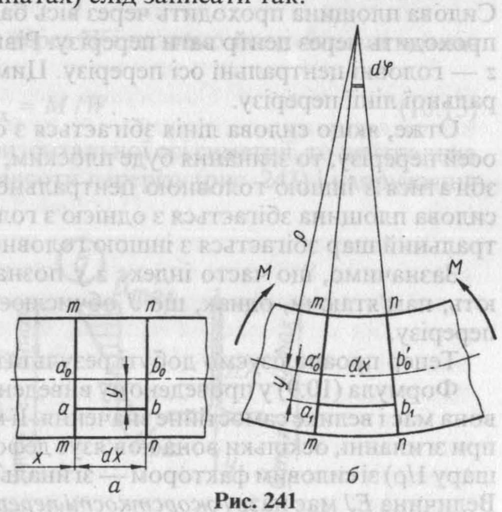


Рис. 241

Згадавши, що $\int\limits_F y^2 dF = J_z$ є моментом інерції перерізу відносно осі z, можемо останню формулу переписати у вигляді

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_z}. \tag{10.9}$$

Нарешті, підставивши вираз (10.9) у формулу (10.8), знайдемо, що

$$\sigma = My / J_z. \tag{10.10}$$

Ця формула, яку вперше було виведено французьким ученим К. Навьє, дає змогу визначати нормальні напруження при чистому згинанні балки в будь-якій точці її перерізу.

Тепер залишилося тільки з'ясувати, де в перерізі розміщена вісь z — нейтральна лінія перерізу. Щоб відповісти на це запитання, внесемо вираз для σ з формули (10.10) у перші два рівняння (10.3):

$$\frac{M}{J_z}\int\limits_F ydF = 0; \quad \frac{M}{J_z}\int\limits_F yzdF = 0.$$

Оскільки $M/J_z \neq 0$, а

$$\int\limits_F ydF = S_z; \quad \int\limits_F yzdF = J_{yz},$$

то

$$S_z = 0; \tag{10.11}$$

$$J_{yz} = 0. \tag{10.12}$$

На підставі рівності (10.11) дійдемо висновку, що вісь z — нейтральна лінія перерізу — проходить через центр ваги (ц. в.) поперечного перерізу. Силова площина проходить через вісь балки, а отже, силова лінія (вісь y) проходить через центр ваги перерізу. Рівність (10.12) показує, що осі y та z — головні центральні осі перерізу. Цим визначається положення нейтральної лінії перерізу.

Отже, якщо силова лінія збігається з однією із головних центральних осей перерізу, то згинання буде плоским, і нейтральна лінія перерізу буде збігатися з іншою головною центральною віссю. Інакше кажучи, якщо силова площина збігається з однією з головних площин стрижня, то нейтральний шар збігається з іншою головною площиною.

Зазначимо, що часто індекс z у позначенні моменту інерції випускають, пам'ятаючи, однак, що J обчислюється відносно нейтральної лінії перерізу.

Тепер проаналізуємо добуті результати.

Формула (10.9) у проведеному виведенні хоч і була допоміжною, проте вона має і велике самостійне значення. Її можна трактувати як закон Гука при згинанні, оскільки вона пов'язує деформацію (кривину нейтрального шару $1/\rho$) зі силовим фактором — згинальним моментом, що діє в перерізі. Величина EJ має назву *жорсткості перерізу при згинанні*, Н · м^2. З форму-

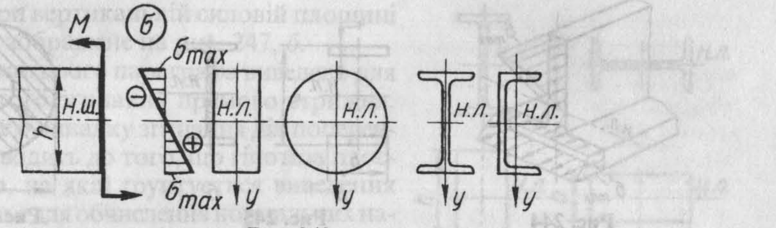


Рис. 242

ли (10.9) випливає, що коли балка виготовлена з однорідного матеріалу (E = const) і має постійний переріз (J = const), то при чистому згинанні (M = const) її вісь викривляється по дузі кола ($1/\rho$ = const і, отже, ρ = const).

Формула (10.10) показує, що незалежно від форми та розмірів перерізу балки напруження в точках нейтральної лінії завжди дорівнюють нулю. Величина σ лінійно зростає в міру віддалення від нейтральної лінії. При цьому напруження виявляються однаковими по ширині перерізу (вздовж лінії y = const). Отже, епюри σ для будь-яких перерізів, що мають горизонтальну вісь симетрії, завжди матимуть вигляд, наведений на рис. 242. Усі волокна, розміщені вище за нейтральну лінію, виявляються стиснутими, а нижче за неї — розтягнутими. Якщо згинальний момент матиме протилежний знак, то верхні волокна розтягатимуться, а нижні — стискатимуться.

Максимальні напруження (σ_{max}) мають місце в найбільш віддалених від нейтральної лінії волокнах, тобто у випадку симетричного перерізу відносно горизонтальної осі z при $y = \pm\, h/2$. Підставляючи це значення у формулу (10.10), дістанемо

$$\sigma_{max} = \frac{M\,(h/2)}{J}.$$

Позначимо відношення $J/(h/2)$ через W і назвемо його *осьовим моментом опору*, м^3. Тоді

$$\sigma_{max} = M / W. \tag{10.13}$$

Якщо переріз балки не має горизонтальної осі симетрії, то нейтральна лінія зміщена відносно середини висоти перерізу (рис. 243) і напруження

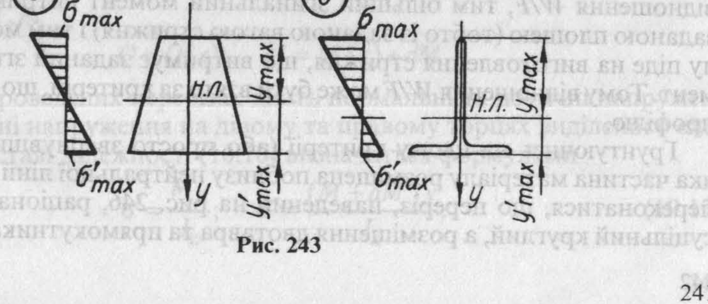


Рис. 243

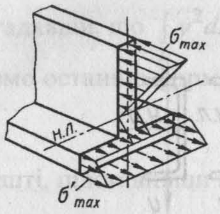


Рис. 244

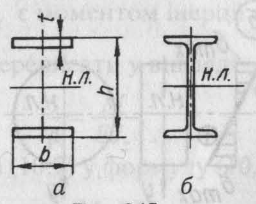


Рис. 245

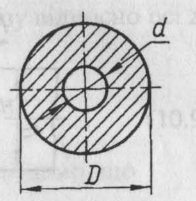


Рис. 246

σ_{max} у крайніх верхніх та σ_{max} у крайніх нижніх волокнах не будуть однаковими:

$$\sigma_{max} = M / W; \quad \sigma'_{max} = M / W', \tag{10.14}$$

де

$$W = J / y_{max}; \quad W' = J / y'_{max}. \tag{10.15}$$

Характер розподілу нормальних напружень в поперечному перерізі для цього прикладу наведено на рис. 244.

Здобуті результати дають змогу зробити певні висновки про раціональні форми перерізу балки при чистому згинанні. На відміну від простого розтягання чи стискання при згинанні, як і при крученні, напруження в перерізі розподіляються нерівномірно. Матеріал у зоні нейтрального шару навантажений мало. Тому з метою економії матеріалу та зниження ваги конструкції, яка працює на згинання, слід вибирати такі форми перерізу, щоб більша частина матеріалу була віддалена від нейтральної лінії. Ідеальним з цього погляду є переріз, який складається з двох вузьких прямокутників (рис. 245, *а*). Реально такий переріз нездійсненний, оскільки ці два прямокутники мають бути зв'язані між собою, щоб утворювати один переріз. Із застосовуваних на практиці профілів найближчий до ідеального двотавровий переріз (рис. 245, *б*).

Згинальний момент, який переріз може витримати безпечно, залежить від моменту опору W. Обмежуючи максимальне значення напруження σ_{max}, що діє в перерізі, допустимим $[\sigma]$, згідно з формулою (10.13), визначимо допустимий згинальний момент

$$[M] = \sigma_{max} W = [\sigma] W. \tag{10.16}$$

Затрата матеріалу пропорційна площі перерізу F. Отже, чим більше відношення W/F, тим більший згинальний момент витримує переріз із заданою площею (тобто із заданою вагою стрижня) і тим менше матеріалу піде на виготовлення стрижня, що витримує заданий згинальний момент. Тому відношення W/F може бути взято за критерій, що оцінює якість профілю.

Ґрунтуючись на цьому критерії (або просто звернувши увагу на те, яка частина матеріалу розміщена поблизу нейтральної лінії балки), легко переконатися, що переріз, наведений на рис. 246, раціональніший, ніж суцільний круглий, а розміщення двотавра та прямокутника, наведене на рис. 247, *а*, при вертикальній силовій площині вигідніше за зображене на рис. 247, *б*.

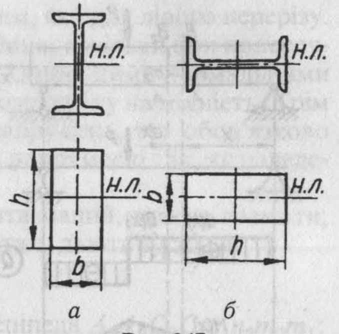


Рис. 247

Усі формули цього параграфа виведено для випадку чистого згинання прямого стрижня. Для загального випадку згинання дія поперечних сил призводить до того, що гіпотеза плоских перерізів, на якій ґрунтується виведення формули Навьє для обчислення нормальних напружень, порушується, оскільки поперечні перерізи не залишаються плоскими, а викривляються; поздовжні волокна взаємодіють між собою, тиснуть одне на одне і, отже, перебувають не в лінійному, а в плоскому напруженому стані. Проте практика розрахунків свідчить, що і при поперечному згинанні балок і рам, коли в перерізі крім M діють N та Q, можна використовувати формули, виведені для чистого згинання. Похибка при цьому дуже незначна.

§ 61. Дотичні напруження при згинанні

При поперечному згинанні, коли в поперечних перерізах бруса діють Q та M, виникають не тільки нормальні напруження σ, а й дотичні τ, для визначення яких виведемо відповідну формулу.

Як уже зазначалося (див. § 26), задача про визначення напружень у пружному тілі завжди статично невизначувана і потребує розгляду трьох аспектів задачі. Проте можна прийняти такі гіпотези про розподіл напружень, при яких задача стане статично визначуваною. Тоді немає потреби використовувати геометричні та фізичні рівняння, а досить розглянути тільки статичний аспект задачі. Саме так і будемо виводити формулу для визначення τ при згинанні.

Будемо виводити на прикладі балки прямокутного поперечного перерізу (рис. 248, *а*).

Двома близькими поперечними перерізами A_1B_1 та A_2B_2 виділимо елемент балки (рис. 248, *б*) завдовжки dx. Як видно з епюр, в обох перерізах Q та M додатні, причому в перерізі A_1B_1

$$Q = Q(x); \quad M = M(x),$$

а в перерізі A_2B_2

$$Q = Q(x); \quad M = M(x) + dM.$$

Отже, в проведених перерізах діють нормальні та дотичні напруження. Нормальні напруження на лівому та правому торцях виділеного елемента на підставі залежності (10.10) визначаються формулами

$$\sigma' = \frac{M_y}{J_z}; \quad \sigma'' = \frac{(M + dM)\,y}{J_z}. \tag{10.17}$$

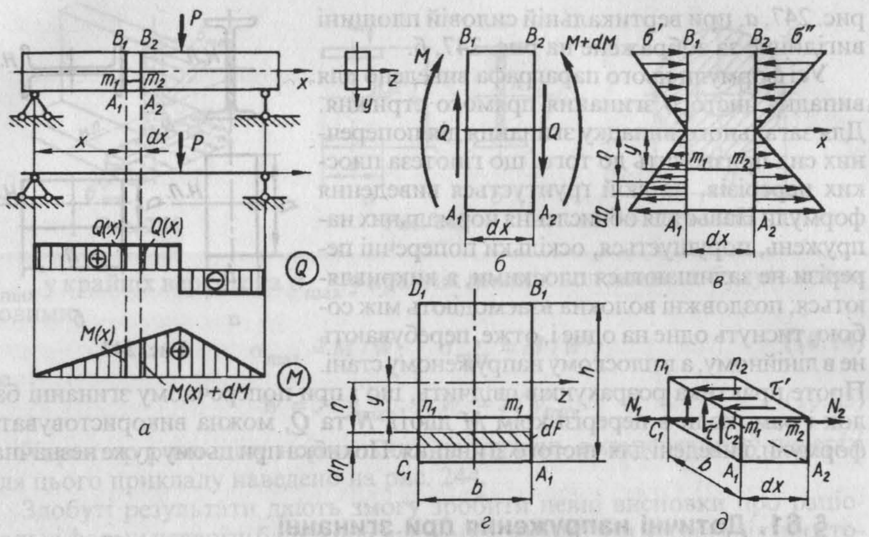


Рис. 248

Введемо два припущення про характер розподілу дотичних напружень у балках прямокутного перерізу:

1) τ скрізь паралельні поперечній силі Q;

2) в усіх точках перерізу на певному рівні (y = const) τ однакові (тобто τ постійні по ширині та залежать тільки від відстані точки до нейтральної лінії).

Ці припущення справедливі, якщо $b \ll h$.

Відсічемо частину елемента балки, провівши горизонтальну площину $m_1 — m_2$ на відстані y від нейтрального шару (рис. 248, *в*, *д*). Очевидно, в гранях $A_1A_2m_2m_1$, $C_1C_2n_2n_1$ та $A_1A_2C_2C_1$ взагалі немає ніяких напружень, оскільки ці грані є частиною зовнішньої поверхні балки. Обчислимо рівнодійну нормальних напружень, розподілених по грані $A_1C_1n_1m_1$. На елементарну площадку $dF = bd\eta$, проведену паралельно нейтральній осі z на відстані η від неї (рис. 248, *г*), діє елементарна осьова сила $dN_1 = \sigma' dF = (M(x)\eta / J_z)\, dF$. Тоді шукана рівнодійна

$$N_1 = \int_{F_1} \sigma' dF = \int_{F_1} \frac{M(x)\eta}{J_z} dF = \frac{M(x)}{J_z} \int_{F_1} \eta dF.$$

Оскільки $\int_{F_1} \eta dF = S_z(y)$ є статичним моментом площі, що міститься між рівнем y та краєм балки, то

$$N_1 = \frac{M(x)}{J_z} S_z(y). \quad (10.18)$$

Аналогічно в грані $A_2C_2n_2m_2$ рівнодійна нормальних напружень σ''

$$N_2 = \frac{M(x) + dM}{J_z} S_z(y). \quad (10.19)$$

Значення $S_z(y)$ буде, очевидно, таким самим, як і для лівого перерізу. У грані $n_1n_2m_2m_1$ діють нормальні напруження, оскільки при поперечному згинанні волокна тиснуть одне на одне. Однак цими нормальними напруженнями нехтують як неістотними для розрахунку на міцність. Крім того, згідно із законом парності дотичних напружень, тут обов'язково виникають і напруження $\tau' = \tau$, причому вони напрямлені так, як наведено на рис. 248, *д*.

Оскільки розмір dx грані $n_1n_2m_2m_1$ елемента малий, можна вважати, що τ' рівномірно розподілені по цій грані й, отже, дають зусилля

$$dT = \tau' b dx = \tau b dx.$$

Запишемо тепер умову рівноваги паралелепіпеда $A_1A_2C_2C_1n_1n_2m_2m_1$:

$$\sum X = N_2 - N_1 - dT = 0.$$

Підставляючи сюди зусилля, дістаємо

$$\frac{[M(x) + dM] S_z(y)}{J_z} - \frac{M(x) S_z(y)}{J_z} - \tau b dx = 0,$$

або

$$\tau b dx = \frac{dM S_z(y)}{J_z}.$$

Поділивши це рівняння на bdx та враховуючи, що $dM/dx = Q$, остаточно знайдемо формулу для визначення дотичних напружень у перерізі балки при згинанні

$$\tau = \frac{Q S_z(y)}{b J_z}. \quad (10.20)$$

Ця формула вперше була виведена російським інженером Д. І. Журавським і носить його ім'я. Незважаючи на те що покладені в основу її виведення гіпотези справедливі тільки для вузьких прямокутних перерізів балок (при $h/b > 2$), на практиці нею можна користуватися для будь-яких перерізів, крім тих місць у перерізі, де є вузькі прямокутники, розміщені перпендикулярно до Q — полиці двотавра, швелера.

Для довільного перерізу (рис. 249) величини формули (10.20) мають такий зміст: $Q = Q(x)$ — модуль поперечної сили в тому перерізі, де визначаються дотичні напруження; J_z — момент інерції цього перерізу відносно його нейтральної лінії; $b = b(y)$ — ширина перерізу на рівні, де визначаються дотичні напруження τ; $S_z(y)$ — абсолютне значення статичного моменту відносно нейтральної лінії тієї частини площі $F(y)$, яка міститься між лінією, де визначається τ, та краєм перерізу.

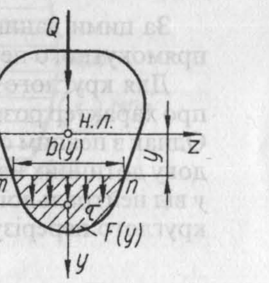


Рис. 249

Отже, формула (10.20) дає тільки модуль τ. Щодо напряму τ, то відповідно до вихідного припущення воно вважається паралельним Q і напрямленим у бік його дії.

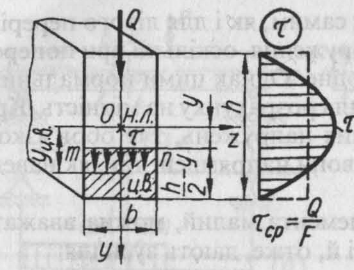


Рис. 250

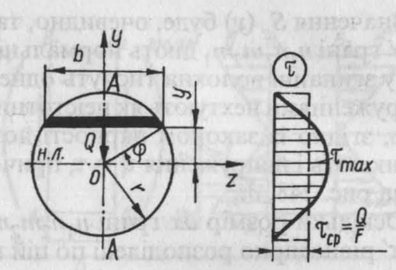


Рис. 251

Побудуємо епюру τ для прямокутного перерізу (рис. 250). Проведемо лінію mn, паралельну нейтральній лінії й віддалену від неї на довільну відстань y, і знайдемо значення τ у точках цієї лінії. Лінія mn відсікає площу $F(y) = b(h/2 - y)$. Статичний момент цієї площі

$$S_z(y) = F(y)\,y_{\text{ц.в}} = b\left(\frac{h}{2}-y\right)\left[y+\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}-y\right)\right] = \frac{bh^2}{8}\left(1-\frac{4y^2}{h^2}\right). \qquad (10.21)$$

Підставляючи (10.21) у формулу Журавського (10.20), а також зважаючи на те що $J_z = bh^3/12$, маємо

$$\tau = Q\frac{\dfrac{bh^2}{8}\left(1-\dfrac{4y^2}{h^2}\right)}{b\dfrac{bh^3}{12}} = \frac{3}{2}\frac{Q}{bh}\left(1-\frac{4y^2}{h^2}\right). \qquad (10.22)$$

Змінна y входить до формули в другому степені, отже, епюра τ буде параболічною. У найвіддаленіших від нейтральної лінії точках перерізу $y = \pm h/2$ і $\tau = 0$. Для точок нейтральної лінії при $y = 0$ дотичні напруження будуть максимальні:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2}\frac{Q}{bh} = \frac{3}{2}\frac{Q}{F}. \qquad (10.23)$$

За цими даними і побудовано епюру дотичних напружень у стрижні прямокутного перерізу (рис. 250).

Для круглого поперечного перерізу (рис. 251) введені вище гіпотези про характер розподілу дотичних напружень по перерізу не виконуються. Однак з певним ступенем точності можна вважати, що вертикальну складову дотичних напружень, які виникають у поперечному перерізі на рівні y від нейтральної лінії, можна визначити за формулою Журавського. Для круглого перерізу матимемо

$$\tau = \frac{4Q}{3\pi R^2}\left(1-\frac{y^2}{R^2}\right). \qquad (10.24)$$

Виконавши відповідні обчислення статичного моменту $S_z(y)$, згідно з рис. 251:

$$b(y) = 2r\cos\varphi;\quad y = r\sin\varphi;\quad dy = r\cos\varphi\,d\varphi;$$

$$S_z(y) = \int_F y\,dF;\quad dF = b(y)\,dy = 2r^2\cos^2\varphi\,d\varphi;$$

$$S_z(y) = \int_0^{\pi/2} y\,dF = 2r^3\cos^2\varphi\sin\varphi\,d\varphi = \frac{2r^3}{3}.$$

обмежимося визначенням $\tau_{\max}$:

$$\tau_{\max} = \frac{S_z(y)Q}{b(y)J_z} = \frac{Q\cdot 2r^3\cdot 4}{3\cdot 2r\cdot \pi r^4} = \frac{4}{3}\frac{Q}{\pi r^2} = \frac{4}{3}\frac{Q}{F} = 1{,}33\frac{Q}{F}. \qquad (10.25)$$

Епюра τ знову параболічна, причому максимальне дотичне напруження τ буде в точках нейтральної лінії ($y = 0$), а мінімальне — в найвіддаленіших від нейтральної лінії точках ($y = \pm r$).

Приклад 38. *Побудуємо епюри зміни нормальних та дотичних напружень по висоті поперечного перерізу двотаврової балки № 12, якщо в перерізі діють згинальний момент $M = 2$ кН · м та поперечна сила $Q = 10$ кН.*

За таблицею сортаменту (дод. 1) знаходимо основні розміри профілю (рис. 252), момент інерції площі поперечного перерізу $J_z = 350$ см^4 та статичний момент площі половини цього перерізу $S_{\max} = 33{,}7$ см^3.

Нормальні напруження в точках поперечного перерізу на відстані y від нейтральної лінії (по лінії mm) визначимо за формулою Навьє (10.10).

Максимальні за абсолютним значенням напруження будуть при $y_{\max} = h/2$. Визначимо їх:

$$\sigma_{\max} = \frac{My}{J_z} = \frac{2\cdot 10^{-3}\cdot 6\cdot 10^{-2}}{350\cdot 10^{-8}}\ \text{МПа} = 34{,}28\ \text{МПа}.$$

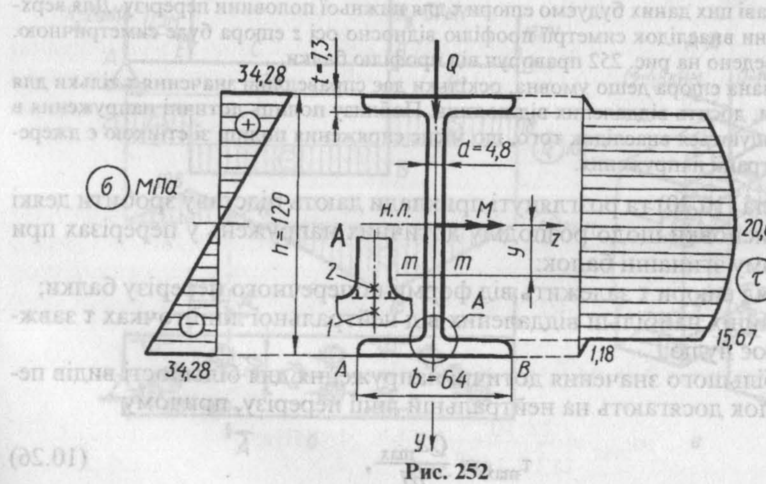


Рис. 252

Епюри напружень σ наведено на рис. 252 ліворуч від профілю перерізу балки.

Дотичні напруження в точках поперечного перерізу балки на відстані y від нейтральної лінії визначаємо за формулою Журавського (10.20).

Для побудови епюри дотичних напружень обчислимо τ у кількох характерних точках: а) в крайніх волокнах (по лінії AB); б) у місці спряження полиць із стінкою (в точках *1* і *2*), причому вважатимемо, що точки *1* і *2* розміщені нескінченно близько до межі полиці, але лежать по різні боки від цієї межі (для ясності це місце на рис. 252 зображено окремо); в) у точках нейтральної лінії.

Для точок лінії AB статичний момент $S_z(y) = S_z(h/2) = 0$, оскільки лінія AB не відсікає ніякої площі. Отже, в точках лінії AB напруження $\tau = 0$.

Для точки *1* ширина перерізу $b = 6{,}4$ см, статичний момент визначатиметься статичним моментом полиці. З досить високим ступенем точності полицю можна вважати прямокутником з розмірами $b \times t$. Тоді

$$S_z(y) = S_{zп} = bt(h/2 - t/2) = 6{,}4 \cdot 0{,}73(6 - 0{,}365)\ \text{см}^3 = 26{,}3\ \text{см}^3.$$

Дотичні напруження в точці *1*

$$\tau_1 = \frac{10 \cdot 10^{-3} \cdot 26{,}3 \cdot 10^{-6}}{6{,}4 \cdot 10^{-2} \cdot 350 \cdot 10^{-8}}\ \text{МПа} = 1{,}18\ \text{МПа}.$$

Для точки *2* статичний момент залишається практично тим самим, проте ширина перерізу $d = 0{,}48$ см. Тому дотичні напруження в точці *2*

$$\tau_2 = \frac{10 \cdot 10^{-3} \cdot 26{,}3 \cdot 10^{-6}}{0{,}48 \cdot 10^{-2} \cdot 350 \cdot 10^{-8}}\ \text{МПа} = 15{,}67\ \text{МПа}.$$

Отже, при переході від точки *1* до точки *2* дотичні напруження різко збільшуються.

Для точки нейтральної лінії ширина перерізу $d = 0{,}48$ см, а статичний момент слід взяти для половини перерізу балки. Очевидно, це буде найбільша величина для цього перерізу — $S_{z\,\max}$. Тоді

$$\tau = \tau_{\max} = \frac{10 \cdot 10^{-3} \cdot 33{,}7 \cdot 10^{-6}}{0{,}48 \cdot 10^{-2} \cdot 350 \cdot 10^{-8}}\ \text{МПа} = 20{,}06\ \text{МПа}.$$

На підставі цих даних будуємо епюри τ для нижньої половини перерізу. Для верхньої половини внаслідок симетрії профілю відносно осі z епюра буде симетричною. Епюру τ наведено на рис. 252 праворуч від профілю балки.

Побудована епюра дещо умовна, оскільки дає справедливі значення τ тільки для точок стінки, досить віддалених від полиць. Поблизу полиць дотичні напруження в стінці підвищуються внаслідок того, що місце спряження полиці зі стінкою є джерелом концентрації напруження.

Формула (10.20) та розглянуті приклади дають підставу зробити деякі загальні висновки щодо розподілу дотичних напружень у перерізах при поперечному згинанні балок:

1) вигляд епюри τ залежить від форми поперечного перерізу балки;

2) у крайніх найбільш віддалених від нейтральної лінії точках τ завжди дорівнює нулю;

3) найбільшого значення дотичні напруження для більшості видів перерізів балок досягають на нейтральній лінії перерізу, причому

$$\tau_{\max} = \frac{QS_{\max}}{bJ}, \qquad (10.26)$$

де $S_{\max}$ — статичний момент половини площі перерізу. Формулу (10.26) можна подати також у вигляді

$$\tau_{\max} = k\,\frac{Q}{F}, \qquad (10.27)$$

де k — коефіцієнт, який залежить від форми перерізу; для прямокутного перерізу $k = 1{,}50$; для круглого — $k = 1{,}33$;

4) формулою Журавського можна користуватися для визначення дотичних напружень у будь-яких точках масивних профілів.

Міркування щодо визначення дотичних напружень при згинанні балок тонкостінних профілів викладено в § 72.

§ 62. Розрахунок на міцність при згинанні

У попередніх параграфах ми вивели формули для обчислення нормальних σ та дотичних τ напружень при плоскому поперечному згинанні балок. Ці формули дають змогу скласти умови міцності для перевірки та добору перерізів деталей, що працюють на згинання. Щоб здобути ці умови, з'ясуємо, в якому напруженому стані перебувають елементи стрижня, що зазнають плоского згинання. Заради більшої конкретності розглянемо балку, зображену на рис. 253.

На рис. 253, *а* наведено схему навантаженої балки, а також побудовано епюри M та Q. На рис. 253, *б* зображено фасад балки. У різних зонах по висоті балки виділено елементарні кубики, одна з граней яких збігається з площиною поперечного перерізу балки. На рис. 253, *в* як приклад наведено переріз A — A та виділені в ньому елементи *3* і *13*.

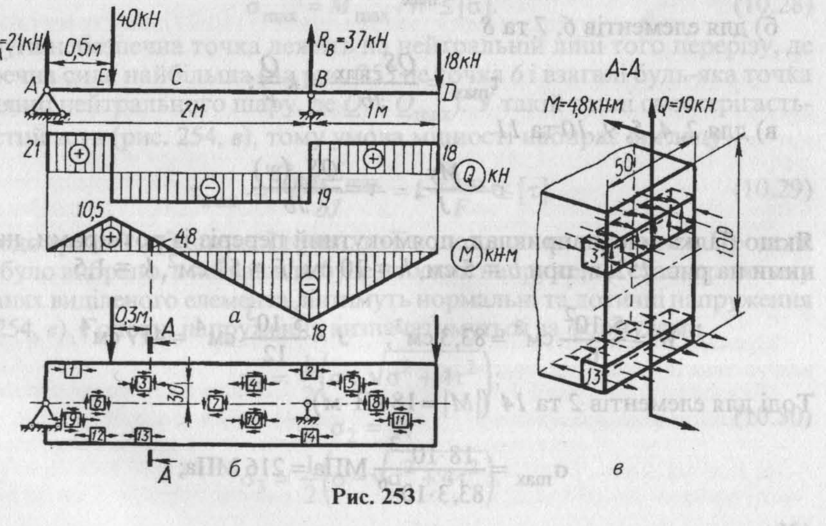


Рис. 253

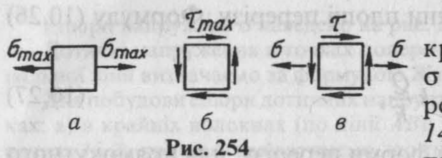


Рис. 254

Елементи *1, 2, 12, 13* та *14* виділені в крайніх точках перерізу. Тут $\tau = 0$, $\sigma = \sigma_{max}$ і елементи зазнають простого розтягання (*12, 13*) або стискання (*1, 14*), тобто перебувають в лінійному напруженому стані (рис. 254, *а*).

Елементи *6, 7* та *8* виділені біля точок нейтрального шару, де $\sigma = 0$, а $\tau = \tau_{max}$, тому по їхніх гранях діють тільки дотичні напруження і, отже, вони перебувають в умовах чистого зсуву (рис. 254, *б*).

У вертикальних гранях елементів *3, 4, 5, 9, 10* та *11*, що збігаються з поперечними перерізами балки, виділених у довільних точках балки, діють і σ, і τ, тому елементи перебувають у плоскому напруженому стані (рис. 254, *в*).

Значення σ і τ та їхні напрями залежать від значень та напрямів M і Q в розглядуваному перерізі та від положення елемента по висоті перерізу. Напрями напружень визначаються напрямами зусиль M та Q. Треба пам'ятати, що епюри M будують на стиснутих волокнах. Тому елементи *1, 3, 10, 14* та 11 зазнають стискання, а елементи *9, 12, 13, 4, 2* та *5* — розтягання.

Щоб визначити напрям τ, слід звернути увагу на знаки Q у відповідних перерізах. Наприклад, у перерізі *А — А* зусилля Q від'ємне, а отже, намагаючись повернути обидві частини розсіченої балки проти годинникової стрілки, Q діє на лівий бік перерізу вгору (рис. 253, *в*). Саме так і будуть напрямлені τ у правій грані елемента *3*; у решті граней напрями τ визначаються законом парності дотичних напружень.

Значення напружень у різних елементах можна знайти за формулами, виведеними в попередніх параграфах:

а) для елементів *1, 2, 12, 13* та *14*

$$\sigma_{max} = M / W;$$

б) для елементів *6, 7* та *8*

$$\tau_{max} = \frac{QS_{z\,max}}{Jb} = k\frac{Q}{F};$$

в) для *2, 4, 5, 9, 10* та *11*

$$\sigma = \frac{My}{J}; \qquad \tau = \frac{QS_z(y)}{Jb}.$$

Якщо балка має, наприклад, прямокутний переріз із розмірами, наведеними на рис. 253, *в*, при $b = 5$ см, $h = 10$ см, $F = 50$ см^2, $k = 1{,}5$

$$W = \frac{5\cdot 10^2}{6}\ \text{см}^3 = 83{,}3\ \text{см}^3; \qquad J = \frac{5\cdot 10^3}{12}\ \text{см}^4 = 417\ \text{см}^4.$$

Тоді для елементів *2* та *14* $(|M| = 18\ \text{кН}\cdot\text{м})$

$$\sigma_{max} = \frac{18\cdot 10^{-3}}{83{,}3\cdot 10^{-6}}\ \text{МПа} = 216\ \text{МПа};$$

для елемента *7* $(|Q| = 19\ \text{кН})$

$$\tau_{max} = \frac{1{,}5\cdot 19\cdot 10^{-3}}{50\cdot 10^{-4}}\ \text{МПа} = 5{,}7\ \text{МПа};$$

для елемента *3* $(M = 4{,}8\ \text{кН}\cdot\text{м};\ |Q| = 19\ \text{кН})$

$$y = 3\ \text{см}; \qquad S = (5-3)5\left(3 + \frac{5-3}{2}\right)\text{см}^3 = 40\ \text{см}^3;$$

$$\sigma = \frac{4{,}8\cdot 10^{-3}\cdot 3\cdot 10^{-2}}{417\cdot 10^{-8}}\ \text{МПа} = 34{,}5\ \text{МПа};$$

$$\tau = \frac{19\cdot 10^{-3}\cdot 40\cdot 10^{-6}}{5\cdot 10^{-2}\cdot 417\cdot 10^{-8}}\ \text{МПа} = 3{,}7\ \text{МПа}$$

і т. д.

Отже, при поперечному згинанні балки її матеріал перебуває в неоднорідному плоскому напруженому стані. При цьому умова міцності має бути записана для так званої небезпечної точки балки, тобто тієї точки, де матеріал перебуває в найбільш напруженому стані. Небезпечною буде одна з таких трьох точок: а) точка, де нормальне напруження досягає найбільшого значення; б) точка, де дотичне напруження досягає найбільшого значення; в) точка, де σ та τ, хоч і не набувають найбільших значень, але в своїй сукупності створюють найвигіднішу комбінацію, тобто найбільше еквівалентне напруження за прийнятою для розрахунку теорією міцності. При цьому таких точок може виявитися кілька.

Якщо орієнтуватися на першу небезпечну точку, розміщену в крайніх волокнах того перерізу балки, де згинальний момент M набирає максимального значення, а елемент перебуває в лінійному напруженому стані (наприклад, точки *2* та *14* на рис. 253), умову міцності можна записати у вигляді

$$\sigma_{max} = M_{max} / W \le [\sigma]. \tag{10.28}$$

Друга небезпечна точка лежить на нейтральній лінії того перерізу, де поперечна сила найбільша (на рис. 253 це точка *6* і взагалі будь-яка точка на ділянці нейтрального шару, де $Q = Q_{max}$). У такій точці спостерігається чистий зсув (рис. 254, *в*), тому умова міцності набирає вигляду

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max}S_{max}}{bJ} = k\frac{Q_{max}}{F} \le [\tau]. \tag{10.29}$$

Щодо третьої небезпечної точки, то її положення не таке певне. Проте де б її не було вибрано, в ній завжди буде плоский напружений стан, при якому по гранях виділеного елемента діятимуть нормальні та дотичні напруження (рис. 254, *в*). Головні напруження визначатимуться за формулами

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right);$$
$$\sigma_2 = 0; \tag{10.30}$$
$$\sigma_3 = \frac{1}{2}\left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right).$$

Підставляючи ці вирази у формули для еквівалентних напружень за різними теоріями міцності [(7.2), (7.6), (7.11), (7.20), (7.21)], дістаємо умови міцності:

$$\sigma_{\text{екв I}} = \frac{1}{2}\left[\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right] \le [\sigma]; \tag{10.31}$$

$$\sigma_{\text{екв II}} = \frac{1-\mu}{2}\sigma + \frac{1+\mu}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma]; \tag{10.32}$$

$$\sigma_{\text{екв III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma]; \tag{10.33}$$

$$\sigma_{\text{екв IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \le [\sigma]; \tag{10.34}$$

$$\sigma_{\text{екв }M} = \frac{1-m}{2}\sigma + \frac{1+m}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma], \tag{10.35}$$

де $m = [\sigma_+]/[\sigma_-]$.

Для розрахунку балок з пластичних матеріалів рекомендується користуватись умовами міцності, виходячи з третьої або четвертої теорії міцності [формули (10.33) та (10.34)].

Зазначимо, що здебільшого небезпечною є крайня точка того перерізу, де $M = M_{\max}$. Тому на практиці перевірний розрахунок балок на міцність полягає ось в чому:

1) знаходять *небезпечний переріз* балки, тобто той переріз, в якому діє найбільший за абсолютним значенням згинальний момент;

2) за таблицею чи розрахунками визначають момент опору W перерізу відносно нейтральної лінії;

3) застосовують тільки одну умову міцності (10.28), яку тому і називають *основною*.

За цією схемою для більшості профілів легко можна виконати також проектувальний розрахунок; тоді умова міцності (10.28) записується у вигляді

$$W \ge M_{\max}/[\sigma]. \tag{10.36}$$

Визначивши потрібний момент опору балки та вибравши певний профіль поперечного перерізу, добирають його розміри.

Розглянемо деякі приклади розрахунку балок за основною умовою міцності.

Приклад 39. *Для балки (рис. 255), вважаючи заданими розміри l, D, d та допустиме напруження* $[\sigma]$, *знайдемо допустиме навантаження* $[P]$.

Небезпечним перерізом буде, очевидно, місце закріплення балки, де діятиме максимальний згинальний момент $M_{\max} = Pl$. Момент опору в цьому разі

$$W = \frac{\pi D^3}{32}\left(1-\alpha^4\right); \quad \alpha = \frac{d}{D}.$$

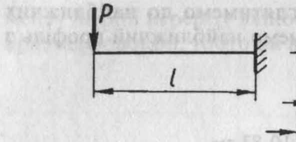


Рис. 255

Небезпечними точками в балці будуть верхня та нижня точки перерізу в місці закріплення, умова міцності для яких запишеться так:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{32Pl}{\pi D^3\left(1+\alpha^4\right)} \le [\sigma].$$

Звідси

$$P \le [P] = \frac{\pi D^3\left(1-\alpha^4\right)[\sigma]}{32l}.$$

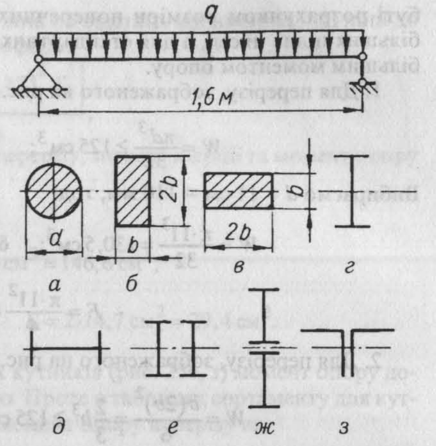


Рис. 256

Приклад 40. *На балку (рис. 256) діє навантаження 100 кН, рівномірно розподілене по прогону. Матеріал балки Ст3 ([σ] = 160 МПа). Треба добрати різні варіанти перерізів балки. На рис. 256, а—з горизонтальними осьовими лініями зображено нейтральні лінії.*

Небезпечний переріз розглядуваної балки буде посередині прогону в місці дії максимального згинального моменту

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{ql \cdot l}{8} = \frac{Pl}{8} = \frac{100 \cdot 1{,}6}{8}\ \text{кН}\cdot\text{м} = 20\ \text{кН}\cdot\text{м}.$$

Небезпечними точками цього перерізу будуть точки, найбільш віддалені від нейтральної лінії. Умова міцності для них така:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{20 \cdot 10^3}{W} \le [\sigma] = 160\ \text{МПа}.$$

Звідси дістанемо потрібне значення моменту опору:

$$W_{\text{розр}} = \frac{20 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6}\ \text{м}^3 = 125 \cdot 10^{-6}\ \text{м}^3 = 125\ \text{см}^3.$$

Знайдені розміри перерізу округлюють до найближчих стандартних, тому фактичний момент опору W може відрізнятися від розрахункового $W_{\text{розр}}$. У результаті напруження в небезпечній точці відрізнятиметься від $[\sigma]$ і, отже, відбуватиметься перенапруження ($\delta_\sigma > 0$) або недонапруження ($\delta_\sigma < 0$), де

$$\delta_\sigma = \frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\tau]}100\ \% = \frac{M_{\max}/W - M_{\max}/W_{\text{розр}}}{M_{\max}/W_{\text{розр}}}100\ \% = \frac{W_{\text{розр}} - W}{W}100\ \%.$$

При розрахунках на міцність відхилення розрахункових напружень від допустимих мають бути в межах ± 5 % значення допустимих напружень.

Щоб порівняти ваги балок різних варіантів перерізів, ураховуючи, що вага пропорційна площі F перерізу, визначимо також і площу F. Для більшої наочності здобуті розрахунком розміри поперечних перерізів округлятимемо до найближчих більших цілих чисел, а для стандартних профілів братимемо найближчий профіль з більшим моментом опору.

1. Для перерізу, зображеного на рис. 256, *а*,

$$W=\frac{\pi d^3}{32}\ge 125\text{ см}^3;\qquad d\ge\sqrt[3]{\frac{32\cdot 125}{\pi}}\text{ см}=10,83\text{ см}.$$

Вибираємо d = 11 см = 110 мм; тоді

$$W=\frac{\pi\cdot 11^3}{32}=130,5\text{ см}^3;\qquad \delta_\sigma=\frac{125-130,5}{130,5}100\,\%=-4,2\,\%;$$

$$F=\frac{\pi\cdot 11^2}{4}\text{ см}^2=95,0\text{ см}^2.$$

2. Для перерізу, зображеного на рис. 256, *б*,

$$W=\frac{b(2b)^2}{6}=\frac{2}{3}b^3\ge 125\text{ см}^3;\qquad b\ge\sqrt[3]{187,5}\text{ см}=5,72\text{ см}.$$

Вибираємо b = 6 см = 60 мм; тоді

$$W=\frac{2}{3}6^3\text{см}^3=144\text{ см}^3;$$

$$\delta_\sigma=\frac{125-144}{144}100\,\%=-13,2\,\%;\qquad F=6\cdot 12\text{ см}^2=72\text{ см}^2.$$

3. Для перерізу, зображеного на рис. 256, *в*,

$$W=\frac{2b\cdot b^2}{6}=\frac{1}{3}b^3\ge 125\text{ см}^3;\qquad b\ge\sqrt[3]{375}\text{ см}=7,21\text{ см}.$$

Вибираємо b = 7,5 см = 75 мм; тоді

$$W=\frac{1}{3}7,5^3\text{ см}^3=140,5\text{ см}^3;\qquad \delta_\sigma=\frac{125-140,5}{140,5}100\,\%=-11\,\%;$$

$$F=7,5\cdot 15\text{ см}^2=112,5\text{ см}^2.$$

4. Для перерізу у вигляді двотавра (вибираємо двотавр № 18), наведеного на рис. 256, *г*,

$$W=W_z=143\text{ см}^3;\qquad \delta_\sigma=\frac{125-143}{143}100\,\%=-12,6\,\%;\qquad F=23,4\text{ см}^2.$$

5. Для перерізу, зображеного на рис. 256, *д*, прийнятними виявляються профілі № 50 та 55, перший з яких дає незначне перенапруження (1,6 %), а другий має помітний надлишок міцності (16,7 %); вибираємо двотавр № 50. Тоді

$$W=W_z=123\text{ см}^3;\qquad \delta_\sigma=\frac{125-123}{123}100\,\%=1,6\,\%;\qquad F=100\text{ см}^2.$$

6. Для перерізу у вигляді двох двотаврів (рис. 256, *е*) прийнятним профілем буде двотавр № 14. У цього перерізу

$$W=2W_z=2\cdot 81,7\text{ см}^3=163,4\text{ см}^3;\qquad \delta_\sigma=\frac{125-163,4}{163,4}100\,\%=-23,5\,\%;$$

$$F=2\cdot 17,4\text{ см}^2=34,8\text{ см}^2.$$

7. Для перерізу, зображеного на рис. 256, *ж*, момент опору всього перерізу не дорівнює сумі моментів опору W_z кожного профілю, а має визначатися діленням мо-

менту інерції перерізу відносно нейтральної лінії на відстань від нейтральної лінії до крайніх волокон, тобто на висоту одного профілю:

$$W=\frac{2\left[J_z+\left(h_1/2\right)^2F_1\right]}{h_1},$$

де h_1, F_1, J_z, W_z — відповідно висота, площа перерізу, момент інерції та момент опору одного двотавра.

Виберемо двотавр № 12. Для нього

$$W=\frac{2\left(350+6^2\cdot 14,7\right)}{12}\text{см}^3=146,6\text{ см}^3;$$

$$\delta_\sigma=\frac{125-146,6}{146,6}100\,\%=-14,7\,\%;\qquad F=2\cdot 14,7\text{ см}^2=29,4\text{ см}^2.$$

8. Для перерізу у вигляді двох рівнобоких кутників (рис. 256, *з*) момент опору дорівнює сумі моментів опору кожного профілю. Проте в таблицях сортаменту для кутників значення W немає. Тому визначаємо момент опору перерізу як

$$W=2\frac{J_z}{b-z_0},$$

де J_z, b, z_0 мають той самий зміст, що і в таблицях сортаменту (небезпечними точками будуть нижні кінці кутників).

Безпосередньо визначити, який саме профіль слід взяти, важко, тому розглянемо два варіанти перерізів:

1) для кутника 140 × 140 × 12

$$W=2\frac{602}{14-3,9}\text{ см}^3=119,3\text{ см}^3;$$

2) для кутника 160 × 160 × 10

$$W=2\frac{774}{16-4,3}\text{ см}^3=132\text{ см}^3.$$

Останній варіант з погляду міцності кращий. Маємо

$$W=132\text{ см}^3;\qquad F=2\cdot 31,4\text{ см}^2=62,8\text{ см}^2;$$

$$\delta_\sigma=\frac{125-132}{132}100\,\%=-5,3\,\%.$$

Результати розрахунків зведемо в табл. 15, котра дасть змогу вирішити, які з добутих перерізів раціональні, а які ні. Так, з останньої графи бачимо, у скільки разів

Таблиця 15

Переріз на рис. 256	Відхилення від розрахункової міцності, %	Площа перерізу, см^2	Відносна вага
а	4,2	95,0	4,06
б	13,2	72,0	3,08
в	11,0	112,5	4,81
г	12,6	23,4	1,00
д	1,6	100,0	4,27
е	23,5	34,8	1,49
ж	14,7	29,4	1,26
з	5,3	26,8	2,65

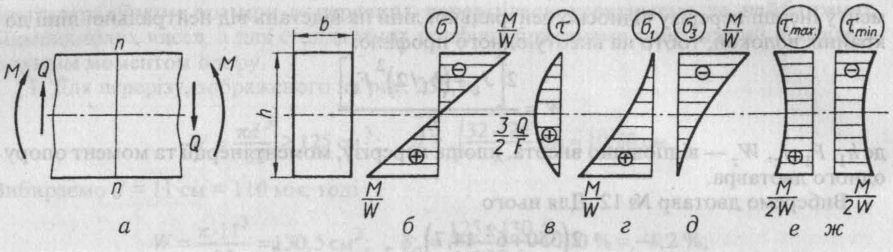


Рис. 257

балка того чи іншого перерізу важча, ніж двотаврова балка (рис. 256, *г*), вага якої виявилася найменшою, тому взята за одиницю.

Закінчуючи дослідження напруженого стану в балці при згинанні, зробимо ще деякі додаткові зауваження та доповнення щодо згинання балки прямокутного поперечного перерізу (рис. 257, *а*). Епюри нормальних σ та дотичних τ напружень в перерізі *n — n* наведено відповідно на рис. 257, *б* та *в*. За значеннями напружень σ та τ у кожній точці по висоті перерізу *n — n* можна визначити головні напруження: розтягальні σ_1 та стискальні σ_3, епюри яких наведено на рис. 257, *г* та *д* відповідно.

За напруженнями σ_1 та σ_3 (або σ та τ) у кожній з точок по висоті балки можна знайти також максимальні та мінімальні дотичні напруження, які діють в перерізах, нахилених під кутом 45° до перерізів з головними напруженнями σ_1 та σ_3 у цій точці. Ці дотичні напруження визначаються за формулою

$$\tau_{\substack{\max \\ \min}} = \pm\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}, \text{ або } \tau_{\substack{\max \\ \min}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}.$$

Епюри дотичних напружень τ_{max} та τ_{min} зображено на рис. 257, *е* та *ж* відповідно.

Зазначимо, що при поперечному згинанні (коли $M \neq 0$, $Q \neq 0$) у точках на нейтральній лінії абсолютні значення τ, σ_1, σ_3, τ_{min}, τ_{max} будуть однакові.

Перевіряючи міцність балки, визначають головні напруження. Іноді важливо знати також і напрями головних напружень в усіх точках балки. Зокрема, це потрібно при конструюванні залізобетонних балок, в яких арматуру треба розміщати в напрямі дії найбільших розтягальних напружень, тобто в напрямі σ_1.

Щоб пояснити сказане, розглянемо напрями головних напружень в різних точках деякого перерізу *I* балки (рис. 258). Тонкими лініями зображено напрями σ_1, а товстими — σ_3. Продовжимо напрям σ_1 для точки *2* до перетину зі суміжним перерізом у точці *2′*. У цій точці визначимо знову напрям розглядуваного головного напруження і, далі роблячи так само, дістанемо ламану лінію *2 — 2′*, *2″ — 2‴*. У границі ця ламана лінія перетвориться на криву, дотична до кожної точки якої буде збігатися з напря-

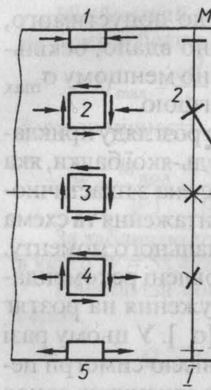


Рис. 258

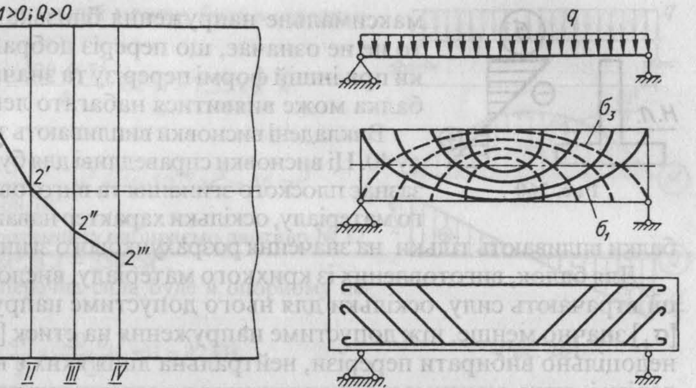


Рис. 259

мом відповідного головного напруження в точці дотику. Цю криву називають *траєкторією головного напруження*. Напрям траєкторії головних напружень залежить від виду навантаження та умов закріплення балки. Очевидно, через кожну точку балки проходять дві траєкторії головних напружень (відповідно σ_1 та σ_3), які перетинаються між собою під прямим кутом.

У залізобетонних балках арматуру прагнуть розміщати приблизно в напрямі траєкторій головних розтягальних напружень σ_1 (рис. 259).

§ 63. Про раціональну форму перерізу балки

У § 60 вже йшлося про раціональну форму перерізу балок при чистому згинанні. Тут на підставі розглянутих прикладів розрахунку на згинання цю проблему розглянемо дещо докладніше.

Іноді крім форми перерізу балки велике значення має його орієнтування відносно силової площини. Як видно з табл. 15, найбільш раціональним є двотавровий переріз, поставлений так, щоб його нейтральна лінія збігалася з віссю, відносно якої $J_z = J_{max}$. Гіршим буде переріз, складений з двох двотаврів, поставлених поряд або один та інший. Значно гірші будуть перерізи з двох рівнобоких кутників та прямокутний. Нераціональний також круглий переріз, оскільки вага балки такого перерізу майже в 4 рази перевищує вагу рівноміцної балки двотаврового перерізу, що має ту саму міцність. Тому вибір круглого перерізу може бути виправданий тільки конструктивними або технологічними міркуваннями (наприклад, для обертових деталей). Зовсім нераціональний переріз, орієнтований так, що нейтральна лінія збігається з віссю J_{min} (варіанти *в* та *д* на рис. 256 та в табл. 15).

Зазначимо також, що коли в умові міцності

$$\sigma_{max} = M / W \leq [\sigma]$$

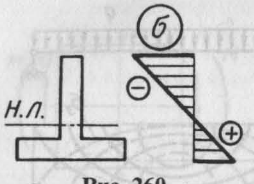


Рис. 260

максимальне напруження близьке до допустимого, то це не означає, що переріз добрано вдало, оскільки при іншій формі перерізу та значно меншому σ_{max} балка може виявитися набагато легшою.

Викладені висновки випливають з розгляду прикладу 40. Ці висновки справедливі для будь-якої балки, яка зазнає плоского згинання та виготовлена з пластичного матеріалу, оскільки характер навантаження та схема балки впливають тільки на значення розрахункового згинального моменту.

Для балок, виготовлених із крихкого матеріалу, висловлені рекомендації втрачають силу, оскільки для нього допустиме напруження на розтяг $[\sigma_+]$ значно менше, ніж допустиме напруження на стиск $[\sigma_-]$. У цьому разі недоцільно вибирати перерізи, нейтральна лінія яких є віссю симетрії перерізу і, отже, максимальні напруження в розтягнутих та стиснутих зонах однакові. Раціональний такий переріз, в якого σ_{max} у розтягнутій зоні значно менше, ніж σ_{max} у стиснутій зоні. Досягти цього можна, вибираючи форму перерізу, при якій нейтральна лінія була б зсунута в бік розтягнутої зони. Приклад такого перерізу та відповідну епюру напружень σ наведено на рис. 260.

У цьому параграфі було розглянуто деякі питання, пов'язані з раціональною формою перерізу балки. Якщо говорити про раціональність балки в цілому, то слід мати на увазі, що M та Q неоднакові в різних перерізах по довжині балки. Тому розміри, добрані за небезпечним перерізом, виявляються занадто великими для інших перерізів балки. Ці обставини спонукають з метою економії ваги та матеріалу застосовувати балки змінного перерізу. Основи розрахунку таких балок розглянуто в § 69.

§ 64. Повний розрахунок балок на міцність

Усі розглянуті приклади розрахунку на міцність при згинанні належать до тих випадків, коли небезпечною є одна з точок крайніх волокон балки (див. рис. 253, *б*) і напружений стан в ній лінійний (див. рис. 254, *а*). Як уже зазначалося, здебільшого такого розрахунку досить.

Проте хоч і нечасто, але буває таке, коли небезпечна точка належить нейтральному шару. В ній матеріал зазнає чистого зсуву (див. рис. 253, *б* та 254, *б*), і для розрахунку слід використовувати умови міцності (10.29). Така ситуація може бути тоді, коли при великих поперечних силах у перерізах балки діють незначні згинальні моменти, наприклад при коротких прогонах і значному поперечному навантаженні.

Приклад 41. *На балку (рис. 261) діє рівномірно розподілене навантаження q = 120 кН/м. Прогін l = 70 см, переріз балки двотавровий, матеріал Ст3 ([σ] = = 160 МПа; [τ] = 100 МПа). Треба добрати розміри балки.*

Виберемо переріз балки з умови міцності за нормальними напруженнями:

$$\sigma_{max} = M_{max}/W \le [\sigma].$$

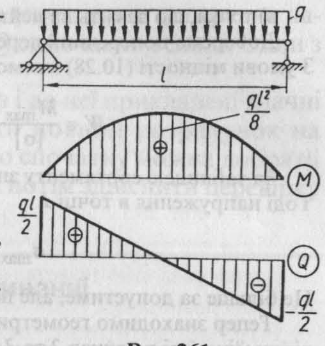


Рис. 261

Найбільший згинальний момент буде в середньому перерізі балки:

$$M_{max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{120 \cdot 0{,}7^2}{8}\ \text{кН} \cdot \text{м} = 7{,}35\ \text{кН} \cdot \text{м}.$$

З умови міцності

$$W = \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{7{,}35}{160 \cdot 10^3}\ \text{м}^3 = 46 \cdot 10^{-6}\ \text{м}^3 = 46\ \text{см}^3.$$

За таблицею сортаменту вибираємо двотавр № 12, в якого W = 58,4 см^3, а J = 350 см^4.

Найбільша поперечна сила буде в опорному перерізі:

$$Q_{max} = \frac{ql}{3} = \frac{120 \cdot 0{,}7}{2}\ \text{кН} = 42\ \text{кН}.$$

Перевіримо міцність балки за дотичними напруженнями. Умова міцності, згідно з формулою (10.29), має вигляд

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} S_{max}}{bJ} \le [\tau].$$

Ширина перерізу по нейтральній лінії b = 0,48 см (у сортаменті вона позначена літерою d). За таблицею сортаменту знаходимо, що S_{max} = 33,7 см^3. Підставивши числові значення в останню формулу, матимемо

$$\tau_{max} = \frac{42 \cdot 10^{-3} \cdot 33{,}7 \cdot 10^{-6}}{0{,}48 \cdot 10^{-2} \cdot 350 \cdot 10^{-8}}\ \text{МПа} = 84{,}25\ \text{МПа} < [\tau] = 100\ \text{МПа}.$$

Отже, розміри перерізу балки задовольняють умови міцності як за нормальним, так і за дотичним напруженнями.

Приклад 42. *Треба вибрати двотавровий переріз для балки, зображеної на рис. 262, а. Матеріал балки Ст3 ([σ] = 160 МПа; [τ] = 100 МПа).*

Побудувавши епюри Q та M, робимо висновок, що небезпечними можуть виявитися такі точки балки:

а) крайні точки (рис. 262, *б*, точка *1*) перерізу *C*;

б) точка, розміщена в місці з'єднання стінки з полицею (рис. 262, *б*, точка *2*) у перерізі праворуч від опори *A*;

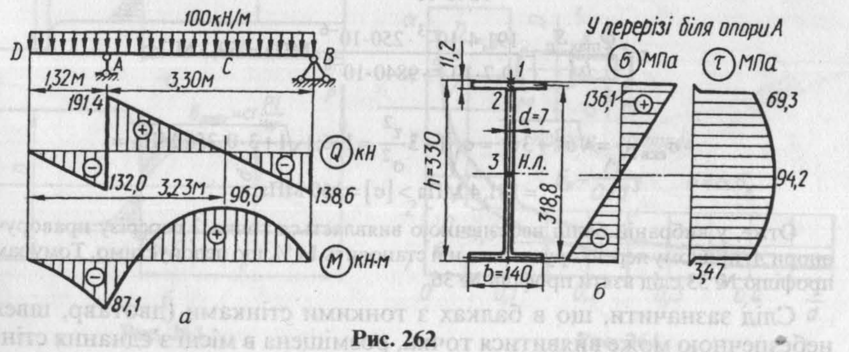


Рис. 262

в) точка, що лежить на нейтральній лінії цього самого перерізу (рис. 262, *б*, точка *3*).

Доберемо поперечний переріз балки, вважаючи небезпечною точку *1* у перерізі *C*. З умови міцності (10.28) маємо

$$W=\frac{M_{\max}}{[\sigma]}=\frac{96}{160\cdot 10^3}\ \text{м}^3=6\cdot 10^{-4}\ \text{м}^3=600\ \text{см}^3.$$

За таблицею сортаменту знаходимо потрібний профіль № 33, в якого W = 597 см³. Тоді напруження в точці *1*

$$\sigma_{\max}=\frac{96\cdot 10^{-3}}{597\cdot 10^{-6}}\ \text{МПа}=160{,}8\ \text{МПа}.$$

Це більше за допустиме, але перенапруження становить всього 0,5 %.

Тепер знаходимо геометричні характеристики двотавра № 33, потрібні для перевірки міцності в точках *2* та *3* перерізу *A*. Згідно з таблицею сортаменту,

$$J=9840\ \text{см}^4;\quad S_{\max}=339\ \text{см}^3;$$

ширина перерізу стінки, що відповідає точкам *2* та *3*, d = 0,7 см. Дістаємо

$$S_\text{п}=14\cdot 1{,}12\cdot 15{,}94\ \text{см}^3=250\ \text{см}^3.$$

Перевіряємо міцність у точці *3* перерізу балки безпосередньо праворуч від опори *A*. За умовою міцності (10.29), враховуючи, що $Q_{\max}$ = 191,4 кН, знаходимо

$$J_{\max}=\frac{Q_{\max}S_{\max}}{bJ}=\frac{191{,}4\cdot 10^{-3}\cdot 339\cdot 10^{-6}}{0{,}7\cdot 10^{-2}\cdot 9840\cdot 10^{-8}}\ \text{МПа}=94{,}2\ \text{МПа}<[\tau]=100\ \text{МПа}.$$

Перевіряємо міцність у точці *2* цього самого перерізу. Матеріал Ст3 пластичний, тому скористаємось умовою міцності (10.34) за IV теорією міцності:

$$\sigma_{\text{екв IV}}=\sqrt{\sigma^2+3\tau^2}\le[\sigma].$$

У перерізі діють

$$M=87{,}1\ \text{кН}\cdot\text{м}\quad\text{та}\quad Q=Q_{\max}=191{,}4\ \text{кН}.$$

Тому в точці *2*

$$\sigma=\frac{My}{J}=\frac{87{,}1\cdot 10^{-3}(16{,}5-1{,}12)10^{-2}}{9840\cdot 10^{-8}}\ \text{МПа}=136{,}1\ \text{МПа};$$

$$\tau=\frac{Q_{\max}S_\text{п}}{bJ}=\frac{191{,}4\cdot 10^{-3}\cdot 250\cdot 10^{-6}}{0{,}7\cdot 10^{-2}\cdot 9840\cdot 10^{-8}}\ \text{МПа}=69{,}3\ \text{МПа};$$

$$\sigma_{\text{екв IV}}=\sqrt{\sigma^2+3\tau^2}=\sigma\sqrt{1+3\frac{\tau^2}{\sigma^2}}=136{,}1\sqrt{1+3\cdot 0{,}259}\ \text{МПа}=181{,}4\ \text{МПа}>[\sigma]=160\ \text{МПа}.$$

Отже, у вибраній балці небезпечною виявляється точка *2* перерізу праворуч від опори *A*, причому перенапруження в ній становить 14 %, що недопустимо. Тому замість профілю № 33 слід взяти профіль № 36.

Слід зазначити, що в балках з тонкими стінками (двотавр, швелер) небезпечною може виявитися точка, розміщена в місці з'єднання стінки з

полицею. Це буває тоді, коли до балки прикладене значне поперечне навантаження, причому є перерізи, в яких M та Q одночасно великі. Один з таких перерізів і буде небезпечним.

Отже, якщо балка має тонкостінний переріз і до неї прикладені значні поперечні навантаження, то слід виконувати повний розрахунок на міцність. Якщо розрахунок проектувальний, то спочатку можна добрати переріз за основною умовою міцності (10.28), а потім здійснити перевірку за всіма умовами міцності.

§ 65. Концентрація напружень при згинанні

При згинанні, як і при розтяганні або крученні, в місцях різкої зміни форми або розмірів поперечних перерізів спостерігається концентрація напружень. Якщо навантаження статичне, то концентрація напружень в деталях з пластичного матеріалу не є небезпечною завдяки перерозподілу напружень у зоні концентрації внаслідок текучості матеріалу. При крихких матеріалах, коли не доводиться розраховувати на обмеження максимальних напружень, оскільки рівень останніх буде визначатися тимчасовим опором матеріалу, при розрахунку деталі на міцність слід враховувати концентрацію напружень.

Залежно від ступеня різкості порушення форми або суцільності матеріалу по довжині буде той чи інший ступінь концентрації напружень, тобто локальне підвищення напружень.

На рис. 263 наведено епюри нормальних напружень, які виникають в стрижнях, якщо немає концентрації напружень (рис. 263, *а*) та якщо є концентрація (рис. 263, *б*). В останньому випадку внаслідок різкої зміни перерізу вала в крайніх волокнах перерізу діють максимальні напруження

$$\sigma_{\max}=\alpha\sigma_\text{н},$$

де $\sigma_\text{н} = M/W = Pl/W$ — номінальні напруження, якщо немає концентрації;

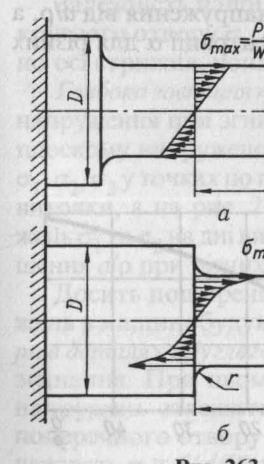


Рис. 263

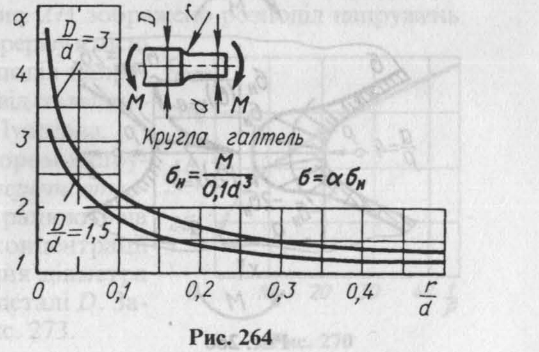


Рис. 264

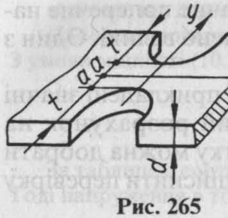


Рис. 265

α — теоретичний коефіцієнт концентрації, значення якого залежить від співвідношення діаметрів d та D спряжуваних ділянок стрижнів, а також від радіуса заокруглення r у місці спряження цих ділянок.

Значення α залежно від d/D та r визначаються методами теорії пружності і наводяться в довідковій літературі у вигляді відповідних графіків чи таблиць. Зокрема, для *круглої галтелі* при відношенні $D/d = 3$ та 1,5 на рис. 264 наведено графік залежності теоретичного коефіцієнта концентрації α від відношення r/d.

Розглянемо й інші типові випадки концентрації напружень при згинанні.

Двобічна зовнішня виточка (рис. 265). Із збільшенням глибини двобічної симетричної виточки коефіцієнт концентрації наближається до свого граничного значення. При цьому внаслідок так званого закону згасання, згідно з яким чим більше максимальне напруження в місці концентрації, тим різкіше згасання напруження при віддаленні від найбільш напруженої зони, істотно впливає на коефіцієнт концентрації тільки кривина біля дна виточки. Форма решти виточки мало впливає на коефіцієнт концентрації. Враховуючи останнє і вважаючи, що виточка має форму гіперболи, формулу для визначення максимальних напружень у зоні концентрації, виведену в теорії пружності для випадку чистого згинання (рис. 266), можна записати у вигляді

$$\sigma_{\max} = \sigma_{н} \frac{4a/\rho\sqrt{a/\rho}}{3\left[\sqrt{a/\rho} + (a/\rho - 1)\,\mathrm{arctg}\sqrt{a/\rho}\right]}, \qquad (10.37)$$

де $\sigma_{н} = 3M/2a^2d$ — номінальне напруження (без урахування концентрації).

На рис. 267 зображено залежність найбільшого напруження від a/ρ, а на рис. 268 — криві теоретичного коефіцієнта концентрації α для різних співвідношень H/h залежно від ρ/h.

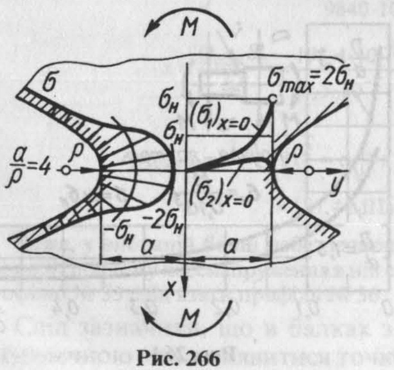


Рис. 266

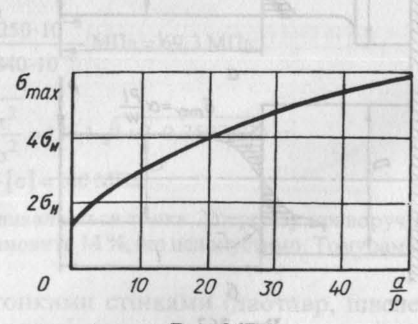


Рис. 267

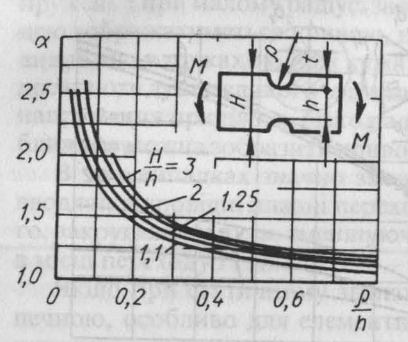


Рис. 268

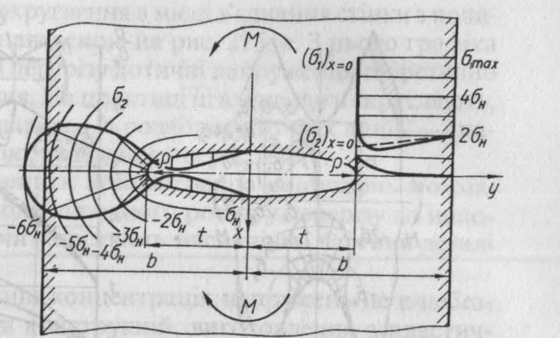


Рис. 269

Круглі та довгасті отвори в дуже широкому стрижні (рис. 269). Припускається, що велика вісь отвору збігається з віссю стрижня або перпендикулярна до неї. На рис. 269 наведено графіки розподілу напружень для випадку, коли $t/\rho = 25$. При переміщенні від дна виточки вздовж її контура, а також уздовж осі y напруження швидко зменшується. Напруження, показані штриховою лінією, відповідають результатам, здобутим на підставі елементарної теорії згинання з урахуванням ослаблення стрижня внаслідок висвердлювання отвору. Для найбільшого напруження, яке виникає біля дна виточки, формулу можна записати у вигляді

$$\sigma_{\max} = \sigma_{н}\left(1 + \sqrt{t/\rho}\right), \qquad (10.38)$$

де

$$\sigma_{н} = \frac{3Mt}{2\delta b^3},$$

δ — товщина стрижня.

Залежність найбільшого напруження від t/ρ наведено на рис. 270. Для круглого отвору $\sigma_{\max} = 2\sigma_{н}$. Якщо довгастий отвір розміщений паралельно осі стрижня, концентрації напружень біля отвору немає.

Глибока зовнішня кільцева виточка на тілі обертання (рис. 271). Найбільше напруження при згинанні виникає на дні виточки, де матеріал перебуває в плоскому напруженому стані. На рис. 271 зображено розподіл напружень $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ у точках по поперечному перерізу в місці виточки, а на рис. 272 дається розподіл напружень σ_1 та σ_2 на дні виточки залежно від співвідношення a/ρ при різних коефіцієнтах Пуассона.

Досить поширеним концентратором напружень в машинобудуванні є різні *поперечні отвори в деталях круглого перерізу*, які працюють на згинання. При цьому коефіцієнт концентрації напружень залежить від відношення діаметра поперечного отвору d до діаметра деталі D. Залежність $\alpha = f\,(d/D)$ наведено на рис. 273.

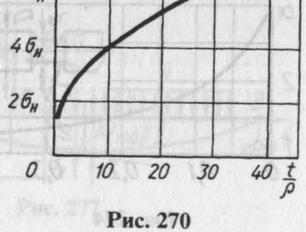


Рис. 270

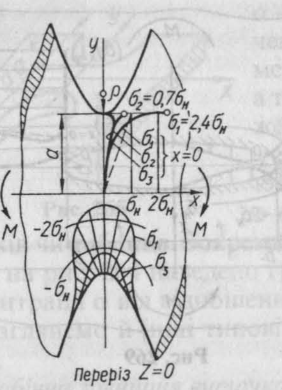


Рис. 271

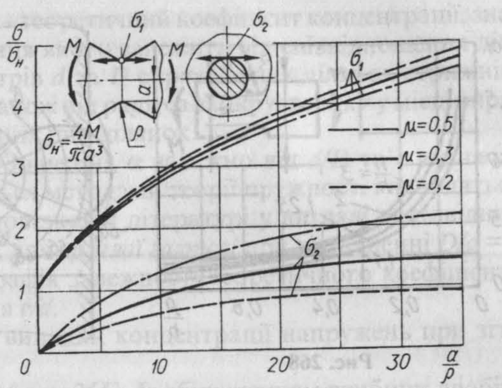


Рис. 272

Поширеними концентраторами напружень у різних деталях машин є також різного типу дрібні *виточки на круглих деталях*, що приводять до східчастості стрижнів. Коефіцієнт концентрації у цьому разі залежить в основному від співвідношення радіуса заокруглення r та меншого діаметра східчастого стрижня (діаметра виточки d). На рис. 274 наведено графік залежності $\alpha = f\,(r/d)$ для розглядуваного випадку.

Крім концентрації нормальних напружень, при згинанні іноді спостерігається концентрація дотичних напружень, зокрема при поперечному згинанні кутникових, швелерних, таврових та двотаврових балок. У цих випадках концентрація напружень обумовлюється різкою зміною товщини елементів перерізу балки в місцях з'єднання полиці зі стінкою.

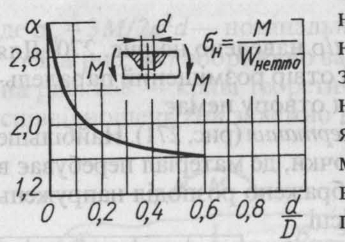


Рис. 273

Як свідчать детальні дослідження картини розподілу дотичних напружень при згинанні, наприклад у балці двотаврового перерізу, фактичний розподіл дотичних напружень не відповідає картині, наведеній на рис. 275, *а*, яку здобуто на підставі розрахунків за формулою (10.20). По лінії *1—1*, яка збігається з віссю симетрії перерізу, розподіл дотичних напружень з достатньою точністю зобразиться графіком рис. 275, *б*. По лінії *2—2*, яка проходить по самому краю перерізу, розподіл на-

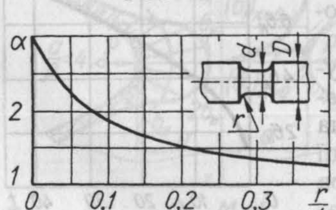


Рис. 274

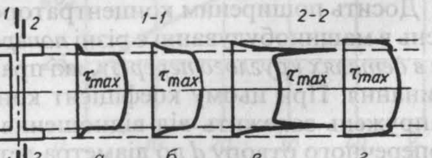


Рис. 275

пружень τ при малому радіусі заокруглення в місці з'єднання стінки з полицею зображатиметься кривою, наведеною на рис. 275, *в*. З цього графіка видно, що в точках вхідних кутів перерізу дотичні напруження теоретично досягають дуже великого значення. На практиці ці вхідні кути скругляють, напруження при цьому різко падають, і їх розподіл у точках лінії *2—2* наближено можна зобразити кривою, наведеною на рис. 275, *г*.

В усіх випадках значно зменшити концентрацію напружень можна, вводячи відповідні плавні переходи від одного розміру перерізу до іншого, закругляючи кути, зменшуючи жорсткість масивнішої частини деталі в місці переходу і т. п.

Якщо при статичному згинанні концентрація напружень не є небезпечною, особливо для елементів конструкцій, виготовлених з пластичних матеріалів, то при динамічних та повторно-змінних навантаженнях питанням концентрації напружень слід приділяти особливо велику увагу (див. розд. 21).

§ 66. Диференціальне рівняння зігнутої осі балки

У попередніх параграфах було розглянуто питання, пов'язані з розрахунком балок на міцність. Здебільшого при практичних розрахунках деталей, які працюють на згинання, треба також виконувати розрахунок на жорсткість. *Під розрахунком на жорсткість ми розуміємо оцінку пружної піддатливості балки під дією прикладеного навантаження та добір таких розмірів поперечного перерізу, при яких переміщення не буде перевищувати встановлених нормами границь.* Для виконання такого розрахунку треба навчитись обчислювати переміщення точок балки під дією будь-яких зовнішніх навантажень. Таке вміння потрібне також для розрахунків статично невизначуваних балок.

Розглянемо деформацію балки при плоскому згинанні. Вісь балки (рис. 276) під дією навантаження в одній з головних площин інерції (у площині xOy) викривлюється в тій самій площині, а поперечні перерізи повертаються й одночасно дістають поступальне переміщення в напрямі осі y. *Викривлену вісь балки називають зігнутою віссю або пружною лінією*. На рис. 276 та 277 зігнуту вісь зображено кривою лінією.

Переміщення центра ваги перерізу в напрямі, перпендикулярному до недеформованої осі балки, називається прогином балки в даному перерізі й

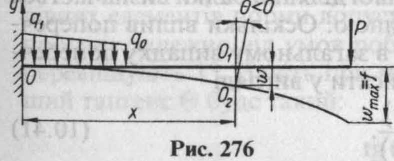


Рис. 276

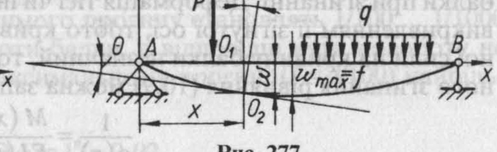


Рис. 277

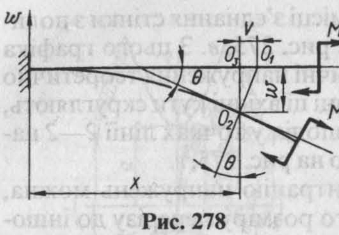


Рис. 278

позначається літерою w. На рис. 276 та 277 центр ваги довільного перерізу, взятого на відстані x від початку координат, перемістився по вертикалі з точки O_1 в точку O_2 на відстань O_1O_2. Це переміщення і є прогином балки $w(x)$ у перерізі з абсцисою x. *Найбільший прогин балки називається стрілою прогину і позначається літерою f.*

Кут Θ, на який кожний переріз повертається відносно свого початкового положення, називається кутом повороту перерізу. Кут повороту також може бути визначений як кут між дотичною до пружної лінії й віссю x (рис. 277).

Зазначимо, що довжина зігнутої осі, що належить нейтральному шару, при викривленні бруса не змінюється, отже, при цьому відбувається зміщення її точок також у напрямі осі x (переміщення O_1O_3 на рис. 278). Проте здебільшого зміщення V такі малі, що ними можна нехтувати.

Домовимось осі координат завжди розміщати так: початок координат поміщати на лівому кінці балки, вісь x напрямляти по осі балки праворуч, а вісь w — вгору.

Прогин w будемо вважати додатним, якщо переміщення відповідної точки відбувається вгору, тобто в напрямі осі w. Кут повороту Θ будемо вважати додатним при повороті перерізу проти годинникової стрілки.

Внаслідок малості деформації балок можна вважати, що $\operatorname{tg}\Theta \approx \Theta$. Оскільки тангенс кута повороту є похідною від ординати прогину:

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{dw}{dx}, \tag{10.39}$$

то з достатнім ступенем точності можна вважати кут повороту $\Theta(x)$ у даному перерізі таким, що дорівнює похідній прогину $w(x)$ по абсцисі перерізу:

$$\Theta(x) \approx \frac{dw(x)}{dx}. \tag{10.40}$$

Отже, для визначення деформації балки в її довільному перерізі треба насамперед здобути рівняння пружної лінії

$$w = F(x).$$

Виходячи з фізичної природи зігнутої осі балки, можна стверджувати, що пружна лінія має бути неперервною та гладкою (без будь-яких зломів) кривою, отже, вздовж всієї осі бруса мають бути неперервні функція w та її перша похідна. Прогини та кути повороту і є переміщеннями перерізів балки при згинанні. Деформація тієї чи іншої ділянки балки визначається викривленням її зігнутої осі, тобто кривиною. Оскільки вплив поперечної сили на кривину балки незначний, то в загальному випадку поперечного згинання рівняння (10.9) можна записати у вигляді

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EJ(x)}. \tag{10.41}$$

З курсу вищої математики відоме таке рівняння кривини плоскої кривої:

$$\frac{1}{\rho(x)} = \pm\frac{\dfrac{d^2w}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dw}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}. \tag{10.42}$$

Тепер для здобуття диференціального рівняння зігнутої осі балки залишається прирівняти праві частини рівнянь (10.41) та (10.42), з'ясувавши попередньо питання про знаки.

Якщо згинальний момент додатний, то пружна лінія своїм угнутим боком повернута вгору (рис. 279, *а*) і, отже, при взятому напрямі координатних осей кривина $k = 1/\rho$ вважається додатною. При від'ємному згинальному моменті кривина теж від'ємна (рис. 279, *б*). Якби вісь w була напрямлена вниз, то при додатному згинальному моменті кривина була б від'ємною (рис. 279, *в*), а при від'ємному моменті — додатною (рис. 279, *г*).

Зберігаючи вибраний нами напрям осі w вгору, маємо відповідність між знаком моменту та знаком кривини, тому можна просто прирівняти праві частини рівнянь (10.41) та (10.42). Тоді

$$\frac{\dfrac{d^2w}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dw}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{M(x)}{EJ(x)}. \tag{10.43}$$

Коли б вісь w була напрямлена вниз, то в правій частині треба було б поставити знак «мінус».

Рівняння (10.43) називають *точним рівнянням зігнутої осі балки (бруса)*. Воно є нелінійним диференціальним рівнянням другого порядку, інтегрувати яке, як відомо, досить важко. Внаслідок цього та оскільки в переважній більшості розглядуваних на практиці задач прогини малі, точне рівняння (10.43) замінюють наближеним — рівнянням для малих переміщень.

У знаменнику рівняння (10.43) стоїть сума двох доданків:

$$1+\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 = 1+\operatorname{tg}^2\Theta.$$

При малих деформаціях значення другого доданка в багато разів менше, ніж першого. Дійсно, при розрахунках звичайних машинобудівних чи будівних елементів норми допустимого прогину становлять 1/100 ... 1/1000 прогону залежно від умов роботи балки, а відповідні кути повороту не перевищують 1°. Навіть при максимальному прогині ($f = l/100$) найбільший тангенс Θ буде такий:

$$\operatorname{tg}\Theta \approx \operatorname{tg}1° \approx 0{,}02.$$

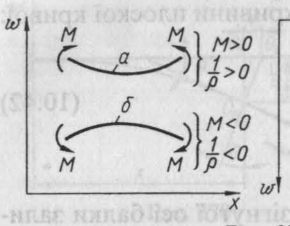


Рис. 279

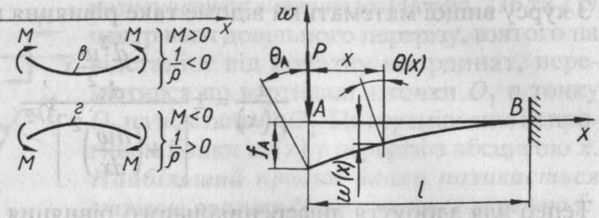


Рис. 280

Отже, значення $\operatorname{tg}^2 \Theta$ не перевищує 0,0004, тобто дуже мале порівняно з одиницею. Тому цими величинами можна знехтувати без відчутної для практичних цілей помилки. Тоді дістанемо спрощене диференціальне рівняння пружної лінії

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ(x)}, \tag{10.44}$$

в якому згинальний момент $M(x)$ визначається для недеформованої балки. Відтак рівняння (10.44) будемо називати *основним диференціальним рівнянням пружної лінії балки* (для малих деформацій). За його допомогою можна обчислювати лінійні та кутові переміщення в балках за будь-яких умов навантаження.

Розв'язуючи задачу аналітичним методом, кути повороту $\Theta(x)$ та прогини $w(x)$ обчислюють послідовним інтегруванням основного диференціального рівняння (10.44). Проінтегрувавши рівняння перший раз, матимемо вираз для кута повороту $\Theta(x)$:

$$\Theta(x) = \frac{dw}{dx} = \int \frac{M(x)}{EJ(x)}\, dx + C, \tag{10.45}$$

який містить у собі одну довільну сталу C. Інтегруючи другий раз, знаходимо вираз для прогину $w(x)$:

$$w(x) = \int dx \int \frac{M(x)}{EJ(x)}\, dx + Cx + D, \tag{10.46}$$

де є дві сталі C та D. Значення цих сталих визначають з умов закріплення балки:

а) якщо балка має кінці закріплення (рис. 280), то прогин та кут повороту в ньому дорівнюють нулю:

$$w_B = 0; \quad \Theta_B = 0. \tag{10.47}$$

б) для балки на двох шарнірних опорах (див. рис. 277) дорівнюють нулю прогини на цих опорах:

$$w_A = 0; \quad w_B = 0. \tag{10.48}$$

Зазначимо, що рівняння пружної лінії іноді зручно записати в іншій формі, вважаючи заданим не момент $M(x)$, а навантаження $q(x)$. Пригадавши, що $d^2M(x)/dx^2 = q(x)$, та продиференціювавши рівняння (10.44) двічі, матимемо

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[EJ(x)\frac{d^2 w(x)}{dx^2}\right] = q(x). \tag{10.49}$$

Рівняння пружної лінії у формі (10.49) використовують при розрахунках балок на пружній основі та при розгляді коливань балок.

§ 67. Приклади визначення переміщень інтегруванням диференціального рівняння зігнутої осі балки

Розглянемо кілька прикладів визначення деформацій балок методом безпосереднього інтегрування основного диференціального рівняння (10.44), а потім виведемо правила побудови епюр кутів повороту та прогинів, які потрібні при дослідженні деформованого стану балок при складній системі навантажень.

Визначимо Θ_{max} та w_{max} для консолі постійного поперечного перерізу, навантаженої зосередженою силою P на її вільному кінці (рис. 280).

Згинальний момент у перерізі x будемо обчислювати як наслідок дії зовнішніх сил ліворуч від перерізу:

$$M(x) = -Px.$$

Підставляючи вираз для $M(x)$ у рівняння (10.44), маємо

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{Px}{EJ}.$$

Інтегруємо двічі:

$$\Theta(x) = \frac{Px^2}{2EJ} + C;$$

$$w(x) = \frac{Px^3}{6EJ} + Cx + D.$$

Для визначення сталих C та D маємо граничні умови:

1) при $x = l$ $w = 0$;

2) при $x = l$ $\Theta = 0$.

З другої умови

$$\Theta(l) = -\frac{Pl^2}{2EJ} + C = 0,$$

звідки

$$C = \frac{Pl^2}{2EJ}. \tag{10.50}$$

Тоді
$$w(x)=-\frac{Px^3}{6EJ}+\frac{Pl^2}{2EJ}x+D.$$

З першої умови
$$w(l)=-\frac{Pl^3}{6EJ}+\frac{Pl^2}{2EJ}l+D=0,$$
звідки
$$D=-\frac{Pl^3}{3EJ}. \qquad (10.51)$$

Остаточні рівняння прогину та кута повороту такі:
$$w(x)=-\frac{P}{6EJ}\left(x^3-3l^2x+2l^3\right)=-\frac{Pl^3}{6EJ}\left[2-3\frac{x}{l}+\left(\frac{x}{l}\right)^3\right]; \qquad (10.52)$$
$$\Theta(x)=-\frac{P}{2EJ}\left(x^2-l^2\right)=\frac{Pl^2}{2EJ}\left[1-\left(\frac{x}{l}\right)^2\right]. \qquad (10.53)$$

Як видно з формули (10.52), пружна лінія балки є параболою третього порядку.

Тепер можна визначити $w_{\max}$ та $\Theta_{\max}$. Легко переконатися, що $w_{\max}$ та $\Theta_{\max}$ мають місце на вільному кінці балки в точці A (при $x = 0$). Отже,
$$w_{\max}=f_A=-\frac{Pl^3}{3EJ}; \qquad (10.54)$$
$$\Theta_{\max}=\Theta_A=\frac{Pl^2}{2EJ}. \qquad (10.55)$$

Від'ємне значення f_A показує, що прогин відбувається в напрямі, протилежному напряму осі w (тобто вниз). Додатний кут повороту Θ_A показує, що переріз повертається проти годинникової стрілки.

Порівнюючи вирази (10.50), (10.51) для довільних сталих з (10.55) та (10.54) для Θ (0) та w (0), переконуємося, що C дорівнює куту повороту на вільному кінці консолі (при $x = 0$), а D характеризує прогин вільного кінця консолі (при $x = 0$).

Побудуємо епюри прогинів та кутів повороту для простої балки постійного перерізу (рис. 281), до якої прикладено суцільне рівномірно розподілене навантаження q.

Опорні реакції
$$R_A=R_B=ql/2.$$

Згинальний момент у довільному перерізі
$$M(x)=\frac{ql}{2}x-\frac{qx^2}{2}.$$

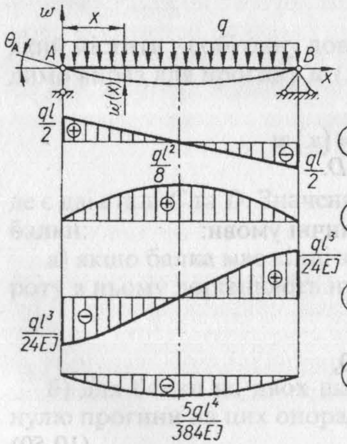


Рис. 281

Складаємо диференціальне рівняння зігнутої осі:
$$\frac{d^2w}{dx^2}=\frac{1}{EJ}\left(\frac{ql}{2}x-\frac{qx^2}{2}\right).$$

Інтегруючи його двічі, маємо
$$\Theta(x)=\frac{dw}{dx}=\frac{ql}{4EJ}x^2-\frac{q}{6EJ}x^3+C; \qquad (10.56)$$
$$w(x)=\frac{ql}{12EJ}x^3-\frac{q}{24EJ}x^4+Cx+D. \qquad (10.57)$$

Граничні умови такі:
1) на лівому кінці прогин дорівнює нулю, тобто при $x = 0$ $\quad w = 0$;
2) на правому кінці прогин дорівнює нулю, тобто при $x = l$ $\quad w = 0$.

З першої умови маємо
$$w(0)=D=0. \qquad (10.58)$$

Друга умова дає
$$w(l)=\frac{ql^4}{12EJ}-\frac{ql^4}{24EJ}+Cl=0,$$
звідки
$$C=-\frac{ql^3}{24EJ}. \qquad (10.59)$$

Підставляючи здобуті значення довільних сталих у рівняння (10.56) та (10.57), дістаємо рівняння зігнутої осі балки
$$w(x)=\frac{qlx^3}{12EJ}-\frac{qx^4}{24EJ}-\frac{ql^3x}{24EJ}=-\frac{ql^3x}{24EJ}\left[1-2\left(\frac{x}{l}\right)^2+\left(\frac{x}{l}\right)^3\right] \qquad (10.60)$$
та рівняння кута повороту
$$\Theta(x)=\frac{dw}{dx}=\frac{qlx^2}{4EJ}-\frac{qx^3}{6EJ}-\frac{ql^3}{24EJ}=-\frac{ql^3}{24EJ}\left[1-6\left(\frac{x}{l}\right)^2+4\left(\frac{x}{l}\right)^3\right]. \qquad (10.61)$$

Для побудови епюр Θ (x) та w (x) визначимо кути повороту по кінцях балки, а також прогин посередині прогону w ($l/2$) = f. Кути повороту на опорах знайдемо з рівняння (10.61). При $x = 0$ знайдемо кут повороту на лівій опорі
$$\Theta_A=\Theta(0)=-\frac{ql^3}{24EJ}. \qquad (10.62)$$

На правій опорі, тобто при $x = l$,
$$\Theta(l)=\Theta_B=\frac{ql^3}{24EJ}.$$

Порівнюючи значення довільних сталих C та D з виразами для Θ (0) та w (0), знову переконуємося, що вони відповідно дорівнюють куту повороту і прогину на тій опорі, де розміщений початок координат:

$$C = \Theta(0) = -\frac{ql^3}{24EJ}; \quad D = w(0) = 0.$$

Зазначимо, що таким буде геометричний зміст довільних сталих на ділянці, яка примикає до початку координат, для будь-якої балки при довільному навантаженні.

Підставивши у формулу (10.60) $x = l/2$, визначимо максимальний прогин посередині прогону:

$$f = -\frac{5}{384}\frac{ql^4}{EJ}. \tag{10.63}$$

З рівняння (10.60) пружної лінії випливає, що балка згинається по параболічній кривій четвертого порядку. Оскільки згинальний момент уздовж балки додатний, то це означає, що стиснуті верхні волокна і, отже, балка згинається опуклістю вниз.

Визначивши прогини в різних перерізах, відкладаємо їх у певному масштабі вниз від базисної лінії. Сполучивши кінцеві точки відкладених відрізків кривої, дістанемо епюру прогинів w. Ця епюра у вибраному масштабі відобразить зігнуту вісь розглядуваної балки.

Для побудови епюри Θ відкладемо обчислені значення Θ_A та Θ_B від базисної лінії вниз та вгору відповідно. З умови симетрії балки та навантаження випливає, що посередині прогону балки (при $x = l/2$) переріз балки повертатися не буде, отже,

$$\Theta(l/2) = 0.$$

Відповідно до рівняння (10.61) епюра кутів повороту по довжині балки буде окреслюватися параболою третього порядку. Будуємо епюру по точках (рис. 281), визначивши проміжні ординати:

$$\Theta\left(\frac{l}{4}\right) = -\frac{9}{384}\frac{ql^3}{EJ}; \quad \Theta\left(\frac{3}{4}l\right) = -\frac{9}{384}\frac{ql^3}{EJ}.$$

При цьому параболічна крива на лівій половині балки повернута угнутістю вгору, а на правій — вниз.

Розглянемо ще один приклад визначення переміщень. Для простої балки постійного поперечного перерізу, навантаженої зосередженою силою P у довільній точці C (рис. 282), треба:

а) знайти рівняння пружної лінії та кутів повороту;

б) обчислити прогини в точці C та посередині прогону балки, а також визначити стрілу прогину f та її положення;

в) обчислити кути повороту перерізів у точках A, B та C;

г) побудувати епюри Q, M, Θ та w, взявши $P = 180$ кН, $l = 6$ м, $a = 2{,}2$ м, $J_z = 46\,470$ см^4, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Даємо змогу читачеві самостійно розв'язати цей приклад. Зазначимо лише, що на кожній з ділянок балки при інтегруванні диференціальних рівнянь пружної лінії знайдемо по дві довільні сталі: C_{I}, D_{I} та C_{II}, D_{II}. Для визначення їх до

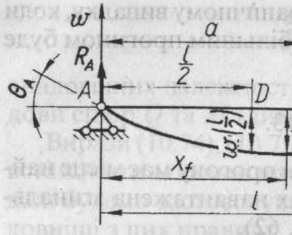


Рис. 282

двох опорних умов балки $w(0) = 0$; $w(l) = 0$ слід додати умови плавного та неперервного спряження ділянок AC та CB у точці C при $x = a$:

$$\Theta(a)_{\text{лів}} = \Theta(a)_{\text{пр}}; \quad w(a)_{\text{лів}} = w(a)_{\text{пр}}.$$

Ці додаткові умови виражають відсутність розриву та злому пружної лінії балки під силою P.

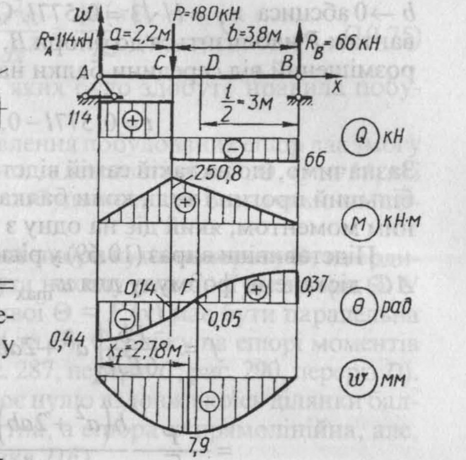


Рис. 283

Для самоконтролю наводимо остаточні рівняння прогинів та кутів повороту:

для ділянки AC

$$w(x) = -\frac{Pbx}{6EJl}\left(a^2 + 2ab - x^2\right); \tag{10.64}$$

$$\Theta(x) = -\frac{Pb}{6EJl}\left(a^2 + 2ab - 3x^2\right); \tag{10.65}$$

для ділянки BC

$$w(x) = -\frac{Pa}{6EJl}\left[-a^2 l + \left(a^2 + 2l^2\right)x + x^3 - 3lx^2\right]; \tag{10.66}$$

$$\Theta(x) = -\frac{Pa}{6EJl}\left(a^2 + 2l^2 - 6lx + 3x^2\right). \tag{10.67}$$

Епюри Q, M, Θ, w зображено на рис. 283.

Скористаємося результатами цього прикладу для того, щоб знайти абсциси перерізів з найбільшим прогином та значення f при різних положеннях вантажу P на балці. Найбільший прогин буде в перерізі з координатою x_f, де

$$\Theta\left(x_f\right) = \frac{dw}{dx} = 0. \tag{10.68}$$

При $a > b$ цей переріз розміщується на ділянці AC.

Прирівнявши до нуля рівняння (10.65), матимемо

$$x_f = \sqrt{\frac{a(a+2b)}{3}} = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}. \tag{10.69}$$

Простежимо, як буде змінюватись абсциса перерізу з найбільшим прогином при переміщенні сили P від середини балки до правої опори. При

$b \to 0$ абсциса $x_f = l/\sqrt{3} = 0{,}577l$. Отже, навіть у граничному випадку, коли вантаж P наблизиться до опори B, переріз F з найбільшим прогином буде розміщений від середини балки на відстані

$$t = 0{,}577l - 0{,}5l = 0{,}077l = l/13.$$

Зазначимо, що на такій самій відстані від середини прогону має місце найбільший прогин і тоді, коли балка на двох опорах навантажена згинальним моментом, який діє на одну з опор (див. рис. 62).

Підставивши вираз (10.69) у рівняння (10.64) для пружної лінії на ділянці AC, дістанемо формулу для $w_{\max} = f$:

$$f = -\frac{Pb}{6EJl}\left(a^2 + 2ab - \frac{a^2+2ab}{3}\right)\sqrt{\frac{a^2+2ab}{3}} = \tag{10.70}$$

$$= \frac{P}{9\sqrt{3}EJ}\frac{b\left(a^2+2ab\right)^{3/2}}{a+b} = \frac{P}{9\sqrt{3}EJ}\frac{\left(l^2-b^2\right)^{3/2}}{l}.$$

Прогин посередині прогону знайдемо з рівняння (10.64), підставивши в нього $x = l/2$:

$$w\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{Pb}{12EJ}\left(a^2 + 2ab - \frac{l^2}{4}\right). \tag{10.71}$$

Аналіз формул (10.69) та (10.64) свідчить, що навіть при $b \to 0$ різниця між прогином посередині прогону балки та максимальним прогином не перевищує 3 %. Отже, *прогин балки посередині прогону $w\,(l/2) = f\,(l/2)$ приблизно дорівнює найбільшому прогину f*. Цей висновок справедливий при дії на балку будь-яких навантажень, які спричинюють згинання в один бік.

Здебільшого побудова епюр w та Θ можлива і без складання аналітичних виразів для прогинів та кутів повороту по ділянках: досить лише обчислити прогини та кути повороту для деяких характерних перерізів. Проте при побудові епюр слід користуватися правилами, які можна здобути на підставі аналізу диференціальних залежностей, що існують між w, Θ, M та Q. Запишемо ці залежності в зручній для аналізу формі.

З рівняння (10.44) з урахуванням виразу (10.40) знаходимо, що

$$\frac{d\Theta(x)}{dx} = \frac{M(x)}{EJ}. \tag{10.72}$$

Продиференціювавши рівняння (10.72) по x та враховуючи залежність $dM/dx = Q$, дістанемо

$$\frac{d^2\Theta}{dx^2} = \frac{Q(x)}{EJ}. \tag{10.73}$$

Отже, маємо дві групи диференціальних залежностей:

$$\frac{d\Theta}{dx} = \frac{M(x)}{EJ}; \quad \frac{dw}{dx} = \Theta(x); \tag{10.74}$$

$$\frac{d^2\Theta}{dx} = \frac{Q(x)}{EJ}; \quad \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ}, \tag{10.75}$$

аналогічних залежностям, на підставі яких було здобуто правила побудови епюр Q та M (див. § 21).

Вирази (10.74), (10.75), а також зіставлення побудованих епюр дає змогу встановити загальні для будь-яких балок залежності між w, Θ, Q та M, які далі будемо застосовувати як правила побудови епюр. Зазначимо найголовніші з цих правил:

1. Оскільки $M\,(x)$ є діаграмою похідної епюри кутів повороту Θ, то ординати епюри M пропорційні тангенсу кута нахилу дотичної до епюри Θ. У перерізах, де $M\,(x) = 0$, дотична до кривої $\Theta = F\,(x)$ має бути паралельна абсцисі (див. рис. 281 та 283, перерізи A та B). Стрибку на епюрі моментів відповідає кутова точка на епюрі Θ (рис. 287, переріз C; рис. 290, переріз D).

2. Якщо згинальний момент дорівнює нулю вздовж якоїсь ділянки балки, то на цій ділянці епюра Θ прямокутна, а епюра w прямолінійна, але, взагалі кажучи, похила (рис. 290, ділянка DE).

3. На ділянках, де діє постійний момент (на ділянках, що перебувають в умовах чистого згинання), епюра Θ прямолінійна та похила, а епюра w — параболічна (рис. 290, ділянка BD).

Тут виявляється протиріччя з висловленим вище твердженням, що при чистому згинанні кривина постійна ($k = 1/\rho = M/EJ = \text{const}$) і балка згинається по дузі кола. Це обумовлене наближеністю диференціального рівняння пружної лінії, яким користуємося для виведення рівняння (10.72). Точно кажучи, при чистому згинанні балка згинається по дузі кола, яка в межах малих деформацій з дуже великою точністю може бути зображена квадратичною параболою.

4. Друга похідна прогину

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ}$$

має знак моменту. Якщо момент додатний (стиснуті верхні волокна), то угнутість на епюрі w буде повернута в бік додатних w (вгору). При від'ємному згинальному моменті угнутість параболи повернута вниз. Оскільки ординати епюр згинальних моментів ми домовилися відкладати з боку стиснутих волокон (див. § 20), то угнутість епюри прогинів w завжди повернута в той бік, з якого розміщені ординати епюри згинальних моментів. У перерізах, де діє зосереджений момент M, маємо точку перегину пружної лінії (рис. 287, точка C).

5. Друга похідна кута повороту

$$\frac{d^2\Theta}{dx^2} = \frac{Q(x)}{EJ}$$

має знак поперечної сили. Якщо Q додатна, то опуклість на епюрі Θ буде повернута вниз (рис. 283, ділянка AC; рис. 290, ділянки AC та CB). При $Q <$ < 0 опуклість напрямлена в бік осі w, тобто вгору (рис. 283, ділянка CB). У перерізі, де Q змінює знак, на епюрі Θ є точка перегину (рис. 283, переріз C).

6. На тих ділянках балки, де епюра M змінюється за лінійним законом (ділянки AC та CB на рис. 283), епюра Θ матимемо вигляд квадратичної параболи, а епюра w — параболи третього порядку.

7. Оскільки Θ є графіком зміни по довжині балки тангенсів кутів нахилу дотичних до пружної лінії, то можна стверджувати таке:

а) на ділянках, де в напрямі осі x прогин w збільшується, кут нахилу Θ додатний (рис. 283, ділянка FB), при зменшенні w кути нахилу Θ від'ємні (рис. 283 та 290, ділянка AC);

б) у перерізі, де $\Theta = 0$, дотична до епюри w горизонтальна, тобто тут на епюрі w має місце аналітичний максимум або мінімум (рис. 283, переріз F).

8. У тих перерізах, де на балці розміщено проміжні шарніри (рис. 290, переріз C), на епюрі кутів повороту будуть стрибки. На епюрі w у цих перерізах мають місце переломи, тобто кутові точки, в яких стрибкоподібно змінюється кут нахилу дотичної до епюри w.

Зазначені особливості епюр дають змогу за їхнім виглядом з'ясувати, чи не допущено принципові помилки при побудові їх. Кілька прикладів побудови епюр розглянуто в наступному параграфі.

§ 68. Визначення переміщень у балках за методом початкових параметрів

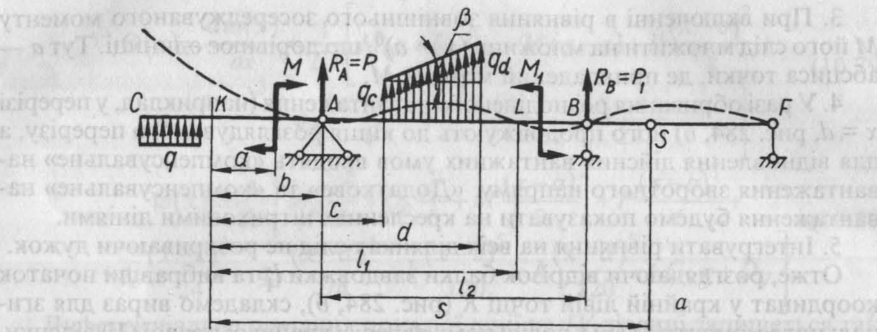
Визначення переміщень у балках методом безпосереднього інтегрування диференціального рівняння пружної лінії у випадку балок з великою кількістю ділянок пов'язано із значними труднощами. Ці труднощі полягають у техніці визначення довільних сталих інтегрування — складанні та розв'язанні систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Так, якщо балка за умовами навантажування розбивається на n ділянок, то інтегрування диференціальних рівнянь для всіх ділянок балки дає $2n$ довільних сталих. Додавши до двох основних опорних умов балки $2(n - 1)$ умов неперервного та плавного сполучення всіх ділянок пружної лінії, можна скласти $2n$ рівнянь для визначення цих сталих.

Задача стає дуже трудомісткою вже при $n = 3$. Для зменшення великої обчислювальної роботи, пов'язаної з визначенням сталих інтегрування, останнім часом розроблено кілька методів. До них насамперед належить метод початкових параметрів, який дає змогу при будь-якій кількості ділянок звести розв'язання до відшукання всього двох сталих — прогину та кута повороту на початку координат.

Виведення загальних рівнянь та приклади застосування їх. Розглянемо якусь частину балки завдовжки l_1 (рис. 284, *а*), обмежену двома перерізами, які проведено в точках K та L. На рис. 284, *б* зображено цей відрізок з прикладеними до нього найтиповішими навантаженнями:

а) зосередженим моментом M у перерізі з абсцисою a;

б) зосередженою силою P у перерізі з абсцисою b;



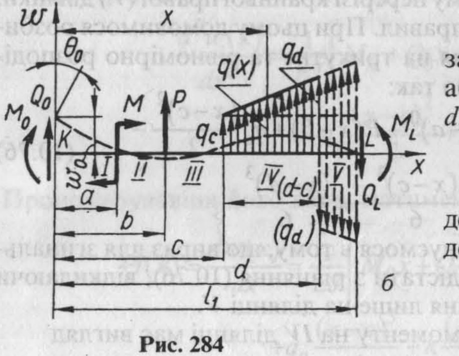


Рис. 284

в) навантаженням, розподіленим за законом трапеції від перерізу з абсцисою c до перерізу з абсцисою d, інтенсивністю

$$q(x) = q_c + k(x - c),$$

де k — тангенс кута β нахилу дотичної до епюри навантаження (рис. 284, *а*):

$$k = \operatorname{tg}\beta = \frac{q_d - q_c}{d - c};$$

г) крім того, по кінцях розглядуваної частини балки l_1, прикладені поперечні сили та згинальні моменти, які замінюють дію уявно відкинутих частин балки.

Виводячи рівняння, напрями всіх навантажень виберемо такими, щоб вони спричинювали додатні згинальні моменти. Зазначимо також, що на розглядуваному відрізку може бути кілька зосереджених сил та згинальних моментів, а також кілька ділянок розподіленого навантаження. На балці зображено по одному із зазначених навантажень лише заради спрощення розрахунків.

Щоб різко скоротити кількість невідомих довільних сталих, звівши розв'язання до визначення лише двох сталих інтегрування, треба забезпечити рівність відповідних сталих на всіх відрізках балки. Ця рівність може бути тільки тоді, коли в рівняннях моментів, кутів повороту та прогинів при переході від однієї ділянки до іншої повторюються всі члени попередньої ділянки, а доданки, що виникають, перетворюються на нуль на лівих межах своїх ділянок. Для забезпечення цих умов при складанні диференціальних рівнянь пружної лінії балки та інтегруванні їх треба дотримуватися таких правил.

1. Початок координат слід вибирати в крайній лівій точці розглядуваної балки та робити його загальним для всіх ділянок.

2. Вираз для згинального моменту $M(x)$ складати, обчислюючи моменти сил ліворуч від розглядуваного перерізу.

3. При включенні в рівняння зовнішнього зосереджуваного моменту M його слід множити на множник $(x-a)^0$, що дорівнює одиниці. Тут a — абсциса точки, де прикладений момент M.

4. У разі обривання розподіленого навантаження (наприклад, у перерізі $x = d$, рис. 284, *б*) його продовжують до кінця розглядуваного перерізу, а для відновлення дійсних вантажних умов вводять «компенсувальне» навантаження зворотного напряму. «Додаткове» та «компенсувальне» навантаження будемо показувати на кресленнях штриховими лініями.

5. Інтегрувати рівняння на всіх ділянках слід не розкриваючи дужок.

Отже, розглядаючи відрізок балки завдовжки l_1 та вибравши початок координат у крайній лівій точці K (рис. 284, *б*), складемо вираз для згинального моменту $M(x)$ у довільному перерізі крайньої правої (V) ділянки, дотримуючись п. 2—4 зазначених правил. При цьому домовимося розбивати трапецієподібне навантаження на трикутне та рівномірно розподілене. Згинальний момент запишемо так:

$$M(x) = M_0 + Q_0 x + M(x-a)^0 + P(x-b) + q_c\frac{(x-c)^2}{2} - q_d\frac{(x-d)^2}{2} + k\frac{(x-c)^3}{6} - k\frac{(x-d)^3}{6}. \tag{10.76}$$

Розглядаючи рис. 284, *б*, переконуємося в тому, що вираз для згинального моменту на ділянці IV легко дістати з рівняння (10.76), відкидаючи члени, які враховують навантаження лише на ділянці V.

Дійсно, вираз для згинального моменту на IV ділянці має вигляд

$$M(x) = M_0 + Q_0 x + M(x-a)^0 + P(x-b) + q_c\frac{(x-c)^2}{2} + k\frac{(x-c)^3}{6}. \tag{10.77}$$

Слід пам'ятати, що вирази $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$, ..., $(x-j)$ можуть бути тільки додатними величинами. Вираз $(x-j) < 0$ означає, що відповідне навантаження діє праворуч від розглядуваного перерізу і такий доданок має бути викреслений з рівняння.

Згинальний момент M_0 та поперечну силу Q_0, що діють у перерізі, який збігається з початком координат, називають *статичними початковими параметрами*.

Складемо диференціальне рівняння пружної лінії на ділянці V:

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \frac{1}{EJ}\left[M_0 + Q_0 x + M(x-a)^0 + P(x-b) + q_c\frac{(x-c)^2}{2} - q_d\frac{(x-d)^2}{2} + k\frac{(x-c)^3}{6} - k\frac{(x-d)^3}{6}\right]. \tag{10.78}$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння двічі, не розкриваючи дужок:

Отже,

$$\Theta(x) = \frac{dw(x)}{dx} = \frac{1}{EJ}\left[M_0 x + Q_0\frac{x^2}{2} + M(x-a) + P\frac{(x-b)^2}{2} + q_c\frac{(x-c)^3}{6} - q_d\frac{(x-d)^3}{6} + k\frac{(x-c)^4}{24} - k\frac{(x-d)^4}{24} + C_V\right]; \tag{10.79}$$

$$w(x) = \frac{1}{EJ}\left[M_0\frac{x^2}{2} + Q_0\frac{x^3}{6} + M\frac{(x-a)^2}{2} + P\frac{(x-b)^3}{6} + q_c\frac{(x-c)^4}{24} - q_d\frac{(x-d)^4}{24} + k\frac{(x-c)^5}{120} - k\frac{(x-d)^5}{120} + C_V x + D_V\right]. \tag{10.80}$$

Диференціальне рівняння пружної лінії на IV ділянці запишеться так:

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \frac{1}{EJ}\left[M_0 + Q_0 x + M(x-a)^0 + P(x-b) + q_c\frac{(x-c)^2}{2} + k\frac{(x-c)^3}{6}\right]. \tag{10.81}$$

Проінтегрувавши його двічі, матимемо

$$\Theta(x) = \frac{dw(x)}{dx} = \frac{1}{EJ}\left[M_0 x + Q_0\frac{x^2}{2} + M(x-a) + P\frac{(x-b)^2}{2} + q_c\frac{(x-c)^3}{6} + k\frac{(x-c)^4}{24} + C_{IV}\right]; \tag{10.82}$$

$$w(x) = \frac{1}{EJ}\left[M_0\frac{x^2}{2} + Q_0\frac{x^3}{6} + M\frac{(x-a)^2}{2} + P\frac{(x-b)^3}{6} + q_c\frac{(x-c)^4}{24} + k\frac{(x-c)^5}{120} + C_{IV}x + D_{IV}\right]. \tag{10.83}$$

Можна показати, що дотримання правил складання та інтегрування рівнянь пружної лінії забезпечило рівність довільних сталих на IV та V ділянках. Дійсно, поклавши у виразах (10.79) та (10.82) $x = d$, з умов плавного сполучання ділянок IV та V дістанемо

$$\Theta(d)_{IV} = \frac{1}{EJ}\left[M_0 d + Q_0\frac{d^2}{2} + M(d-a) + P\frac{(d-b)^2}{2} + q_c\frac{(d-c)^3}{6} + k\frac{(d-c)^4}{24} + C_{IV}\right] = \Theta(d)_V = \frac{1}{EJ}\left[M_0 d + Q_0\frac{d^2}{2} + M(d-a) + P\frac{(d-b)^2}{2} + q_c\frac{(d-c)^3}{6} - q_d\frac{(d-d)^3}{6} + k\frac{(d-c)^4}{24} - k\frac{(d-d)^4}{24} + C_V\right]. \tag{10.84}$$

Отже,
$$C_{IV} = C_V.$$

Поклавши $x = d$ у рівняннях (10.80) та (10.83), з умов неперервного сполучання ділянок $w(d)_{VI} = w(d)_V$ знайдемо, що і $D_{IV} = D_V$.

Виконавши аналогічні операції для решти ділянок, робимо висновок, що відповідні довільні сталі однакові на всіх ділянках розглядуваного відрізка балки:
$$C_I = C_{II} = C_{III} = C_{IV} = C_V = C; \tag{10.85}$$
$$D_I = D_{II} = D_{III} = D_{IV} = D_V = D. \tag{10.86}$$

Геометричний зміст цих двох сталих інтегрування визначимо, розглядаючи рівняння кутів повороту та прогинів на першій ділянці балки. Викреслюючи в рівняннях (10.79) та (10.80) доданки, які враховують навантаження, прикладені на *II—V* ділянках, дістанемо рівняння для першої ділянки:
$$\Theta(x) = \frac{dw(x)}{dx} = \frac{1}{EJ}\left(M_0 x + Q_0\frac{x^2}{2} + c\right); \tag{10.87}$$
$$w(x) = \frac{1}{EJ}\left(M_0\frac{x^2}{2} + Q_0\frac{x^3}{6} + Cx + D\right). \tag{10.88}$$

Підставивши в ці рівняння $x = 0$, знайдемо:
$$\Theta(0) = \Theta_0 = C/EJ; \tag{10.89}$$
$$w(0) = w_0 = D/EJ. \tag{10.90}$$

Отже, довільні сталі C та D дорівнюють відповідно куту повороту та прогину на початку координат. Прогин w_0 та кут повороту Θ_0 є *геометричними початковими параметрами.*

Підставивши сталі C та D у рівняння (10.80), дістанемо загальне рівняння для прогину в довільному перерізі балки
$$w(x) = w_0 + \Theta_0 x + \frac{1}{EJ}\left[M_0\frac{x^2}{2} + Q_0\frac{x^3}{6} + M\frac{(x-a)^2}{2} + P\frac{(x-b)^3}{6} + q_c\frac{(x-c)^4}{24} - q_d\frac{(x-d)^4}{4} + k\frac{(x-c)^5}{120} - k\frac{(x-d)^5}{120}\right]. \tag{10.91}$$

Для випадку кількох моментів і сил, а також кількох ділянок розподіленого навантаження рівняння для $w(x)$ можна записати в такому загальному вигляді:
$$w(x) = w_0 + \Theta_0 x + \frac{1}{EJ}\left[M_0\frac{x^2}{2!} + Q_0\frac{x^3}{3!} + \sum M\frac{(x-a)^2}{2!} + \sum P\frac{(x-b)^3}{3!} + \sum q_c\frac{(x-c)^4}{4!} - \sum q_d\frac{(x-d)^4}{4!} + \sum k\frac{(x-c)^5}{5!} - \sum k\frac{(x+d)^5}{5!}\right]. \tag{10.92}$$

Рівняння (10.92), як правило, називають *універсальним рівнянням пружної лінії*. При цьому мається на увазі, що це рівняння придатне для будь-яких розрахункових схем балок.

Диференціюючи рівняння (10.92), дістаємо універсальне рівняння кутів повороту перерізів
$$\Theta(x) = \Theta_0 + \frac{1}{EJ}\left[M_0\frac{x}{1!} + Q_0\frac{x^2}{2!} + \sum M\frac{(x-a)}{1!} + \sum P\frac{(x-b)^2}{2!} + \sum q_c\frac{(x-c)^3}{3!} - \sum q_d\frac{(x-d)^3}{3!} + \sum k\frac{(x-c)^4}{4!} - \sum k\frac{(x-d)^4}{4!}\right]. \tag{10.93}$$

У рівняння (10.92) та (10.93) підставляють тільки ті навантаження, які прикладені ліворуч від розглядуваного перерізу. Знаки доданків визначаються знаками відповідних силових факторів.

Отже, визначення переміщень за методом початкових параметрів зводиться насамперед до визначення початкових параметрів Q_0, M_0, Θ_0, w_0. Статичні початкові параметри Q_0 та M_0 знаходять з умов рівноваги балки. Геометричні початкові параметри Θ_0 та w_0 визначають з умов на опорах. Рівняння (10.92) та (10.93), які виведено для довільного відрізка балки, придатні й для всієї балки в цілому. Початок координат, як правило, вибиратимемо в крайній лівій точці балки.

Розглянемо приклади визначення переміщень у балках за методом початкових параметрів.

У консолі, навантаженій рівномірно розподіленим навантаженням на половині довжини (рис. 285, *а*), визначимо прогини в перерізах балки з абсцисами $x = a$ та $x = 2a$.

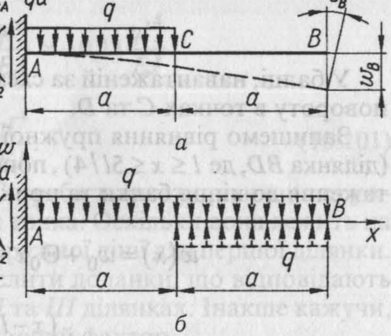


Рис. 285

Запишемо рівняння пружної лінії для правої ділянки балки. Оскільки розподілене навантаження обривається в точці C, продовжимо його до кінця балки, одночасно вводячи компенсувальне навантаження такої самої інтенсивності (рис. 285, *б*). Рівняння пружної лінії у загальному випадку матиме вигляд
$$w(x) = w_0 + \Theta_0 x + \frac{1}{EJ}\left[M_0\frac{x^2}{2!} + Q_0\frac{x^3}{3!} - q\frac{x^4}{4!} + q\frac{(x-a)^4}{4!}\right]. \tag{10.94}$$

З умов рівноваги балки визначаємо статичні початкові параметри:
$$M_0 = M_A = -\frac{qa^2}{2}; \quad Q_0 = R_A = qa. \tag{10.95}$$

Оскільки початок координат збігається з жорстким закріпленням балки, то геометричні початкові параметри — кут повороту та прогин на

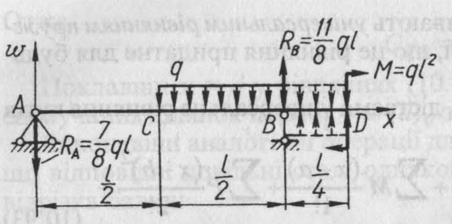


Рис. 286

початку координат — дорівнюють нулю:

$$w_0 = 0; \quad \Theta_0 = 0. \tag{10.96}$$

Підставивши в рівняння (10.94) значення початкових параметрів, згідно з (10.95) та (10.96), матимемо рівняння пружної лінії в остаточному вигляді:

$$w(x) = \frac{1}{EJ}\left[\frac{qa^2}{2}\frac{x^2}{2!} + qa\frac{x^3}{3!} - q\frac{x^4}{4!} + q\frac{(x-a)^4}{4!}\right] \tag{10.97}$$

Поклавши в рівнянні (10.97) $x = 2a$, дістанемо формулу для прогину вільного кінця консолі

$$w_B = \frac{7}{24}\frac{qa^4}{EJ}.$$

Поклавши в рівнянні (10.97) $x = a$, дістанемо формулу для прогину в точці C

$$w_C = -\frac{qa^4}{8EJ}. \tag{10.98}$$

У балці, навантаженій за схемою рис. 286, визначимо прогини та кути повороту в точках C та D.

Запишемо рівняння пружної лінії для крайньої правої ділянки балки (ділянка BD, де $l \le x \le 5l/4$), попередньо продовживши розподілене навантаження до кінця балки та приклавши компенсувальне навантаження:

$$w(x) = w_0 + \Theta_0 x + \frac{1}{EJ}\left[-R_A\frac{x^3}{3!} + R_B\frac{(x-l)^3}{3!} - q\frac{(x-l/2)^4}{4!} + q\frac{(x-l)^4}{4!}\right] \tag{10.99}$$

Рівняння (10.99) записано з урахуванням того, що статичні початкові параметри вже відомі:

$$Q_0 = -R_A = -\frac{7}{8}ql; \quad M_0 = 0.$$

Для визначення геометричних початкових параметрів Θ_0 та w_0 маємо умови на опорах:

$$\text{при } x = 0 \quad w(0) = w_A = 0;$$

$$\text{при } x = L \quad w(l) = w_B = 0.$$

З першої опорної умови випливає, що

$$w_0 = w_A = 0.$$

Друга умова дає

$$w(l) = \Theta_0 l + \frac{1}{EJ}\left[-\frac{7}{8}ql\frac{l^3}{6} - q\frac{(l-l/2)^4}{24}\right] = 0,$$

звідки

$$\Theta_0 = \frac{57}{384}\frac{ql^3}{EJ}.$$

Тепер рівняння пружної лінії для ділянки BD набирає вигляду

$$w(x) = \frac{1}{EJ}\left[\frac{57ql^3}{384}x - \frac{7}{8}ql\frac{x^3}{3!} + \frac{11}{8}ql\frac{(x-l)^3}{3!} - q\frac{(x-l/2)^4}{4!} + q\frac{(x-l)^4}{4!}\right]. \tag{10.100}$$

Для того щоб знайти переміщення точки D, досить покласти в цьому рівнянні $x = 5/4l$. Тоді

$$w\left(\frac{5}{4}l\right) = \left[\frac{57}{384}\frac{5}{4} - \frac{7}{8}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{4}\right)^3 + \frac{11}{8}\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^3 - \frac{1}{24}\left(\frac{3}{4}\right)^4 + \frac{1}{24}\left(\frac{1}{4}\right)^4\right]\frac{ql^4}{EJ} = -\frac{167}{1536}\frac{ql^4}{EJ} \approx -0{,}11\frac{ql^4}{EJ},$$

тобто

$$w_D = -0{,}11\frac{ql^4}{EJ}. \tag{10.101}$$

Щоб обчислити переміщення точки C, треба записати рівняння пружної лінії для тієї ділянки, де розміщена ця точка. Оскільки вона лежить на межі I та II ділянок, запишемо рівняння пружної лінії для першої ділянки. Для цього в рівнянні (10.100) слід викреслити доданки, що відповідають навантаженням, які виникають лише в II та III ділянках. Інакше кажучи, в рівнянні має залишитися лише один силовий фактор —

$$R_A = \frac{7}{8}ql.$$

Отже, рівняння пружної лінії на першій ділянці має вигляд

$$w(x) = \frac{1}{EJ}\left(\frac{57}{384}ql^3x - \frac{7}{8}ql\frac{x^3}{3!}\right). \tag{10.102}$$

Поклавши тут $x = l/2$, дістанемо формулу для визначення прогину в точці C

$$w_C = w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{43}{768}\frac{ql^4}{EJ} \approx 0{,}056\frac{ql^4}{EJ}.$$

Для визначення кута повороту будь-якого перерізу балки треба мати вираз для кута повороту у відповідній ділянці балки. Рівняння кутів повороту для ділянки BD дістанемо диференціюванням рівняння (10.100):

$$\Theta(x)=\frac{1}{EJ}\left[\frac{57}{384}ql^3-\frac{7}{8}ql\frac{x^2}{2!}+\frac{11}{8}ql\frac{(x-l)^2}{2!}-\right.$$

$$\left.-q\frac{(x-l/2)^3}{3!}+q\frac{(x-l)^3}{3!}\right]. \qquad (10.103)$$

Поклавши тут $x = 5/4l$, матимемо формулу для визначення кута повороту перерізу D

$$\Theta_D=\Theta\left(\frac{5}{4}l\right)=\left[\frac{57}{384}-\frac{7}{8}\frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}\right)^2+\frac{11}{8}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{6}\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^3\right]\frac{ql^3}{EJ}=-\frac{215}{384}\frac{ql^3}{EJ}=-0,56\frac{ql^3}{EJ},$$

отже,

$$\Theta_D=-0,56\frac{ql^3}{EJ}. \qquad (10.104)$$

Рівняння кутів повороту для першої ділянки (ділянки AC) дістанемо диференціюванням рівняння (10.102):

$$\Theta(x)=\frac{1}{EJ}\left(\frac{57}{384}ql^3-\frac{7}{8}ql\frac{x^2}{2!}\right). \qquad (10.105)$$

Звідси при $x = l/2$ знаходимо формулу для визначення кута повороту перерізу C

$$\Theta_C=\Theta\left(\frac{l}{2}\right)=\left(\frac{57}{384}-\frac{7}{8\cdot 2\cdot 2^2}\right)\frac{ql^3}{EJ}=\frac{15}{384}\frac{ql^3}{EJ}\approx 0,039\frac{ql^3}{EJ}.$$

Розрахунок на жорсткість при згинанні. Оволодівши методикою визначення прогинів та кутів повороту, можна перейти до перевірки жорсткості балок, а також до добору розмірів перерізів балок з умови жорсткості.

Позначивши абсолютне значення максимального прогину балки через f, а допустиму стрілу прогину через $[f]$, дістанемо умову жорсткості балки

$$f \le [f]. \qquad (10.106)$$

Допустимий прогин визначають на підставі експериментальних та експлуатаційних даних.

Приклад 43. *Для балки, навантаженої на відстані $a = 4$ м від лівої опори зосередженим моментом $M = 120$ кН (рис. 287), побудуємо епюри поперечних сил, згинальних моментів, кутів повороту перерізів та прогинів, а також доберемо двотавровий переріз із умов міцності та жорсткості; $[\sigma] = 160$ МПа; $[f] = (1/600)\ l$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.*

Визначивши опорні реакції, будуємо епюри поперечних сил та згинальних моментів.

Переміщення характерних перерізів балки будемо визначати відповідно до рекомендованого вище порядку розв'язання задачі. Запишемо рівняння прогинів для ділянки CB:

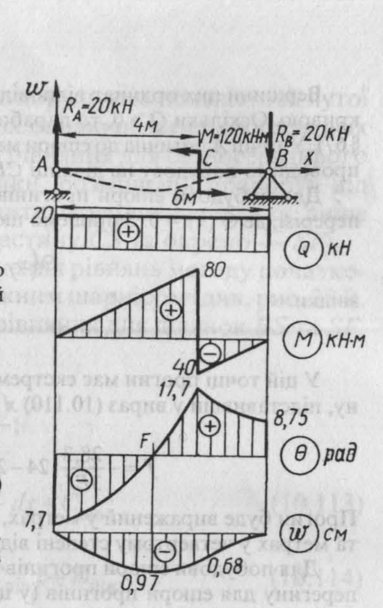


Рис. 287

$$w(x)=w_0+\Theta_0x+\frac{1}{EJ}\left[R_A\frac{x^3}{3!}-M\frac{(x-a)^2}{2!}\right]=$$

$$=w_0+\Theta_0x+\frac{1}{EJ}\left[\frac{10x^3}{3}-60(x-4)^2\right]. \qquad (10.107)$$

Початок координат збігається з лівою опорою A, отже, $w_0 = w_A = 0$. Відповідно до умов на правій опорі $w(l) = w_B = 0$.

З рівняння (10.107) при $l = 6$ м маємо

$$w(l)=\Theta_0l+\frac{1}{EJ}\left[\frac{10l^3}{3}-60(l-4)^2\right]=0,$$

звідки

$$\Theta_0=-\frac{80}{EJ}. \qquad (10.108)$$

Підставивши вираз (10.108) у рівняння (10.107), запишемо рівняння пружної лінії на ділянці CB в остаточному вигляді

$$w(x)=\frac{1}{EJ}\left[-80x+\frac{10x^3}{3}-60(x-4)^2\right]. \qquad (10.109)$$

Рівняння пружної лінії на ділянці AC запишеться так:

$$w(x)=\frac{1}{EJ}\left(-80x+\frac{10x^3}{3}\right)=\frac{1}{EJ}\left[-\frac{10x}{3}\left(24-x^2\right)\right]. \qquad (10.110)$$

Продиференціювавши рівняння (10.109), дістанемо рівняння кутів повороту на ділянці CB:

$$\Theta(x)=\frac{1}{EJ}\left[-80+10x^2-120(x-4)\right]. \qquad (10.111)$$

Для побудови епюри Θ треба обчислити кути повороту на межах цієї ділянки:

$$\Theta_C=\Theta(4)=\frac{-80+10\cdot 4^2}{EJ}=\frac{80}{EJ};$$

$$\Theta_B=\Theta(6)=\frac{1}{EJ}\left[-80+10\cdot 6^2-120(6-4)\right]=\frac{40}{EJ}.$$

Оскільки в розв'язанні розміри балки виражалися в метрах, а сили — в кілоньютонах, то для визначення кута повороту в радіанах величини E та J треба виражати в кілопаскалях та метрах у четвертому степені відповідно.

Диференціюючи рівняння (10.110), дістаємо рівняння кутів повороту на ділянці AC

$$\Theta(x)=\frac{1}{EJ}\left(-80+10x^2\right). \qquad (10.112)$$

Кути повороту на межах цієї ділянки вже відомі. Отже, можна побудувати епюру Θ*.

На межах ділянки відкладаємо ординати, рад,

$$\Theta_A=\Theta_0=\frac{-80}{EJ} \quad \text{та} \quad \Theta_C=\frac{80}{EJ}.$$

*На епюрах Θ та w відкладено ординати, здобуті після остаточного розрахунку; $J = 7780$ см^4.

Вершини цих ординат відповідно до рівняння (10.112) сполучаємо параболічною кривою. Оскільки $Q > 0$, то парабола Θ має бути повернута опуклістю вниз (див. п. 5 § 67). У точці A дотична до епюри має бути паралельна осі абсцис (див. п. 1). Аналогічно проводимо побудову на ділянці CB.

Для побудови епюри прогинів обчислимо найбільший прогин. Він має місце в перерізі, де $\Theta(x) = 0$. Запишемо цю умову:

$$\Theta\left(x_f\right)=\frac{1}{EJ}\left(-80+10x_f^2\right)=0,$$

звідки

$$x_f = 2{,}83 \text{ м}.$$

У цій точці прогин має екстремальне значення $w_{max} = f$. Визначимо стрілу прогину, підставивши у вираз (10.110) $x = x_f$:

$$f=-\frac{28{,}3}{3EJ}\left(24-2{,}83^2\right)\text{м}=-\frac{9{,}43\cdot 16}{EJ}\text{ м}=-\frac{150{,}9}{EJ}\text{ м}.$$

Прогин буде виражений у метрах, якщо E та J, як було зазначено, — в кілопаскалях та метрах у четвертому степені відповідно.

Для побудови епюри прогинів треба ще визначити прогин у точці C, що є точкою перегину для епюри прогинів (у цій точці на епюрі моментів змінюється знак). Поклавши в рівнянні (10.110) $x = 4$ м, матимемо

$$w_C = w(4) = -\frac{40}{3}\frac{24-4^2}{EJ} = -\frac{320}{3EJ}\text{ м} = -\frac{106}{EJ}\text{ м}.$$

Відкладаємо знайдену ординату вниз від базисної лінії. Відповідно до рівнянь (10.109) та (10.110) епюра прогинів має бути окреслена на обох ділянках кубічними параболами. На ділянці AC момент $M > 0$, тому парабола повернута угнутістю вгору; на ділянці CB момент $M < 0$, і парабола повернута угнутістю вниз (див. п. 4).

Перейдемо до вибору перерізу балки з умови жорсткості. Умова жорсткості (10.106) набирає вигляду

$$f=\left|\frac{150{,}9}{EJ}\right|\text{м}<[f],$$

звідки

$$J\ge\frac{150{,}9}{[f]E}. \qquad \frac{КН\cdot М^3}{М\cdot\frac{КН}{М^2}} = М^4$$

При $E = 2\cdot 10^5$ МПа $= 2\cdot 10^8$ кПа та допустимій стрілі прогину $[f] = l/600 = 6/600 = 0{,}01$ м потрібний момент інерції

$$J=\frac{150{,}9}{10^{-2}\cdot 2\cdot 10^8}\text{ м}^4 = 7545\cdot 10^{-8}\text{ м}^4 = 7545\text{ см}^4.$$

За каталогом сортаменту (дод. 1) знаходимо, що потрібний двотавр № 30а, момент інерції якого $J = 7780$ см^4.

Треба перевірити міцність вибраного двотавра № 30а, момент опору якого $W = 518$ см^3. Визначаємо максимальне напруження в балці:

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{W}=\frac{80\cdot 10^{-3}}{518\cdot 10^{-6}}\text{ МПа}=154{,}5\text{ МПа}<[\sigma]=160\text{ МПа}.$$

Отже, міцність балки забезпечено.

Розрахунок балки з проміжним шарніром. Універсальні рівняння пружної лінії та кутів повороту було знайдено з розгляду ділянки KL (див. рис. 284, *б*),

на якій балка не має проміжних шарнірів, що порушують плавність зігнутої осі. Тому, розглядаючи балку в цілому та залишаючи загальний для всіх ділянок початок координат, застосувати ці рівняння для безпосереднього визначення переміщень на ділянці SF балки, розміщеній праворуч від шарніра S, неможливо. У цьому разі визначити переміщення можна, лише розглядаючи балку по частинах (окремо частину CS та окремо — SF).

Можна, проте, показати спосіб узагальнення рівнянь методу початкових параметрів і для випадку балки з проміжним шарніром (див. рис. 284). З цією метою, записавши диференціальне рівняння для ділянок BS та SF, проінтегруємо їх двічі:

для ділянки BS

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2}=\frac{M(x)}{EJ};$$

$$\Theta(x)=\frac{dw(x)}{dx}=\int\frac{M(x)}{EJ}dx+C_{\text{лів}}; \tag{10.113}$$

$$w(x)=\int dx\int\frac{M(x)}{EJ}dx+C_{\text{лів}}x+D_{\text{лів}}; \tag{10.114}$$

для ділянки SF:

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2}=\frac{M(x)}{EJ};$$

$$\Theta(x)=\frac{dw(x)}{dx}=\int\frac{M(x)}{EJ}dx+C_{\text{пр}}; \tag{10.115}$$

$$w(x)=\int dx\int\frac{M(x)}{EJ}dx+C_{\text{пр}}x+D_{\text{пр}}. \tag{10.116}$$

Унаслідок наявності шарніра кути повороту ліворуч та праворуч від точки S будуть відрізнятися на деякий кут α. Для того щоб визначити зв'язок між сталими $C_{\text{лів}}$, $D_{\text{лів}}$ та $C_{\text{пр}}$, $D_{\text{пр}}$, складаємо умови спряження ділянок у точці S:

$$w(s)_{\text{лів}}=w(s)_{\text{пр}}; \tag{10.117}$$

$$\Theta(s)_{\text{лів}}+\alpha=\Theta(s)_{\text{пр}}. \tag{10.118}$$

Підставляючи в рівності (10.117) та (10.118) відповідні значення $w(s)$ та $\Theta(s)$ з виразів (10.114), (10.116) та (10.113), (10.115), при $x = s$ дістанемо

$$C_{\text{лів}}+\alpha=C_{\text{пр}}; \tag{10.119}$$

$$C_{\text{лів}}s+D_{\text{лів}}=C_{\text{пр}}s+D_{\text{пр}}. \tag{10.120}$$

З останніх двох рівностей знаходимо

$$D_{\text{пр}}=-\alpha s+D_{\text{лів}}. \tag{10.121}$$

Підставляючи рівності (10.119) та (10.121) у рівняння (10.115) та (10.116), можна записати рівняння кутів повороту та прогинів на ділянці SF у та-

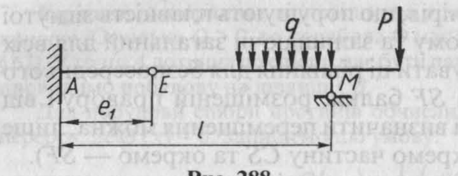


Рис. 288

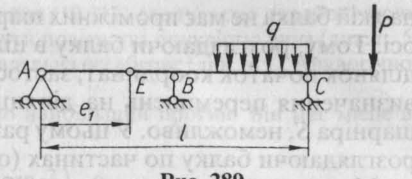


Рис. 289

кому вигляді:

$$\Theta(x) = \int \frac{M(x)}{EJ} dx + C_{\text{лів}} + \alpha; \qquad (10.122)$$

$$w(x) = \int dx \int \frac{M(x)}{EJ} dx + C_{\text{лів}} x + D_{\text{лів}} + \alpha(x - s). \qquad (10.123)$$

Оскільки було визначено, що ліворуч від шарніра S довільні сталі C та D на всіх ділянках однакові і є відповідно кутом повороту та прогином на початку координат, дійдемо висновку, що для перерізів праворуч від шарніра в універсальне рівняння прогинів слід ввести додатковий член α $(x - s)$, а в рівняння кутів повороту член α. Отже, за наявності шарніра ліворуч від розглядуваної ділянки універсальне рівняння методу початкових параметрів (10.92) набирає вигляду

$$w(x) = w_0 + \Theta_0 x + \alpha(x-s) + \frac{1}{EJ}\Bigg[M_0 \frac{x^2}{2!} + Q_0 \frac{x^3}{3!} + \sum M \frac{(x-a)^2}{2!} + \sum P \frac{(x-b)^3}{3!} + \sum q_c \frac{(x-c)^4}{4!} - \sum q_d \frac{(x-d)^4}{4!} + \sum k \frac{(x-c)^5}{5!} - \sum k \frac{(x-d)^5}{5!} \Bigg]. \qquad (10.124)$$

Взаємний кут нахилу α є додатковою невідомою величиною в універсальних рівняннях для w (x) та Θ (x). Як і початкові параметри w_0 та Θ_0, його визначають з умов на опорах.

Залежно від розрахункової схеми балки можливі два основних варіанти додаткових умов на опорах:

1. Умова нульового прогину на правій опорі (рис. 288). Звідси визначають тільки кут α.

2. Умова нульового прогину на опорах B та C (рис. 289). Кут α тут визначають разом з Θ розв'язанням системи двох алгебраїчних рівнянь.

Приклад 44. *Для балки (рис. 290) побудуємо епюри Q, M, Θ та w; доберемо двотавровий переріз з умов міцності та жорсткості, якщо $M = 160$ кН · м; $a = 2$ м; $[\sigma] = 160$ МПа; $[f] = 10$ мм.*

Обчисливши реакції на опорах M_A, R_A та R_B, будуємо епюри Q і M. Для побудови епюр Θ та w треба насамперед визначити їхні значення на межах усіх ділянок.

Запишемо універсальне рівняння пружної лінії (10.124) для крайньої правої ділянки балки DE, враховуючи, що геометричні початкові параметри Θ_0 та w_0 дорівнюють

нулю:

$$w(x) = \alpha(x-a) + \frac{1}{EJ}\left[-M_0 \frac{x^2}{2!} + R_A \frac{x^3}{3!} - R_B \frac{(x-2a)^3}{3!} - M \frac{(x-5a/2)^2}{2!} \right]. \qquad (10.125)$$

Значення взаємного кута повороту перерізу в шарнірі C — (α_C) — знайдемо з умови нульового прогину в перерізі над правою опорою B:

$$w_B = w(2a) = 0.$$

Рівняння для прогину в перерізі B дістанемо з виразу (10.125), викресливши останній доданок та поклавши $x = 2a$:

$$w_B = w(2a) = \alpha a + \frac{1}{EJ}\left(-M \frac{4a^2}{2} + \frac{M}{a} \frac{8a^3}{6} \right) = 0,$$

звідки

$$\alpha = \frac{2}{3} \frac{Ma}{EJ}. \qquad (10.126)$$

Підставивши вираз (10.126) у рівняння (10.125), матимемо остаточне рівняння пружної лінії для ділянки балки DE

$$w(x) = \frac{1}{EJ}\left[\frac{2}{3} Ma(x-a) - M \frac{x^2}{2!} + \frac{M}{a} \frac{x^3}{3!} - \frac{M}{a} \frac{(x-2a)^3}{3!} - M \frac{(x-2{,}5a)^2}{2!} \right]. \qquad (10.127)$$

З рівняння (10.127) можна дістати рівняння для решти ділянок балки.

Рівняння кутів повороту для всіх ділянок знайдемо диференціюванням рівнянь пружної лінії на відповідних ділянках.

Даємо читачеві змогу самостійно виконати всі зазначені розрахунки та побудувати епюри Θ та w. Для самоконтролю на рис. 290 зображено епюри прогинів та кутів повороту.

Перейдемо до вибору перерізу балки. Найбільший згинальний момент $M_{\max} = M = 160$ кН · м. З умови міцності

$$W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{160 \cdot 10^{-3}}{160} \text{ м}^3 = 10^{-3} \text{ м}^3 = 1000 \text{ см}^3.$$

За сортаментом вибираємо двотавр № 45, для якого $W = 1231$ см^3; $J = 27\,696$ см^4.

Перевіримо, чи виконується умова жорсткості. Знаходимо стрілу

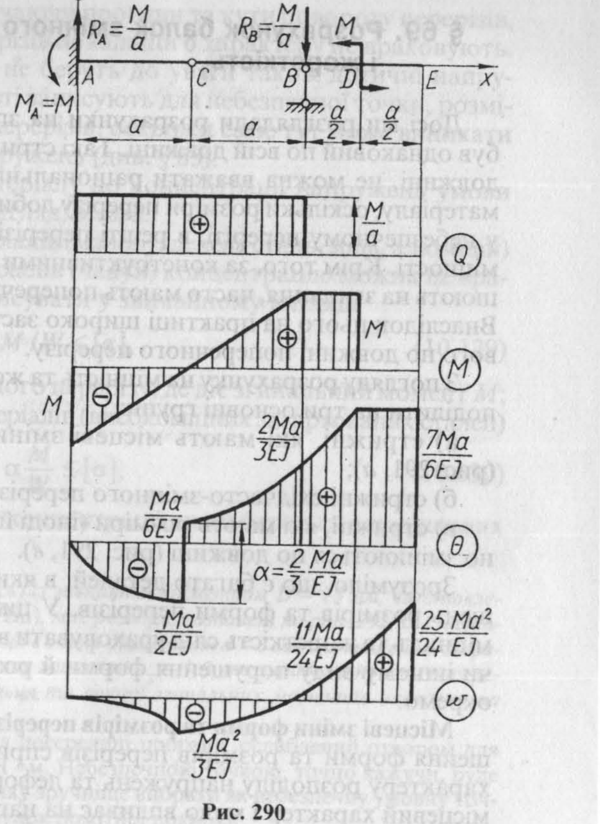


Рис. 290

прогину:

$$f = |w_E| = \frac{25}{24}\frac{Ma^2}{EJ} = \frac{25}{24}\frac{160 \cdot 10^{-3} \cdot 2^2}{2 \cdot 10^5 \cdot 27\,696 \cdot 10^{-8}}\ \text{м} = 0{,}012\ \text{м} = 1{,}20\ \text{см}.$$

Умова жорсткості (10.106) не виконується:

$$f = 1{,}20\ \text{см} > [f] = 1\ \text{см}.$$

Отже, розміри перерізу балки треба збільшити, виходячи з умови жорсткості:

$$f = \frac{25}{24}\frac{160 \cdot 10^{-3} \cdot 2^2}{2 \cdot 10^5 J_z}\ \text{м} \le [f] = 1\ \text{см} = 0{,}01\ \text{м}. \qquad (10.128)$$

З рівняння (10.128) знаходимо, що

$$J_z \ge \frac{25}{24}\frac{160 \cdot 10^{-3} \cdot 4}{0{,}01 \cdot 2 \cdot 10^5}\ \text{м}^4 = 334 \cdot 10^{-6}\ \text{м}^4 = 33\,400\ \text{см}^4.$$

За сортаментом вибираємо двотавр № 50 ($J = 39\,727$ см^4).

§ 69. Розрахунок балок змінного перерізу на міцність і жорсткість

Досі ми розглядали розрахунки на згинання стрижнів, переріз яких був однаковий по всій довжині. Такі стрижні, особливо при значній їхній довжині, не можна вважати раціональними з погляду ваги та витрати матеріалу, оскільки розміри перерізу добираються за зусиллями, які діють у небезпечному перерізі, в решті перерізів має місце значний надлишок міцності. Крім того, за конструктивними міркуваннями стрижні, які працюють на згинання, часто мають поперечні отвори, виточки, східці тощо. Внаслідок цього на практиці широко застосовуються стрижні неоднакового по довжині поперечного перерізу.

З погляду розрахунку на міцність та жорсткість всі такі стрижні можна поділити на три основні групи:

а) стрижні, які мають місцеві зміни форми та розмірів перерізів (рис. 291, *а*);

б) стрижні східчасто-змінного перерізу (рис. 291, *б*);

в) стрижні, які мають розміри (іноді й форму) перерізів, що неперервно змінюються по довжині (рис. 291, *в*).

Зрозуміло, що є багато деталей, в яких поєднуються різні типи порушень розмірів та форми перерізів. У цих випадках при розрахунках на міцність та жорсткість слід ураховувати всі особливості, притаманні тому чи іншому виду порушення форми й розмірів. Розглянемо кожну групу окремо.

Місцеві зміни форми та розмірів перерізів. Отвори, виточки й інші порушення форми та розмірів перерізів спричинюють різку та значну зміну характеру розподілу напружень та деформацій. Проте це збудження має місцевий характер і мало впливає на напружений та деформований стан

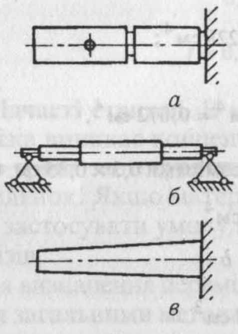


Рис. 291

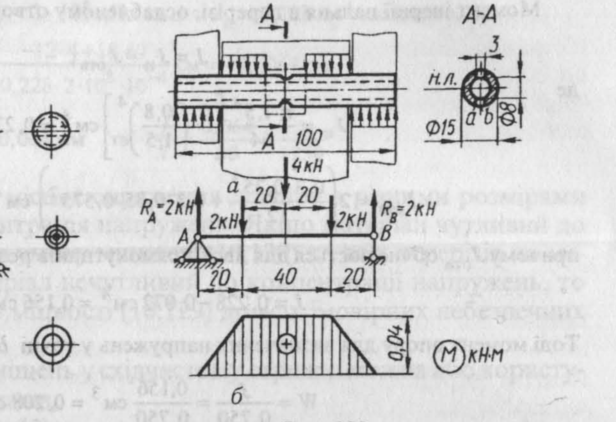


Рис. 292

стрижня в цілому. Тому, визначаючи прогини та кути повороту перерізів, отвори й інші порушення перерізів локального характеру не враховують. При розрахунках на міцність не беруть до уваги також дотичні напруження, а основну умову міцності записують для небезпечної точки, розміщеної в одному з ослаблених перерізів, оскільки саме тут може виникати концентрація нормальних напружень (див. § 65).

Залежно від чутливості матеріалу до концентрації напружень умови міцності будуть мати різний вигляд, а саме:

для високопластичних матеріалів (маловуглецева сталь, мідь, алюміній) та крихких неоднорідних матеріалів (чавун) концентрацію можна не враховувати й умову міцності записувати у звичайному вигляді

$$M / W \le [\sigma], \qquad (10.129)$$

де W — момент опору ослабленого перерізу, де діє згинальний момент M;

для однорідних крихких матеріалів (високоміцних загартованих сталей)

$$\alpha \frac{M}{W} \le [\sigma], \qquad (10.130)$$

де α — теоретичний коефіцієнт концентрації, який береться з довідкових таблиць (див. § 65).

Приклад 45. *Палець (нерухома вісь) із зовнішнім діаметром $D = 15$ мм, виготовлений з легованої сталі 20Х ($\sigma_т = 600$ МПа), має розміри, зазначені на рис. 292, а, і навантажений силою 4 кН. Посередині пальця є отвір діаметром $d = 3$ мм для мащення. Перевіримо міцність, якщо коефіцієнт запасу міцності $n_т = 1{,}6$, та знайдемо прогин посередині пальця. Розрахункову схему пальця та епюру згинальних моментів наведено на рис. 292, б.*

Небезпечним буде переріз пальця посередині прогону, ослаблений отвором для мащення, в якому діє $M = 4 \cdot 10^{-2}$ кН · м. Небезпечною точкою, точно кажучи, буде точка *а* (рис. 292, *а*), але для розрахунку зручніше вибрати як небезпечну умовну точку *b*, що, очевидно, не внесе в розрахунок помітної похибки.

Момент інерції пальця в перерізі, ослабленому отвором,

$$J = J_п - J_{отв},$$

де

$$J_п = \frac{\pi\cdot 1{,}5^4}{64}\left[1-\left(\frac{0{,}8}{1{,}5}\right)^4\right] см^4 = 0{,}228\ см^4;$$

$$J_{отв} = 2\left(\frac{0{,}3\cdot 0{,}35^3}{12} + 0{,}3\cdot 0{,}35\cdot 0{,}575^2\right) см^4 = 0{,}072\ см^4,$$

причому $J_{отв}$ обчислюється для двох прямокутників розмірами 0,3 × 0,35 см. Отже,

$$J = 0{,}228 - 0{,}072\ см^4 = 0{,}156\ см^4.$$

Тоді момент опору для визначення напружень у точці b

$$W = \frac{J}{0{,}750} = \frac{0{,}156}{0{,}750}\ см^3 = 0{,}208\ см^3.$$

При заданому запасі міцності допустиме напруження

$$[\sigma] = \frac{\sigma_т}{n_т} = \frac{600}{1{,}6}\ МПа = 375\ МПа.$$

Знайдемо номінальне напруження в небезпечній точці b:

$$\sigma_н = \frac{M}{W} = \frac{4\cdot 10^{-2}\cdot 10^{-3}}{0{,}208\cdot 10^{-6}}\ МПа = 192\ МПа.$$

Оскільки небезпечна точка лежить коло конструктивного концентратора — отвору для мащення, то максимальне напруження слід обчислювати з урахуванням концентрації напружень. Теоретичний коефіцієнт концентрації напружень α знайдемо з графіка, наведеного на рис. 273, де при $d/D = 0{,}3/1{,}5 = 0{,}2$ коефіцієнт $\alpha = 1{,}87$. Тоді максимальне напруження в небезпечній точці

$$\sigma_{max} = \alpha\sigma_н = 1{,}87\cdot 192\ МПа = 359\ МПа < 375\ МПа.$$

Отже, міцність забезпечено.

Переходимо до визначення прогину пальця. Скориставшись універсальним рівнянням пружної лінії (10.92), для правої крайньої ділянки пальця матимемо

$$w(x) = \Theta_0 x + \frac{1}{EJ}\left[\frac{2x^3}{6} - \frac{2(x-2)^3}{6} - \frac{2(x-6)^3}{6}\right].$$

З умови, що прогин на правій опорі (x = 8 см) дорівнює нулю, дістанемо рівняння для визначення початкового параметра

$$\Theta_0\cdot 8 + \frac{1}{EJ}\frac{2}{6}\left(8^3 - 6^3 - 2^3\right) = 0.$$

Звідси

$$\Theta_0 = -\frac{12}{EJ}.$$

Тепер для визначення прогину посередині прогону запишемо рівняння

$$w(4) = f = \Theta_0\cdot 4 + \frac{1}{EJ}\frac{2}{6}\left(4^3 - 2^3\right),$$

звідки при $E = 2{,}0\cdot 10^5$ МПа $= 2\cdot 10^8$ кПа та $J = J_п = 0{,}228$ см^4 знайдемо, що

$$f = \frac{-12\cdot 4 + 18{,}67}{0{,}228\cdot 2\cdot 10^8\cdot 10^{-4}}\ см = -0{,}0064\ см,$$

тобто

$$f = 0{,}064\ мм \quad та \quad \frac{f}{l} = \frac{0{,}064}{80} = \frac{1}{1250}.$$

Східчасті стрижні. В місцях спряження ділянок з різними розмірами перерізів виникає концентрація напружень. Якщо матеріал чутливий до неї, то треба застосувати умову міцності (10.130) до всіх перерізів на межах ділянок. Якщо матеріал нечутливий до концентрації напружень, то треба застосувати умову міцності (10.129) до всіх імовірних небезпечних перерізів.

Для визначення переміщень у східчастому стрижні можна або користуватися загальними методами, викладеними нижче (розд. 13), або застосувати видозмінений метод початкових параметрів. Сутність останнього полягає в заміні східчастого стрижня еквівалентним йому за деформаціями стрижнем постійної жорсткості. Обґрунтуємо таку заміну на прикладі довільного багатосхідчастого стрижня (рис. 293, *а*). Розділимо стрижень на частини однакового перерізу (рис. 293, *б*); у місцях розрізів діятимуть відповідні внутрішні силові фактори Q та M.

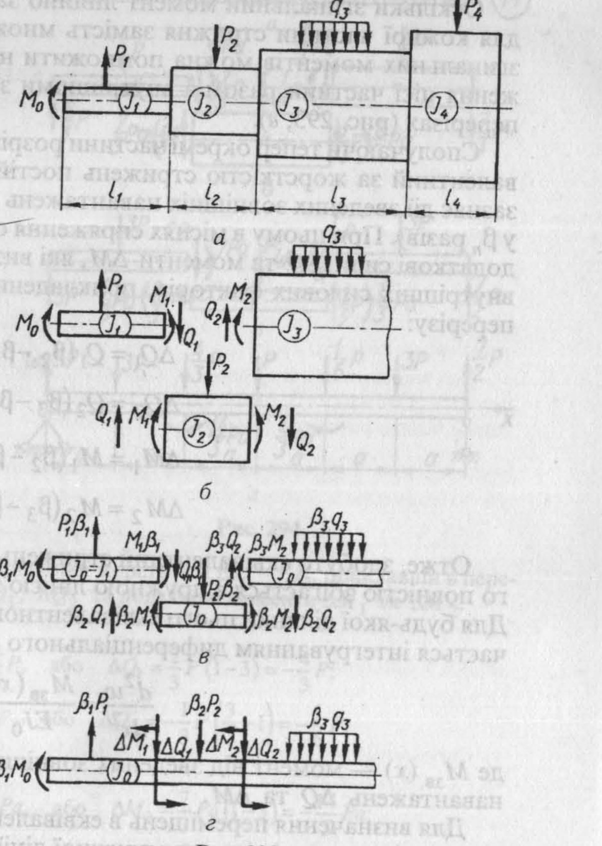


Рис. 293

Диференціальне рівняння пружної лінії для першої частини стрижня

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ_1} \qquad (10.131)$$

Аналогічно для всіх інших призматичних частин стрижня

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ_2};\ \ldots;$$

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ_n} \qquad (10.132)$$

Перетворимо заданий східчастий стрижень на еквівалентний стрижень однакового перерізу з моментом інерції J_0, який дорівнює моменту інерції однієї з ділянок стрижня, наприклад першої. Помноживши чисельник та знаменник правої частини останнього диференціального рівняння (10.132) для довільної ділянки n на J_0, дістанемо

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2}=\frac{M(x)J_0}{EJ_nJ_0}=\frac{M(x)}{EJ_0}\frac{J_0}{J_n}=\frac{M(x)}{EJ_0}\beta_n, \tag{10.133}$$

де β_n — коефіцієнт зведення.

З формули (10.133) випливає, що, помноживши згинальні моменти кожної частини стрижня на відповідні коефіцієнти зведення та замінивши момент інерції J_n на J_0, дістанемо стрижні однакового перерізу з моментом інерції J_0, пружні лінії яких тотожні пружним лініям відповідних частин заданого східчастого стрижня.

Оскільки згинальний момент лінійно залежить від навантаження, то для кожної частини стрижня замість множення на коефіцієнт зведення згинальних моментів можна помножити на цей коефіцієнт усі навантаження цієї частини разом з внутрішніми зусиллями Q та M у торцевих перерізах (рис. 293, *в*).

Сполучаючи тепер окремі частини розрізаного стрижня, дістаємо еквівалентний за жорсткістю стрижень постійного перерізу. Цей стрижень зазнає дії зведених зовнішніх навантажень (тобто навантажень, змінених у β_n разів). При цьому в місцях спряження окремих частин стрижня діють додаткові сили ΔQ та моменти ΔM, які визначаються різницею зведених внутрішніх силових факторів, прикладених до лівого та правого боків перерізу:

$$\begin{aligned}\Delta Q_1&=Q_1(\beta_2-\beta_1);\\ \Delta Q_2&=Q_2(\beta_3-\beta_2);\\ \Delta M_1&=M_1(\beta_2-\beta_1);\\ \Delta M_2&=M_2(\beta_3-\beta_2).\end{aligned} \tag{10.134}$$

Отже, здобуто еквівалентний стрижень (рис. 293, *г*), пружна лінія якого повністю збігається з пружною лінією заданого східчастого стрижня. Для будь-якої ділянки цього еквівалентного стрижня пружна лінія визначається інтегруванням диференціального рівняння

$$\frac{d^2w}{dx^2}=\frac{M_{\text{зв}}(x)}{EJ_0}, \tag{10.135}$$

де $M_{\text{зв}}(x)$ — момент від зведених зовнішніх навантажень та додаткових навантажень ΔQ та ΔM.

Для визначення переміщень в еквівалентному стрижні можна використати універсальне рівняння пружної лінії (10.92).

Приклад 46. *Визначимо кути повороту опорних перерізів та прогини для трисхідчастої балки, яка лежить на двох опорах (рис. 294, а). Відношення моментів інерції перерізів окремих східців балки $J_1 : J_2 : J_3 = 1 : 3 : 2$.*

Визначаємо опорні реакції та будуємо епюри згинальних моментів і поперечних сил. Розрізаємо балку на три частини в місцях спряження східців. На рис. 294, *б* зображено окремі частини балки, які перебувають під дією зовнішніх сил та внутрішніх зусиль Q та M у місцях розрізів.

Зведемо задану східчасту балку до еквівалентної балки постійного перерізу з моментом інерції J_0, що дорівнює моменту інерції J_2 перерізу середньої частини балки. Коефіцієнти зведення відповідно такі:

$$\beta_1=\frac{J_0}{J_1}=\frac{3}{1}=3;$$

$$\beta_2=\frac{J_0}{J_2}=\frac{3}{3}=1;$$

$$\beta_3=\frac{J_0}{J_3}=\frac{3}{2}. \tag{10.136}$$

Множимо на всіх ділянках задані навантаження, а також Q та M у перерізах розрізів на відповідні коефіцієнти зведення β_n. Усі три частини балки з прикладеними до них зведеними навантаженнями зображено на рис. 294, *в*.

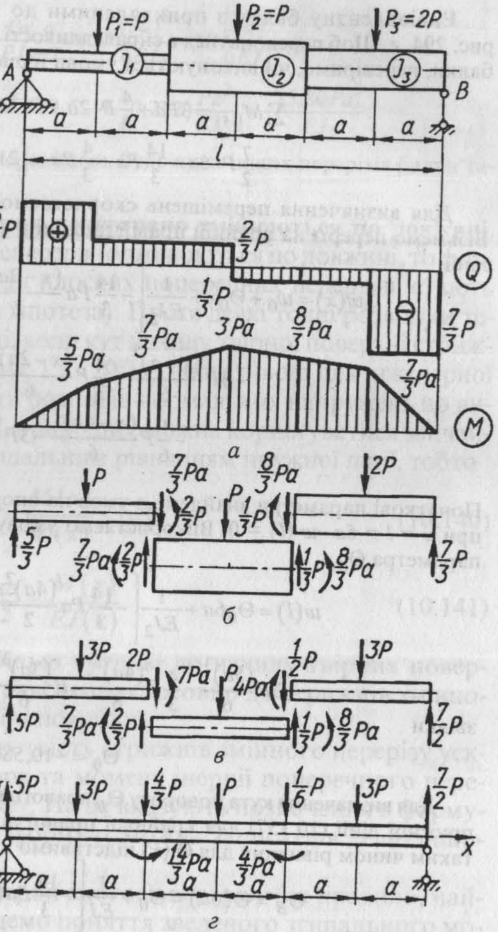


Рис. 294

Тепер утворимо з них одну балку однакової жорсткості $EJ_0 = EJ_2$, приклавши в перерізах спряження додаткові сили ΔQ_1, ΔQ_2 та додаткові моменти ΔM_1 та ΔM_2.

Знаходимо додаткові сили:

$$\Delta Q_1=\frac{2}{3}P-2P=-\frac{4}{3}P,\quad\text{або}\quad \Delta Q_1=\frac{2}{3}P(1-3)=-\frac{4}{3}P;$$

$$\Delta Q_2=\frac{1}{3}P-\frac{1}{2}P=-\frac{1}{6}P,\quad\text{або}\quad \Delta Q_2=-\frac{1}{3}P\left(\frac{3}{2}-1\right)=-\frac{1}{6}P.$$

Обчислюємо додаткові моменти:

$$\Delta M_1=\frac{7}{3}Pa-7Pa=-\frac{14}{3}Pa,\quad\text{або}\quad \Delta M_1=\frac{7}{3}Pa(1-3)=-\frac{14}{3}Pa;$$

$$\Delta M_2=4Pa-\frac{8}{3}Pa=\frac{4}{3}Pa,\quad\text{або}\quad \Delta M_2=\frac{8}{3}Pa\left(\frac{3}{2}-1\right)=\frac{4}{3}Pa.$$

Еквівалентну балку з прикладеними до неї навантаженнями зображено на рис. 294, *г*. Щоб переконатися в справедливості виконаних розрахунків еквівалентної балки, перевіримо, чи виконуються умови її рівноваги:

$$\sum M_{(A)} = 3Pa + \frac{4}{3}P\cdot 2a + P\cdot 3a + \frac{1}{6}P\cdot 4a + 3P\cdot 5a - \\ -\frac{7}{2}P\cdot 6a - \frac{14}{3}Pa + \frac{4}{3}Pa = \left(21\frac{14}{3} - 21\frac{14}{3}\right)Pa = 0.$$

Для визначення переміщень скористаємося методом початкових параметрів. Візьмемо переріз на крайній правій ділянці й запишемо для нього рівняння пружної лінії

$$w(x) = w_0 + \Theta_0 x + \frac{1}{EJ_2}\left[-\frac{14}{3}Pa\frac{(x-2a)^3}{2} + \frac{4}{3}Pa\frac{(x-4a)^2}{2} + 5P\frac{x^3}{6} - \right. \\ -3P\frac{(x-a)^3}{6} - \frac{4}{3}P\frac{(x-2a)^3}{6} - P\frac{(x-3a)^3}{6} - \\ \left. -\frac{1}{6}P\frac{(x-4a)^3}{6} - 3P\frac{(x-5a)^3}{6}\right]. \qquad (10.137)$$

Початкові параметри знайдемо з умов на опорах: при $x = 0$ $w(0) = 0$, отже, $w_0 = 0$; при $x = l = 6a$ $w(l) = 0$. Використаємо умову для визначення другого початкового параметра Θ_0

$$w(l) = \Theta_0 6a + \frac{1}{EJ_2}\left[-\frac{14}{3}Pa\frac{(4a)^2}{2} + \frac{4}{3}Pa\frac{(2a)^2}{2} + 5P\frac{(6a)^3}{6} - \right. \\ \left. -3P\frac{(5a)^3}{6} - \frac{4}{3}P\frac{(4a)^3}{6} - P\frac{(3a)^3}{6} - \frac{P}{6}\frac{(2a)^3}{6} - 3P\frac{a^3}{6}\right] = 0,$$

звідки

$$\Theta_0 = -10{,}58\frac{Pa^2}{EJ_2}. \qquad (10.138)$$

Для визначення кута повороту Θ_B правого кінця балки продиференціюємо рівняння пружної лінії (10.137) для крайньої правої ділянки балки ($5a \le x \le 6a$) та в здобуте таким чином рівняння для $\Theta(x)$ підставимо $x = l = 6a$. Матимемо

$$\Theta_B = \Theta(6a) = \Theta_0 + \frac{1}{EJ}\left[-\frac{14}{3}Pa(6a-2a) + \frac{4}{3}Pa(6a-4a) + \right. \\ +5P\frac{(6a)^2}{2} - 3P\frac{(6a-a)^2}{2} - \frac{4}{3}P\frac{(6a-2a)^2}{2} - P\frac{(6a-3a)^2}{2} - \\ \left. -\frac{P}{6}\frac{(6a-4a)^2}{2} - 3P\frac{(6a-5a)^2}{2}\right]$$

звідки знаходимо

$$\Theta_B = 8{,}92\frac{Pa^2}{EJ_2}. \qquad (10.139)$$

Визначимо як приклад прогини в місцях прикладення зовнішніх навантажень P_1 та P_2 (тобто в перерізах $x = a$ та $x = 3a$). При $x = a$

$$w(a) = \Theta_0 a + 5P\frac{a^3}{6EJ_2} = \left(-\frac{10{,}58 + 0{,}83}{EJ_2}\right)Pa^3 = -\frac{9{,}75Pa^3}{EJ_2}.$$

При $x = 3a$

$$w(3a) = \Theta_0 3a - \frac{14}{3}\frac{Pa}{EJ_2}\frac{a^2}{2} + 5P\frac{(3a)^3}{6EJ_2} - 3P\frac{(2a)^3}{6EJ_2} - \\ -\frac{4}{3}P\frac{a^3}{6EJ_2} = (-10{,}58\cdot 3 - 2{,}33 + 22{,}5 - 4 - 0{,}222)\frac{Pa^3}{EJ_2} = -\frac{15{,}80Pa^3}{EJ_2}.$$

Визначення лінійних та кутових переміщень будь-яких інших перерізів балки також не є складним.

Стрижні, розміри перерізів яких неперервно змінюються по довжині. Якщо розміри перерізу стрижня неперервно змінюються по довжині, то формули, виведені на підставі гіпотези плоских поперечних перерізів, стають взагалі неправильними (як і сама гіпотеза). Проте деякі точні розв'язки теорії пружності показують, що тоді, коли кут нахилу твірної поверхні стрижня до його осі малий (не перевищує 15...20°), з достатньою для інженерної практики точністю можна вважати розподіл нормальних напружень по висоті перерізу прямолінійним. Тоді, природно, можна користуватися звичайною умовою міцності та диференціальним рівнянням пружної лінії, тобто

$$\sigma_{\max} = \frac{M(x)}{W(x)} \le [\sigma] \qquad (10.140)$$

та

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ(x)}. \qquad (10.141)$$

Водночас дотичні напруження більш чутливі до нахилу твірних поверхонь стрижня, тому формула Журавського стосовно до стрижнів змінного поперечного перерізу дає значні похибки.

Розрахунок на міцність та жорсткість стрижнів змінного перерізу ускладнюється тим, що момент опору та момент інерції поперечного перерізу є функціями абсциси x перерізу. На це вказують позначення в формулах (10.140) та (10.141). Останню формулу можна записати в дещо іншому вигляді.

Позначимо через J_0 момент інерції якогось перерізу (як правило, найбільшого чи найменшого) та введемо поняття зведеного згинального моменту

$$M_{зв}(x) = M(x)\frac{J_0}{J(x)}. \qquad (10.142)$$

Тоді, помноживши на J_0 чисельник та знаменник правої частини формули (10.141), матимемо

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M_{зв}(x)}{EJ_0}. \qquad (10.143)$$

Ця формула за своїм зовнішнім виглядом аналогічна формулі (10.135), але величини $M_{зв}(x)$, які входять до формули, мають різний зміст.

Окремим випадком балок, розміри перерізів яких неперервно змінюються по довжині, є *балки однакового опору згинанню*, в усіх перерізах яких

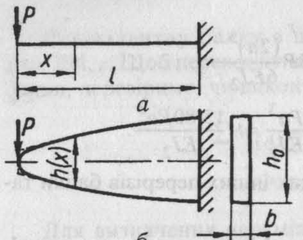


Рис. 295

максимальне напруження дорівнює допустимому, тобто

$$\sigma_{\max}(x) = \frac{|M(x)|}{W(x)} = [\sigma].$$

Звідси знаходимо рівняння для визначення розмірів балки однакового опору:

$$W(x) = \frac{M(x)}{[\sigma]}. \qquad (10.144)$$

Задавшись будь-якою формою перерізу (причому так, щоб розміри його визначалися тільки одним параметром), з рівняння (10.144) знаходимо закон зміни цього параметра по довжині балки. Тим самим визначаємо розміри всіх перерізів. Для визначення переміщень можна користуватися диференціальним рівнянням пружної лінії (10.143).

Знайдемо форму консолі однакового опору згинанню, переріз якої прямокутний з постійною шириною b та змінною висотою (рис. 295).

Позначимо висоту балки в довільному перерізі через $h(x)$. Тоді

$$W(x) = \frac{bh^2(x)}{6}.$$

Крім того, очевидно,

$$|M(x)| = Px.$$

Тому, згідно з рівнянням (10.144),

$$\frac{bh^2(x)}{6} = \frac{Px}{[\sigma]},$$

звідки

$$h(x) = \sqrt{\frac{6P}{b[\sigma]}}\sqrt{x}.$$

Отже, висота розглядуваної балки однакового опору змінюватиметься за параболічним законом (рис. 295, *б*). При цьому

$$h_0 = h(l) = \sqrt{\frac{6P}{b[\sigma]}}\sqrt{l}.$$

Зазначимо, що в околі кінцевого перерізу ($x = 0$) згинальні моменти малі, тому висоту перерізу слід визначати з умови міцності за $\tau_{\max}$:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2}\frac{P}{bh} \le [\tau],$$

звідки

$$h \ge \frac{3P}{2b[\tau]}.$$

Побудована балка параболічного обрису найбільш раціональна з погляду економії матеріалу, однак внаслідок складності форми не задовольняє технологічні вимоги. Тому на практиці застосовують не балки однакового опору, а близькі до них східчасті стрижні.

Рис. 296

Аналогічно діють і у випадках двотаврового, круглого та інших форм перерізів. Існує один тип балок однакового опору з дуже простим обрисом, який застосовується в листових ресорах, — це балки прямокутного перерізу з постійною висотою h та змінною по довжині шириною $b(x)$.

Знайдемо форму такої балки однакового опору згинанню для схеми, наведеної на рис. 296, *а*.

Унаслідок симетрії для визначення форми балки досить розглянути тільки ліву половину прогону. Тоді

$$M(x) = \frac{P}{2}x; \quad W(x) = \frac{b(x)h^2}{6}.$$

Підставивши ці вирази у формулу (10.144), матимемо

$$\frac{6Px}{2b(x)h^2} = [\sigma],$$

звідки

$$b(x) = \frac{3P}{h^2[\sigma]}x.$$

Ширина перерізу змінюється за лінійним законом, і, отже, балка має вигляд, зображений на рис. 296, *б*. Максимальна ширина балки b_0 буде посередині прогону:

$$b_0 = b\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{3Pl}{2h^2[\sigma]}.$$

Визначимо найбільший прогин f цієї балки. Згідно з рівняннями (10.142) та (10.143), маємо

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M_{зв}(x)}{EJ_0},$$

де

$$M_{зв}(x) = M(x)\frac{J_0}{J(x)} = \frac{P}{2}x\frac{J_0}{J(x)}.$$

У нашому прикладі

$$J_0 = \frac{b_0h^3}{12}; \quad J(x) = \frac{b(x)h^3}{12},$$

отже,

$$\frac{J_0}{J(x)} = \frac{b_0}{b(x)} = \frac{l}{2x},$$

а тому

$$M_{зв}(x) = \frac{P}{2}x\frac{l}{2x} = \frac{Pl}{4}.$$

На рис. 296, *б* наведено епюри M та Q, а також епюру зведених згинальних моментів.

Отже, диференціальне рівняння пружної лінії для лівої половини прогону балки матиме вигляд

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{Pl}{4EJ_0}.$$

Двічі проінтегруємо його:

$$\Theta(x) = \frac{1}{EJ_0}\left(\frac{Pl}{4}x + C\right);$$

$$w(x) = \frac{1}{EJ_0}\left(\frac{Pl}{8}x^2 + Cx + D\right).$$

Для визначення сталих інтегрування C та D використаємо симетрію пружної лінії (її зображено штриховою лінією на рис. 296, *а*):

$$w(0) = \Theta(l/2) = 0.$$

Звідси

$$C = -\frac{Pl^2}{8}; \quad D = 0.$$

Тоді

$$w(x) = \frac{1}{EJ_0}\left(\frac{Pl}{8}x^2 - \frac{Pl^2}{8}x\right),$$

отже,

$$w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{EJ_0}\left(\frac{Pl}{8}\frac{l^2}{4} - \frac{Pl^2}{8}\frac{l}{2}\right),$$

а тому

$$f = \left|w\left(\frac{l}{2}\right)\right| = \frac{Pl^3}{32EJ_0}.$$

Коли б балка мала однаковий по довжині переріз, то з умови міцності ми б знайшли, що вона буде прямокутного обрису в плані (балку завширшки b_0 по всій довжині на рис. 296, *б* зображено штриховим контуром). Для такої балки максимальний прогин

$$f' = \frac{Pl^3}{48EJ_0}. \tag{10.145}$$

Отже, прогин балки постійного перерізу в півтора раза менший, ніж балки однакового опору, тобто

$$f = 1{,}5\,f'. \tag{10.146}$$

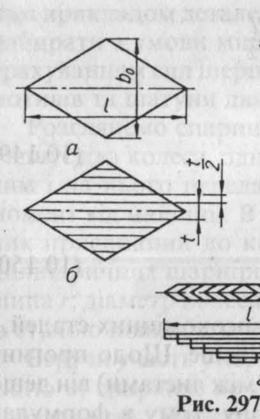


Рис. 297

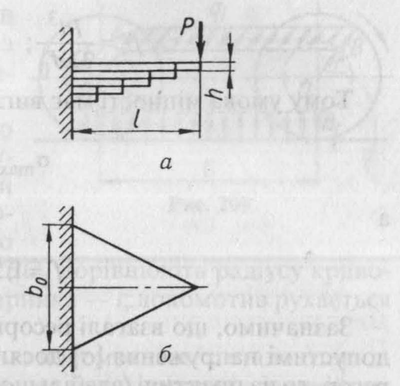


Рис. 298

Нагадаємо, що ширина b перерізу опорних кінців балки однакового опору має визначатися з умови міцності за τ_{max} з урахуванням конструктивних факторів, що забезпечують необхідні умови обпирання.

Розрахунок звичайної листової ресори (рис. 297, *г*), яка складається з пакета листів, зводиться до розрахунку щойно розглянутої балки.

Балку однакового опору (рис. 297, *а*) розріжемо на окремі штаби (рис. 297, *б*), а потім складемо однакові штаби завширшки $t/2$. У результаті матимемо n штаб завширшки $t = b_0/n$, які зображено на рис. 297, *в*. Склавши ці штаби разом, одержимо листову ресору (рис. 297, *г*).

Якщо всі листи з'єднати між собою (зварити або склепати), то вийде балка однакової ширини t і змінної висоти перерізу. В ресорах листи не зв'язані між собою (хомути, в яких вони розміщуються, перешкоджають розсипанню їх) і мають змогу вільно прослизати один відносно одного. Крім того, наближено можна вважати, що при деформації всі штаби однаково викривлюються. Тоді сума штаб, з яких складається ресора, з погляду напружень та деформацій буде еквівалентна сумі штаб, наведених на рис. 297, *б*, тобто балці однакового опору, постійної висоти й змінної ширини (рис. 297, *а*). Тому для такої ресори умова міцності (враховується, що $b_0 = tn$) матиме вигляд

$$\sigma_{max} = \frac{3Pl}{2tnh^2} \le [\sigma], \tag{10.147}$$

а найбільший прогин

$$f = 1{,}5\,f' = 1{,}5\frac{Pl^3}{48EJ_0}, \tag{10.148}$$

де

$$J_0 = \frac{b_0h^3}{12} = \frac{tnh^3}{12}.$$

Для ресори, зображеної на рис. 298, *а*, відповідна балка однакового опору має форму трикутника (рис. 298, *б*) і, очевидно,

$$f' = \frac{Pl^3}{3EJ_0}; \quad \sigma_{\max} = \frac{M(x)}{W(x)} = \frac{6Pl}{tnh^2}.$$

Тому умова міцності має вигляд

$$\sigma_{\max} = \frac{6Pl}{tnh^2} \le [\sigma], \tag{10.149}$$

а

$$f = 1{,}5\frac{Pl^3}{2EJ_0} = \frac{Pl^3}{2EJ_0}. \tag{10.150}$$

Зазначимо, що взагалі ресори виготовляють з високоміцних сталей, і допустимі напруження [σ] досягають 400 МПа і більше. Щодо прогину ресор, то на практиці (здебільшого внаслідок тертя між листами) він дещо менший, ніж у відповідній балці однакового опору, тому в формулах (10.148) та (10.150) замість коефіцієнта 1,5 беруть $\beta = 1{,}2...1{,}4$.

Приклад 47. *Ресора (див. рис. 296, 297) завдовжки 100 см, яка складається із семи штаб перерізом 60 × 8 мм, навантажена силою P = 7,5 кН. Перевіримо міцність ресори ([σ] = 450 МПа) та знайдемо максимальний прогин.*

У даному прикладі $h = 0{,}8$ см; $t = 6$ см; $l = 100$ см; $P = 7{,}5$ кН; $n = 7$. Тоді

$$J_0 = \frac{tnh^3}{12} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 0{,}8^3}{12}\ \text{см}^4 = 1{,}79\ \text{см}^4.$$

За умовою міцності (10.147)

$$\sigma_{\max} = \frac{3Pl}{2tnh^2} = \frac{3 \cdot 7{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 1}{2 \cdot 0{,}06 \cdot 7\left(0{,}8 \cdot 10^{-2}\right)^2}\ \text{МПа} = 418\ \text{МПа} < 450\ \text{МПа}.$$

Отже, ресора міцна.

Користуючись формулою (10.148) та замінюючи в ній коефіцієнт 1,5 на $\beta = 1{,}25...1{,}40$, знаходимо, що

$$f = \beta\frac{Pl^3}{48EJ_0} = (1{,}25...1{,}40)\frac{7{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 1}{48 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 1{,}79 \cdot 10^{-8}}\ \text{м} =$$

$$= (1{,}25...1{,}40)\,4{,}16 \cdot 10^{-2}\ \text{м} = (1{,}25...1{,}40)\,4{,}16\ \text{см} = 5{,}2...5{,}8\ \text{см},$$

тобто найбільший прогин становить 52...58 мм.

На закінчення зазначимо, що наведений спосіб розрахунку листових ресор певною мірою умовний, оскільки:

а) не враховується тертя між листами ресор;

б) насправді листи ресори щільно прилягають один до одного не всюди, а тільки в окремих точках, унаслідок чого кривина листів при деформації неоднакова, а отже, і напруження в них різні.

§ 70. Розрахунок на дію сил інерції при згинанні

Розрахунок на згинання з урахуванням сил інерції доводиться виконувати тоді, коли елементи конструкцій у процесі експлуатації набирають великих прискорень, які спричинюють значні інерційні зусилля. Класичним прикладом деталей, розміри яких слід добирати з умови міцності на згинання з урахуванням сил інерції, є спарники локомотивів та шатуни двигунів.

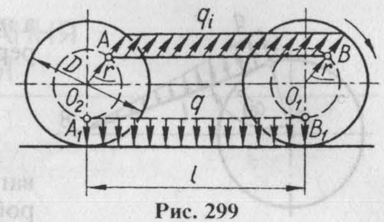


Рис. 299

Розглянемо спарник AB (рис. 299), що з'єднує два колеса, одне з яких (O_1) є ведучим і на нього передається обертальний момент від машини. В точках A та B спарник приєднаний до коліс за допомогою циліндричних шарнірів; відстані AO_2 та BO_1 дорівнюють радіусу кривошипа r; діаметр колеса — D; довжина спарника — l; локомотив рухається із сталою швидкістю v.

Беручи участь у переносному русі разом з локомотивом зі сталою швидкістю v, спарник, не маючи прискорення, не буде зазнавати інерційних навантажень. Прискорення він дістане тільки в процесі відносного руху. Оскільки в цьому русі точки A та B спарника переміщаються однаково, окреслюючи в одній площині кола радіусом r, то цей рух буде плоским та поступовим. Отже, всі точки спарника будуть мати ті самі швидкості й прискорення, що і точки A та B.

Точка A рухається разом з другим колесом, окреслюючи коло радіусом r. При сталій швидкості руху локомотива кутова швидкість обертання колеса ω стала. Отже, тангенціальне прискорення точки A дорівнює нулю, а доцентрове прискорення w_n, спрямоване від точки A до точки O_2, дорівнює $\omega^2 r$. Будь-який елемент спарника набуває такого самого прискорення, спрямованого паралельно O_2A.

Визначаючи згинальні моменти в спарнику, слід до рівномірно розподілених сил інерції інтенсивністю

$$q_i = \frac{\gamma F}{g} w_n = \frac{\gamma F}{g}\omega^2 r$$

додати його власну вагу. При цьому найбільш небезпечним положенням спарника, очевидно, буде крайнє нижнє, тобто положення, в якому до навантажень від сил інерції треба додати навантаження від власної ваги. Тоді повне навантаження на одиницю довжини спарника

$$q = \gamma F + \frac{\gamma F}{g}\omega^2 r = \gamma F\left(1 + \frac{\omega^2 r}{g}\right).$$

При виборі розрахункової схеми спарник у даному випадку треба розглядати як балку, шарнірно оперту в точках A та B і навантажену рівномірно розподіленим по довжині навантаженням q.

Максимальний згинальний момент буде, як відомо, посередині прогону:

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{\gamma Fl^2}{x}\left(1 + \frac{\omega^2 r}{g}\right),$$

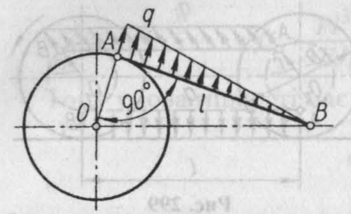


Рис. 300

а найбільше напруження в небезпечному перерізі

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{F}{W}\frac{\gamma l^2}{8}\left(1 + \frac{\omega^2 r}{g}\right).$$

Крім інерційних навантажень та власної ваги, які спричинюють згинання, спарник при роботі зазнає дії осьової сили, яку теж слід враховувати в розрахунках на міцність. Умову міцності при спільній дії згинання та осьової сили наведено в § 76.

Аналогічно можна виконати і розрахунок шатуна (рис. 300), шарнірно з'єднаного в точці A з кривошипом OA, який обертається навколо точки O з кутовою швидкістю ω.

Якщо кривошип обертається із сталою кутовою швидкістю, то точка A шатуна набуває тільки доцентрового прискорення, а точка B — тільки тангенціального. Всі проміжні точки шатуна, розміщені між A та B, мають і ті, й інші прискорення. Обмежимося врахуванням тільки доцентрового прискорення.

При такому положенні, коли кривошип утворює з шатуном кут 90°, напрям доцентрового прискорення буде перпендикулярний до осі шатуна. Природно припустити, що відцентрові сили інерції скрізь перпендикулярні до осі шатуна і по його довжині змінюються від $q = q_{max}$ у точці A до $q = 0$ в точці B. Це припущення тим ближче до істини, чим більша довжина шатуна порівняно з довжиною кривошипа.

Складаючи розрахункову схему, шатун слід розглядати як балку AB на двох шарнірних опорах A та B з навантаженням, розподіленим за законом трикутника (див. рис. 73). Максимальний згинальний момент, як відомо, буде в перерізі на відстані $x = l/\sqrt{3}$ від точки B:

$$M_{max} = \frac{q_{max} l^2}{9\sqrt{3}},$$

а максимальне напруження від згинання

$$\sigma_{max} = M_{max}/W.$$

Ураховуючи, що

$$q_{max} = \frac{F\gamma}{g}\omega^2 r,$$

дістанемо

$$\sigma_{max} = \frac{q_{max} l^2}{9\sqrt{3}W} = \frac{F\gamma l^2 \omega^2 r}{9g\sqrt{3}W}.$$

Зазначимо, що в розглядуваному прикладі, визначаючи напруження в спарнику та в шатуні, ми з усіх можливих положень, які неперервно змінюються в процесі експлуатації, вибирали положення елемента, який розраховується, що відповідає небезпечному положенню.

Крім нормальних напружень, спричинених згинанням, при розрахунку шатуна на міцність слід ураховувати також дію осьової сили (див. розд. 20).

Розділ 11 ДОДАТКОВІ ПИТАННЯ ТЕОРІЇ ЗГИНАННЯ

§ 71. Про розрахунок складених балок

Складені балки широко застосовують у будівельній практиці, судно- і літакобудуванні та інших галузях техніки. Це здебільшого зварні (рис. 301) або клепані (рис. 302) балки двотаврового перерізу. Вони складаються з двох поясів (полиць) та стінки. Стінка *1* — це вертикальний лист (рис. 301 та 302). Пояси *2* зварної балки (рис. 301) — це горизонтальні листи більшої порівняно із стінкою товщиною. Пояс клепаної балки складається з кількох деталей — поясного листа *5* і поясних кутників *2* (рис. 302). Окремі частини складеної балки з'єднуються між собою в одне ціле. З'єднувальним елементом зварної балки є зварний шов *3* (рис. 301). У клепаній балці за з'єднувальні елементи правлять поясні заклепки *3*, а також заклепки *4*, що з'єднують поясні листи з поясними кутниками (рис. 302).

Здійснюючи розрахунок складених балок на міцність, треба задовольнити такі вимоги:

1. Поперечний переріз у цілому повинен мати потрібну міцність.
2. Листи поясів і особливо стінки складених балок є тонкостінними елементами і здатні при стисканні (пояса) або при зсуві (стінки) втрачати стійкість, жолобитися. Чим менша товщина листів та чим більша довжина частини *c* поясних листів, що звисає, тим менше навантаження може витримати балка без небезпеки жолоблення листів. Тому треба обмежувати величину *c* (рис. 301 та 302) і не вибирати для листів занадто малу товщину. Щоб запобігти втраті стійкості стінки, застосовують кутники або ребра жорсткості.
3. З'єднувальні елементи повинні мати достатню міцність.

Перша задача розв'язується методами, викладеними у попередньому розділі, й зводиться до розрахунку перерізу за σ_{max}, до визначення товщини стінки з розрахунку за τ_{max} та іноді до перевірки розмірів перерізу за теоріями міцності в місці переходу стінки в полицю (див. § 64, приклади 41, 42).

Друге питання, як і взагалі докладний розрахунок складених балок, викладається в спеціальних курсах (наприклад, у курсі металевих конструкцій). Розглянемо тільки розрахунок з'єднувальних елементів.

Двома близькими перерізами виділимо елемент завдовжки dx зварної балки (рис. 303, *а*). Нехай у лівому перерізі поперечна сила та згинальний момент дорівнюють Q та M, а в правому — відповідно $Q + dQ$ та $M + dM$.

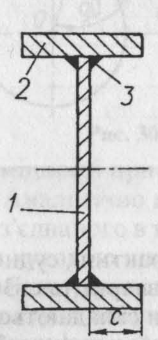


Рис. 301

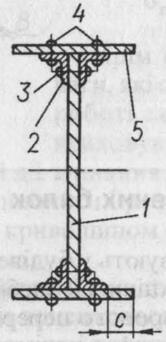


Рис. 302

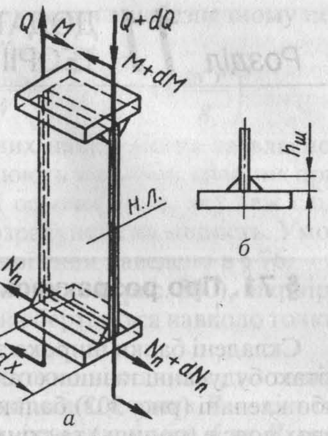


Рис. 303

Тоді за формулою (10.18) нормальне поздовжнє зусилля в лівому перерізі пояса

$$N_п = \frac{MS_п}{J},$$

де $S_п$ — статичний момент пояса відносно нейтральної лінії перерізу.

У правому перерізі пояса

$$N_п + dN_п = \frac{(M + dM)\,S_п}{J}.$$

Нормальні зусилля у правому та лівому перерізах пояса відрізняються на величину

$$dN_п = \frac{dMS_п}{J}.$$

Зусилля $dN_п$ намагається зсунути пояс відносно стінки, внаслідок чого зварні шви, що прикріплюють пояс до стінки (їх два), працюють на зріз як флангові (бокові) шви. Умова міцності для них має вигляд (див. § 52)

$$\tau = \frac{dN_п}{dF_{зр}} \le [\tau_е].$$

Якщо позначити через $h_ш$ катет шва (рис. 303, *б*), то площа зрізу

$$dF_{зр} = 2 \cdot 0{,}7 h_ш dx.$$

Тоді дотичні напруження у небезпечному перерізі шва

$$\tau = \frac{dN_п}{dF_{зр}} = \frac{S_п}{2 \cdot 0{,}7 h_ш J}\frac{dM}{dx}.$$

Проте $dM/dx = Q$, тому остаточна умова міцності для шва має вигляд

$$\tau = \frac{QS_п}{2 \cdot 0{,}7 h_ш J} \le [\tau_е]. \qquad (11.1)$$

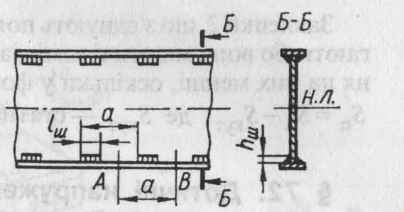


Рис. 304

Зазначимо, що знайдена вище різниця зусиль у двох перерізах пояса належить до випадку, коли відстань між цими перерізами дорівнює dx. На одиницю довжини пояса нормальне зусилля дістає приріст, Н/м,

$$q_t = \frac{dN_п}{dx} = \frac{dMS_п}{dxJ},$$

або

$$q_t = \frac{QS_п}{J}. \qquad (11.2)$$

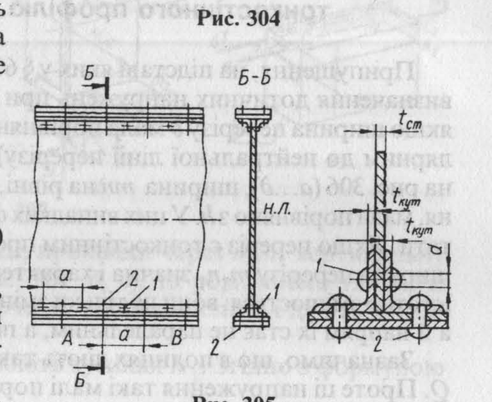


Рис. 305

Часто застосовують не суцільні, а переривчасті (шпонкові) шви (рис. 304). Розглянемо шпонкове зварне з'єднання.

На рис. 304 $l_ш$ — довжина шпонки, a — крок шва. Розрахункову довжину шпонки з урахуванням непровару беруть $l_ш$ — 1 см. На відрізку AB завдовжки a у поясі виникає різниця нормальних зусиль

$$\Delta N_п = q_t a = \frac{QS_п a}{J}. \qquad (11.3)$$

Розраховуючи шпонку на це зусилля, дістанемо

$$\tau = \frac{QS_п a}{2 \cdot 0{,}7 h_ш (l_ш - 1) J} \le [\tau_е]. \qquad (11.4)$$

У клепаній балці (рис. 305) зусилля $\Delta N_п$ сприймає поясна заклепка *1*. Цю заклепку розраховують на зріз та зминання. Оскільки заклепка має дві площини зрізу, то площа зрізу $F_{зр} = 2\,(\pi d^2/4)$. Розрахункова площа зминання $F_{зм} = t_{ст} d$ або $F_{зм} = 2\,t_{кут} d$. Як правило, товщина стінки менша за подвоєну товщину полиці кутника. Тому будемо вважати $F_{зм} = t_{ст} d$.

Умови міцності на зріз та зминання для поясних заклепок мають вигляд

$$\tau = \frac{\Delta N_п}{F_{зр}} = \frac{QS_п a}{2\left(\pi d^2/4\right)} \le [\tau]; \qquad (11.5)$$

$$\sigma_{зм} = \frac{\Delta N_п}{F_{зм}} = \frac{QS_п a}{t_{ст} dJ} \le [\sigma_{зм}]. \qquad (11.6)$$

Заклепки *2*, що з'єднують поясні листи з кутниками, розрахунку не підлягають, бо вони мають ті самі діаметр d та крок a, що й поясні, а навантаження на них менші, оскільки у формулі (11.3) замість $S_п$ для них треба взяти $S'_п = S_п - S_{кут}$, де $S_{кут}$ — статичний момент кутників.

§ 72. Дотичні напруження при згинанні балок тонкостінного профілю. Центр згинання

Припущення, на підставі яких у § 61 було виведено формулу (10.20) для визначення дотичних напружень при згинанні, здебільшого справедливі, якщо ширина перерізу b мала порівняно з висотою (розміром, перпендикулярним до нейтральної лінії перерізу). Так, в усіх перерізах, зображених на рис. 306 (*а…д*), ширина mn на рівні, де визначаються дотичні напруження, мала порівняно з h. У цих випадках формула (10.20) дає правильні результати. Якщо переріз є тонкостінним профілем (рис. 306, *в*, *г*, *д*), то в полицях ширина перерізу m_1n_1 значна і характер розподілу дотичних напружень тут істотно змінюється: вони не тільки змінні вздовж середньої лінії полиці m_1n_1, а й напрям їх стає не паралельним, а перпендикулярним до зусилля Q.

Зазначимо, що в полицях діють також дотичні напруження, паралельні Q. Проте ці напруження такі малі порівняно з дотичними напруженнями, паралельними середній лінії полиці (позначимо їх $\tau_п$), що їх можна не брати до уваги.

Виведемо формулу для обчислення дотичних напружень $\tau_п$ у полицях тонкостінних профілів.

Для певності розглянемо балку двотаврового перерізу. На рис. 307, *а* наведено балку, її схему та епюри Q і M. Двома близькими поперечними перерізами A_1B_1 і A_2B_2 виділимо елемент балки завдовжки dx (рис. 307, *б*).

Проведемо в перерізі балки $A_1B_1D_1E_1$ у нижній полиці вертикальну лінію m_1n_1 на довільній відстані z від осі y. В точках цієї лінії діють напруження σ та $\tau_п$. Останні треба визначити.

Ураховуючи, що полиця вузька (t мале порівняно з b), приймемо такі припущення:

1) в усіх точках лінії m_1n_1 дотичні напруження однакові, тобто $\tau_п$ постійні по товщині полиці й залежать тільки від відстані z до вертикальної осі;

2) скрізь у полиці $\tau_п$ паралельні середній лінії полиці.

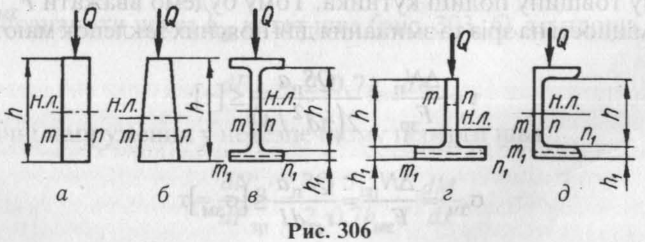


Рис. 306

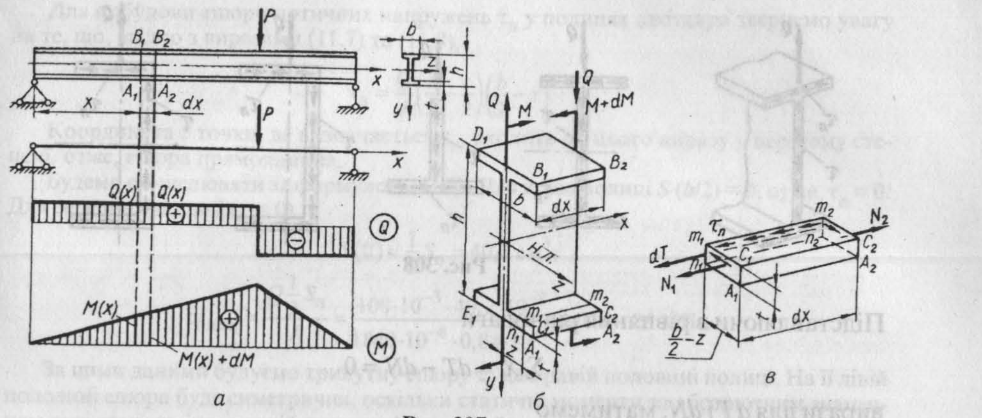


Рис. 307

Відсічемо частину елемента балки, провівши через m_1n_1 вертикальну площину, паралельну осі балки (рис. 307, *б*, *в*), та розглянемо тільки ті напруження, які діють у гранях відсіченої частини полиці і дають зусилля, що проекціюються на вісь x.

Нормальні напруження спричинюють зусилля N_1. Згідно з формулою (10.18),

$$N_1 = \frac{M(x)S(z)}{J_z}.$$

Тут

$$S(z) = (b/2 - z)t(h/2 - t/2) \tag{11.7}$$

— статичний момент площі $A_1C_1m_1n_1$ відносно нейтральної лінії. Він є функцією координати z.

У грані $A_2C_2m_2n_2$ нормальні напруження спричинюють рівнодійне зусилля

$$N_2 = \frac{[M(x) + dM]S(z)}{J_z},$$

причому значення $S(z)$ таке саме, як і для першого перерізу.

У грані $n_1m_1m_2n_2$, згідно із законом парності дотичних напружень, виникають напруження $\tau' = \tau_п$.

Згідно з першим припущенням, вважаємо τ' рівномірно розподіленими по товщині полиці t, а враховуючи, що розмір $n_1n_2 = m_1m_2 = dx$ дуже малий, можна вважати, що τ' рівномірно розподілені й по довжині dx грані $n_1m_1m_2n_2$. Площа цієї грані дорівнює tdx, тому дотичні напруження, що діють у ній, дають зусилля

$$dT = \tau' t dx = \tau_п t dx.$$

Напрям τ' має бути таким, щоб зусилля dT зрівноважило різницю зусиль:

$$dN = N_2 - N_1 = \frac{[M(x) + dM]S(z)}{J_z} - \frac{M(x)S(z)}{J_z} = \frac{dM \cdot S(z)}{J_z}.$$

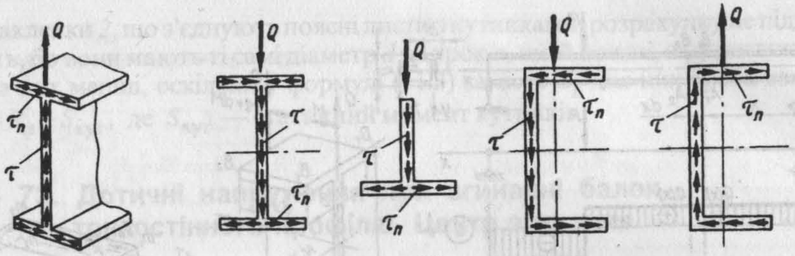


Рис. 308

Підставляючи в рівняння рівноваги

$$\sum X = dT - dN = 0$$

вирази для dT і dN, матимемо

$$\tau_п t dx = \frac{dMS(z)}{J_z}.$$

Поділивши це рівняння на tdx та маючи на увазі, що $dM/dx = Q$, дістанемо

$$\tau_п = \frac{QS(z)}{J_z t}. \tag{11.8}$$

Напруження $\tau_п$ завжди утворює єдиний потік з дотичними напруженнями τ у стінці профілю (рис. 308). Останні визначаються з формули Журавського та напрямлені в бік Q.

Формула (11.8) для дотичних напружень $\tau_п$ у полицях та формула (10.20) для дотичних напружень τ у стінці дають змогу обчислити дотичні напруження в будь-якій точці тонкостінного профілю і побудувати повну епюру дотичних напружень. При цьому нехтують уклоном полиць у двотаврах і швелерах, вважаючи, що полиці мають постійну товщину. Епюру τ доводять до полиці, а епюру $\tau_п$ — до осі профілю.

Приклад 48. *Побудуємо повну епюру дотичних напружень для перерізу двотаврової балки № 20, в якому діє поперечна сила $Q = 100$ кН (рис. 309).*

За сортаментом знаходимо, що $J = 1840$ см^4, $S = 104$ см^3, та обчислюємо статичний момент полиці відносно нейтральної лінії:

$$S_п = bt\left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right) = 10 \cdot 0{,}84\left(\frac{20}{2} - \frac{0{,}84}{2}\right) \text{см}^3 = 80{,}47 \text{ см}^3.$$

Тоді дотичні напруження в місці з'єднання стінки з полицею

$$\tau_1 = \frac{QS_п}{Jd} = \frac{100 \cdot 10^{-3} \cdot 80{,}47 \cdot 10^{-6}}{1840 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}52 \cdot 10^{-2}} \text{ МПа} = 84{,}1 \text{ МПа},$$

а найбільші дотичні напруження в точках нейтральної лінії

$$\tau_{max} = \frac{QS}{Jd} = \frac{100 \cdot 10^{-3} \cdot 104 \cdot 10^{-6}}{1840 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}52 \cdot 10^{-2}} \text{ МПа} = 108{,}7 \text{ МПа}.$$

За цими даними будуємо параболічну епюру τ для стінки.

Для побудови епюри дотичних напружень $\tau_п$ у полицях двотавра звернемо увагу на те, що, згідно з виразами (11.7) та (11.8),

$$\tau_п = \frac{Q}{J}\left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right)\left(\frac{b}{2} - z\right).$$

Координата z точки, де визначається $\tau_п$, входить до цього виразу у першому степені, отже, епюра прямолінійна.

Будемо обчислювати за формулою (11.8). Для краю полиці $S(b/2) = 0$, отже, $\tau_п = 0$. Для середини полиці ($z = 0$)

$$S(0) = \frac{1}{2} S_п = 40{,}2 \text{ см}^3;$$

$$\tau_{п\,max} = \frac{Q\frac{1}{2}S_п}{Jt} = \frac{100 \cdot 10^{-3} \cdot 40{,}2 \cdot 10^{-6}}{1840 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}84 \cdot 10^{-2}} \text{ МПа} = 26 \text{ МПа}.$$

За цими даними будуємо трикутну епюру $\tau_п$ на правій половині полиці. На її лівій половині епюра буде симетрична, оскільки статичні моменти за абсолютним значенням такі самі, як і на правій половині полиці. Очевидно, такий самий вигляд епюра має й для нижньої полиці.

Наявність дотичних напружень у полицях тонкостінних профілів приводить до того, що в крайніх волокнах балки, де діють найбільші нормальні напруження σ_{max}, напружений стан буде плоский, а не лінійний (рис. 310, *а*, *б*). Тому в таких балках імовірно небезпечною точкою буде не довільна точка крайніх волокон, а та точка, де $\tau_п = \tau_{п\,max}$. Умову міцності для таких балок слід було б записати не в звичайному вигляді

$$\sigma_{п\,max} = M / W \leq [\sigma],$$

а користуючись теорією міцності, що має сенс для нестандартних профілів, особливо при широких полицях.

Дотичні напруження в полицях тонкостінних профілів можуть значно змінити характер напруженого стану стрижня та вид його деформації.

Якщо переріз має дві осі симетрії й силова площина проходить через одну з них (наприклад, у двотавра), то в ньому виникають дотичні напруження, зображені на рис. 311, *а* (див. також рис. 310). Ці напруження дають

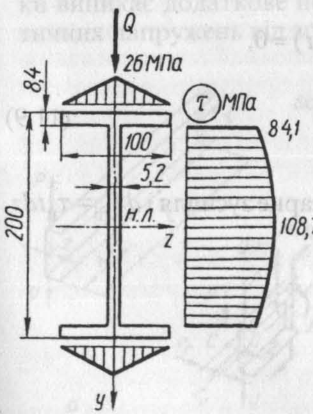


Рис. 309

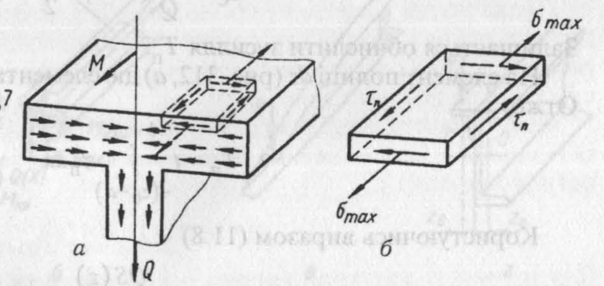


Рис. 310

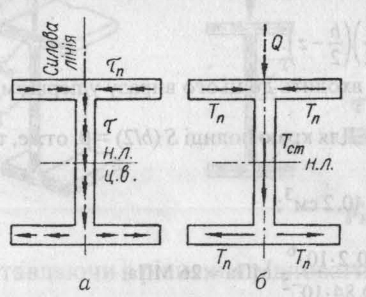


Рис. 311

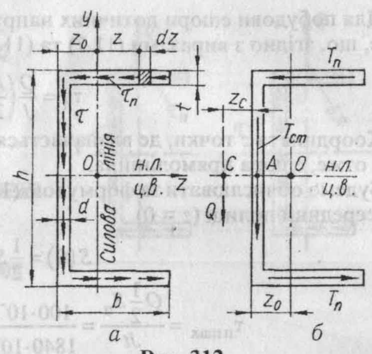


Рис. 312

рівнодійні зусилля $T_{ст}$ і $T_{п}$ (рис. 311, *б*). Унаслідок симетрії полиць відносно вертикальної осі зусилля $T_{п}$ взаємно зрівноважуються на кожній полиці.

Інша справа, якщо головна центральна вісь перерізу, перпендикулярна до нейтральної лінії, не є віссю симетрії (рис. 312). Дотичні напруження у стінці та полицях тут зводяться до зусиль $T_{ст}$ і $T_{п}$ (рис. 312, *б*, вертикальними дотичними напруженнями в полицях нехтуємо). Поперечна сила Q, що є рівнодійною цих зусиль,

$$Q = T_{ст},$$

очевидно, напрямлена вертикально вниз, але вона вже не буде проходити через центр ваги перерізу, оскільки дві сили $T_{п}$ дають ще і пару сил. Сила Q зміщується на деяку відстань z_C (рис. 312, *б*), перетинаючи нейтральну лінію в точці C.

Відрізок z_C знайдемо, виходячи з того, що момент рівнодійної сили відносно будь-якої точки дорівнює сумі моментів складових сил відносно тієї самої точки.

Отже, відносно точки C маємо

$$\sum M_C = Q(z_C + d/2) - T_{п}(h-t) = 0,$$

звідки

$$z_C = \frac{T_{п}}{Q}(h-t) - \frac{d}{2}. \tag{11.9}$$

Залишається обчислити зусилля $T_{п}$.

На елемент полиці dz (рис. 312, *а*) діє елементарне зусилля і $dT_{п} = \tau_{п} t dz$. Отже,

$$T_{п} = t \int_{-(z_0-d)}^{b-z_0} \tau_{п} dz.$$

Користуючись виразом (11.8)

$$\tau_{п} = \frac{QS(z)}{Jt}$$

і враховуючи, що

$$S(z) = (b - z_0 - z)t\frac{h-t}{2},$$

дістанемо

$$T_{п} = Q\frac{t(h-t)}{2J} \cdot \int_{-(z_0-d)}^{b-z_0} (b - z_0 - z)\, dz = \frac{Qt(h-t)(b-d)^2}{4J}.$$

Підставляючи останній результат у формулу (11.9), остаточно маємо

$$z_C = \frac{t(h-t)^2(b-d)^2}{4J} - \frac{d}{2}. \tag{11.10}$$

З'ясуємо тепер, яке значення має зміщення рівнодійної сили Q відносно центра ваги перерізу. Для наочності розглянемо один з найпростіших випадків, коли на консоль швелерного перерізу діє вертикальна сила P у головній площині xy (рис. 313, *а*). Це навантаження спричинює в перерізах балки змінні по довжині згинальні моменти $M(x) = Px$ та постійну поперечну силу $Q(x) = P$ (рис. 313, *б*). У поперечних перерізах, крім нормальних напружень, діють дотичні напруження: τ – у стінці та $\tau_{п}$ – у полицях. Поперечна сила $Q(x) = P$, що є рівнодійною дотичних зусиль, у будь-якому перерізі зміщена відносно геометричної осі стрижня (осі x) на одну і ту саму відстань $z_0 + z_C$.

Отже, ділянка балки між вільним кінцем та довільним перерізом (рис. 313, *б*) перебуває під дією сил P, $Q(x) = P$ і моменту $M(x) = Px$. Ця система сил задовольняє всі умови рівноваги, крім одного: тут сума моментів відносно осі x не дорівнює нулю. Проте розглядувана ділянка балки перебуває в рівновазі. Тому в перерізі x має діяти ще один силовий фактор — крутний момент $M_{кр} = P(z_0 + z_C)$, напрямлений, як зображено на рис. 313, *б*. Унаслідок цього, незважаючи на те що навантаження перетинає вісь x, балка буде не тільки згинатися, а ще й скручуватися. Досліди це підтверджують (рис. 313, *в*). Отже, в поперечних перерізах балки виникає додаткове поле дотичних напружень, яке разом з полем дотичних напружень від згинання зрівноважує силу P.

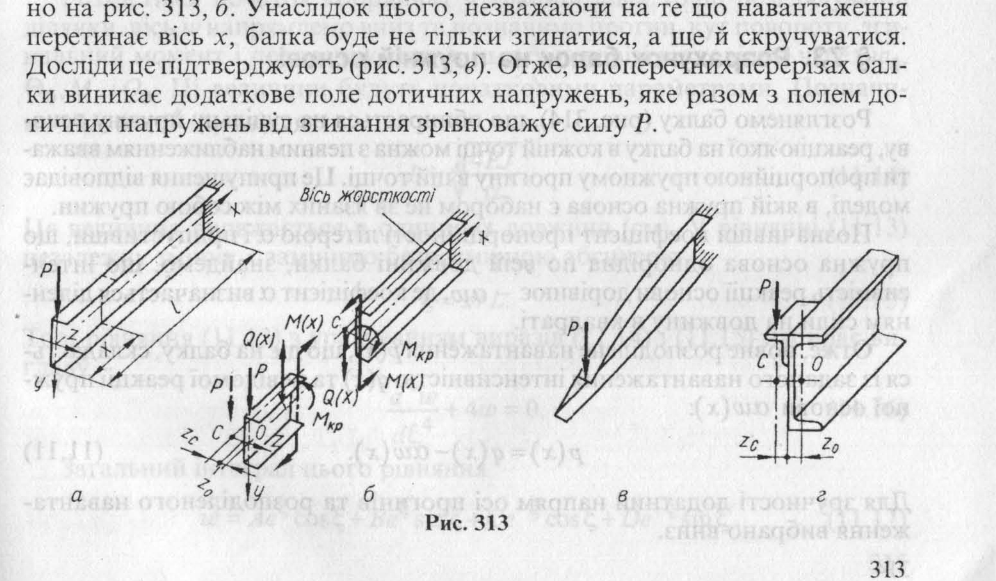


Рис. 313

Як відомо, відкриті тонкостінні профілі погано працюють на кручення. Крім того, якщо балка закріплена так, що депланація перерізу в закріпленні (жорсткозатискна опора) неможлива, то відбувається так зване стиснуте кручення, при якому в поперечному перерізі виникають не тільки дотичні, а й значні нормальні напруження. Тому бажано вживати заходів для усунення кручення в балках відкритих прокатних профілів. З цієї причини застосовують симетричні перерізи (наприклад, з двох швелерів) або балку навантажують у площині, що проходить через точку C паралельно головній площині (на рис. 313, *б* таке положення навантаження показано штрихпунктиром; на рис. 313, *г* зображено один з можливих варіантів конструктивного оформлення зміщення зовнішньої сили). У такому випадку ділянка балки завдовжки x повністю зрівноважена силами P, $Q(x)=P$ та моментом $M(x)=Px$; кручення немає.

Точка C, через яку проходить рівнодійна дотичних зусиль при згинанні балки, називається *центром згинання* (іноді — *центром кручення* або *центром жорсткості*). Центри згинання всіх поперечних перерізів лежать на прямій, яку називають *віссю жорсткості* балки (рис. 313, *б*).

Якщо на балку діє кілька сил, то для виключення кручення вони мають перетинати вісь жорсткості. Якщо переріз має дві (чи більше) осі симетрії, то центр згинання лежить у точці перетину цих осей, тобто збігається з центром ваги перерізу.

Приклад 49. *Як приклад застосування формули (11.10) визначимо положення центра згинання для швелера № 18а.*

Згідно з сортаментом, h = 18 см, b = 7,4 см, d = 0,51 см, t = 0,93 см, J =1190 см^4. Тоді

$$z_C=\frac{t(h-t)^2(b-d)^2}{4J}-\frac{d}{2}=\left(\frac{0{,}93\cdot 17{,}07^2\cdot 6{,}89^2}{4\cdot 1190}-0{,}26\right)\text{см}=2{,}7\text{ см}.$$

§ 73. Розрахунок балок на пружній основі

Розглянемо балку (рис. 314), що обпирається на суцільну пружну основу, реакцію якої на балку в кожній точці можна з певним наближенням вважати пропорційною пружному прогину в цій точці. Це припущення відповідає моделі, в якій пружна основа є набором не зв'язаних між собою пружин.

Позначивши коефіцієнт пропорційності літерою α і припустивши, що пружна основа однорідна по всій довжині балки, знайдемо, що інтенсивність реакції основи дорівнює $-\alpha w$, де коефіцієнт α визначається діленням сили на довжину в квадраті.

Отже, повне розподілене навантаження $p(x)$, що діє на балку, складається із заданого навантаження інтенсивністю $q(x)$ та невідомої реакції пружної основи $\alpha w(x)$:

$$p(x)=q(x)-\alpha w(x). \tag{11.11}$$

Для зручності додатний напрям осі прогинів та розподіленого навантаження вибрано вниз.

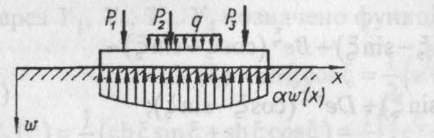


Рис. 314

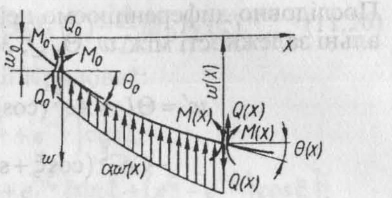


Рис. 315

Розрахунок балки на пружній основі є статично невизначуваною задачею, оскільки лише рівнянь рівноваги недостатньо для визначення закону зміни інтенсивності реакцій основи по довжині балки. Інтенсивність реакції основи пов'язана з деформацією балки, тому для розв'язання задачі спочатку знайдемо рівняння пружної осі балки.

Диференціальне рівняння зігнутої осі для балки постійного поперечного перерізу на пружній основі, згідно з виразом (10.49), можна, враховуючи вибрані напрями прогинів w та інтенсивності навантаження q, записати так:

$$\frac{d^4w(x)}{dx^4}=\frac{1}{EJ}\left[q(x)-\alpha w(x)\right]. \tag{11.12}$$

Спочатку розглянемо ділянку балки (рис. 315), на якій немає зовнішнього розподіленого навантаження. Диференціальне рівняння для цього прикладу спрощується. Маємо

$$\frac{d^4w(x)}{dx^4}=-\frac{\alpha}{EJ}w(x). \tag{11.13}$$

Розмістимо початок координат у крайній лівій точці розглядуваної ділянки, вісь w напрямлемо вниз та позначимо прогин, кут повороту, згинальний момент і поперечну силу в цьому перерізі відповідно через w_0, Θ_0, M_0 і Q_0. Ці величини будуть початковими параметрами. Позначимо $EJ/\alpha=L^4/4$, звідки

$$L=\sqrt[4]{\frac{4EJ}{\alpha}}. \tag{11.14}$$

Ця величина виражається в одиницях довжини (см). У рівнянні (11.13) незалежну змінну x замінимо безрозмірною абсцисою

$$\xi=x/L. \tag{11.15}$$

Тоді рівняння (11.13) з урахуванням виразів (11.14) і (11.15) набирає вигляду

$$\frac{d^4w}{d\xi^4}+4w=0. \tag{11.16}$$

Загальний інтеграл цього рівняння

$$w=Ae^{\xi}\cos\xi+Be^{\xi}\sin\xi+Ce^{-\xi}\cos\xi+De^{-\xi}\sin\xi. \tag{11.17}$$

Послідовно диференціюємо цей вираз по ξ, взявши до уваги диференціальні залежності між w, Θ, Q, M та співвідношення (11.15):

$$w' = \Theta L = Ae^{\xi}(\cos\xi - \sin\xi) + Be^{\xi}(\cos\xi + \sin\xi) -$$
$$-Ce^{-\xi}(\cos\xi + \sin\xi) + De^{-\xi}(\cos\xi - \sin\xi); \quad (11.18)$$

$$w'' = -\frac{M(x)L^2}{EJ} = -2\left(Ae^{\xi}\sin\xi - Be^{\xi}\cos\xi + Ce^{-\xi}\sin\xi + De^{-\xi}\cos\xi\right); \quad (11.19)$$

$$w''' = -\frac{Q(x)L^3}{EJ} = -2\Big[Ae^{\xi}(\cos\xi + \sin\xi) - Be^{\xi}(\cos\xi - \sin\xi) -$$
$$-Ce^{-\xi}(\cos\xi - \sin\xi) - De^{-\xi}(\cos\xi + \sin\xi)\Big]. \quad (11.20)$$

Виразимо довільні сталі A, B, C і D через початкові параметри w_0, Θ_0, Q_0 і M_0, поклавши для цього в рівняннях (11.17) — (11.20) $\xi = 0$:

$$w_0 = A + C;$$
$$L\Theta_0 = A + B - C + D;$$
$$L^2 M_0 = (-2B + 2D)EJ; \quad (11.21)$$
$$L^3 Q_0 = (2A - 2B - 2C - 2D)EJ.$$

З цієї системи лінійних алгебраїчних рівнянь маємо:

$$A = \frac{w_0}{2} + \frac{L\Theta_0}{4} + \frac{L^3 Q_0}{8EJ};$$
$$B = \frac{L\Theta_0}{4} - \frac{L^2 M_0}{4EJ} - \frac{L^3 Q_0}{8EJ}; \quad (11.22)$$
$$C = \frac{w_0}{2} - \frac{L\Theta_0}{4} - \frac{L^3 Q_0}{8EJ};$$
$$D = \frac{L\Theta_0}{4} + \frac{L^2 M_0}{4EJ} - \frac{L^3 Q_0}{8EJ}.$$

Підставивши ці вирази для довільних сталих у формули (11.17) — (11.20), знайдемо:

$$w(x) = w_0 Y_1(\xi) + L\Theta_0 Y_2(\xi) - \frac{L^2 M_0}{EJ} Y_3(\xi) - \frac{L^3 Q_0}{EJ} Y_4(\xi); \quad (11.23)$$

$$\Theta(x) = \Theta_0 Y_1(\xi) - \frac{LM_0}{EJ} Y_2(\xi) - \frac{L^2 Q_0}{EJ} Y_3(\xi) - \frac{4w_0}{L} Y_4(\xi); \quad (11.24)$$

$$M(x) = M_0 Y_1(\xi) + LQ_0 Y_2(\xi) + \alpha L^2 w_0 Y_3(\xi) + \alpha L^3 \Theta_0 Y_4(\xi); \quad (11.25)$$

$$Q(x) = Q_0 Y_1(\xi) + \alpha L w_0 Y_2(\xi) + \alpha L^2 \Theta_0 Y_3(\xi) - \frac{4}{L} M_0 Y_4(\xi). \quad (11.26)$$

Тут через Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 позначено функції Крилова*:

$$Y_1(\xi) = \operatorname{ch}\xi\cos\xi = \frac{1}{2}\left(e^{\xi} + e^{-\xi}\right)\cos\xi;$$
$$Y_2(\xi) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}\xi\sin\xi + \operatorname{sh}\xi\cos\xi) = \frac{1}{4}\left[\left(e^{\xi} + e^{-\xi}\right)\sin\xi + \left(e^{\xi} - e^{-\xi}\right)\cos\xi\right];$$
$$Y_3(\xi) = \frac{1}{2}\operatorname{sh}\xi\sin\xi = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(e^{\xi} - e^{-\xi}\right)\right]\sin\xi; \quad (11.27)$$
$$Y_4(\xi) = \frac{1}{4}(\operatorname{ch}\xi\sin\xi - \operatorname{sh}\xi\cos\xi) = \frac{1}{8}\left[\left(e^{\xi} + e^{-\xi}\right)\sin\xi - \left(e^{\xi} - e^{-\xi}\right)\cos\xi\right].$$

Зазначимо, що при диференціюванні функцій Крилова дістають такі прості, але важливі для практичного застосування залежності:

$$LY_1' = -4Y_4; \quad LY_2' = Y_1; \quad (11.28)$$
$$LY_3' = Y_2; \quad LY_4' = Y_3.$$

Перейдемо до виведення загальних рівнянь для w, Θ, M і Q при дії довільних розподілених або зосереджених зовнішніх навантажень.

Нехай на відрізку x балки (рис. 316) діють вертикальна зосереджена сила P_i у точці з абсцисою b_i, зосереджений момент M_i у точці з абсцисою a_i та рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю q_i на ділянці від $x = c$ до $x = d$.

Для виведення скористуємося принципом незалежності дії сил, а також вважаємо, що переміщення малі. Спочатку припустимо, що всі зовнішні навантаження на ділянці x дорівнюють нулю, тоді загальний інтеграл, або прогин $w(x)$, буде функцією початкових параметрів і абсциси x за формулою (11.23). Нехай тепер усі початкові параметри дорівнюють нулю, але діють зосереджені навантаження P_i та M_i. Очевидно, їх можна взяти як нові статичні початкові параметри і визначити $w(x)$ за формулою (11.23), підставивши $M_0 = M_i$; $Q_0 = -P_i$. При цьому як початок координат треба вибрати не точку O, а відповідно до розміщення кожного силового фактора точки з абсцисами a_i та b_i. Тому аргументами функцій Крилова Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 будуть

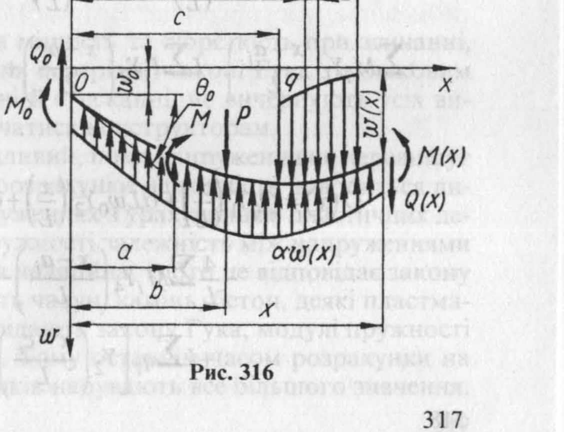


Рис. 316

*Таблиці функцій О. М. Крилова можна знайти в [13].

відстані від розглядуваного перерізу до нових силових факторів P_i та M_i, тобто відрізки $(x-a_i)$, $(x-b_i)$ і т. ін.

Якщо сил і моментів кілька, то вводять їхні суми. При розподілених навантаженнях суми перетворюються на інтеграли від елементарних силових факторів $qd\eta$, а при кількох ділянках розподілених навантажень — на суми інтегралів.

Обмежимося розглядом випадку дії рівномірно розподіленого навантаження. Тоді, інтегруючи з урахуванням залежності (11.28), дістанемо просту формулу

$$\int_c^d qY_4(\xi-\eta)d\eta = -\frac{qL}{4}Y_1(\xi-\eta)\Big|_c^d = -\frac{qL}{4}\left[Y_1(\xi-d)-Y_1(\xi-c)\right]. \quad (11.29)$$

Отже, при одночасній дії всіх зазначених силових факторів і початкових параметрів повний інтеграл $w(x)$ можна подати так:

$$w(x)=w_0Y_1\left(\frac{x}{L}\right)+\Theta_0LY_2\left(\frac{x}{L}\right)+\frac{1}{EJ}\left\{M_0L^2Y_3\left(\frac{x}{L}\right)+Q_0L^3Y_4\left(\frac{x}{L}\right)+\right. \quad (11.30)$$

$$\left.+L^2\sum M_iY_3\left(\frac{x-a_i}{L}\right)-L^3\sum P_iY_4\left(\frac{x-b_i}{L}\right)+\frac{L^4}{4}\sum q_i\left[Y_1\left(\frac{x-c_i}{L}\right)-Y_1\left(\frac{x-d_i}{L}\right)\right]\right\}.$$

Узагальнивши аналогічно вирази для $\Theta(x), M(x)$ і $Q(x)$, дістанемо такі універсальні рівняння методу початкових параметрів для балки на пружній основі:

$$\Theta(x)=\Theta_0Y_1\left(\frac{x}{L}\right)+\frac{1}{EJ}\left\{M_0LY_2\left(\frac{x}{L}\right)+Q_0L^2Y_3\left(\frac{x}{L}\right)+\alpha L^3w_0Y_4\left(\frac{x}{L}\right)+\right.$$

$$\left.+L\sum M_iY_2\left(\frac{x-a_i}{L}\right)-L^2\sum P_iY_3\left(\frac{x-b_i}{L}\right)-L^3\sum q_i\left[Y_4\left(\frac{x-c_i}{L}\right)-Y_4\left(\frac{x-d_i}{L}\right)\right]\right\};$$

(11.31)

$$M(x)=M_0Y_1\left(\frac{x}{L}\right)+Q_0LY_2\left(\frac{x}{L}\right)+\alpha L^2w_0Y_3\left(\frac{x}{L}\right)+\alpha L^3\Theta_0Y_4\left(\frac{x}{L}\right)+$$

$$+\sum M_iY_1\left(\frac{x-a_i}{L}\right)-L\sum P_iY_2\left(\frac{x-b_i}{L}\right)+L^2\sum q_i\left[Y_3\left(\frac{x-c_i}{L}\right)-Y_3\left(\frac{x-d_i}{L}\right)\right];$$

(11.32)

$$Q(x)=Q_0Y_1\left(\frac{x}{L}\right)+\alpha Lw_0Y_2\left(\frac{x}{L}\right)+\alpha L^2\Theta_0Y_3\left(\frac{x}{L}\right)-\frac{4M_0}{L}Y_4\left(\frac{x}{L}\right)-$$

$$-\frac{4}{L}\sum M_iY_4\left(\frac{x-a_i}{L}\right)-\sum P_iY_1\left(\frac{x-b_i}{L}\right)+$$

$$+L\sum q_i\left[Y_2\left(\frac{x-c_i}{L}\right)-Y_2\left(\frac{x-d_i}{L}\right)\right]. \quad (11.33)$$

Таблиця 16

Умови закріплення		Переміщення та силові фактори для							
лівого кінця балки	правого кінця балки	лівого кінця ($x = 0$)				правого кінця ($x = l$)			
		w (0)	Θ (0)	M (0)	Q (0)	w (l)	Θ (l)	M (l)	Q (l)
Вільний	Вільний	—	—	M_0	Q_0	—	—	M_l	Q
«	Обпертий	—	—	M_0	Q_0	0	—	M_l	—
«	Затиснутий	—	—	M_0	Q_0	0	0	—	—
Обпертий	Обпертий	0	—	M_0	—	0	—	M_l	—
«	Затиснутий	0	—	M_0	—	0	0	—	—
Затиснутий	«	0	0	—	—	0	0	—	—

Тепер обчислення $w(x), \Theta(x), M(x)$ та $Q(x)$ у будь-якому перерізі балки на пружній основі не спричинить утруднень, якщо відомі початкові параметри w_0, Θ_0, Q_0 і M_0. У кожному конкретному випадку початкові параметри можна визначити з умов на кінцях балки. Ці умови для різних випадків закріплення балки наведено в табл. 16 (припускається, що початок координат суміщено з лівим кінцем балки).

У таблиці через $M(l)$ і $Q(l)$ позначено зовнішні зосереджений момент і силу на правій опорі. Якщо на вільних кінцях балки зовнішніх сил і моментів немає, то треба покласти

$$M_0 = Q_0 = M_l = Q_l = 0.$$

Як видно з таблиці, при виборі початку координат на лівому кінці однопрогонової балки два початкових параметри завжди відомі. Для визначення двох інших параметрів треба розв'язати систему двох алгебраїчних рівнянь, які складаються з умов закріплення правого кінця балки.

§ 74. Згинання балок, матеріал яких не відповідає закону Гука

Викладені вище розрахунки на міцність та жорсткість при згинанні, що ґрунтуються на гіпотезі плоских перерізів і законі Гука з однаковим модулем пружності при розтяганні й стисканні, не вичерпують усіх випадків, з якими доводиться зустрічатися конструкторам.

Відомо, що закон Гука справедливий, поки напруження не перевищує границю пропорційності, а іноді розрахунки на міцність доводиться виконувати при більш високих напруженнях з урахуванням пластичних деформацій. Крім того, і в межах пружності залежність між напруженнями і деформаціями у низки матеріалів нелінійна, тобто не відповідає закону Гука. До таких матеріалів належать чавун, камінь, бетон, деякі пластмаси. У деяких матеріалів, що відповідають закону Гука, модулі пружності при розтяганні та стисканні різні. Тому останнім часом розрахунки на міцність для всіх зазначених випадків набувають все більшого значення.

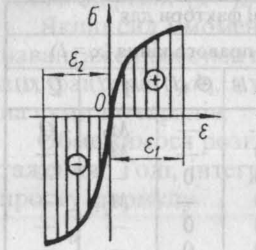


Рис. 317

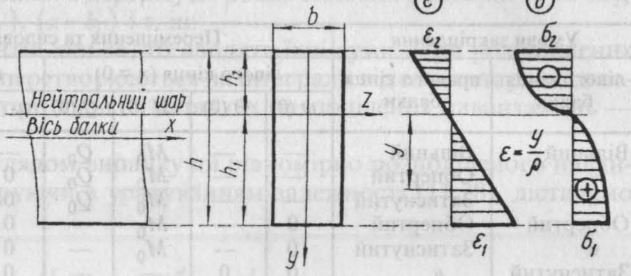


Рис. 318

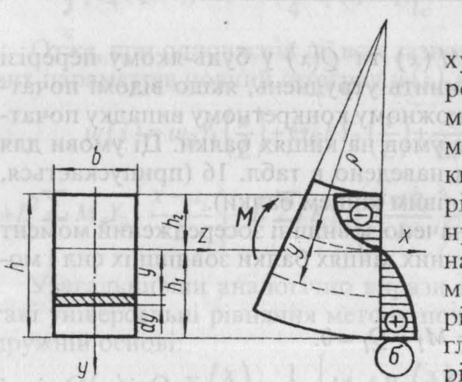


Рис. 319

Розрахунки на міцність з урахуванням пластичних деформацій розглядатимуться в розд. 19. Тут обмежимося лише визначенням нормальних напружень при згинанні балки прямокутного поперечного перерізу, матеріал якої не відповідає закону Гука протягом всього процесу навантажування, причому залежності між напруженнями і деформаціями різні при розтяганні й стисканні. Розглянемо також випадок згинання при різних модулях пружності для розтягання і стискання. Досліди свідчать, що в зазначених випадках гіпотеза плоских перерізів справедлива.

Нехай балка зазнає чистого згинання. Якщо припустити, як і раніше, що волокна при згинанні не тиснуть одне на одне, то матеріал балки перебуває в стані простого розтягання і стискання.

Діаграми розтягання і стискання для матеріалів, які не відповідають закону Гука (чавун, камінь тощо), показують, що напруження зростають повільніше, ніж деформації, причому більшою мірою це відбувається при розтяганні, ніж при стисканні (рис. 317). У цьому разі нейтральна лінія поперечного перерізу не проходить через його центр ваги, а зміщується в бік центра кривини осі балки.

На підставі гіпотези плоских перерізів та зазначеного характеру діаграми розтягання (стискання) матеріалу можна зобразити епюри відносних подовжень та нормальних напружень (рис. 318) у поперечному перерізі балки. Якщо позначити радіус кривини нейтрального шару через ρ, то відносне подовження волокна, що розміщується на відстані y від нейтрального шару (рис. 318, 319), виражатиметься вже відомою залежністю

$$\varepsilon = y/\rho.$$

Для визначення відносних подовжень волокон балки, а потім нормальних напружень треба знайти положення нейтральної осі поперечного перерізу, радіус кривини нейтрального шару та виразити аналітично чи графічно залежність між деформаціями та напруженнями.

Проведемо який-небудь поперечний переріз балки, перпендикулярний до її осі. При згинанні балки парами сил внутрішні сили пружності в поперечному перерізі мають звестися також до пари, отже, проекція нормальних зусиль на вісь x (рис. 319) дорівнює нулю, а момент їх відносно нейтральної осі z дорівнює згинальному моменту.

Отже, дістанемо такі два рівняння статики:

$$\Sigma x = \int_F \sigma dF = 0; \tag{11.34}$$

$$\Sigma M_z = \int_F \sigma y dF - M = 0. \tag{11.35}$$

Оскільки $dF = bdy$, то відповідно

$$b\left(\int_0^{h_1} \sigma_{\text{р}} dy - \int_0^{h_2} \sigma_{\text{ст}} dy\right) = 0; \tag{11.36}$$

$$b\left(\int_0^{h_1} \sigma_{\text{р}} y dy + \int_0^{h_2} \sigma_{\text{ст}} y dy\right) = M. \tag{11.37}$$

Для багатьох матеріалів залежність між напруженнями і деформаціями при розтяганні й стисканні з достатньою точністю можна зобразити степеневим законом

$$\varepsilon_{\text{р}} = k_{\text{р}} \sigma_{\text{р}}^n; \quad \varepsilon_{\text{ст}} = k_{\text{ст}} \sigma_{\text{ст}}^m, \tag{11.38}$$

де $k_{\text{р}}$, $k_{\text{ст}}$, n і m — сталі, що характеризують фізичні властивості матеріалу.

Ураховуючи формулу (11.34) для відносного подовження, з виразів (11.38) можна записати:

$$\sigma_{\text{р}} = \left(\frac{\varepsilon_{\text{р}}}{k_{\text{р}}}\right)^{1/n} = \left(\frac{y}{k_{\text{р}}\rho}\right)^{1/n}; \quad \sigma_{\text{ст}} = \left(\frac{\varepsilon_{\text{ст}}}{k_{\text{ст}}}\right)^{1/m} = \left(\frac{y}{k_{\text{ст}}\rho}\right)^{1/m}. \tag{11.39}$$

Ці залежності та рівняння (11.36) і (11.37) дають змогу визначити положення нейтральної осі, радіус кривини, а також напруження $\sigma_{\text{р}}$ і $\sigma_{\text{ст}}$.

Підставивши формули (11.39) у рівняння (11.36), дістанемо

$$b\left[\int_0^{h_1}\left(\frac{y}{k_{\text{р}}\rho}\right)^{1/n} dy - \int_0^{h_2}\left(\frac{y}{k_{\text{ст}}\rho}\right)^{1/m} dy\right] = 0,$$

а проінтегрувавши, матимемо

$$\frac{n}{n+1}\left(\frac{h_1}{k_{\text{р}}\rho}\right)^{1/n} h_1 - \frac{m}{m+1}\left(\frac{h_2}{k_{\text{ст}}\rho}\right)^{1/m} h_2 = 0. \tag{11.40}$$

Далі, підставивши формулу (11.39) у рівняння (11.37), знайдемо, що

$$b\left[\int_0^{h_1}\left(\frac{y}{k_{\text{р}}\rho}\right)^{1/n} y dy+\int_0^{h_2}\left(\frac{y}{k_{\text{ст}}\rho}\right)^{1/m} y dy\right]=M,$$

і після інтегрування дістанемо

$$\frac{n}{2n+1}b\left(\frac{h_1}{k_{\text{р}}\rho}\right)^{1/n} h_1^2+\frac{m}{2m+1}b\left(\frac{h_2}{k_{\text{ст}}\rho}\right)^{1/m} h_2^2=M. \qquad (11.41)$$

Маючи на увазі, що $h_1+h_2=h$, з рівнянь (11.40) і (11.41) знайдемо ρ, h_1 і h_2, а потім за формулами (11.39) — напруження $\sigma_{\text{р}}$ та $\sigma_{\text{ст}}$.

Можна розв'язати також обернену задачу – визначити найбільший допустимий згинальний момент за допустимим напруженням на розтягання $[\sigma_{\text{р}}]$ або стискання $[\sigma_{\text{ст}}]$. Для цього запишемо за формулами (11.39) напруження розтягання та стискання в крайніх волокнах балки на відстані h_1 і h_2 від нейтрального шару:

$$\sigma_1=\left(\frac{h_1}{k_{\text{р}}\rho}\right)^{1/n}; \quad \sigma_2=\left(\frac{h_2}{k_{\text{ст}}\rho}\right)^{1/m}. \qquad (11.42)$$

На підставі цього виразу формули (11.40) та (11.41) можна записати в такому вигляді:

$$\frac{n}{n+1}\sigma_1 h_1-\frac{m}{m+1}\sigma_2 h_2=0; \qquad (11.43)$$

$$\frac{n}{2n+1}b\sigma_1 h_1^2+\frac{m}{2m+1}b\sigma_2 h_2^2=M. \qquad (11.44)$$

Крім того, з формул (11.42) випливає, що

$$\frac{h_1}{h_2}=\frac{\sigma_1^n k_{\text{р}}}{\sigma_2^m k_{\text{ст}}}. \qquad (11.45)$$

Отже, з останніх трьох рівнянь, маючи на увазі, що $h_1+h_2=h$, можна визначити за допустимим напруженням $[\sigma_{\text{р}}]$ чи $[\sigma_{\text{ст}}]$ положення нейтральної осі та допустимий згинальний момент. За граничними значеннями напружень можна визначити граничний згинальний момент, який відповідає граничному значенню, досягнутому одним із напружень у найбільш віддалених від нейтральної осі волокнах у зоні розтягання або стискання.

Так само, як це зроблено для балки прямокутного поперечного перерізу, можна розв'язати задачу і для інших простих перерізів, наприклад складених з прямокутників (таких, як двотавр, тавр тощо).

Розглянемо ще визначення нормальних напружень при згинанні у випадку, коли матеріал відповідає закону Гука, але модулі пружності при розтяганні та стисканні різні. Нехай $E_{\text{р}}$ — модуль пружності матеріалу

при розтяганні, $E_{\text{ст}}$ — при стисканні. Для таких матеріалів $E_{\text{ст}}>E_{\text{р}}$. Епюру нормальних напружень у перерізі балки для цього прикладу зображено на рис. 320.

Для волокон, розміщених на відстані y від нейтрального шару, в зоні розтягання та стискання

$$\sigma_{\text{р}}=\frac{y}{\rho}E_{\text{р}} \quad \sigma_{\text{ст}}=\frac{y}{\rho}E_{\text{ст}}. \qquad (11.46)$$

З рівняння (11.36) випливає, що

$$\int_0^{h_1}\sigma_{\text{р}}dy=\int_0^{h_2}\sigma_{\text{ст}}dy. \qquad (11.47)$$

Підставляючи замість $\sigma_{\text{р}}$ та $\sigma_{\text{ст}}$ їхні вирази (11.46), маємо

$$\frac{E_{\text{р}}}{\rho}\int_0^{h_1}ydy=\frac{E_{\text{ст}}}{\rho}\int_0^{h_2}ydy, \qquad (11.48)$$

звідки після інтегрування дістанемо

$$E_{\text{р}}h_1^2=E_{\text{ст}}h_2^2, \qquad (11.49)$$

або

$$\frac{h_1^2}{h_2^2}=\frac{E_{\text{ст}}}{E_{\text{р}}}.$$

Ураховуючи, що $h_1+h_2=h$, знайдемо

$$h_1=\frac{h\sqrt{E_{\text{ст}}}}{\sqrt{E_{\text{р}}}+\sqrt{E_{\text{ст}}}};$$

$$h_2=\frac{h\sqrt{E_{\text{р}}}}{\sqrt{E_{\text{р}}}+\sqrt{E_{\text{ст}}}}. \qquad (11.50)$$

Отже, положення нейтральної осі визначено.

Тепер знайдемо напруження у крайніх волокнах балки в зонах розтягання $\sigma_{\text{р}}$ і стискання $\sigma_{\text{ст}}$. З епюри напружень (рис. 320) випливає, що сумарна розтягальна сила $N_{\text{р}}$ у зоні розтягання і стискальна сила $N_{\text{ст}}$ в зоні стискання поперечного перерізу визначаються так:

$$N_{\text{р}}=\frac{\sigma_{\text{р}}bh_1}{2}; \quad N_{\text{ст}}=\frac{\sigma_{\text{ст}}bh_2}{2}. \qquad (11.51)$$

Ці сили діють на відстані $(2/3)h_1$ та $(2/3)h_2$ від нейтрального шару. Оскільки зусилля в поперечному пе-

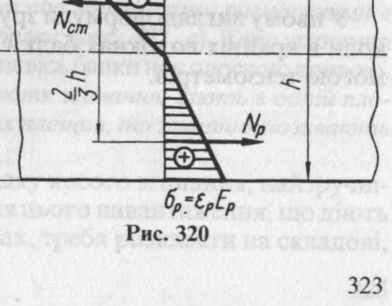


Рис. 320

рерізі зводяться до пари сил, то $N_р = N_{ст}$. Плече пари дорівнює $(2/3)h$. Згинальний момент можна записати у вигляді

$$M = N_р \frac{2}{3} h; \quad M = N_{ст} \frac{2}{3} h.$$

Враховуючи вирази (11.51) та (11.50), маємо

$$M = \frac{\sigma_р b h_1 h}{3} = \frac{\sigma_р b h^2}{3} \frac{\sqrt{E_{ст}}}{\sqrt{E_р} + \sqrt{E_{ст}}};$$

$$M = \frac{\sigma_{ст} b h_2 h}{3} = \frac{\sigma_{ст} b h^2}{3} \frac{\sqrt{E_р}}{\sqrt{E_р} + \sqrt{E_{ст}}}, \tag{11.52}$$

звідки

$$\sigma_р = \frac{3M}{bh^2}\left(1 + \frac{\sqrt{E_р}}{\sqrt{E_{ст}}}\right);$$

$$\sigma_{ст} = \frac{3M}{bh^2}\left(1 + \frac{\sqrt{E_{ст}}}{\sqrt{E_р}}\right). \tag{11.53}$$

Користуючись цими формулами, можна за згинальним моментом знайти найбільші розтягальні та стискальні напруження, якщо відоме відношення модулів пружності.

Запишемо формули (11.53) в дещо іншому вигляді. Згідно з виразом (11.50), маємо

$$\sqrt{\frac{E_р}{E_{ст}}} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{h_2/\rho}{h_1/\rho} = \frac{\varepsilon_{ст}}{\varepsilon_р}.$$

Підставляючи це відношення у формули (11.53), дістанемо

$$\sigma_р = \frac{3M}{bh^2}\left(1 + \frac{\varepsilon_{ст}}{\varepsilon_р}\right); \tag{11.54}$$

$$\sigma_{ст} = \frac{3M}{bh^2}\left(1 + \frac{\varepsilon_р}{\varepsilon_{ст}}\right). \tag{11.55}$$

У цьому вигляді формули зручні для обчислення напружень у випадку, коли в крайніх волокнах балки вимірюють відносні деформації за допомогою тензометрів.

Розділ 12 СКЛАДНИЙ ОПІР

Під складним опором розуміють різні комбінації раніше розглянутих простих напружених станів брусів (розтягання, стискання, зсуву, кручення та згинання).

У загальному випадку навантажування бруса (рис. 321, *а*, *б*) у поперечних перерізах можуть діяти шість компонент внутрішніх сил — $N, Q_y, Q_z, M_y, M_z, M_{кр}$, пов'язаних з чотирма простими деформаціями стрижня – розтяганням (стисканням), зсувом, крученням та згинанням.

Чогось принципово нового задачі складного опору при достатньо жорстких брусах не вносять, оскільки спільна дія зазначених зусиль приводить до напруженого стану, який можна здобути сумуванням напружених станів, спричинених кожним видом простого навантажування окремо. Вміючи визначати нормальні та дотичні напруження в різних точках стрижня, а також головні напруження, можна за тією чи іншою теорією міцності перевірити міцність даного стрижня. Аналогічно може бути вивчена деформація або переміщення бруса відповідним складанням переміщень, що дістають при окремих більш простих навантажуваннях.

Принцип сумування дії сил можна застосовувати в усіх випадках, якщо деформації малі й відповідають закону Гука.

На практиці одночасна дія всіх силових факторів спостерігається нечасто. Частіше доводиться мати справу з різними комбінаціями їх, які й розглянемо нижче.

§ 75. Складне і косе згинання

Складне згинання спричинюються силами або моментами, розміщеними в різних площинах, які проходять крізь вісь балки (рис. 322, *а*). Таке згинання називають також *неплоским*, оскільки зігнута вісь балки не є плоскою кривою.

Якщо всі навантаження, які спричинюють згинання, діють в одній площині, що не збігається ні з однією з головних площин, то згинання називають косим (рис. 323, *а*).

Як у випадку неплоского, так і у випадку косого згинання, найзручніше зводити згинання до двох плоских. Для цього навантаження, що діють у довільних поздовжніх силових площинах, треба розкласти на складові,

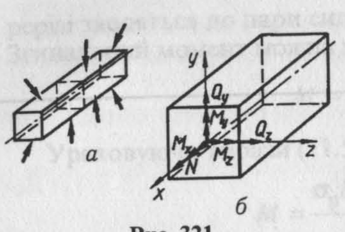


Рис. 321

які розміщуються в головних площинах xy та xz; тут осі y та z — головні осі інерції перерізу (рис. 322 і 323). Отже, схеми навантажування брусів при складному та косому згинанні можуть бути такими, які зображено на рис. 322, *б* та 323, *б* відповідно.

При складному згинанні у поперечних перерізах бруса взагалі виникають чотири внутрішніх силових фактори: Q_z, Q_y, M_z та M_y. Розраховуючи на міцність при складному згинанні, як правило, нехтують впливом дотичних напружень.

Обчислимо напруження в деякій точці (y, z) довільного поперечного перерізу, розмістивши її для певності в першому квадранті (рис. 324, *а*). Напрями головних осей наведено на рисунку. Згинальні моменти вважатимемо додатними, якщо вони спричинюють у точках першого квадранта розтягальні напруження.

Виходячи з принципу суперпозиції, знайдемо напруження в зазначеній точці, розглядаючи два плоских згинання. Нехай спочатку діє тільки момент M_z. Тоді нормальне напруження в точці

$$\sigma' = \frac{M_z y}{J_z}.$$

Якщо діє тільки момент M_y, то

$$\sigma'' = \frac{M_y z}{J_y}.$$

Очевидно, при одночасній дії обох згинальних моментів напруження

$$\sigma = \frac{M_z y}{J_z} + \frac{M_y z}{J_y}. \qquad (12.1)$$

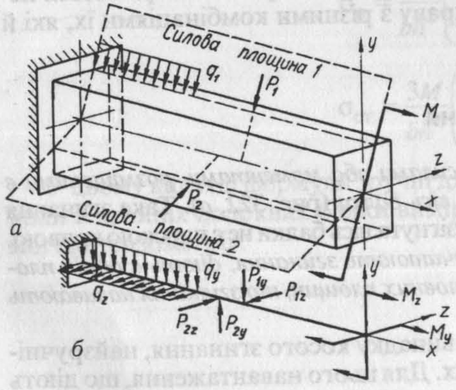


Рис. 322

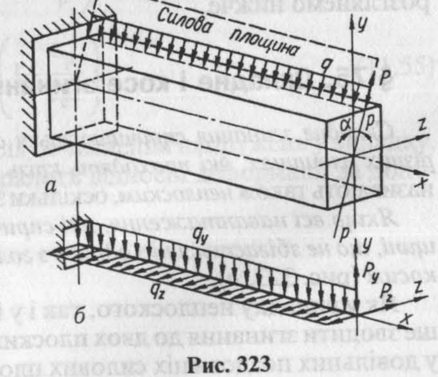


Рис. 323

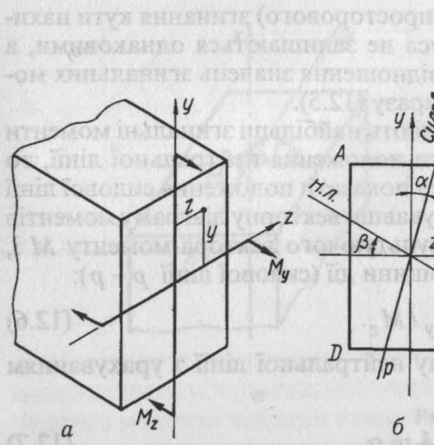


Рис. 324

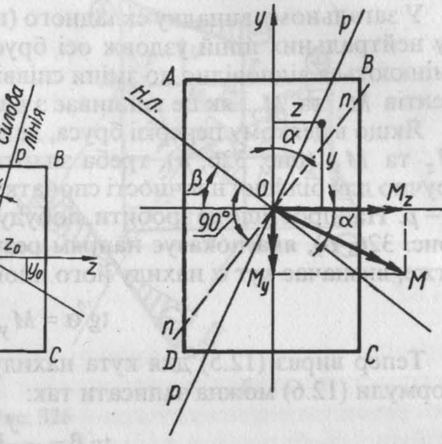


Рис. 325

Формула (12.1) дає змогу визначити нормальні напруження в будь-якій точці поперечного перерізу при складному, або, як ще кажуть, *просторовому згинанні*. Згинальні моменти та координати точок, в яких визначають напруження, підставляють в цю формулу зі своїми знаками.

У випадку косого згинання (рис. 325) згинальні моменти M_z та M_y пов'язані залежностями

$$M_z = M\cos\alpha; \qquad M_y = M\sin\alpha, \qquad (12.2)$$

де M — згинальний момент у даному перерізі в силовій площині $p-p$ (рис. 325).

Тоді, використовуючи формулу (12.1), матимемо

$$\sigma = \frac{My\cos\alpha}{J_z} + \frac{Mz\sin\alpha}{J_y},$$

або

$$\sigma = M\left(\frac{y\cos\alpha}{J_z} + \frac{z\sin\alpha}{J_y}\right). \qquad (12.3)$$

Рівняння нейтральної лінії при складному згинанні в будь-якому поперечному перерізі дістанемо з формули (12.1), поклавши $\sigma = 0$ та позначивши координати точок нейтральної лінії через y_0 та z_0 (рис. 324, *б*). Тоді

$$\sigma = \frac{M_z y_0}{J_z} + \frac{M_y z_0}{J_y} = 0. \qquad (12.4)$$

Це рівняння є рівнянням прямої, що проходить крізь початок координат (центр ваги O перерізу). Положення нейтральної лінії характеризується її кутовим коефіцієнтом

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{y_0}{z_0} = -\frac{M_y}{M_z}\frac{J_z}{J_y}. \qquad (12.5)$$

У загальному випадку складного (просторового) згинання кути нахилу нейтральних ліній уздовж осі бруса не залишаються однаковими, а змінюються відповідно до зміни співвідношення значень згинальних моментів M_z та M_y, як це випливає з виразу (12.5).

Якщо в деякому перерізі бруса, де діють найбільші згинальні моменти M_z та M_y (рис. 326, *а*), треба знайти положення нейтральної лінії, то зручно для більшої наочності спочатку показати положення силової лінії $p - p$. Найпростіше це зробити, побудувавши векторну діаграму моментів (рис. 326, *б*), яка показує напрям результуючого вектора-моменту M і, отже, визначає кут α нахилу його площини дії (силової лінії $p - p$):

$$\operatorname{tg} \alpha = M_y / M_z. \tag{12.6}$$

Тепер вираз (12.5) для кута нахилу нейтральної лінії з урахуванням формули (12.6) можна записати так:

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{J_z}{J_y} \operatorname{tg} \alpha. \tag{12.7}$$

Аналізуючи цей вираз, бачимо, що на відміну від плоского (прямого) згинання при складному згинанні нейтральна та силова лінії взагалі (якщо $J_z \neq J_y$) не будуть взаємно перпендикулярні.

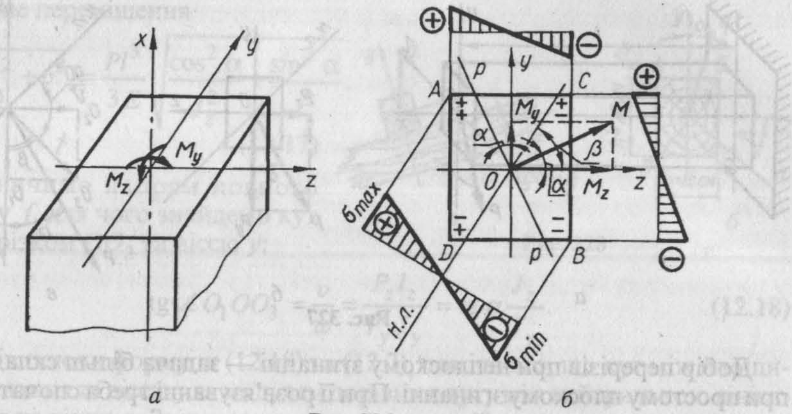
При косому згинанні відповідно до формул (12.2) відношення згинальних моментів M_y та M_z однакові по всій довжині бруса $\left(M_y / M_z = \operatorname{tg} \alpha\right)$. Тому з виразу (12.7) випливає, що й кут β нахилу нейтральної лінії також однаковий. Отже, поперечні перерізи бруса, залишаючись плоскими, повертаються навколо паралельних одна одній нейтральних ліній, як і при простому плоскому згинанні. Викривлення осі бруса при цьому відбувається в одній площині n — n, нормальній до напряму нейтральної лінії (див. рис. 325). Ця площина називається *площиною згинання*.

Перевіряти міцність слід у тих перерізах, де згинальні моменти M_y та M_z одночасно великі. Таких перерізів у загальному випадку складного згинання може бути кілька.

Якщо небезпечний переріз відомий, то в ньому треба відшукати небезпечні точки. Наочне уявлення про розподіл напружень $\sigma(M_y)$ та $\sigma(M_z)$ у поперечному перерізі бруса дають відповідні епюри, які наведено на рис. 326, *б*. Для побудови епюри сумарних напружень σ_x слід провести базис епюри перпендикулярно до нейтральної лінії. З формули (12.1) випливає, що епюра σ лінійна. Тому для її побудови, крім відомої нульової точки, досить визначити будь-яку одну ординату, наприклад для точки A. Очевидно, найбільш напруженими точками перерізу будуть точки, найвіддаленіші від нейтральної лінії — точки A та B (рис. 326, *б*). У цьому випадку в точці A діє найбільше розтягальне напруження, а в точці B — найбільше стискальне.

Отже, умови міцності для небезпечних точок мають вигляд

$$\sigma_{\max} = \sigma_A = \frac{M_z y_A}{J_z} + \frac{M_y z_A}{J_y} \leq [\sigma_+]; \tag{12.8}$$



а *б*

Рис. 326

$$\sigma_{\min} = \sigma_B = -\frac{M_z y_B}{J_z} - \frac{M_y z_B}{J_y} \leq [\sigma_-]; \tag{12.9}$$

У випадку косого згинання, коли напрями згинальних моментів такі, як зображено на рис. 324, *а*, найбільші розтягальні напруження виникають у точці B, а найбільші стискальні — в точці D (див. рис. 324, *б*). Умови міцності набирають вигляду

$$\sigma_{\max} = \sigma_A = M_{\max} \left(\frac{z_B \sin \alpha}{J_y} + \frac{y_B \cos \alpha}{J_z} \right) \leq [\sigma_+]; \tag{12.10}$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_D = -M_{\max} \left(\frac{z_D \sin \alpha}{J_y} + \frac{y_D \cos \alpha}{J_z} \right) \leq [\sigma_-]. \tag{12.11}$$

Зокрема, для прямокутного перерізу

$$\frac{J_y}{z_D} = \frac{J_y}{z_B} = W_y, \quad \frac{J_z}{y_B} = \frac{J_z}{y_D} = W_z,$$

тому формули (12.10), (12.11) можна спростити:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \sigma_B = M_{\max} \left(\frac{\sin \alpha}{W_y} + \frac{\cos \alpha}{W_z} \right) \leq [\sigma_+]; \\ \sigma_{\min} &= \sigma_D = M_{\max} \left(\frac{\sin \alpha}{W_y} + \frac{\cos \alpha}{W_z} \right) \leq [\sigma_-]. \end{aligned} \tag{12.12}$$

У загальному випадку неплоского згинання умова міцності набирає вигляду

$$\sigma_{\max} = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma]. \tag{12.13}$$

Аналогічно перевіряється міцність у точці, де діють найбільші стискальні напруження.

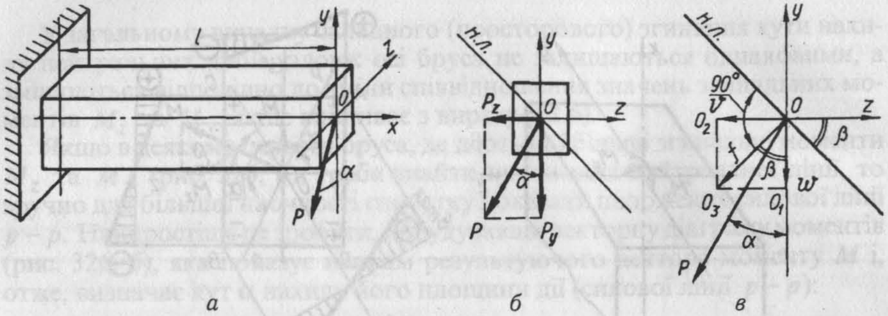


Рис. 327

Добір перерізів при неплоскому згинанні — задача більш складна, ніж при простому плоскому згинанні. При її розв'язуванні треба спочатку задатися відношенням моментів опору й знаходити перерізи методом підбору.

Якщо треба знайти дотичні напруження при неплоскому згинанні, можна скористатися формулами

$$\tau_y = \frac{Q_y S_z}{J_z b}; \quad \tau_z = \frac{Q_z S_y}{J_y h}.$$

Визначаючи переміщення, також виходимо з принципу незалежності дії сил та обчислюємо переміщення в кожній з головних площин. Зберігаючи попередні позначення прогину в напрямі головної осі y через w та позначаючи прогин у напрямі головної осі z через v, запишемо диференціальні рівняння прогинів у площинах xz та xy в такому вигляді:

$$EJ_y \frac{d^2 v}{dx^2} = M_y; \quad EJ_z \frac{d^2 w}{dx^2} = M_z.$$

Користуючись наведеними диференціальними рівняннями, безпосереднім інтегруванням їх або за методом початкових параметрів можна знайти відповідні переміщення. Крім того, переміщення можна визначити енергетичними методами, які розглянемо нижче.

Повний прогин f перерізу визначиться як геометрична сума прогинів v та w:

$$f = \sqrt{v^2 + w^2}. \tag{12.14}$$

Як приклад обчислимо прогин вільного кінця консолі, навантаженої силою P, як наведено на рис. 327, *а*, *б*. Розкладаючи силу P у напрямах осей, дістанемо складові:

$$P_y = P\cos\alpha; \quad P_z = P\sin\alpha. \tag{12.15}$$

На підставі формули (10.54) визначимо прогини в головних площинах (рис. 327, *в*):

$$w = -\frac{P_y l^3}{3EJ_z}; \quad v = -\frac{P_z l^3}{3EJ_y}. \tag{12.16}$$

Повне переміщення

$$f = \sqrt{w^2 + v^2} = \frac{Pl^3}{3E}\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{J_z^2} + \frac{\sin^2\alpha}{J_y^2}}. \tag{12.17}$$

Визначимо напрям повного прогину f, для чого знайдемо кут між відрізком OO_3 та віссю y:

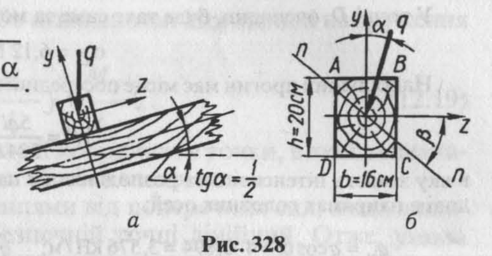


Рис. 328

$$\operatorname{tg}\angle O_1OO_3 = \frac{v}{w} = \frac{P_z l_z}{P_y J_y} = \operatorname{tg}\alpha \frac{J_z}{J_y}. \tag{12.18}$$

Порівнюючи формули (12.18) та (12.7), помічаємо, що кут між площиною згинання та віссю y за модулем дорівнює куту між нейтральною лінією перерізу та віссю z. Звідси випливає, що повний прогин при косому згинанні перпендикулярний до нейтральної лінії перерізу (рис. 327, *в*). Очевидно, відхилення повного прогину від силової площини тим більше, чим більше відношення J_z / J_y.

Зазначимо, що коли $J_z = J_y$ (це має місце для круглого перерізу будь-якого правильного многокутника), сумарний прогин буде в силовій площині. У цих випадках косе згинання неможливе.

Приклад 50. *Дерев'яний прогін перерізом 16×20 см (рис. 328, б) вільно обпирається на кроквяні ферми (рис. 328, а), відстань між якими 3 м. Прогін навантажений вертикальним рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю q = 4 кН/м. Уклон верхнього пояса кроков ферми 1 : 2. Визначимо найбільші напруження стискання та розтягання в перерізі балки, зазначимо точки перерізу, де вони мають місце, та знайдемо повний прогин середнього перерізу балки.*

Максимальний згинальний момент, який буде посередині балки,

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{4\cdot 3^2}{8}\text{ кН}\cdot\text{м} = 4{,}5\text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Складові цього моменту, що діють у головних площинах інерції (відносно осей z та y), визначимо за формулами

$$M_z = -M_{\max}\cos\alpha = -4{,}5\cdot 0{,}894\text{ кН}\cdot\text{м} = -4{,}025\text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y = -M_{\max}\sin\alpha = -4{,}5\cdot 0{,}447\text{ кН}\cdot\text{м} = -2{,}012\text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Кут нахилу нейтральної лінії $n - n$ визначиться з формули (12.7)

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{J_z}{J_y}\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}\frac{h^2}{b^2} = -\frac{1\cdot 20^2}{2\cdot 16^2} = -0{,}7813 = -\operatorname{tg}38^\circ.$$

Найбільшими будуть напруження стискання в точці B та розтягання в точці D, тобто в точках, найбільш віддалених від нейтральної лінії:

$$\sigma_B = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = 6\left(\frac{M_z}{bh^2} + \frac{M_y}{b^2 h}\right) = \frac{6}{16\cdot 20\cdot 10^{-4}} \times$$

$$\times\left(\frac{4{,}025\cdot 10^{-3}}{20\cdot 10^{-2}} + \frac{2{,}012\cdot 10^{-3}}{16\cdot 10^{-2}}\right)\text{ МПа} = -6{,}12\text{ МПа}.$$

У точці D, очевидно, буде таке саме за модулем напруження розтягання:

$$\sigma_D = 6{,}12 \text{ МПа}.$$

Найбільший прогин має місце посередині прогону. Визначаємо його за формулою

$$|f| = \frac{5ql^4}{384EJ},$$

в яку замість інтенсивності розподіленого навантаження слід підставити його складові в напрямах головних осей:

$$q_y = q\cos\alpha = 4\cdot 0{,}894 = 3{,}576 \text{ кН/м}; \quad q_z = q\sin\alpha = 4\cdot 0{,}447 = 1{,}788 \text{ кН/м},$$

а також моменти інерції відносно головних осей z та y. Складові прогину тоді

$$w = -\frac{5q_y l^4}{384EJ_z} = -\frac{5\cdot 3{,}576\cdot 10^{-3}\cdot 3^4\cdot 12}{384\cdot 10^4\cdot 16\cdot 20^3\cdot 10^{-8}} \text{ м} = -0{,}35 \text{ см};$$

$$v = -\frac{5q_z l^4}{384EJ_y} = -\frac{5\cdot 1{,}788\cdot 10^{-3}\cdot 3^4\cdot 12}{384\cdot 10^4\cdot 16^3\cdot 20\cdot 10^{-8}} \text{ м} = -0{,}28 \text{ см},$$

а повний прогин знайдемо як геометричну суму зазначених складових прогину:

$$f = \sqrt{v^2 + w^2} = \sqrt{0{,}28^2 + 0{,}35^2} \text{ см} = 0{,}45 \text{ см}.$$

Прогин f лежить у площині, яка перпендикулярна до нейтральної лінії.

§ 76. Згинання з розтяганням (стисканням)

Розрахунки на спільну дію згинання та розтягання можна звести до таких двох видів:

а) розрахунки на дію поздовжньо-поперечних навантажень;

б) розрахунки на позацентрове розтягання (стискання). Окремо має розглядатися згинання з розтяганням (стисканням) кривого бруса.

Складне згинання з розтяганням (стисканням) прямого бруса. Якщо на балку діють поздовжні та поперечні навантаження, що перетинають вісь бруса, то в загальному випадку (рис. 329, *а*) в поперечних перерізах виникають згинальні моменти M_z та M_y у двох площинах, поперечні сили Q_z та Q_y, а також поздовжня сила N (рис. 329, *б*). Отже, в цьому разі буде

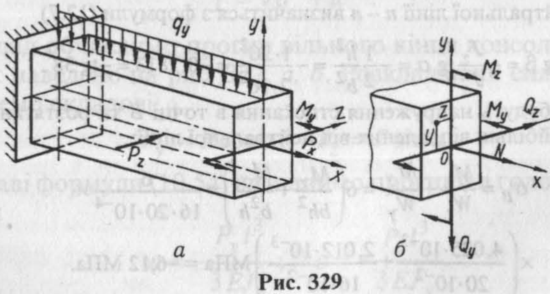


Рис. 329

складне згинання з розтяганням або стисканням. Нормальні напруження в довільній точці перерізу

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{J_z}y + \frac{M_y}{J_y}z. \tag{12.19}$$

Згинальні моменти, поздовжню силу й координати точки, в якій визначають напруження, підставляють сюди з їхніми знаками.

Нехтуючи дотичними напруженнями від поперечних сил, можна вважати, що напружений стан у небезпечній точці лінійний. Отже, умова міцності має більш простий вигляд:

$$\sigma_{\max} \le [\sigma]. \tag{12.20}$$

Якщо переріз має дві осі симетрії й кути, що стирчать, то небезпечною буде одна з кутових точок. Напруження в ній визначають за формулою (12.19) або так*:

$$\sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{M_z}{W_z} \pm \frac{M_y}{W_y}. \tag{12.21}$$

Знаки в цій формулі комбінують за змістом або на підставі порівняння з формулою (12.19).

У випадку плоского згинання в головній площині yOx з розтяганням (стисканням) формула (12.21) спрощується:

$$\sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{M_z}{W_z}. \tag{12.22}$$

Ці формули застосовують при розрахунку на міцність плоских рам та арок малої кривини. Небезпечними в цьому разі є ті перерізи, де діє найбільший згинальний момент.

При розрахунку брусів з поперечним перерізом довільної форми для визначення небезпечної точки перерізу треба насамперед знайти положення нейтральної лінії. Спосіб визначення положення нейтральної лінії описано нижче при розгляді позацентрового стискання.

Приклад 51. *Доберемо двотавровий переріз плоскої сталевої рами (рис. 330, а) при* $[\sigma] = 160$ *МПа.*

Визначивши опорні реакції та побудувавши епюри M_z і N (рис. 330, *в*, *г*), бачимо, що небезпечним виявляється переріз правого стояка, в якому

$$M_{\max} = 57 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad N = -63{,}9 \text{ кН}.$$

Небезпечні точки в цьому перерізі розміщені ліворуч (рис. 330, *б*), оскільки тут арифметично додаються напруження від M_z та N. Відповідно до формули (12.22) умова міцності запишеться так:

$$\sigma_{\max} = \frac{57\cdot 10^{-3}}{W_z} + \frac{63{,}9\cdot 10^{-3}}{F} \text{ МПа} \le 160 \text{ МПа}. \tag{12.23}$$

*При згинанні зі стисканням застосовувати наведені формули можна лише для коротких стрижнів великої жорсткості, оскільки у випадку тонкого довгого стрижня можлива втрата стійкості (див. розд. 20).

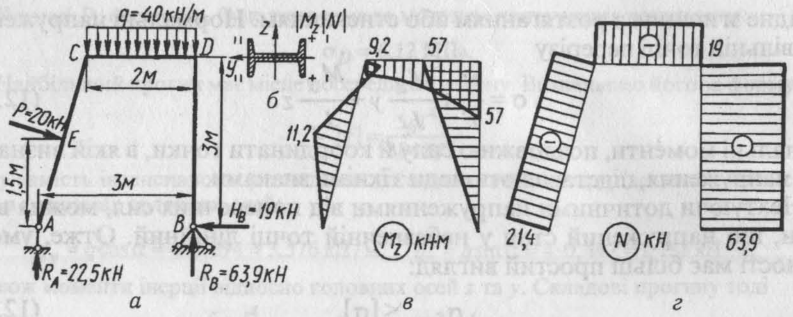


Рис. 330

В умові міцності є дві невідомі величини — W_z та F. Здебільшого напруження σ_x від згинання більші, ніж від поздовжньої сили, тому при доборі перерізу можна спочатку відкинути другий доданок і знайти наближене значення $W_{z\,зг}$ з розрахунку на згинання:

$$W_{z\,зг} \ge \frac{57\cdot10^{-3}}{160}\,м^3 = 356\cdot10^{-6}\,м^3 = 356\,см^3.$$

Далі за сортаментом (дод. 1) треба вибрати двотавр з моментом опору, дещо більшим ніж W. Вибираємо двотавр № 27, для якого $W_z = 371\,см^3$, $F = 40{,}2\,см^2$.

Далі перевіряємо міцність вибраного перерізу, обчислюючи максимальні нормальні напруження за формулою (12.22):

$$\sigma_{max} = \frac{57\cdot10^{-3}}{371\cdot10^{-6}} + \frac{63{,}9\cdot10^{-3}}{40{,}2\cdot10^{-4}}\,МПа = (153{,}6+15{,}9)\,МПа = 169{,}5\,МПа.$$

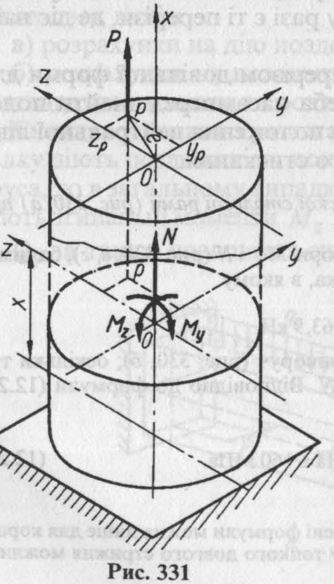


Рис. 331

Перенапруження становить

$$\frac{169{,}5-160}{160}\,100\,\% \approx 6\,\% > 5\,\%,$$

тому потрібно збільшити розмір перерізу, вибравши за сортаментом такий більший номер двотавра — № 27а, для якого

$$W_z = 407\,см^3; \quad F = 43{,}2\,см^2.$$

Позацентрове розтягання (стискання) прямого бруса. *Позацентрове розтягання (стискання) є окремим випадком складного згинання з розтяганням (стисканням), при якому брус розтягується силами, паралельними осі бруса, так що рівнодійна їх не збігається з віссю бруса (рис. 331), а проходить крізь точку p, що називається полюсом сили.*

Нехай на брус довільного перерізу діє одна сила P, яка паралельна осі бруса й перетинає довільний поперечний переріз у точці p (рис. 331). Координати цієї точки в системі головних осей перерізу позначимо

через y_p та z_p, а відстань цієї точки до осі x, яка називається *ексцентриситетом*, — через e. У довільному поперечному перерізі при певному навантаженні діють такі внутрішні силові фактори: $N = P$; $M_y = Pz_p$; $M_z = Py_p$.

Отже, напруження в довільній точці перерізу складатимуться з напружень осьового розтягання силою N та напружень від чистого згинання моментами M_y та M_z:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y}z + \frac{M_z}{J_z}y. \tag{12.24}$$

Підставивши сюди замість N, M_y та M_z їхні значення, дістанемо

$$\sigma = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{z_p F}{J_y}z + \frac{y_p F}{J_z}y\right). \tag{12.25}$$

Ця формула набере дещо іншого вигляду, якщо виразити головні моменти інерції через радіуси інерції:

$$\sigma = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{z_p}{i_y^2}z + \frac{y_p}{i_z^2}y\right). \tag{12.26}$$

Для визначення небезпечної точки при складному профілі доцільно побудувати нейтральну лінію перерізу. Небезпечною в перерізі буде точка, найвіддаленіша від нейтральної лінії.

Рівняння нейтральної лінії матимемо, прирівнявши до нуля праву частину рівняння (12.26) і позначивши координати точок на нейтральній лінії через y_0 та z_0:

$$\frac{z_p}{i_y^2}z_0 + \frac{y_p}{i_z^2}y_0 = -1. \tag{12.27}$$

Поклавши в цьому рівнянні по черзі $z_0 = 0$ і $y_0 = 0$, знайдемо відрізки $y_н$ та $z_н$, що відсікаються нейтральною лінією на осях y та z (рис. 332):

$$z_н = -\frac{i_y^2}{z_p}; \quad y_н = -\frac{i_z^2}{y_p}. \tag{12.28}$$

Із залежностей (12.28) випливає, що нейтральна лінія перетинає координатні осі в точках, які належать квадранту, протилежному тому, в якому лежить точка p.

Тепер, провівши паралельно нейтральній лінії дотичні до контуру перерізу, знайдемо найбільш напружені точки A та B у розтягнутій та стиснутій зонах перерізу (рис. 332).

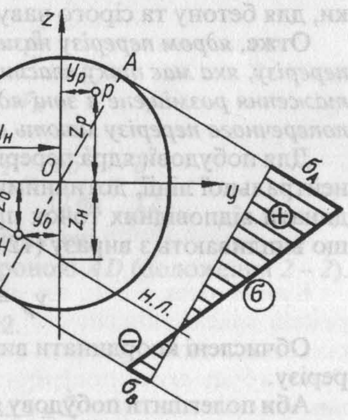


Рис. 332

Напруження в цих точках та умови міцності мають вигляд

$$\sigma_{\max}=\sigma_A=\frac{P}{F}\left(1+\frac{z_p}{i_y^2}z_A+\frac{y_p}{i_z^2}y_A\right)\le[\sigma_+];$$
$$\sigma_{\min}=\sigma_B=\frac{P}{F}\left(1+\frac{z_p}{i_y^2}z_B+\frac{y_p}{i_z^2}y_B\right)\le[\sigma_-]. \qquad (12.29)$$

Тут z_A, y_A та $-z_B, -y_B$ — координати точок A та B відповідно. Епюру напружень σ наведено на рис. 332. Для прямокутного перерізу умову міцності зручніше записати в такому вигляді:

$$\sigma_{\max}=\frac{P}{F}+\frac{M_z}{W_z}+\frac{M_y}{W_y}\le[\sigma]. \qquad (12.30)$$

Формули (12.29) та (12.30) справедливі й у випадку дії стискальної сили P, якщо немає небезпеки виникнення поздовжнього згинання.

Ядро перерізу. Досі ми зображали нейтральну лінію як таку, що проходить крізь переріз. Проте взагалі вона може проходити й поза перерізом. Дійсно, якщо сила P прикладена в центрі ваги, то нейтральна лінія проходить у нескінченності, оскільки напруження в цьому разі розподілені рівномірно.

Із збільшенням ексцентриситета e (рис. 333) нейтральна лінія наближатиметься до перерізу і при деякому положенні сили P (на рис. 333, наприклад, при положенні A_3) вперше торкнеться контуру перерізу. При дальшому збільшенні ексцентриситета нейтральна лінія перетинає переріз, причому нормальні напруження в перерізі будуть обох знаків: по один бік від нейтральної лінії — розтягальними, по інший — стискальними.

Можна визначити зону таких віддалень сили P від осі, при яких нормальні напруження по всьому поперечному перерізу будуть одного знака. Така зона називається *ядром перерізу*. Це важливо для брусів з матеріалів, що погано чинять опір розтяганню (наприклад, для цегляної кладки, для бетону та сірого чавуну).

Отже, *ядром перерізу називають зону навколо центра ваги поперечного перерізу, яка має таку властивість: якщо позацентрово прикладене навантаження розміщене в зоні ядра, то нормальні напруження в усіх точках поперечного перерізу мають один знак.*

Для побудови ядра перерізу будемо задаватися різними положеннями нейтральної лінії, дотичними до контуру перерізу, й обчислювати координати відповідних точок прикладання сили P за такими формулами, що випливають з виразу (12.28):

$$y_p=-\frac{i_z^2}{y_{\text{н}}};\quad z_p=-\frac{i_y^2}{z_{\text{н}}}. \qquad (12.31)$$

Обчислені координати визначають точки, що лежать на межі ядра перерізу.

Аби полегшити побудову ядра перерізу, використаємо таку властивість нейтральної лінії: *при повороті нейтральної лінії навколо деякої фіксованої*

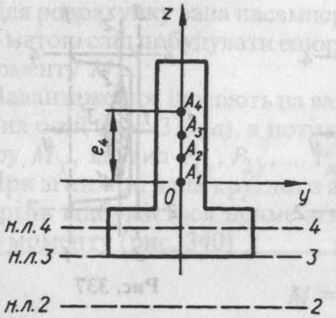


Рис. 333

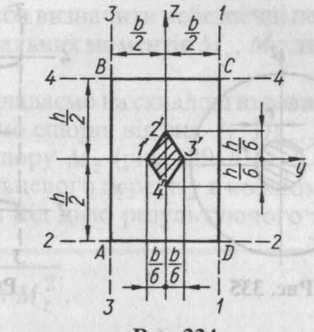


Рис. 334

точки A контуру перерізу точка прикладання сили переміщується вздовж деякої прямої. Щоб обгрунтувати цю властивість, досить підставити в рівняння (12.27) координати точки $A(y_{OA}, z_{OA})$, що лежить на нейтральній лінії. Матимемо

$$\frac{z_p\, z_{OA}}{i_y^2}+\frac{y_p\, y_{OA}}{i_z^2}=-1. \qquad (12.32)$$

Дійсно, рівняння (12.32) при $z_{OA}=\text{const}$ є рівнянням прямої лінії відносно координат точок прикладання сили $P-\left(y_p, z_p\right)$.

Отже, для побудови ядра перерізу будь-якої фігури треба провести кілька положень нейтральної лінії, що збігаються зі сторонами перерізу, а також дотикаються до точок, які стирчать.

Побудуємо, наприклад, ядро перерізу для прямокутника $ABCD$ (рис. 334). Сумістимо спочатку нейтральну лінію зі стороною CD (положення $1-1$). Очевидно, в цьому разі

$$y_{\text{н}}=b/2;\quad z_{\text{н}}=\infty.$$

Тоді із виразів (12.31)

$$y_p^2=-\frac{i_z^2}{y_{\text{н}}}=-\frac{b}{6};\quad z_p=-\frac{i_y^2}{z_{\text{н}}}=0.$$

Тут ураховано, що

$$i_y^2=\frac{J_y}{F}=\frac{bh^3}{12bh}=\frac{h^2}{12};\quad i_z^2=\frac{J_z}{F}=\frac{hb^3}{12bh}=\frac{b^2}{12}.$$

Отже, координати точки $1'$ ядра перерізу визначені.

Сумістимо тепер нейтральну лінію зі стороною AD (положення $2-2$). Маємо

$$y_{\text{н}}=\infty;\quad z_{\text{н}}=h/2.$$

Тоді координати точки $2'$ ядра

$$y_p=0;\quad z_p=-\frac{h^2}{12(-h/2)}=\frac{h}{6}.$$

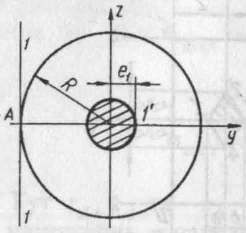


Рис. 335

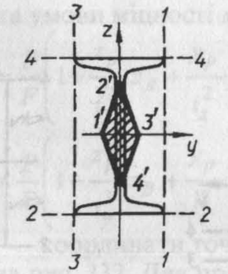


Рис. 336

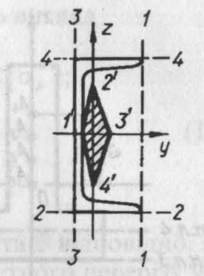


Рис. 337

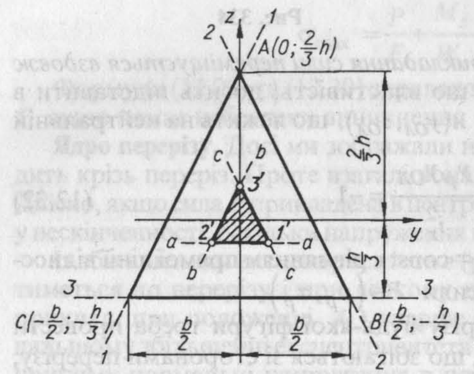


Рис. 338

Аналогічно визначаються координати точок 3′ та 4′, що відповідають положенням 3 – 3 та 4 – 4 нейтральної лінії.

Оскільки при переході нейтральної лінії з одного боку на інший вона повертається навколо кутової точки перерізу, то точка прикладання сили переміщується по прямій, утворюючи контур ядра. Отже, ядро перерізу буде ромбом з діагоналями, які дорівнюють одній третині відповідної сторони перерізу.

Приклад 52. *Для круглого перерізу побудуємо ядро перерізу (рис. 335).*

У колі всі центральні осі — головні. Тому при дотиканні нейтральної лінії *1—1* у будь-якій точці *A* точка *1′* лежить на діаметрі, який також проходить крізь точку *A*; її координати такі:

$$y_p = -\frac{i_z^2}{y_н} = -\frac{i_z^2}{-R} = \frac{R^2}{4R} = \frac{R}{4}; \quad z_p = 0.$$

Очевидно, можна зробити висновок, що внаслідок симетрії перерізу ядро перерізу також буде колом з радіусом

$$e_1 = R/4.$$

Ядро перерізу для двотавра (рис. 336), швелера (рис. 337) та трикутника (рис. 338) рекомендуємо читачеві побудувати самостійно.

§ 77. Згинання з крученням

Круглі вали. Сили, що діють на вали (тиск на зуби шестерень, натяг ремнів, власна вага вала та шківів тощо), спричинюють у поперечних перерізах валів такі внутрішні силові фактори: $M_{кр} = M_x$; M_y; M_z; Q_y та Q_z. Отже, в будь-якому поперечному перерізі одночасно виникають нормальні напруження від згинання в двох площинах, а також дотичні напруження від кручення та згинання.

Для розрахунку вала насамперед треба визначити небезпечні перерізи. З цією метою слід побудувати епюри згинальних моментів M_y, M_z та крутного моменту M_x.

Навантаження, що діють на вал, розкладаємо на складові вздовж координатних осей (рис. 339, *а*), а потім будуємо епюри: від сил $P_{1z}, P_{2z}, ..., P_{nz}$ — епюру M_y, від сил $P_{1y}, P_{2y}, ..., P_{ny}$ — епюру M_z (рис. 339, *б*, *в*).

При згинанні вала круглого або кільцевого перерізу в кожному з його перерізів відбувається пряме згинання під дією результуючого згинального моменту (рис. 340)

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}. \tag{12.33}$$

Вектор моменту M у різних перерізах може мати різні напрями, тому навіть якщо немає розподілених навантажень, епюра M може бути криволінійною (рис. 339, *г*). Для загального випадку це легко довести аналітично.

Припустимо, що $M_y = a + bx$; $M_z = c + dx (a, b, c, d$ — постійні коефіцієнти). Тоді

$$M = \sqrt{(a+bx)^2 + (c+dx)^2}.$$

Вираз під радикалом лише в деяких окремих випадках є повним квадратом (наприклад, при $a = c = 0$), а здебільшого епюра криволінійна, причому

$$m \le \sqrt{a^2 + c^2} + \left(\sqrt{b^2 + d^2}\right)x.$$

Це дає змогу будувати епюри M спрощеним способом, дещо завищуючи значення сумарного згинального моменту M на ділянках між переломами епюри: значення сумарного згинального моменту M обчислюють лише для тих перерізів, у яких на епюрах M_y та M_z є переломи. Ці значення відкладають у масштабі по один бік від осі на епюрі M та сполучають прямою лінією.

Далі будуємо епюру $M_{кр} = M_x$ (рис. 339, *д*) та шукаємо небезпечні перерізи, в яких одночасно великі M та $M_{кр}$. Порівнюючи епюри, знаходимо, що небезпечним буде переріз *1—1* або *2—2*.

Тепер у небезпечному перерізі треба знайти небезпечні точки. Легко визначаємо положення нейтральної лінії $(\beta = \alpha)$ та будуємо епюри нормальних

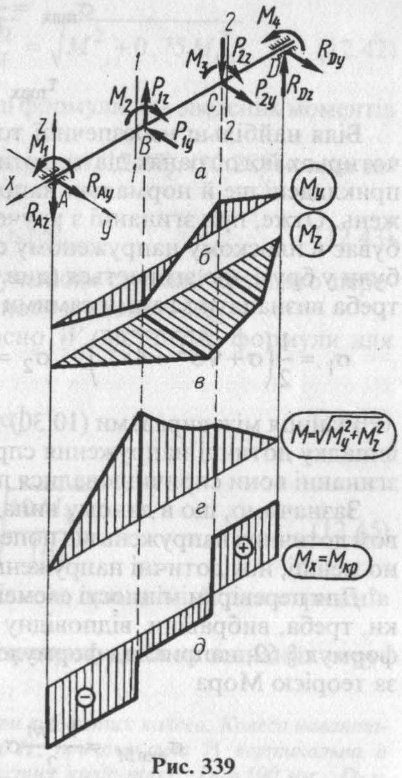


Рис. 339

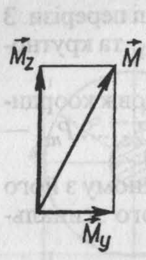


Рис. 340

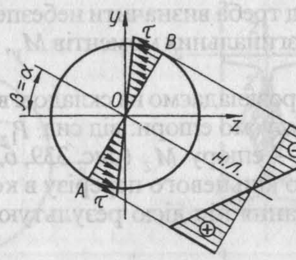


Рис. 341

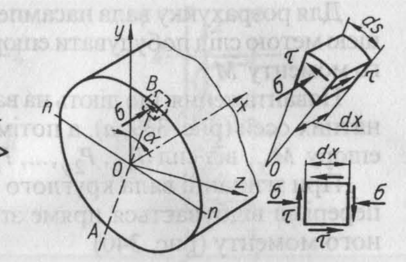


Рис. 342

напружень σ від результуючого згинального моменту M (рис. 341), які змінюються пропорційно відстані точок від нейтральної лінії. Очевидно, небезпечними точками є точки A та B, які найбільш віддалені від нейтральної лінії, — в них одночасно і нормальні напруження від згинання, і дотичні напруження мають найбільші значення:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W}\frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}{W}; \qquad (12.34)$$

$$\tau_{\max} = M_{\text{кр}} / W_p . \qquad (12.35)$$

Біля найбільш небезпечної точки B виділимо елемент (рис. 342). По чотирьох його гранях діють дотичні напруження, а до двох із цих граней прикладені ще й нормальні напруження. Решта граней вільні від напружень. Отже, при згинанні з крученням елемент у небезпечній точці перебуває в плоскому напруженому стані. Аналогічні напруження на гранях були у брусі, що згинається (див. розд. 10), тому тут головні напруження треба визначати за тими самими формулами:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right); \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = \frac{1}{2}\left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right). \qquad (12.36)$$

Різниця між виразами (10.30) та (12.36) лише в тому, що в останньому випадку дотичні напруження спричинюються крутним моментом, а при згинанні вони спричинювалися поперечною силою.

Зазначимо, що в даному випадку складного напруженого стану впливом дотичних напружень від поперечних сил нехтуємо, оскільки вони значно менші, ніж дотичні напруження, спричинені крученням.

Для перевірки міцності елемента, який виділено біля небезпечної точки, треба, вибравши відповідну теорію міцності, скористатися однією з формул § 62, наприклад формулою (10.35) або (10.34):

за теорією Мора

$$\sigma_{\text{екв}\,M} = \frac{1-m}{2}\sigma + \frac{1+m}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma]; \qquad (12.37)$$

за IV теорією

$$\sigma_{\text{екв IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \le [\sigma]. \qquad (12.38)$$

Підставляючи у формули (12.37), (12.38) вирази (12.34), (12.35) для напружень та враховуючи, що $W_p = 2W$, матимемо

$$\sigma_{\text{екв}\,M} = \frac{\frac{1-m}{2}\sqrt{M_y^2 + M_z^2} + \frac{1+m}{2}\sqrt{M_{\text{кр}}^2 + M_y^2 + M_z^2}}{W} \le [\sigma]; \qquad (12.39)$$

$$\sigma_{\text{екв IV}} = \frac{\sqrt{0,75M_{\text{кр}}^2 + M_y^2 + M_z^2}}{W} \le [\sigma]. \qquad (12.40)$$

Чисельники цих формул є зведеними моментами, дія яких еквівалентна спільній дії трьох моментів (згідно з вибраною теорією міцності). Отже,

$$M_{\text{зв}\,M} = \frac{1-m}{2}\sqrt{M_y^2 + M_z^2} + \frac{1+m}{2}\sqrt{M_{\text{кр}}^2 + M_y^2 + M_z^2}\ ; \qquad (12.41)$$

$$M_{\text{зв IV}} = \sqrt{0,75M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{M^2 + 0,75M_{\text{кр}}^2}\ . \qquad (12.42)$$

У разі потреби так само можна здобути формули для зведених моментів і за іншими теоріями міцності.

Неважко помітити, що тепер умови міцності (12.37), (12.28) можна замінити однією простою формулою

$$\sigma_{\text{екв}} = M_{\text{зв}} / W \le [\sigma]. \qquad (12.43)$$

Отже, при спільній дії згинання з крученням стрижні круглого перерізу розраховують на згинання від зведеного моменту $M_{\text{зв}}$.

Розв'язуючи нерівність (12.43) відносно W, дістанемо формули для визначення моменту опору:

$$W \ge M_{\text{зв}} / [\sigma] \qquad (12.44)$$

та діаметра круглого вала:

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{32M_{\text{зв}}}{\pi[\sigma]}} \approx \sqrt[3]{\frac{10M_{\text{зв}}}{[\sigma]}}. \qquad (12.45)$$

Зазначимо, що наведені формули цілком придатні й для стрижнів кільцевого перерізу.

Розглянемо найпростіший приклад розрахунку вала на згинання з крученням.

Приклад 53. *На вал (рис. 343) насаджені три зубчастих колеса. Колеса навантажені силами $P_1 = 4000$ Н, $P_2 = 3000$ Н, $P_3 = 2000$ Н, причому сила P_1 вертикальна, а сили P_2 та P_3 горизонтальні. Діаметри зубчастих коліс такі: $D_1 = 100$ мм; $D_2 =$*

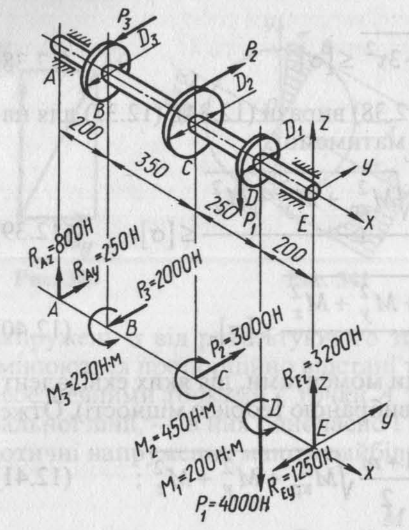


Рис. 343

=300 мм; D_3 = 250 мм. Допустимі напруження $[\sigma]$= 60 МПа. Доберемо діаметр вала за IV теорією міцності.

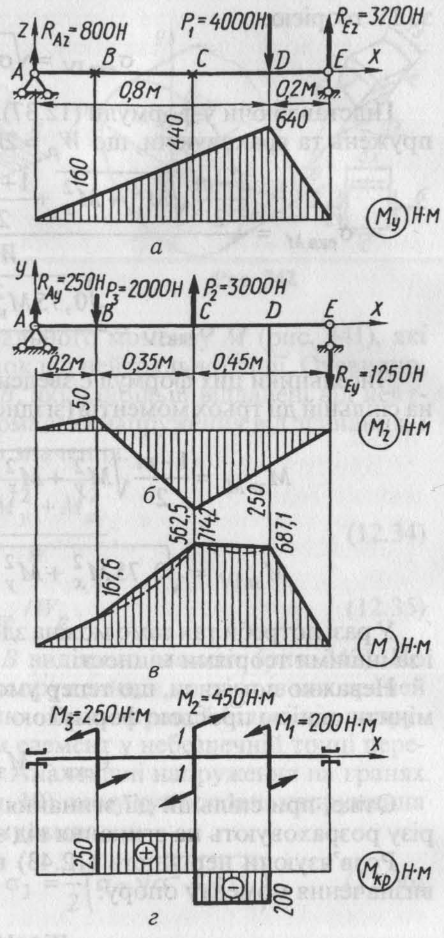


Рис. 344

Замінимо діюче навантаження статично еквівалентною системою сил.

Перенесемо сили P_1, P_2 та P_3 на вісь вала, замінюючи кожну з них силою, прикладеною в точках *B*, *C* або *D* відповідно, й скручувальною парою сил $M_1 = \frac{1}{2}P_1D_1$; $M_2 = \frac{1}{2}P_2D_2$; $M_3 = \frac{1}{2}P_3D_3$ відповідно. Отже, дістаємо розрахункову схему (рис. 343). На схемі наведено як значення прикладених зовнішніх навантажень (P_i, M_{ki}), так і значення спричинених ними опорних реакцій.

Розглядаючи окремо сили в горизонтальній та вертикальній площинах (рис. 344, *а* та *б*), будуємо епюри згинальних моментів. Для побудови сумарної епюри моментів *M* визначаємо ординати в характерних точках за формулою (12.33):

у перерізі *B*

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{160^2 + 50^2}\ \text{Н}\cdot\text{м} = \sqrt{28100}\ \text{Н}\cdot\text{м} = 167{,}6\ \text{Н}\cdot\text{м};$$

у перерізі *C*

$$M = \sqrt{440^2 + 562{,}5^2}\ \text{Н}\cdot\text{м} = \sqrt{510006}\ \text{Н}\cdot\text{м} = 714{,}2\ \text{Н}\cdot\text{м};$$

у перерізі *D*

$$M = \sqrt{640^2 + 250^2}\ \text{Н}\cdot\text{м} = \sqrt{472100}\ \text{Н}\cdot\text{м} = 687{,}1\ \text{Н}\cdot\text{м}.$$

Епюру *M*, побудовану за цими даними, наведено на рис. 344, *в*. Як уже зазначалося, на ділянках *BC* та *CD* така епюра має завищені значення ординат (дійсні значення показано штриховою лінією).

Розглядаючи моменти, що діють на вал, будуємо епюру крутних моментів (рис. 344, *г*).

Порівнюючи епюри *M* та $M_{\text{кр}}$, знаходимо, що небезпечним є переріз *1—1* ліворуч від точки *C*, де одночасно діють $M = 714{,}2$ Н · м та $M_{\text{кр}} = 250$ Н · м.

Згідно з IV теорією міцності, зведений момент визначаємо за формулою (12.42):

$$M_{\text{зв}} = \sqrt{0{,}75\cdot 250^2 + 714{,}2^2}\ \text{Н}\cdot\text{м} = \sqrt{556881{,}25}\ \text{Н}\cdot\text{м} = 746{,}3\ \text{Н}\cdot\text{м}.$$

Підставляючи зведений момент у формулу (12.44), дістаємо потрібний осьовий момент опору:

$$W \geq \frac{M_{\text{зв}}}{[\sigma]} = \frac{746{,}3\cdot 10^{-6}}{60}\ \text{м}^3 = 12{,}44\ \text{см}^3$$

і, поклавши $W \approx 0{,}1d^3$, обчислюємо потрібний діаметр вала:

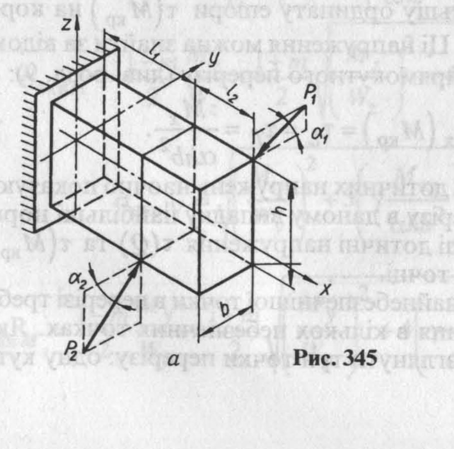
$$d \geq \sqrt[3]{10W} = \sqrt[3]{10\cdot 12{,}44}\ \text{см} = \sqrt[3]{124{,}4}\ \text{см} = 4{,}99\ \text{см}.$$

Округливши до найближчого стандартного діаметра, вибираємо *d* = 50 мм.

Брус прямокутного перерізу. На практиці часто зустрічаються стрижні некруглого перерізу, які зазнають дії крутних та згинальних моментів. Як приклад розглянемо брус прямокутного перерізу (рис. 345, *а*), навантажений силами P_1 та P_2, що спричинюють у поперечних перерізах згинальні моменти M_y та M_z, а також поперечні сили Q_y та Q_z.

Розраховуємо в такій послідовності. Розкладаємо задані навантаження (сили P_1 та P_2) на складові вздовж координатних осей та зводимо їх до осі вала. При цьому дістаємо в поперечних перерізах, у площинах яких лежать точки прикладання сил, зовнішні скручувальні моменти $M_{\text{к}1} = M_{1x}$ та $M_{\text{к}2} = M_{2x}$. Добуту таким чином розрахункову схему наведено на рис. 345.

Для того щоб визначити положення небезпечного перерізу, будуємо епюри згинальних моментів M_y та M_z, а також епюру крутних моментів $M_{\text{кр}}$ (рис. 345, *б*).



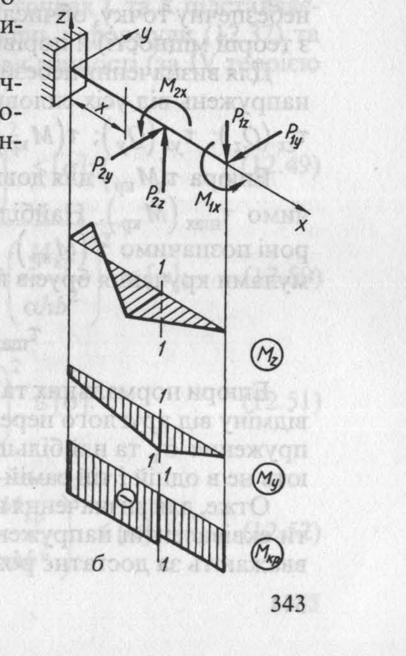


Рис. 345

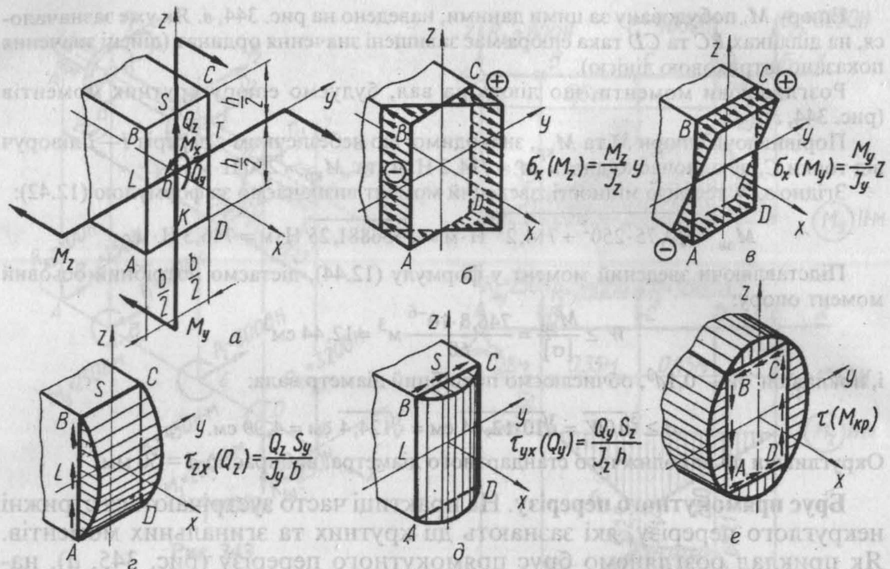


Рис. 346

Зіставлення епюр показує, що найбільш небезпечним є переріз I—I бруса ліворуч від точки прикладення сили P_2. У цьому перерізі діють найбільші згинальні моменти M_z, M_y та максимальний крутний момент $M_{кр}$. Щоб перевірити міцність бруса, треба в небезпечному перерізі знайти небезпечну точку, обчислити для неї еквівалентне напруження (за однією з теорій міцності) й порівняти його з допустимим напруженням.

Для визначення небезпечної точки перерізу (рис. 346, *а*) будуємо епюри напружень від усіх силових факторів (рис. 346, *б—е*): $\sigma_x(M_z)$; $\sigma_x(M_y)$; $\tau_{zx}(Q_z)$; $\tau_{yx}(Q_y)$; $\tau(M_{кр})$.

Епюра $\tau(M_{кр})$ для довгої сторони контуру має максимум, який позначимо $\tau_{max}(M_{кр})$. Найбільшу ординату епюри $\tau(M_{кр})$ на короткій стороні позначимо $\tau'(M_{кр})$. Ці напруження можна знайти за відомими формулами кручення брусів прямокутного перерізу (див. розд. 9):

$$\tau_{max}(M_{кр}) = \tau_L = \tau_T = \frac{M_x}{\alpha h b^2}. \qquad (12.46)$$

Епюри нормальних та дотичних напружень наочно показують, що на відміну від круглого перерізу в даному випадку найбільші нормальні напруження σ_x та найбільші дотичні напруження $\tau(Q)$ та $\tau(M_{кр})$ виникають не в одній і тій самій точці.

Отже, для визначення найнебезпечнішої точки в перерізі треба порівняти еквівалентні напруження в кількох небезпечних точках. Як правило, вважають за достатнє розглянути три точки перерізу: одну кутову точку

(*A* чи *C*), одну точку посередині довгої сторони прямокутника (*L* або *T*) та одну точку посередині короткої сторони (*S* або *K*).

Елемент, виділений в околі точки *C* (при вибраних на рис. 346, *а* напрямах M_y та M_z), перебуває в умовах простого розтягання напруженнями, що дорівнюють сумі нормальних напружень від M_y та M_z. Тому умова міцності для цієї точки має бути записана як для випадку лінійного напруженого стану:

$$\sigma_C = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \le [\sigma]. \qquad (12.47)$$

Елемент в околі точки *A* також перебуває в умовах лінійного напруженого стану — простого стискання, оскільки σ_A відрізняється від σ_C тільки знаком. Якщо матеріал бруса має різні допустимі напруження для розтягання та стискання, то перевіряти міцність за формулою (12.47) потрібно у кожній з цих точок.

Елементи в околі точок *L* та *K* перебувають у плоскому напруженому стані, й, отже, головні напруження в них, як і в круглому брусі, можна обчислити за формулою (12.36). Взагалі дотичні напруження, що входять до формули (12.36), слід обчислювати як від дії крутного моменту $M_{кр}$, так і від дії поперечних сил:

$$\tau_L = \frac{M_{кр}}{\alpha h b} \pm \frac{3}{2}\frac{Q_z}{bh}; \quad \tau_K = \gamma\frac{M_{кр}}{\alpha h b^2} \pm \frac{3}{2}\frac{Q_y}{bh}. \qquad (12.48)$$

Однак дотичні напруження від поперечних сил Q_y та Q_z, як зазначалося, звичайно бувають дуже малі, а тому здебільшого їхнім впливом нехтують.

Для обчислення еквівалентних напружень у точках *L* та *K* підставляємо значення нормальних та дотичних напружень у формули (12.37) та (12.38). Одночасно дістанемо й відповідні умови міцності (за IV теорією та теорією Мора):

у точці *L*

$$\sigma_{екв\,IV} = \sqrt{\left(\frac{M_z}{W_z}\right)^2 + 3\left(\frac{M_{кр}}{\alpha h b^2}\right)^2} \le [\sigma]; \qquad (12.49)$$

$$\sigma_{екв\,M} = \frac{1-m}{2}\frac{M_z}{W_z} + \frac{1+m}{2}\sqrt{\left(\frac{M_z}{W_z}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{кр}}{\alpha h b^2}\right)^2} \le [\sigma]; \qquad (12.50)$$

у точці *K*

$$\sigma_{екв\,IV} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 3\left(\gamma\frac{M_{кр}}{\alpha h b^2}\right)^2} \le [\sigma]; \qquad (12.51)$$

$$\sigma_{екв\,M} = \frac{1-m}{2}\frac{M_y}{W_y} + \frac{1+m}{2}\sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 4\left(\gamma\frac{M_{кр}}{\alpha h b^2}\right)^2} \le [\sigma]. \qquad (12.52)$$

Знаки моментів при підставлянні їх у рівняння (12.49) — (12.52) не мають значення, оскільки до цих формул входять квадрати моментів.

Отже, найнебезпечніша точка визначається тільки в результаті обчислення еквівалентних напружень в усіх трьох точках *C*, *L* та *K* за формулами (12.47) та (12.49) — (12.52), причому в кожному окремому випадку положення найбільш небезпечної точки залежить від конкретного співвідношення значень моментів M_x, M_y та M_z. Для ілюстрації методики розрахунку розглянемо числовий приклад.

Приклад 54. *Перевіримо міцність бруса (див. рис. 345, а) за IV теорією міцності, якщо на брус діють такі сили: $P_1 = 7{,}21$ кН; $P_2 = 13{,}4$ кН; з віссю y вони утворюють кути $\alpha_1 = 33°41'$ та $\alpha_2 = 26°34'$; розміри поперечного перерізу: h = 12 см, b = 8 см, довжини ділянок: $l_1 = 300$ см, $l_2 = 200$ см. Сила P_1 прикладена до важеля, закріпленого в торцевому перерізі бруса. Довжина важеля d = 100 см. Допустиме напруження $[\sigma] = 140$ МПа.*

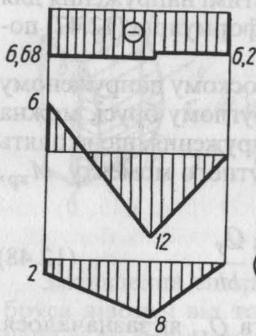


Рис. 347

Розрахункова схема майже така сама, як і розглядувана раніше (див. рис. 345, *б*).

Обчислюємо складові навантажень уздовж координатних осей:

$$P_{1y} = P_1 \cos\alpha_1 = 7{,}21 \cdot 0{,}832 \text{ кН} = 6 \text{ кН};$$

$$P_{2y} = P_2 \cos\alpha_2 = 13{,}4 \cdot 0{,}894 \text{ кН} = 12 \text{ кН};$$

$$P_{1z} = P_1 \sin\alpha_1 = 7{,}21 \cdot 0{,}555 \text{ кН} = 4 \text{ кН};$$

$$P_{2z} = P_2 \sin\alpha_2 = 13{,}4 \cdot 0{,}477 \text{ кН} = 6 \text{ кН}.$$

Звівши навантаження до осі, дістаємо крутні моменти:

$$M_{кр1} = -P_{1y}\left(d + \frac{h}{2}\right) + P_{1z}\frac{b}{2} = (-6 \cdot 1{,}06 + 4 \cdot 0{,}04) \text{ кН·м} = -6{,}2 \text{ кН·м};$$

$$M_{кр2} = -P_{2y}\frac{h}{2} + P_{2z}\frac{b}{2} = (-12 \cdot 0{,}06 + 6 \cdot 0{,}04) \text{ кН·м} = -0{,}48 \text{ кН·м}.$$

Епюри крутних та згинальних моментів зображено на рис. 347.

Зіставлення епюр показує, що небезпечним є переріз з абсцисою $x = l_1 = 300$ см. У цьому перерізі діють моменти $M_{кр} = 6{,}68$ кН·м; $M_y = 8$ кН·м; $M_z = 12$ кН·м. Відповідно до формул (12.47), (12.49) та (12.51) складемо умови міцності для трьох небезпечних точок *C*, *L* та *K* перерізу (значення коефіцієнтів α та γ наведено в табл. 13).

Матимемо

$$\sigma_C = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = \left(\frac{8 \cdot 10^{-3}}{192 \cdot 10^{-6}} + \frac{12 \cdot 10^{-3}}{128 \cdot 10^{-6}}\right) \text{МПа} = (41{,}7 + 93{,}8) \text{ МПа} = 135{,}5 < 140 \text{ МПа};$$

$$\sigma_L = \sqrt{\left(\frac{M_z}{W_z}\right)^2 + 3\left(\frac{M_{кр}}{\alpha h b^2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{12 \cdot 10^{-3}}{128 \cdot 10^{-6}}\right)^2 + 3\left(\frac{6{,}68 \cdot 10^{-3}}{0{,}231 \cdot 0{,}12 \cdot 0{,}08^2}\right)^2} \text{ МПа} =$$

$$= 114 \text{ МПа} < 140 \text{ МПа};$$

$$\sigma_K = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 3\left(\gamma\frac{M_{кр}}{\alpha h b^2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{8 \cdot 10^{-3}}{192 \cdot 10^{-6}}\right)^2 + 3\left(0{,}859\frac{6{,}68 \cdot 10^{-3}}{0{,}231 \cdot 0{,}12 \cdot 0{,}08^2}\right)^2} \text{ МПа} = 69{,}9 \text{ МПа} < 140 \text{ МПа}.$$

Отже, найбільш небезпечною є точка *C*, але і в ній еквівалентне напруження менше за допустиме. Міцність бруса забезпечено.

Загальний випадок дії сил на брус. Як приклад більш загального випадку складного опору розглянемо розрахунок колінчастого вала. Для нього в деяких перерізах відбувається одночасна дія осьових сил, крутних та згинальних моментів.

Дослідимо роботу найбільш простого вала — вала, що має тільки одне коліно. Вал (рис. 348, *а*) складається із шатунної шийки *3*, двох щік *2* та двох корінних шийок *1*, що обпираються на корінні підшипники. Усі потрібні розміри вала наведено на рисунку.

На шатунну шийку *3* з боку шатуна діє під кутом $\alpha = 15°$ до горизонтальної осі *y* сила $P_2 = 10$ кН. Момент цієї сили відносно осі обертання зрівноважується крутним моментом *M* на маховику. Вага маховика $G = 5$ кН.

При заданих умовах треба визначити розміри перерізів вала та шатунної шийки, а також призначити розміри прямокутного перерізу щік залежно від більшого з діаметрів за співвідношеннями $h = 1{,}25D$; $b = 0{,}6h$,

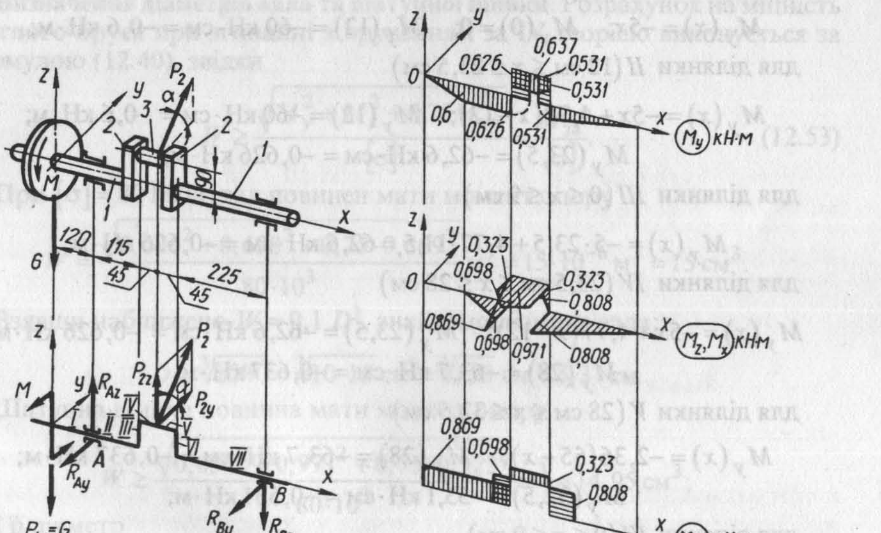


Рис. 348

після чого виконати розрахунок на міцність. Допустиме напруження $[\sigma] = 80$ МПа. Розраховувати за IV теорією міцності.

Від заданої конструкції переходимо до розрахункової схеми. Насамперед потрібно визначити реакції в підшипниках, а також скручувальний момент на маховику. Для цього розкладемо силу P_2 на горизонтальну та вертикальну складові (P_{2y} та P_{2z}):

$$P_{2y} = P_2 \cos\alpha = 10 \cdot 0{,}966 = 9{,}66 \text{ кН};$$

$$P_{2z} = P_2 \sin\alpha = 10 \cdot 0{,}259 = 2{,}59 \text{ кН}.$$

Реакції в опорах також можна подати у вигляді двох проекцій — R_{Ay}, R_{Az} та R_{By}, R_{Bz}. Їхні значення знаходимо з рівнянь рівноваги:

$$\Sigma M_A^{(xOy)} = 9{,}66 \cdot 16 - R_{By} \cdot 43 = 0; \quad R_{By} = 3{,}59 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_B^{(xOy)} = -9{,}66 \cdot 27 + R_{Ay} \cdot 43 = 0; \quad R_{Ay} = 6{,}07 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_A^{(xOz)} = 5 \cdot 12 + 2{,}59 \cdot 16 - R_{Bz} \cdot 43 = 0; \quad R_{Bz} = 2{,}36 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_B^{(xOz)} = 5 \cdot 55 - R_{Az} \cdot 43 - 2{,}59 \cdot 27 = 0; \quad R_{Az} = 4{,}77 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_x = -M + 9{,}66 \cdot 9 = 0; \quad M = 86{,}9 \text{ кН} \cdot \text{см} = 0{,}869 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Переходимо до побудови епюр згинальних моментів. Обчислимо ординати епюри моментів M_y (у площині xOz):

для ділянки $I\,(0 \le x \le 12 \text{ см})$

$$M_y(x) = -5x; \quad M_y(0) = 0; \quad M_y(12) = -60 \text{ кН} \cdot \text{см} = -0{,}6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

для ділянки $II\,(12 \text{ см} \le x \le 23{,}5 \text{ см})$

$$M_y(x) = -5x + 4{,}77(x - 12); \quad M_y(12) = -60 \text{ кН} \cdot \text{см} = -0{,}6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_y(23{,}5) = -62{,}6 \text{ кН} \cdot \text{см} = -0{,}626 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

для ділянки $III\,(0 \le x \le 9 \text{ см})$

$$M_y(x) = -5 \cdot 23{,}5 + 4{,}77 \cdot 11{,}5 = 62{,}6 \text{ кН} \cdot \text{см} = -0{,}626 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

для ділянки $IV\,(23{,}5 \text{ см} \le x \le 28 \text{ см})$

$$M_y(x) = -5x + 4{,}77(x - 12); \quad M_y(23{,}5) = -62{,}6 \text{ кН} \cdot \text{см} = -0{,}626 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_y(28) = -63{,}7 \text{ кН} \cdot \text{см} = -0{,}637 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

для ділянки $V\,(28 \text{ см} \le x \le 32{,}5 \text{ см})$

$$M_y(x) = -2{,}36(55 - x); \quad M_y(28) = -63{,}7 \text{ кН} \cdot \text{см} = -0{,}637 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_y(32{,}5) = -53{,}1 \text{ кН} \cdot \text{см} = -0{,}531 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

для ділянки $VI\,(0 \le x \le 9 \text{ см})$

$$M_y(x) = -2{,}36 \cdot 22{,}5 = -53{,}1 \text{ кН} \cdot \text{см} = -0{,}531 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

для ділянки $VII\,(32{,}5 \text{ см} \le x \le 55 \text{ см})$

$$M_y(x) = -2{,}36(55 - x); \quad M_y(32{,}5) =$$

$$= -53{,}1 \text{ кН} \cdot \text{см} = -0{,}531 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_y(55) = 0.$$

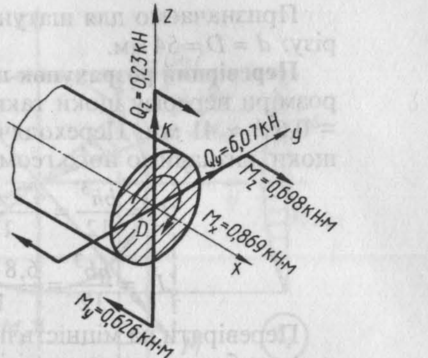


Рис. 349

Відкладаючи обчислені ординати, будуємо епюру M_y (рис. 348, *б*).

Аналогічно визначаємо ординати й будуємо епюри згинальних моментів M_z та M_x, що діють у площинах xOy та yOz, а також епюру крутних моментів $M_{\text{кр}}$.

Зіставивши епюри, бачимо, що небезпечними є такі перерізи: для вала — переріз у нижнього кінця лівої щоки (рис. 349), причому

$$M_{\text{кр}} = 0{,}869 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_y = 0{,}626 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_z = 0{,}698 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

для щік — нижній переріз лівої щоки (рис. 350), причому

$$M_z = 0{,}869 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_y = 0{,}626 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_{\text{кр}} = 0{,}698 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$N = 0{,}23 \text{ кН};$$

для шатунної шийки — середній її переріз, причому

$$M_{\text{кр}} = 0{,}323 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_y = 0{,}637 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_z = 0{,}971 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Визначення діаметрів вала та шатунної шийки. Розрахунок на міцність круглого бруса при згинанні з крученням за IV теорією виконується за формулою (12.40), звідки

$$W \ge \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + 0{,}75 M_{\text{кр}}^2}}{[\sigma]} = \frac{M_{\text{зв}}}{[\sigma]}. \tag{12.53}$$

При $[\sigma] = 80$ МПа вал повинен мати момент опору

$$W = \frac{\sqrt{0{,}626^2 + 0{,}698^2 + 0{,}75 \cdot 0{,}869^2}}{80 \cdot 10^3} \text{ м}^3 = 15 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 15 \text{ см}^3.$$

Взявши наближено $W \approx 0{,}1\,D^3$, знайдемо діаметр вала:

$$D \ge \sqrt[3]{10W} = \sqrt[3]{10 \cdot 15} \text{ см} = \sqrt[3]{150} \text{ см} \approx 5{,}31 \text{ см}.$$

Шатунна шийка повинна мати момент опору

$$W \ge \frac{\sqrt{0{,}637^2 + 0{,}971^2 + 0{,}75 \cdot 0{,}323^2}}{80 \cdot 10^3} \text{ м}^3 \approx 14{,}95 \text{ см}^3;$$

тоді її діаметр

$$d \ge \sqrt{10 \cdot 14{,}92} \text{ см} \approx 5{,}31 \text{ см}.$$

Призначаємо для шатунної шийки та вала однаковий діаметр перерізу: $d = D = 54$ мм.

Перевірний розрахунок щоки. Відповідно до умови задачі добираємо розміри перерізу щоки такими: $h = 1{,}25\,D = 1{,}25 \cdot 54 = 67{,}5 \approx 68$ мм; $b = 0{,}6\,h \approx 41$ мм. Переходячи до перевірки міцності вибраного перерізу щоки, визначимо його геометричні характеристики:

$$J_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{4{,}1 \cdot 6{,}8^3}{12} = 107{,}4 \text{ см}^4; \quad W_z = 31{,}6 \text{ см}^3;$$

$$J_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{6{,}8 \cdot 4{,}1^3}{12} = 39{,}0 \text{ см}^4; \quad W_y = 19{,}0 \text{ см}^3.$$

Перевіряти на міцність прямокутну щоку в умовах згинання з крученням у небезпечному перерізі треба в кількох точках — K, S та L (рис. 350).

У точці K за формулою (12.51)

$$\sigma_{\text{екв IV}} = \sqrt{\left(\frac{M_z}{W_z}\right)^2 + 3\left(\gamma \frac{M_x}{\alpha h b^2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{0{,}869 \cdot 10^{-3}}{31{,}6 \cdot 10^{-6}}\right)^2 + 3\left(0{,}839 \frac{0{,}698 \cdot 10^{-3}}{0{,}234 \cdot 6{,}8 \cdot 4{,}1^2 \cdot 10^{-6}}\right)^2} \text{ МПа} =$$

$$= \sqrt{2145{,}58} \text{ МПа} = 46{,}4 \text{ МПа}.$$

У точці S за формулою (12.49)

$$\sigma_{\text{екв IV}} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 3\left(\frac{M_x}{\alpha h b^2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{0{,}626 \cdot 10^{-3}}{19{,}0 \cdot 10^{-6}}\right)^2 + 3\left(\frac{0{,}698 \cdot 10^{-3}}{0{,}234 \cdot 6{,}8 \cdot 4{,}1^2 \cdot 10^{-6}}\right)^2} \text{ МПа} =$$

$$= \sqrt{3126{,}04} \text{ МПа} = 55{,}9 \text{ МПа}.$$

У точці L за формулою (12.47)

$$\sigma_{\text{екв IV}} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = \left(\frac{0{,}869 \cdot 10^{-3}}{31{,}6 \cdot 10^{-6}} + \frac{0{,}626 \cdot 10^{-3}}{19{,}0 \cdot 10^{-6}}\right) \text{ МПа} \approx$$

$$\approx (27{,}5 + 32{,}8) \text{ МПа} = 60{,}3 \text{ МПа} < [\sigma].$$

Отже, найнебезпечнішою точкою в перерізі є точка L, проте і в ній найбільше нормальне напруження менше за допустиме.

Оцінка впливу поперечних та поздовжніх сил. Урахування поздовжніх та поперечних сил при доборі перерізу занадто ускладнило б розрахунок.

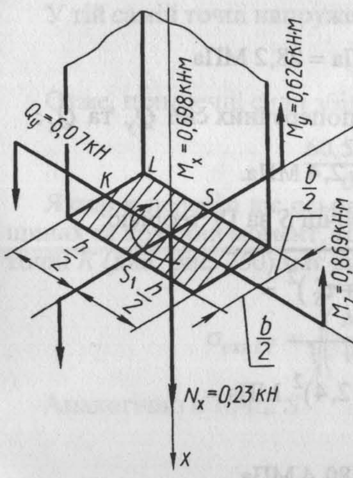


Рис. 350

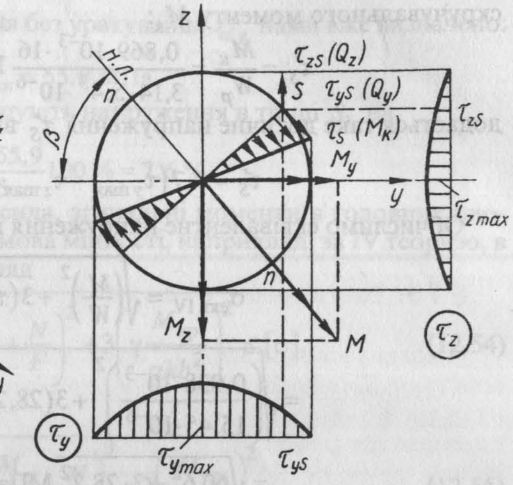


Рис. 351

Оскільки додаткові напруження від дії поперечних сил невеликі, то при виборі перерізу ними нехтуємо. Найбільш просто оцінити їхній вплив, перевіряючи переріз після його добору.

У небезпечному перерізі вала (див. рис. 349) крім урахованих при доборі перерізу моментів M_x, M_y та M_z діють ще поперечні сили $Q_y = 6{,}07$ кН та $Q_z = 0{,}23$ кН. Найбільші дотичні напруження від цих сил будуть відповідно в точках K та L:

у точці K

$$\tau_{y\max} = \frac{4}{3}\frac{Q_y}{F} = \frac{4}{3}\frac{6{,}07 \cdot 10^{-3}}{3{,}14 \cdot 2{,}7^2 \cdot 10^{-4}} \text{ МПа} = 3{,}54 \text{ МПа};$$

у точці L

$$\tau_{z\max} = \frac{4}{3}\frac{Q_z}{F} = \frac{4}{3}\frac{0{,}23 \cdot 10^{-3}}{3{,}14 \cdot 2{,}7^2 \cdot 10^{-4}} \text{ МПа} = 0{,}134 \text{ МПа}.$$

Небезпечну точку перерізу знайдемо, визначивши положення нейтральної лінії. Остання перпендикулярна до площини дії результуючого згинального моменту

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{0{,}626^2 + 0{,}698^2} \text{ кН} \cdot \text{м} = 0{,}938 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Напрям нейтральної лінії легко визначити графічно (рис. 351), оскільки він збігається з напрямом вектора $\vec{M}$.

Небезпечною точкою в перерізі є точка S (рис. 351). Природно, що в цій точці дотичні напруження τ_{yS} та τ_{zS} будуть значно меншими, ніж обчислені вище максимальні значення. Вважатимемо наближено та з деяким запасом, що в небезпечній точці S до дотичних напружень τ'_S від скручувального моменту $M_к$:

$$\tau'_S=\frac{M_к}{W_p}=\frac{0,869\cdot10^{-3}\cdot16}{3,14\cdot5,4^3\cdot10^{-6}}\ \text{МПа}=28,2\ \text{МПа}$$

додається таке дотичне напруження τ''_S від поперечних сил Q_y та Q_z:

$$\tau''_S\approx0,7\left(\tau_{y\max}-\tau_{z\max}\right)\approx2,4\ \text{МПа}.$$

Обчислимо еквівалентне напруження в точці S за IV теорією:

$$\sigma_{екв\,IV}=\sqrt{\left(\frac{M}{W}\right)^2+3\left(\tau'_S+\tau''_S\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{0,938\cdot10^{-3}}{15,45\cdot10^{-6}}\right)^2+3(28,2+2,4)^2}\ \text{МПа}=$$

$$=\sqrt{60,6^2+3\cdot28,2^2}\ \text{МПа}=80,4\ \text{МПа}.$$

Еквівалентне напруження в тій самій точці без урахування впливу поперечних сил

$$\sigma'_S=\sqrt{60,6^2+3\cdot28,2^2}\ \text{МПа}\approx77,9\ \text{МПа}.$$

Отже, якщо врахувати дію поперечних сил, то напруження зростуть на

$$\frac{80,4-77,9}{80,4}\,100\,\%\approx3\,\%.$$

У небезпечному перерізі щоки (див. рис. 350) діє тільки поперечна сила $Q_y=6,07$ кН; поперечна сила $Q_z=0$. Поперечна сила Q_y не дає дотичних напружень у найбільш небезпечній точці L. Тому розглянемо її вплив у точці S_1, де спричинені нею дотичні напруження досягають найбільшого значення:

$$\tau_y=\frac{3}{2}\frac{Q_y}{F}=\frac{3}{2}\frac{6,07\cdot10^{-3}}{6,8\cdot4,1\cdot10^{-4}}\ \text{МПа}=3,27\ \text{МПа}$$

й збігаються за напрямом з дотичними напруженнями від дії крутного моменту $M_{кр}$. Значення останніх

$$\tau_{y\max}=\frac{M_{кр}}{\alpha hb^2}=\frac{0,698\cdot10^{-3}}{0,236\cdot6,8\cdot4,1^2\cdot10^{-6}}\ \text{МПа}=25,7\ \text{МПа}.$$

Обчислимо еквівалентні напруження за IV теорією міцності:

$$\sigma_{екв\,IV}=\sqrt{\sigma^2+3\left(\tau_y+\tau_{y\max}\right)^2}=\sqrt{32,8^2+3(3,27+25,7)^2}\ \text{МПа}=$$

$$=\sqrt{3597}\ \text{МПа}=60\ \text{МПа}.$$

У тій самій точці напруження без урахування Q_y нами вже визначено:

$$\sigma'_{зв}=55,9\ \text{МПа}.$$

Отже, поперечні сили збільшують напруження в точці S_1 на

$$\frac{60,5-55,9}{60,5}100\,\%=7,6\,\%.$$

Якщо в перерізі діє осьова сила, згинальні моменти в головних площинах та крутний момент, то умова міцності, наприклад, за IV теорією, в точці K (див. рис. 350) має вигляд

$$\sigma_{екв\,IV}=\sqrt{\left(\frac{M_z}{W_z}+\frac{N}{F}\right)^2+3\left(\gamma\frac{M_{кр}}{\alpha hb^2}\right)^2}\le[\sigma].\qquad(12.54)$$

Аналогічно в точці S

$$\sigma_{екв\,IV}=\sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}+\frac{N}{F}\right)^2+3\left(\frac{M_{кр}}{\alpha hb^2}\right)^2}.\qquad(12.55)$$

У розглядуваному небезпечному перерізі шийки діє поздовжня розтягальна сила $N=0,23$ кН. Спричинюване нею нормальне розтягальне напруження

$$\sigma_x=\frac{N}{F}=\frac{0,23\cdot10^{-3}}{6,8\cdot4,1\cdot10^{-4}}\ \text{МПа}\approx0,083\ \text{МПа}$$

таке мале, що ним можна знехтувати.

Розділ 13 ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕМИ ПРО ПРУЖНІ СИСТЕМИ. ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ

§ 78. Узагальнені сили і переміщення

Однією з найважливіших задач опору матеріалів є оцінка жорсткості конструкції, тобто ступеня її викривлення під дією навантаження, зміщення зв'язків, зміни температури. Для розв'язання цієї задачі треба визначити переміщення (лінійні та кутові) довільно навантаженої пружної системи (балки, рами, криволінійного стрижня, ферми тощо). Така сама задача постає при розрахунку конструкцій на динамічні навантаження і при виявленні статичної невизначуваності системи. В останньому випадку, як уже зазначалося, складають рівняння спільності деформацій, які містять у собі переміщення певних перерізів.

У попередніх розділах розглядалися деякі окремі способи визначення переміщень, зручні при розв'язанні найпростіших задач. Нижче викладається загальний метод визначення переміщень у стрижневих системах, який ґрунтується на двох фундаментальних принципах механіки: початку можливих переміщень і законі зберігання енергії.

Як відомо з теоретичної механіки, робота постійної сили P на переміщенні Δ за її напрямом дорівнює добутку значення сили на зазначене переміщення:

$$A = P\Delta.$$

У задачах опору матеріалів і будівельної механіки зовнішні навантаження відзначаються великою різноманітністю і, як правило, становлять групи сил. Вираз для роботи групи постійних сил також можна подати у вигляді добутку двох величин:

$$A = P\Delta_P. \tag{13.1}$$

у якому множник P залежить тільки від сил групи і називається *узагальненою силою*, а Δ_P залежить від переміщень і називається *узагальненим переміщенням.*

Отже, *під узагальненою силою будемо розуміти будь-яке навантаження (зосереджені сили, зосереджені моменти, розподілене навантаження), а під узагальненим переміщенням – той вид переміщення, на якому узагальнена сила здійснює роботу*.

Розглянемо деякі приклади узагальнених сил і переміщень.

1. На рис. 352 зображено узагальнену силу, яка складається з двох однакових за модулем протилежних сил P, прикладених у точках A та B і на-

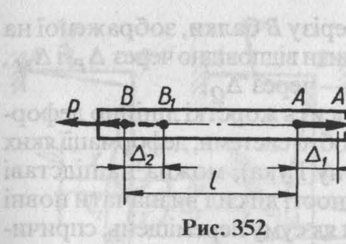


Рис. 352

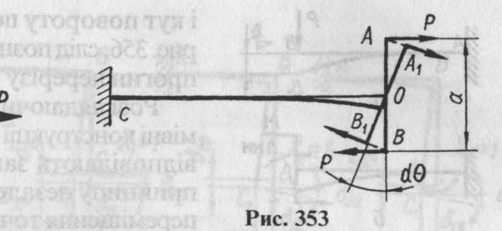


Рис. 353

прямлених по одній прямій. Припустимо, що точки прикладення сил перемістились у напрямі BA на відрізки Δ_1 і Δ_2. Очевидно, робота системи постійних сил на цих переміщеннях

$$A = P\Delta_1 - P\Delta_2 = P\left(\Delta_1 - \Delta_2\right) = P\Delta_P, \tag{13.2}$$

де $\Delta_P = \Delta_1 - \Delta_2 = \Delta l$ – зміна відстані l між точками прикладення сил.

Отже, в цьому прикладі P – узагальнена сила, а зміна Δl довжини відрізка AB – узагальнене переміщення.

2. Нехай група сил складається з пари сил, момент якої $M = Pa$ (рис. 353). Припустимо, що елемент AB повернувся на кут $d\Theta$. Шляхи, пройдені силами пари в напрямі їхньої дії,

$$AA_1 = OAd\Theta; \quad BB_1 = OBd\Theta.$$

Сумарна робота обох сил

$$A = P \cdot AA_1 + P \cdot BB_1 = P\left(OA + OB\right)d\Theta = Pad\Theta = Md\Theta. \tag{13.3}$$

Отже, якщо узагальненою силою є момент M пари, то узагальненим переміщенням буде кут повороту $d\Theta$ у площині дії пари.

Легко також довести, що при дії на елементи AB і CD (рис. 354) двох однакових за модулем і протилежно напрямлених пар з моментом M узагальненою силою є момент пари M, а узагальненим переміщенням — зміна кута φ між елементами AB і CD. Інакше

$$\Delta_P = d\Theta_1 + d\Theta_2.$$

Умовимося надалі узагальнені переміщення (як лінійні, так і кутові) якого-небудь перерізу стрижня позначати літерою Δ або δ з двома індексами. Перший індекс відображує точку і напрям переміщення, другий – указує причину цього переміщення. Наприклад, Δ_{PP} означає переміщення точки прикладення сили P у напрямі її дії, спричинене цією самою силою (рис. 355, *а*). На рис. 355, *б* зображено консоль, навантажену на вільному кінці зосередженим моментом. Очевидно, кут повороту перерізу, де прикладений момент, слід позначити Δ_{MM}. Тут перший індекс означає переміщення в напрямі моменту M.

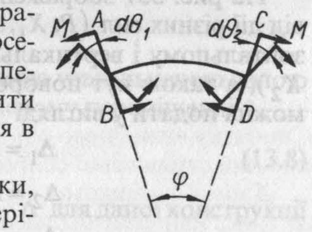


Рис. 354

Для позначення повного переміщення точки, спричиненого кількома зусиллями, при Δ зберігається тільки перший індекс. Так, повний прогин

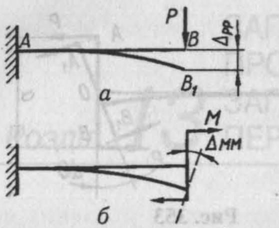


Рис. 355

і кут повороту перерізу B балки, зображеної на рис. 356, слід позначити відповідно через Δ_P і Δ_M, прогин перерізу C — через Δ_Q.

Розглядаючи досить жорсткі лінійно деформівні конструкції (тобто системи, деформації яких відповідають закону Гука), можна на підставі принципу незалежності дії сил визначати повні переміщення точок як суму переміщень, спричинених окремими навантаженнями.

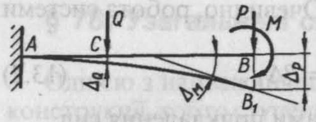


Рис. 356

Для зображеної на рис. 356 балки прогин і кут повороту перерізу B можна записати у вигляді

$$\Delta_P = \Delta_{PP} + \Delta_{PQ} + \Delta_{PM};$$
$$\Delta_M = \Delta_{MP} + \Delta_{MQ} + \Delta_{MM}, \qquad (13.4)$$

де Δ_{PP} — переміщення точки B у напрямі сили P від сили P; Δ_{PQ} — те саме від сили Q; Δ_{PM} — те саме від моменту M; Δ_{MP} — переміщення перерізу B у напрямі пари M (кут повороту) від сили P; Δ_{MQ} — те саме від сили; Δ_{MM} — те саме від пари M.

Переміщення, спричинене одиничною силою $(\bar{P} = 1)$ або одиничною парою $(\bar{M} = 1)$, будемо позначати літерою δ і називати *питомим*. При цьому умовимося вважати одиничні сили чи пари, які спричинюють переміщення δ, безрозмірними.

Якщо одинична сила $\bar{P} = 1$ спричинила переміщення δ_P, то, згідно з принципом незалежності дії сил, повне переміщення, спричинене силою P,

$$\Delta_P = P\delta_P. \qquad (13.5)$$

З виразу (13.5) легко визначити одиницю питомого переміщення:

$$[\delta_P] = \frac{\text{одиниця узагальненого переміщення}}{\text{одиниця узагальненої сили}}. \qquad (13.6)$$

Зазначимо, що навантаження, яке діє на конструкцію, як правило, позначають літерами $P, M, X, \ldots$ з числовими індексами (наприклад, $X_1, X_2, \ldots$). У цьому разі літерні індекси при Δ або δ заміняють відповідними числовими, тобто замість Δ_{x_i} пишуть Δ_1 $(\Delta_2, \delta_{12}, \ldots)$.

На рис. 357 зображено позначення переміщень вільного кінця рами від дії різних сил (P, X_1, X_2, X_3). Повні переміщення перерізу C у горизонтальному і вертикальному напрямах (тобто в напрямах дії сил X_1 і X_2), а також кут повороту (переміщення в напрямі дії X_3) відповідно можна подати у вигляді

$$\Delta_1 = \Delta_{1P} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13};$$
$$\Delta_2 = \Delta_{2P} + X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23}; \qquad (13.7)$$
$$\Delta_3 = \Delta_{3P} + X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33}.$$

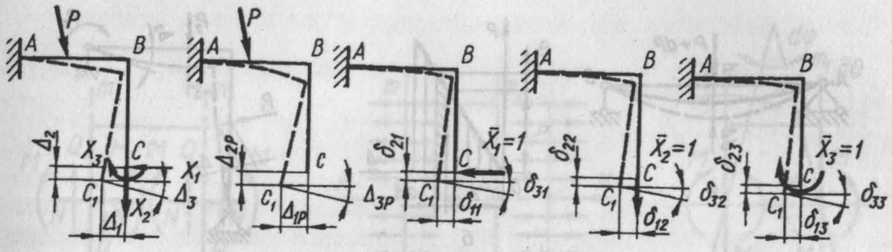


Рис. 357

Тут

$$X_1\delta_{11} = \Delta_{11}; \quad X_2\delta_{12} = \Delta_{12}; \quad X_3\delta_{13} = \Delta_{13}; \quad \ldots; \quad X_i\delta_{mi} = \Delta_{mi}.$$

Для оцінки одиниці переміщення δ_{mi} множимо останнє рівняння на X_m. Тоді

$$X_m X_i \delta_{mi} = X_m \Delta_{mi}$$

виражатиметься в одиницях роботи (Дж). Звідси переміщення

$$[\delta_{mi}] = \frac{X_m\Delta_{mi}}{[X_m][X_i]} = \frac{\text{Дж}}{\text{Н}\cdot\text{Дж}} = \frac{1}{\text{Н}}.$$

§ 79. Робота зовнішніх сил

При деформуванні конструкції її точки переміщуються. Переміщуються також точки прикладення зовнішніх сил. Унаслідок цього зовнішні сили здійснюють роботу.

Обчислимо роботу деякої узагальненої сили P, прикладеної до будь-якої пружної лінійно деформівної системи (рис. 358, *а*). Припускається, що навантаження зростає від нуля до заданого значення досить повільно, щоб можна було знехтувати силами інерції мас, що переміщуються. Таке навантаження називатимемо статичним.

Нехай у певний момент силі P відповідає узагальнене переміщення Δ. Нескінченно мале збільшення сили на величину dP спричинює нескінченно малий приріст переміщення $d\Delta$. Очевидно, елементарна робота зовнішньої сили, якщо знехтувати нескінченно малими другого порядку,

$$dA = (P + dP)\,d\Delta \approx P\,d\Delta.$$

Повна робота, здійснена статично прикладеною узагальненою силою P на спричиненому цією самою силою узагальненому переміщенні Δ,

$$A = \int_{\Delta} P\,d\Delta. \qquad (13.8)$$

Інтеграл (13.8) становить площу діаграми $P \sim \Delta$ для даної конструкції (рис. 358, *б*).

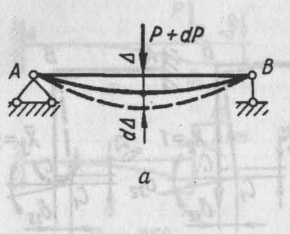


Рис. 358

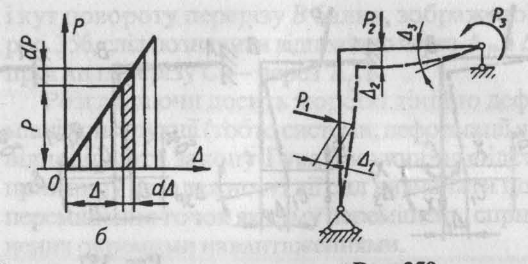


Рис. 359

У лінійно деформівних системах переміщення пропорційні значенню сили (закон Гука):

$$\Delta = P\delta_{PP}, \qquad (13.9)$$

де δ_{PP} — переміщення, спричинене силою $\overline{P} = 1$.

Диференціюємо вираз (13.9):

$$d\Delta = \delta P\delta_{PP}.$$

Підставляючи цей вираз у формулу (13.8), матимемо

$$A = \delta_{PP}\int_0^P PdP = \frac{\delta_{PP}P^2}{2}.$$

Ураховуючи вираз (13.9), остаточно знайдемо

$$A = \frac{\delta_{PP}P^2}{2} = \frac{P\Delta}{2}. \qquad (13.10)$$

Отже, *дійсна робота при статичній дії узагальненої сили на пружну систему дорівнює половині добутку остаточного значення сили на остаточне значення відповідного узагальненого переміщення (теорема Клапейрона)*.

У разі статичної дії на пружну систему кількох узагальнених сил $P_1, P_2, ...P_n$ (рис. 359) робота деформації дорівнює половині суми добутків остаточного значення кожної сили на остаточне значення відповідного сумарного переміщення:

$$\Delta = \frac{1}{2}\sum P_i\Delta_i \qquad (13.11)$$

і не залежить від порядку навантажування системи.

§ 80. Робота внутрішніх сил

При пружній деформації тіла в деформівних елементах розвиваються *внутрішні сили — сили пружного опору*. Вони також здійснюють роботу. Спочатку визначимо роботу внутрішніх сил пружності при деформуванні плоскої стрижневої системи.

Двома суміжними перерізами виділимо елемент стрижня завдовжки ds (рис. 360). Взагалі для плоского згинання дія відкинутих частин стрижня на залишений елемент зводиться до поздовжніх N та поперечних Q сил і

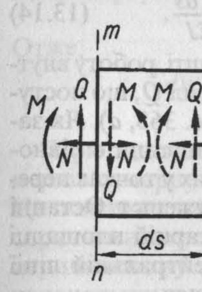


Рис. 360

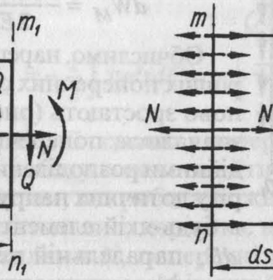


Рис. 361

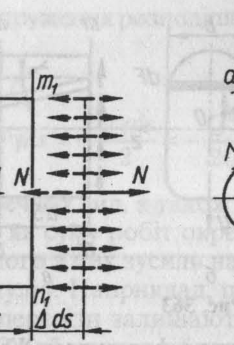


Рис. 362

згинальних моментів M. Ці зусилля, зображені на рисунку суцільними лініями, відносно виділеного елемента можна розглядати як зовнішні.

Внутрішні сили перешкоджають розвитку деформації, спричинюваної зовнішніми силами, дорівнюють їм за значенням і протилежні за напрямом. На рис. 360 рівнодійні внутрішніх сил зображено штриховими лініями.

Ураховуючи напрям внутрішніх сил відносно деформацій, спричинених зовнішніми силами, можна стверджувати, що при навантажуванні тіла сумарна робота внутрішніх сил завжди від'ємна.

Спочатку обчислимо роботу, здійснену окремо внутрішніми поздовжніми силами, поперечними силами і згинальними моментами. Нехай на елемент діють тільки поздовжні сили N (рис. 361). Подовження елемента внаслідок цього

$$\Delta ds = \frac{Nds}{EF},$$

де EF — жорсткість поперечного перерізу на розтягання-стискання.

Робота внутрішніх сил, що поступово збільшуються від нуля до N, на цьому переміщенні

$$dW_N = -\frac{1}{2}N\Delta ds = -\frac{N^2 ds}{2EF}. \qquad (13.12)$$

Оскільки робота внутрішніх сил від'ємна, в правій частині виразу (13.12) поставлено знак «мінус».

Розглянемо тепер елемент, який зазнає дії згинальних моментів (рис. 362). Внаслідок згинання перерізи mn і m_1n_1 повернуться на кути $d\Theta$. Моменти внутрішніх сил (зображено штриховими лініями) на цих переміщеннях здійснюють роботу

$$dW_M = -\frac{1}{2}Md\Theta - \frac{1}{2}Md\Theta = -\frac{1}{2}Md\varphi, \qquad (13.13)$$

де $d\varphi = 2d\Theta$ – взаємний кут повороту перерізів елемента.

Як показано в розд. 10,

$$d\varphi = ds\frac{1}{\rho} = ds\frac{M}{EJ} = \frac{Mds}{EJ}.$$

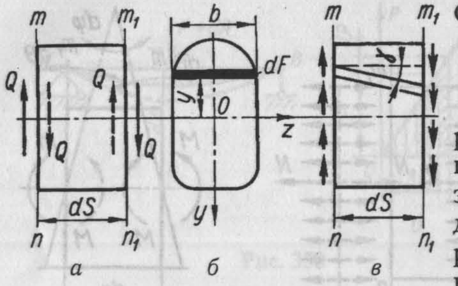


Рис. 363

Отже,

$$dW_M = -\frac{M^2 ds}{2EJ}. \qquad (13.14)$$

Обчислимо, нарешті, роботу внутрішніх поперечних сил Q, що поступово зростають (рис. 363, *а*). Як зазначалося, поперечні сили є рівнодійними розподілених у точках перерізу дотичних напружень τ. Останні в будь-якій елементарній площадці dF, паралельній нейтральній лінії (рис. 363, *б*), згідно з формулою Журавського, мають вигляд

$$\tau = \frac{QS_z}{J_z b},$$

де S_z — статичний момент відносно нейтральної осі z частини перерізу, розміщеної між рівнем смужки і краєм перерізу.

Взаємний зсув двох розміщених на одній висоті площадок dF на торцях mn і m_1n_1 (рис. 363, *в*)

$$\gamma ds = \frac{\tau}{G} ds.$$

Отже, робота внутрішніх елементарних сил τdF при зростанні їх від нуля до остаточного значення

$$-\frac{1}{2}\tau dF\gamma ds = -\frac{\tau^2 ds}{2G} dF.$$

Інтегруючи в межах перерізу F, знайдемо роботу сил зсуву:

$$dW_Q = -\int_F \frac{1}{2}\tau\gamma ds dF = -\int_F \frac{\tau^2 ds}{2G} dF = -\frac{Q^2 ds}{2GJ_z^2}\int_F \frac{S_z^2}{b^2} dF = -k_y \frac{Q^2 ds}{2GF}, \qquad (13.15)$$

де $k_y = \left(F / J_z^2\right)\int_F \left(S_z^2 / b^2\right) dF$ — коефіцієнт, який залежить від форми поперечного перерізу; GF — жорсткість поперечного перерізу стрижня при зсуві.

Для прямокутного перерізу $b \times h$

$$F = bh; \quad J_z = \frac{bh^3}{12}; \quad S_z = \frac{bh^2}{8}\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right);$$

$$k_y = \frac{9}{2h}\int_0^{h/2}\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)^2 dy = 1{,}2. \qquad (13.16)$$

Аналогічно визначають коефіцієнт k і для інших перерізів. Наприклад, для колового перерізу $k = 32/27$, для прокатних профілів наближено $k = F / F_c$, де F_c — площа стінки.

У випадку чистого зсуву дотичні напруження розподіляються рівномірно по перерізу:

$$\tau = Q / F.$$

Отже,

$$dW_Q = -\frac{1}{2}\int_F \tau\gamma ds dF = -\frac{1}{2}\tau F\gamma ds = -\frac{Q\gamma ds}{2} = -\frac{Q^2 ds}{2GF}. \qquad (13.17)$$

При одночасній дії осьових і поперечних сил, а також згинальних моментів сумарну роботу можна знайти як суму робіт окремих складових. Це пояснюється тим, що робота кожного з цих зусиль на переміщеннях, спричинених рештою сил, дорівнює нулю. Наприклад, при подовженні, спричиненому силами N, поперечні перерізи залишаються плоскими і паралельними, а тому пари M і сили Q роботу не здійснюють. Аналогічно сили N не здійснюють роботи на переміщеннях, спричинених силами Q і парами M.

Отже, в розглядуваному прикладі повна елементарна робота внутрішніх сил

$$dW = -\frac{M^2 ds}{2EJ} - \frac{N^2 ds}{2EF} - k\frac{Q^2 ds}{2GF}. \qquad (13.18)$$

Інтегруючи вираз (13.18) у межах всього стрижня і підсумовуючи за всіма стрижнями системи, дістанемо формулу для роботи внутрішніх сил у випадку плоского згинання

$$W = -\sum\int_0^s \frac{M^2 ds}{2EJ} - \sum\int_0^s \frac{N^2 ds}{2EF} - \sum k\int_0^s \frac{Q^2 ds}{2GF}. \qquad (13.19)$$

Якщо стрижень зазнає деформації кручення, в поперечних перерізах, що обмежують виділений елемент завдовжки ds, діють крутні моменти $M_{кр}$ (рис. 364), які відносно елемента є зовнішніми.

Моменти сил пружності дорівнюють за модулем моментам $M_{кр}$ і напрямлені в протилежні боки. Взаємний кут повороту перерізів mn і m_1n_1

$$d\varphi = \frac{M_{кр} ds}{GJ_к},$$

де $GJ_к$ — жорсткість поперечного перерізу стрижня при крученні.

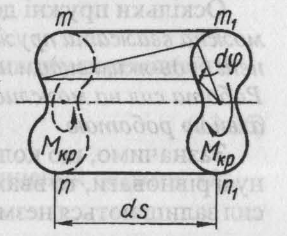


Рис. 364

Отже, при крученні елементарна робота внутрішніх сил, що поступово зростають,

$$dW_{кр} = -\frac{1}{2}M_{кр}d\varphi = -\frac{M_{кр}^2 ds}{2GJ_к}. \qquad (13.20)$$

Сумарна робота внутрішніх сил при крученні стрижня

$$W_{кр} = -\int_s \frac{1}{2}M_{кр}d\varphi = -\int_s \frac{M_{кр}^2 ds}{2GJ_к}. \qquad (13.21)$$

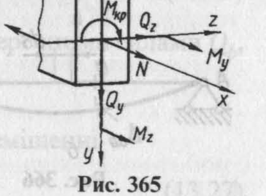


Рис. 365

Нарешті, в загальному випадку дії сил на стрижень у перерізах маємо шість силових факторів (рис. 365): осьову силу N, поперечні сили Q_y і Q_z, крутний момент $M_{\text{кр}}$, згинальні моменти M_y і M_z.

Ураховуючи, що робота кожної з цих сил на переміщеннях, спричинених рештою зусиль, дорівнює нулю, дістанемо формулу для роботи внутрішніх сил (сил пружності)

$$W = -\int_s \frac{M_y^2 ds}{2EJ_y} - \int_s \frac{M_z^2 ds}{2EJ_z} - \int_s \frac{M_{\text{кр}}^2 ds}{2GJ_{\text{к}}} - \int_s \frac{N^2 ds}{2EF} - \int_s k_y \frac{Q_y^2 ds}{2GF} - \int_s k_z \frac{Q_z^2 ds}{2GF}. \quad (13.22)$$

Зазначимо, що вираз (13.22) справедливий також і для криволінійних стрижнів малої кривини.

§ 81. Застосування принципу початку можливих переміщень до пружних систем

Початок можливих переміщень, становлячи загальний принцип механіки, має важливе значення для теорії пружних систем. Стосовно до них цей принцип можна сформулювати так: *якщо пружна система перебуває в рівновазі під дією прикладеного навантаження, то сума робіт зовнішніх і внутрішніх сил на можливих нескінченно малих переміщеннях точок системи дорівнює нулю:*

$$\sum P_i \Delta_{im} + W_{im} = 0, \quad (13.23)$$

де P_i — зовнішні сили; Δ_{im} — можливі переміщення цих сил; $\sum P_i \Delta_{im}$ — робота зовнішніх сил; W_{im} — робота внутрішніх сил.

Оскільки пружні деформації дуже малі, то *можливими переміщеннями можна вважати пружні переміщення від положення рівноваги, які спричинені будь-яким видом навантаження і відбуваються без порушення зв'язків. Робота сил на можливих переміщеннях називається можливою або віртуальною роботою.*

Зазначимо, що коли системі надають можливого переміщення від стану її рівноваги, то вважають, що модуль і напрям зовнішніх та внутрішніх сил залишаються незмінними. Тому при обчисленні можливої роботи слід брати не половину, а повний добуток відповідних сил і переміщень.

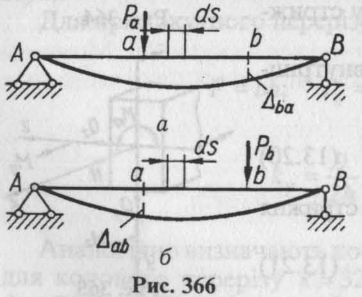


Рис. 366

Покажемо, як визначається можлива робота зовнішніх і внутрішніх сил, на прикладі плоскої системи. Розглянемо два стани якої-небудь системи, що перебуває в рівновазі (рис. 366). У стані *а* система деформується узагальненою силою P_a (рис. 366, *а*), у стані *b* — силою P_b (рис. 366, *б*).

Очевидно, переміщення в стані *b* можна розглядати як можливі для стану *а*, і навпаки, переміщення в стані *а* є можливими для стану *b*. Тому робота сил стану *а* на переміщеннях стану $b\,(A_{ab})$ так само, як і робота сил стану *b* на переміщеннях стану $a\,(A_{ba})$, буде можливою. Зазначені роботи зовнішніх сил відповідно

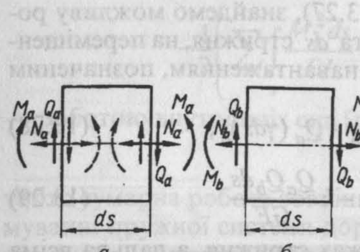


Рис. 367

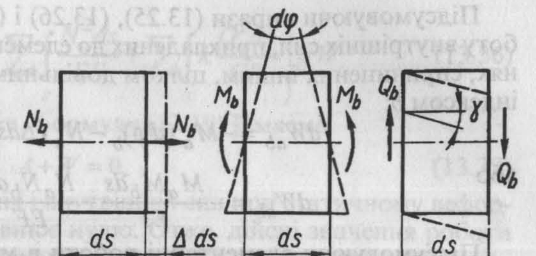


Рис. 368

$$A_{ab} = P_a \Delta_{ab}; \quad A_{ba} = P_b \Delta_{ba}. \quad (13.24)$$

Обчислимо тепер можливу роботу внутрішніх сил стану *а* на переміщеннях, спричинених навантаженням стану *b*. Для цього розглянемо довільний елемент стрижня завдовжки ds у цих двох станах. Для плоского згинання дія відкинутих частин на елемент, як зазначалося вище, зводиться до системи сил N_a, Q_a, M_a (рис. 367, *а*). Внутрішні сили, що діють на елемент, мають напрями, протилежні зовнішнім, і показані штриховими лініями. На рис. 367, *б* зображено зовнішні сили N_b, Q_b, M_b, що діють на елемент ds у стані *b*. Деформації елемента, спричинені цими зусиллями, наведено на рис. 368.

Очевидно, подовження елемента ds від дії сил N_b

$$(\Delta ds)_b = \frac{N_b ds}{EF}.$$

Робота внутрішніх осьових сил N_a на цьому можливому переміщенні

$$-N_a (\Delta ds)_b = -\frac{N_a N_b ds}{EF}. \quad (13.25)$$

Взаємний кут повороту граней елемента, спричинений парами M_b,

$$(d\varphi)_b = \frac{M_b ds}{EJ}.$$

Робота внутрішніх згинальних моментів M_a на цьому переміщенні

$$-M_a (d\varphi)_b = -\frac{M_a M_b ds}{EJ}. \quad (13.26)$$

Взаємний зсув граней елемента, спричинений поперечними силами Q_b,

$$(\gamma ds)_b = k \frac{Q_b ds}{GF}.$$

Робота внутрішніх поперечних сил Q_a на цьому переміщенні

$$-Q_a (\gamma ds)_b = -k \frac{Q_a Q_b ds}{GF}. \quad (13.27)$$

Підсумовуючи вирази (13.25), (13.26) і (13.27), знайдемо можливу роботу внутрішніх сил, прикладених до елемента ds стрижня, на переміщеннях, спричинених іншим, цілком довільним навантаженням, позначеним індексом b:

$$dW_{ab} = -M_a (d\varphi)_b - N_a (\Delta ds)_b - Q_a (\gamma ds)_b, \tag{13.28}$$

або

$$dW_{ab} = -\frac{M_a M_b ds}{EJ} - \frac{N_a N_b ds}{EF} - k\frac{Q_a Q_b ds}{GF}. \tag{13.29}$$

Підсумовуючи елементарні роботи в межах стрижня, а далі за всіма стрижнями системи, знайдемо повне значення можливої роботи внутрішніх сил:

$$W_{ab} = -\left[\sum_s \int N_a (\Delta ds)_b + \sum_s \int M_a (d\varphi)_b + \sum_s \int Q_a (\gamma ds)_b\right], \tag{13.30}$$

або

$$W_{ab} = -\sum_s \int \frac{M_a M_b ds}{EJ} - \sum_s \int \frac{N_a N_b ds}{EF} - \sum_s \int k\frac{Q_a Q_b ds}{GF}. \tag{13.31}$$

Підставивши в рівняння (13.23) вирази для можливої роботи зовнішніх сил [першу формулу (13.24)] і внутрішніх сил [формулу (13.30) або (13.31)], дістанемо загальний вираз принципу початку можливих переміщень для плоскої пружної стрижневої системи:

$$\sum P_a \Delta_{ab} - \left[\sum_s \int M_a (d\varphi)_b + \sum_s \int N_a (\Delta ds)_b + \sum_s \int Q_a (\gamma ds)_b\right] = 0, \tag{13.32}$$

або

$$\sum P_a \Delta_{ab} - \left(\sum_s \int \frac{M_a M_b ds}{EJ} + \sum_s \int \frac{N_a N_b ds}{EF} + \sum_s \int k\frac{Q_a Q_b ds}{GF}\right) = 0. \tag{13.33}$$

Отже, якщо пружна система перебуває в рівновазі, то робота зовнішніх і внутрішніх сил у стані a на можливих переміщеннях, спричинених іншим, цілком довільним навантаженням, позначеним індексом b, дорівнює нулю. Вирази (13.32) і (13.33) можна застосувати і для стрижнів малої кривини. Аналогічні вирази легко скласти також для загального випадку навантажування стрижня, якщо в його поперечних перерізах діють шість компонент внутрішніх зусиль.

Якщо як можливі взяти дійсні переміщення Δ_a, спричинені заданим навантаженням P_a, то вираз (13.33) набирає вигляду

$$\sum P_a \Delta_a - \left(\sum_s \int \frac{M_a^2 ds}{EJ} + \sum_s \int \frac{N_a^2 ds}{EF} + \sum_s \int k\frac{Q_a^2 ds}{GF}\right) = 0. \tag{13.34}$$

Поділимо вираз (13.34) на два. Враховуючи, що

$$\frac{1}{2}\sum P_a \Delta_a = A \tag{13.35}$$

є роботою зовнішніх сил у процесі статичної деформації [див. формулу (13.11)], а

$$-\frac{1}{2}\left(\sum_s \int \frac{M_a^2 ds}{EJ} + \sum_s \int \frac{N_a^2 ds}{EF} + \sum_s \int k\frac{Q_a^2 ds}{GF}\right) = W \tag{13.36}$$

— роботою внутрішніх сил [див. формулу (13.19)], маємо

$$A + W = 0, \tag{13.37}$$

тобто сумарна робота зовнішніх і внутрішніх сил при статичному деформуванні пружної системи дорівнює нулю. Отже, дійсні значення роботи зовнішніх і внутрішніх сил однакові за модулем і протилежні за знаком.

§ 82. Теореми про взаємність робіт і переміщень

Розглянемо будь-яку пружну систему, наприклад балку, в двох станах. У першому стані (рис. 369, *а*) нехай діє узагальнене навантаження, позначене індексом *1*; переміщення відповідних точок системи будуть Δ_{11}, Δ_{21}, ..., Δ_{i1}. У другому стані (рис. 369, *б*) на систему діє узагальнене навантаження, позначене індексом *2*, а переміщення відповідних точок системи від цього навантаження — Δ_{12}, Δ_{22}, ..., Δ_{i2}.

Запишемо вирази можливих робіт зовнішніх і внутрішніх сил для обох станів системи, взявши для першого стану як можливі переміщення, спричинені силами другого стану, а для другого — переміщення, спричинені силами першого. Згідно з формулою (13.33), для першого стану

$$P_1\Delta_{12} - \sum_s\left(\int \frac{M_1 M_2 ds}{EJ} + \int \frac{N_1 N_2 ds}{EF} + \int k\frac{Q_1 Q_2 ds}{GF}\right) = 0, \tag{13.38}$$

для другого стану

$$P_2\Delta_{21} - \sum_s\left(\int \frac{M_2 M_1 ds}{EJ} + \int \frac{N_2 N_1 ds}{EF} + \int k\frac{Q_2 Q_1 ds}{GF}\right) = 0. \tag{13.39}$$

Оскільки вирази для робіт внутрішніх сил однакові, то з рівнянь (13.38) і (13.39) випливає

$$P_1\Delta_{12} = P_2\Delta_{21}. \tag{13.40}$$

Вираз (13.40) має назву *теореми про взаємність робіт (теореми Бетті)*. Вона формулюється так: *можлива робота зовнішніх (або внутрішніх) сил першого стану навантажування на переміщеннях, спричинених силами другого стану, дорівнює можливій роботі зовнішніх (або внутрішніх) сил другого стану навантажування на переміщеннях, спричинених силами першого стану.*

Розглянемо окремий випадок навантажування, якщо в обох станах системи прикладено по одній одиничній узагальненій силі $\overline{P_1} = 1$ та $\overline{P_2} = 1$ у точках *1* і *2* (рис. 370). На підставі формули (13.40)

$$\overline{P_1}\delta_{12} = \overline{P_2}\delta_{21},$$

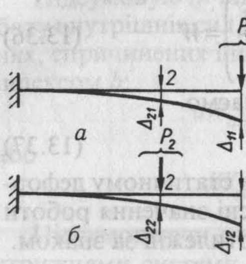


Рис. 369

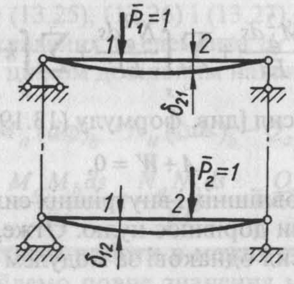


Рис. 370

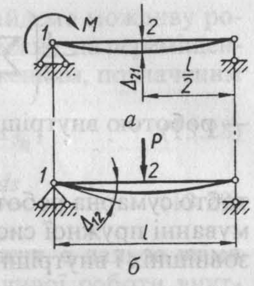


Рис. 371

а оскільки $P_1 = P_2 = 1$, то

$$\delta_{12} = \delta_{21}. \tag{13.41}$$

Цей вираз називають *теоремою про взаємність переміщень (теоремою Максвелла)*. Формулюється вона так: *переміщення точки прикладення першої сили в напрямі її дії, спричинене дією другої одиничної сили, дорівнює переміщенню точки прикладення другої сили в напрямі її дії, спричиненому дією першої одиничної сили.*

Теореми про взаємність робіт і переміщень мають велике значення в загальній теорії дослідження напруженого і деформованого стану стрижнів, пластинок, оболонок та інших розрахункових об'єктів. Застосування їх істотно спрощує розв'язання багатьох задач будівельної механіки, а також визначення переміщень.

Користуючись теоремою про взаємність робіт, визначимо прогин Δ_{21} балки посередині прогону при дії на опорі моменту M (рис. 371, *а*).

Розглянемо другий стан системи — балка навантажена в точці *2* зосередженою силою P (рис. 371, *б*). За формулою (10.65) при $a = b = l/2$ і $x = 0$ знайдемо кут повороту опорного перерізу:

$$\Delta_{12} = -\frac{Pl^2}{16EJ}.$$

Згідно з теоремою про взаємність робіт, маємо

$$M\Delta_{12} = P\Delta_{21},$$

звідки

$$\Delta_{21} = M\frac{\Delta_{12}}{P} = \frac{Ml^2}{16EJ}. \tag{13.42}$$

Приклад 55. *Визначимо прогини в точках 1, 2 і 3 вала, навантаженого силою P у точці C (рис. 372).*

Замість установлення прогиномірів у зазначених точках, як це зображено на рис. 372, *а*, на підставі теореми про взаємність переміщень досить установити прогиномір у точці *C*, а силу послідовно прикладати в точках *1, 2, 3* (рис. 372, *б*). Виміряні при цьому в точці *C* прогини дорівнюють шуканим.

Приклад 56. *Покажемо, що при навантажуванні балки з консоллю (рис. 373, а) моментом M, прикладеним на відстані $l/\sqrt{3}$ від лівої опори A, консоль BC залишиться нерухомою.*

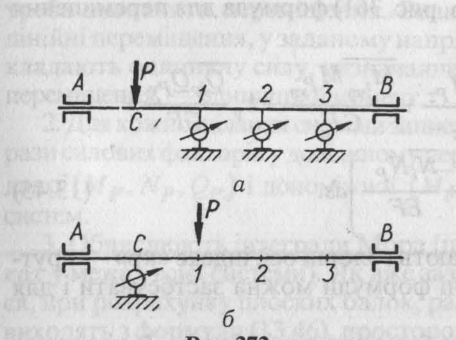


Рис. 372

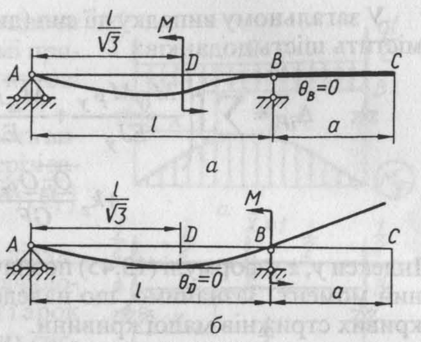


Рис. 373

Якщо навантажити балку в опорному перерізі *B* моментом *M* (рис. 373, *б*), то максимальний прогин на відрізку *AB* буде в перерізі *D* на відстані $l/\sqrt{3}$ від опори *A*. Отже, кут повороту цього перерізу дорівнює нулю ($\Theta_D = 0$).

Якщо момент *M* прикласти в перерізі *D* (рис. 373, *а*), то на підставі теореми про взаємність переміщень кут повороту *D* перерізу на опорі *B* дорівнює нулю ($\Theta_B = 0$). Консоль *BC* залишається нерухомою, оскільки її переміщення може відбутися тільки внаслідок повороту опорного перерізу *B*, а він дорівнює нулю.

§ 83. Загальна формула для визначення переміщень. Метод Мора

Розглянемо спочатку довільну плоску стрижневу систему (балку, раму, ферму тощо), навантажену заданими силами P (рис. 374, *а*). Зусилля в довільному перерізі системи позначимо через M_P, Q_P, N_P. Нехай треба визначити переміщення (узагальнене) будь-якої точки системи в напрямі $i - i$.

Введемо допоміжний стан (рис. 374, *б*), що є заданою системою, навантаженою лише однією одиничною силою (узагальненою) $\overline{X}_i = 1$, прикладеною в тій самій точці m і в напрямі шуканого переміщення Δ_{iP}. Зусилля в довільному перерізі допоміжного стану, спричинені дією одиничної сили $\overline{X}_i = 1$, позначимо через $\overline{M}_i$, $\overline{Q}_i$, $\overline{N}_i$.

Застосуємо початок можливих переміщень для допоміжного стану, взявши як можливі дійсні переміщення заданої системи. Згідно з формулою (13.33),

$$1 \cdot \Delta_{iP} = \sum_s \int \frac{\overline{M}_i M_P ds}{EJ} + \sum_s \int \frac{\overline{N}_i N_P ds}{EF} + \sum_s \int k\frac{\overline{Q}_i Q_P ds}{GF}. \tag{13.43}$$

Вираз (13.43) є загальною формулою для пружного переміщення плоскої стрижневої системи.

Якщо виходити з виразу початку можливих переміщень у формі (13.32), то загальну формулу для визначення пружного переміщення можна записати у вигляді

$$\Delta_{iP} = \sum_s \int \overline{M}_i (d\varphi)_P + \sum_s \int \overline{N}_i (\Delta ds)_P + \sum_s \int \overline{Q}_i (\gamma ds)_P. \tag{13.44}$$

У загальному випадку дії сил (див. рис. 361) формула для переміщення містить шість доданків:

$$\Delta_{iP}=\sum\int_s\left(\frac{\overline{M_{iy}}M_{Py}}{EJ_y}+\frac{\overline{M_{iz}}M_{Pz}}{EJ_z}+\frac{\overline{M_{i\,кр}}M_{P\,кр}}{GJ_к}+k_y\frac{\overline{Q_{iy}}Q_{Py}}{GF}+k_z\frac{\overline{Q_{iz}}Q_{Pz}}{GF}+\frac{\overline{N_i}N_P}{EF}\right)ds. \qquad (13.45)$$

Індекси y, z у формулі (13.45) позначають головні осі, індекс «кр» — крутний момент. Зазначимо, що наведені формули можна застосувати і для кривих стрижнів малої кривини.

Формули (13.43) та (13.45) вперше були виведені Мором. Визначення переміщень за цими формулами часто називають методом Мора. Зазначимо, що метод Мора — це найзагальніший метод визначення переміщень стрижневих систем. Його значення особливо велике при розрахунку статично невизначуваних систем.

Здебільшого при визначенні переміщень у балках, рамах та арках можна знехтувати впливом поздовжніх деформацій і деформацій зсуву, враховуючи лише переміщення, спричинені згинанням і крученням. Тоді формула (13.43) для плоскої системи набирає вигляду

$$\Delta_{iP}=\sum\int_s\frac{\overline{M_i}M_P ds}{EJ}. \qquad (13.46)$$

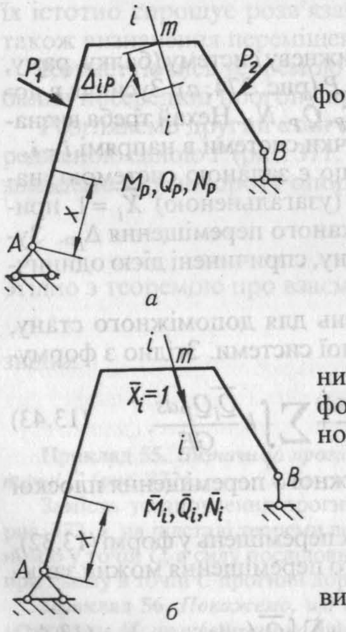


Рис. 374

При просторовому навантажуванні, згідно з формулою (13.45),

$$\Delta_{iP}=\sum\left[\int_s\frac{\overline{M_{iy}}M_{Py}ds}{EJ_y}+\int_s\frac{\overline{M_{iz}}M_{Pz}ds}{EJ_z}+\int_s\frac{\overline{M_{кр}}M_{P\,кр}ds}{GJ_к}\right]. \qquad (13.47)$$

При визначенні переміщень вузлів шарнірних ферм, що складаються з прямих стрижнів, у формулі Мора зберігається тільки один доданок:

$$\Delta_{iP}=\sum_m\frac{\overline{N_i}N_P}{E_mF_m}l_m. \qquad (13.48)$$

Ця формула має назву *формули Максвелла*.

Можна запропонувати таку послідовність визначення переміщень за методом Мора:

1. Будують допоміжну систему, яку навантажують одиничним навантаженням у точці, де треба визначити переміщення. Визначаючи лінійні переміщення, у заданому напрямі прикладають одиничну силу, визначаючи кутові переміщення, — одиничний момент.

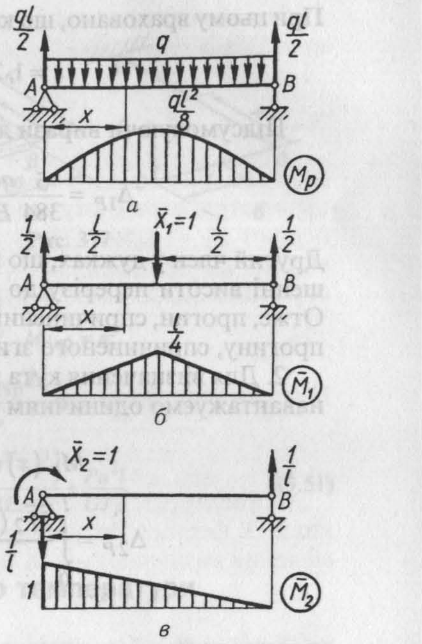


Рис. 375

2. Для кожної ділянки системи записують вирази силових факторів у довільному перерізі заданої (M_P, N_P, Q_P) і допоміжної $(\overline{M_i}, \overline{N_i}, \overline{Q_i})$ систем.

3. Обчислюють інтеграли Мора (по ділянках у межах всієї системи). Як вже зазначалося, при розрахунку плоских балок, рам і арок виходять з формули (13.46), просторових систем — (13.47), ферм — (13.48).

4. Якщо обчислене переміщення додатне, то це означає, що його напрям збігається з вибраним напрямом одиничної сили. Від'ємний знак свідчить про те, що дійсний напрям шуканого переміщення протилежний напряму одиничної сили.

Розглянемо приклади застосування методу Мора для визначення переміщень у різних стрижневих системах.

Припустимо, що треба визначити прогин посередині прогону та кут повороту на опорі шарнірно обпертої балки (EJ = const), навантаженої рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю q (рис. 375, *а*), а також дослідити вплив поперечних сил на максимальний прогин.

1. Для визначення прогину посередині прогону прикладаємо в цьому місці допоміжної балки (рис. 375, *б*) одиничну зосереджену силу. В довільному перерізі першої ділянки балки $(0\le x\le l/2)$

$$M_P(x)=\frac{ql}{2}x-\frac{qx^2}{2};\quad \overline{M}_1(x)=\frac{1}{2}x.$$

Ураховуючи симетрію, дістанемо

$$\Delta_{1P}=2\int_0^{l/2}\frac{\overline{M}_1(x)M_P(x)dx}{EJ}=\frac{2}{EJ}\int_0^{l/2}\frac{x}{2}\left(\frac{ql}{2}x-\frac{qx^2}{2}\right)dx=\frac{5}{384}\frac{ql^4}{EJ}.$$

Урахуємо вплив дотичних напружень на шуканий прогин, припускаючи, що балка має прямокутний переріз. Очевидно, при $0\le x\le l/2$

$$Q_P(x)=\frac{ql}{2}-qx;\quad \overline{Q}_1(x)=\frac{1}{2}.$$

На підставі формули (13.43) прогин, спричинений дією поперечних сил,

$$\Delta^Q_{1P}=2\int_0^{l/2}k\frac{\overline{Q}_1Q_P dx}{GF}=\frac{2k}{GF}\int_0^{l/2}\frac{1}{2}\left(\frac{ql}{2}-qx\right)dx=k\frac{ql^2}{8GF}=\frac{2}{5}\frac{ql^2}{EJ}.$$

При цьому враховано, що коефіцієнт форми для прямокутного перерізу

$$k = 1,2, \quad \text{а} \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)} \approx \frac{3}{8}E.$$

Підсумовуючи вирази для переміщень, знаходимо, що

$$\Delta_{1P} = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EJ} + \frac{2}{5}\frac{ql^2}{EF} = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EJ}\left(1 + 2,6\frac{h^2}{l^2}\right).$$

Другий член у дужках, що відображає вплив поперечної сили, при відношенні висоти перерізу до довжини прогону $h/l = 1/10$ дорівнює 0,026. Отже, прогин, спричинений поперечною силою, становить менше ніж 3% прогину, спричиненого згинальними моментами.

2. Для визначення кута повороту опорного перерізу допоміжну балку навантажуємо одиничним моментом (рис. 375, *в*). При $0 \le x \le l$ маємо

$$M_P(x) = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}; \quad \overline{M}_2(x) = 1 - \frac{x}{l};$$

$$\Delta_{2P} = \int_0^l \frac{\overline{M}_2(x) M_P(x) dx}{EJ} = \frac{1}{EJ}\int_0^l \left(\frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}\right) \times$$

$$\times\left(1 - \frac{x}{l}\right)dx = \frac{ql^3}{24EJ}. \tag{13.49}$$

Додатний знак свідчить про те, що напрям повороту збігається з напрямом одиничного моменту.

Визначимо вертикальне переміщення вузла *B* шарнірно-стрижневої системи (рис. 376, *а*), яка складається з двох однакових стрижнів *AB* і *BC* постійного поперечного перерізу. Допоміжну систему зображено на рис. 376, *б*.

Розглядаючи рівновагу вирізаного вузла *B*, знаходимо зусилля в стрижнях для обох станів:

Стрижень	N_p	$\overline{N}_1$
AB	P	1
BC	$-P$	-1

З формули (13.48) маємо

$$\Delta_{1P} = \sum \frac{\overline{N}_1 N_P l}{EF} = 2\frac{Pl}{EF}. \tag{13.50}$$

Приклад 57. *Розміщена в горизонтальній площині рама ABC (рис. 377, а) складається з двох стрижнів однакового круглого поперечного перерізу. Визначимо вертикальне переміщення точки C. Допоміжну систему зображено на рис. 377, б.*

Переміщення Δ_{1P} можна визначити з формули (13.45). Для довільних перерізів двох ділянок маємо:

для *I* ділянки $(0 \le x \le a)$

$$M_P = Px; \quad M_{P\text{кр}} = 0; \quad \overline{M}_1 = x; \quad M_{1\text{кр}} = 0;$$

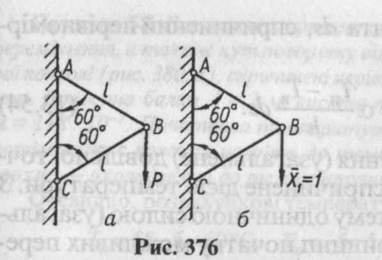


Рис. 376

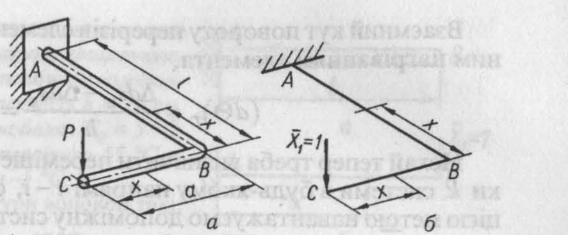


Рис. 377

для *II* ділянки $(0 \le x \le l)$

$$M_P = Px; \quad M_{P\text{кр}} = Pa; \quad \overline{M}_1 = x; \quad \overline{M}_{1\text{кр}} = a;$$

$$\Delta_{1P} = \int_s \frac{\overline{M}_1 M_P dx}{EJ} + \int_s \frac{\overline{M}_{1\text{кр}} M_{P\text{кр}} dx}{GJ_P} =$$

$$= \int_0^a \frac{Px^2 dx}{EJ} + \int_0^l \frac{Px^2 dx}{EJ} + \int_0^l \frac{Pa^2 dx}{GJ_P} = \frac{P(a^3 + l^3)}{3EJ} + \frac{Pa^2 l}{GJ_P}. \tag{13.51}$$

§ 84. Переміщення, спричинені дією температури

Припустимо, що довільний елемент ds стрижня нагрівається внизу до температури $T_\text{н}$, а вгорі — до $T_\text{в}$ (рис. 378, *а*, *б*). Припускають, що по висоті перерізу температура змінюється за лінійним законом, при цьому перерізи стрижня переміщуються, залишаючись плоскими.

Подовження нижнього і верхнього волокон (рис. 378, *б*) відповідно

$$\Delta ds_\text{н} = \alpha T_\text{н} ds; \quad \Delta ds_\text{в} = \alpha T_\text{в} ds, \tag{13.52}$$

де α — температурний коефіцієнт лінійного розширення.

Подовження по осі стрижня (середнє подовження)

$$\Delta ds_\text{с} = \alpha \frac{T_\text{н} + T_\text{в}}{2} ds. \tag{13.53}$$

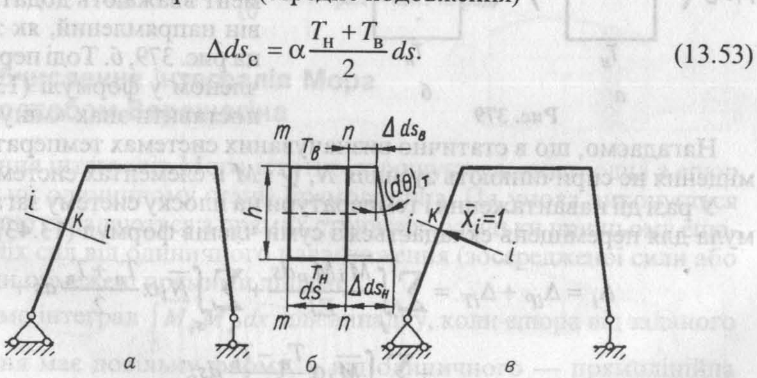


Рис. 378

Взаємний кут повороту перерізів елемента ds, спричинений нерівномірним нагріванням елемента,

$$(d\Theta)_T = \frac{\Delta ds_{н} - \Delta ds_{в}}{h} = \alpha \frac{T_{н} - T_{в}}{h} ds. \qquad (13.54)$$

Нехай тепер треба визначити переміщення (узагальнене) довільної точки k системи в будь-якому напрямі $i-i$, спричинене дією температури. З цією метою навантажуємо допоміжну систему одиничною силою (узагальненою) $\overline{X}_i = 1$ (рис. 378, *в*). Застосуємо принцип початку можливих переміщень для допоміжного стану, взявши як можливі дійсні переміщення, спричинені дією температури. Тоді, згідно з формулою (13.44), маємо

$$\Delta_{iT} = \sum_s \int \overline{M}_i (d\Theta)_T + \sum_s \int \overline{N}_i \Delta ds_{c}. \qquad (13.55)$$

Підставивши формули (13.53) і (13.54), дістанемо

$$\Delta_{iT} = \sum_s \int \overline{M}_i \alpha \frac{T_{н} - T_{в}}{h} ds + \sum_s \int \overline{N}_i \alpha \frac{T_{н} + T_{в}}{2} ds. \qquad (13.56)$$

Формулу (13.56) можна застосовувати також і для стрижнів малої кривини. У фермах, де діють тільки поздовжні зусилля, температурні переміщення визначаються за формулою

$$\Delta_{iT} = \Sigma \overline{N}_i \alpha T l, \qquad (13.57)$$

де $T = (T_{н} + T_{в})/2$ — температура на осі стрижня, однакова по його довжині. Підсумовують за всіма стрижнями ферми.

Знак перед першим членом у формулі (13.56) залежить від вибору правила знаків для згинального моменту. Якщо вважати згинальний момент додатним, коли його напрям такий, як показано на рис. 379, *а*, то перед першим членом у формулі (13.56) зберігається знак «плюс». Іноді згинальний момент вважають додатним, якщо він напрямлений, як зображено на рис. 379, *б*. Тоді перед першим членом у формулі (13.56) треба поставити знак «мінус».

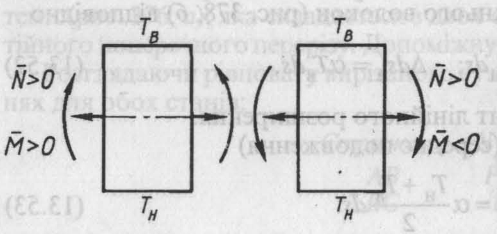


Рис. 379

Нагадаємо, що в статично визначуваних системах температурні переміщення не спричинюють зусилля N, Q і M в елементах системи.

У разі дії навантаження і температури на плоску систему загальна формула для переміщень складається з суми членів формул (13.43) і (13.56):

$$\Delta_i = \Delta_{iP} + \Delta_{iT} = \sum_s \int \frac{\overline{M}_i M_P ds}{EJ} + \sum_s \int \overline{N}_i \alpha \frac{T_{н} + T_{в}}{2} ds +$$

$$+ \sum_s \int \overline{M}_i \alpha \frac{T_{н} - T_{в}}{h} ds. \qquad (13.58)$$

Приклад 58. *Визначимо горизонтальне і вертикальне переміщення, а також кут повороту вільного кінця сталевої консолі (рис. 380, а), спричинені нерівномірним нагріванням. Довжина балки l = 2 м, висота перерізу h = 10 см, $\alpha = 118 \cdot 10^{-7}$. Початкова температура балки T_0 = 5 °C; потім нижнє волокно нагріто до температури 55 °C, а верхнє — охолоджено до температури –5 °C.*

Очевидно, розрахункові температури волокон такі:

$$T_{н} = 55 - 5 = 50\,°C; \quad T_{в} = -5 - 5 = -10\,°C.$$

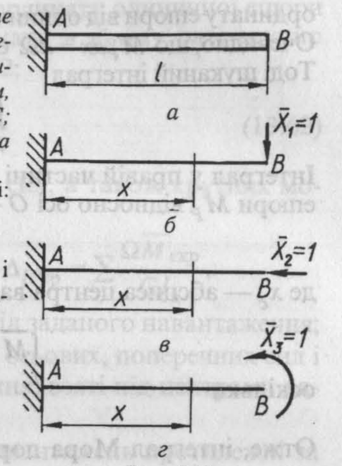


Рис. 380

Допоміжні стани для визначення вертикального і горизонтального переміщень та кута повороту зображено на рис. 380, *б—г*. Маємо:

$$\overline{M}_1 = -(l-x); \quad \overline{N}_1 = 0;$$

$$\overline{M}_2 = 0; \quad \overline{N}_2 = -1; \quad \overline{M}_3 = 1; \quad \overline{N}_3 = 0.$$

Отже, на підставі формули (13.56) знаходимо:

а) прогин

$$\Delta_{1T} = \int_0^l \overline{M}_1 \alpha \frac{T_{н} - T_{в}}{h} dx = -\alpha \frac{T_{н} - T_{в}}{h} \int_0^l (l-x)\, dx = -\alpha \frac{T_{н} - T_{в}}{2h} l^2,$$

або після підставлення значень

$$\Delta_{1T} = -\frac{118 \cdot 10^{-7} \cdot 60 \cdot 4 \cdot 10^4}{2 \cdot 10} \text{ см} = -1{,}42 \text{ см};$$

б) горизонтальне переміщення

$$\Delta_{2T} = \int_0^l \overline{N}_2 \alpha \frac{T_{н} + T_{в}}{2} dx = -\alpha \frac{T_{н} + T_{в}}{2} l = -\frac{118 \cdot 10^{-7} \cdot 40 \cdot 200}{2} \text{ см} = -0{,}047 \text{ см};$$

в) кут повороту

$$\Delta_{3T} = \int_0^l \overline{M}_3 \alpha \frac{T_{н} - T_{в}}{h} dx = \alpha \frac{T_{н} - T_{в}}{h} \int_0^l dx = \frac{\alpha (T_{н} - T_{в})}{h} l;$$

$$\Delta_{3T} = \frac{118 \cdot 10^{-7} \cdot 60 \cdot 200}{10} \text{ рад} = 0{,}0142 \text{ рад}.$$

§ 85. Обчислення інтегралів Мора способом Верещагіна

Обчислення інтегралів Мора істотно спрощується, якщо одна з епюр (у дійсному чи одиничному стані) прямолінійна. Ця умова виконується для систем, що складаються з прямих стрижнів, оскільки при цьому епюри внутрішніх сил від одиничного навантаження (зосередженої сили або пари) завжди обмежені прямими лініями.

Обчислимо інтеграл $\int \overline{M}_i M_P dx$ для випадку, коли епюра від заданого навантаження має довільну форму, а від одиничного — прямолінійна (рис. 381). Позначимо через Ω площу епюри M_P, c — її центр ваги, $\overline{M}_c$ —

ординату епюри від одиничного навантаження під центром ваги епюри M_P. Очевидно, що $M_P dx = d\Omega$ є диференціалом площі епюри M_P, а $\overline{M}_i = x\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Тоді шуканий інтеграл

$$\int_l \overline{M}_i M_P dx = \mathrm{tg}\,\alpha \int_l x\,d\Omega. \qquad (13.59)$$

Інтеграл у правій частині рівняння (13.59) є статичним моментом площі епюри M_P відносно осі $O — O$:

$$\int_l x\,d\Omega = x_c \Omega,$$

де x_c — абсциса центра ваги епюри M_P. Тоді

$$\int_l \overline{M}_i M_P dx = \mathrm{tg}\,\alpha x_c \Omega = \Omega \overline{M}_c, \qquad (13.60)$$

оскільки

$$x_c \mathrm{tg}\,\alpha = \overline{M}_c.$$

Отже, інтеграл Мора дорівнює добутку площі епюри від зовнішнього навантаження на ординату прямолінійної епюри від одиничного навантаження, розміщену під центром ваги епюри від заданого зовнішнього навантаження. Загальна формула (13.46) для визначення переміщень у системах з прямих стрижнів набирає вигляду

$$\Delta_{iP} = \frac{\Omega \overline{M}_c}{EJ}. \qquad (13.61)$$

Описаний графоаналітичний спосіб визначення інтеграла Мора був запропонований О. М. Верещагіним і має назву *способу Верещагіна*. Обчислення за цією формулою виконують по ділянках, на кожній з яких епюра від одиничного навантаження має бути прямолінійною (рис. 382). Тоді, коли обидві епюри прямолінійні, можна множити площу будь-якої з них на ординату іншої під центром ваги першої.

Якщо епюра M_P має складний вигляд, то її слід розбити на прості фігури (рис. 383), для яких легко визначити площу і положення центра ваги.

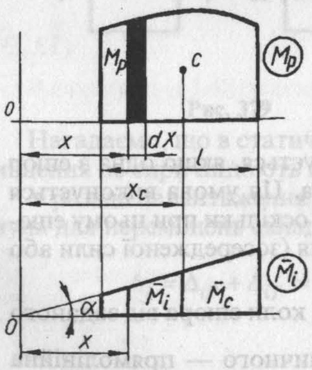


Рис. 381

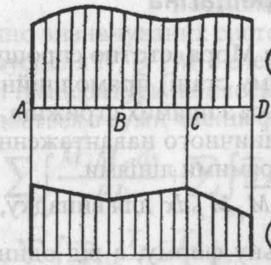


Рис. 382

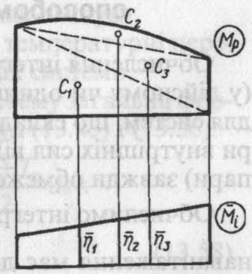


Рис. 383

При цьому кожну з площ треба множити на ординату одиничної епюри під центром ваги відповідної площі. Ординати в цьому разі зручно позначати замість $\overline{M}_{ck}$ літерами η_k, де $k = 1; 2; \ldots$.

Отже,

$$\Delta_{iP} = \sum_{k=1;\ldots} \frac{\Omega_k \bar{\eta}_k}{EJ}. \qquad (13.62)$$

Переміщення від дії осьових і поперечних сил, а також крутних моментів виражаються аналогічно:

$$\Delta_{iPN} = \sum \frac{\Omega \overline{N}_c}{EF}; \quad \Delta_{iPQ} = \sum k \frac{\Omega \overline{Q}_c}{GF}; \quad \Delta_{iP\text{кр}} = \sum \frac{\Omega \overline{M}_{c\text{кр}}}{GJ_\text{к}},$$

де Ω — площа епюри N_P, або Q_P, або $M_{P_\text{кр}}$ від заданого навантаження; $\overline{N}_c$, $\overline{Q}_c$, $\overline{M}_{c\text{кр}}$ — ординати відповідних епюр осьових, поперечних сил і крутних моментів від одиничного навантаження, взяті під центрами ваги епюр N_P, Q_P, $M_{P_\text{кр}}$.

Якщо епюри від заданого і одиничного навантажень протилежні за знаком, то їхній добуток має знак «мінус».

Спосіб Верещагіна широко застосовують при розрахунку рамних конструкцій (конструкцій, в яких кути в місцях з'єднання окремих стрижнів, жорсткі до деформації, залишаються жорсткими після неї).

Розглянемо деякі приклади застосування способу Верещагіна для визначення переміщень у різних стрижневих системах.

Визначимо прогин у точці D і кут повороту перерізу B консолі (рис. 384, *а*). Відповідні допоміжні (одиничні) стани зображено на рис. 384, *б*, *в*.

Будуємо епюри згинальних моментів M_P і $\overline{M}_i$. Прогин у точці D балки за Верещагіним

$$\Delta_{1P} = \sum \frac{\Omega \overline{M}_{c1}}{EJ}.$$

На ділянці AB площа епюри $M_P \Omega = (1/6)qa^3$. Центр ваги цієї площі, обмеженої квадратичною параболою $q(a-x)^2/2$ (рис. 384, *а*), розміщений на відстані $(3/4)\,a$ від точки B, у чому легко переконатися, застосувавши формулу (2.3). Ордината допоміжної епюри $\overline{M}_{c1} = (7/4)\,a$. На ділянці BD $\Omega = 0$. Отже,

$$\Delta_{1P} = \sum \frac{1}{EJ} \frac{qa^3}{6} \frac{7}{4} a = \frac{7}{24} \frac{qa^4}{EJ}.$$

Для визначення кута повороту допоміжну систему навантажимо одиничною парою. Очевидно, $\overline{M}_{c2} = 1$. Отже, кут повороту перерізу B

$$\Delta_{2P} = \sum \frac{\Omega M_{c2}}{EJ} = \frac{1}{EJ} \frac{qa^3}{6} 1 = \frac{qa^3}{6EJ}.$$

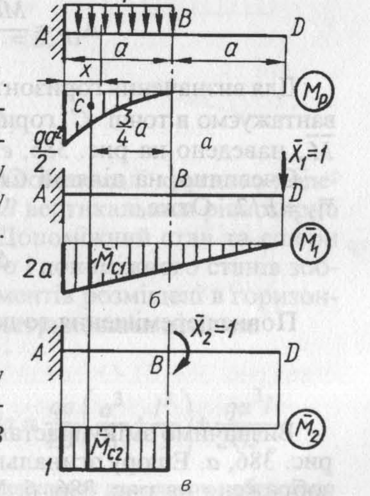


Рис. 384

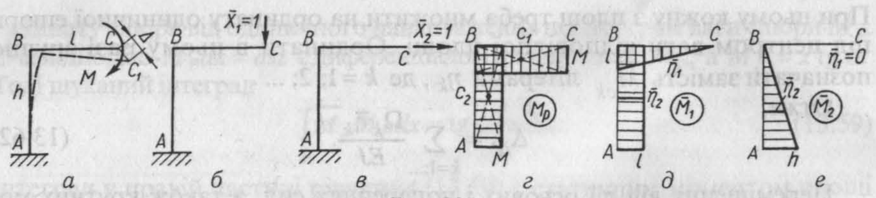


Рис. 385

Знайдемо повне переміщення точки C рами, зображеної на рис. 385, *а*, взявши $EJ = \text{const}$. Для визначення повного переміщення $\Delta = CC_1$ обчислимо насамперед переміщення цієї точки у вертикальному та горизонтальному напрямах.

Щоб визначити вертикальне переміщення точки C, раму в допоміжному стані навантажуємо силою $\overline{X}_1 = 1$, напрямленою вертикально (рис. 385, *б*). Основну епюру M_P зображено на рис. 385, *г*, допоміжну — $\overline{M}_1$ — на рис. 385, *д*. Маємо

$$\Delta_{1P} = \sum_{k=1;\,2} \frac{\Omega_k \overline{\eta}_k}{EJ}.$$

Обчислюємо по ділянках:

для ділянки CB

$$\Omega_1 = Ml; \quad \overline{\eta}_1 = l/2;$$

для ділянки AB

$$\Omega_2 = Mh; \quad \overline{\eta}_2 = l.$$

Отже,

$$\Delta_{1P} = \frac{Ml\,(l/2)}{EJ} + \frac{Mh \cdot l}{EJ} = \frac{Ml}{EJ}\left(\frac{l}{2} + h\right).$$

Для визначення горизонтального переміщення допоміжну систему навантажуємо в точці C горизонтальною силою $\overline{X}_2 = 1$ (рис. 385, *в*). Епюру $\overline{M}_2$ наведено на рис. 385, *е*.

Очевидно, на ділянці CB ордината $\overline{\eta}_1 = 0$, а на ділянці AB ордината $\overline{\eta}_2 = h/2$. Отже,

$$\Delta_{2P} = \frac{\Omega_2 \overline{\eta}_2}{EJ} = \frac{Mh^2}{2EJ}.$$

Повне переміщення точки C рами

$$\Delta = \sqrt{\Delta_{1P}^2 + \Delta_{2P}^2}.$$

Визначимо зміну відстані між точками A і B для рами, зображеної на рис. 386, *а*. Епюру згинальних моментів від заданого навантаження M_P зображено на рис. 386, *б*. У допоміжному стані навантажуємо систему узагальненим навантаженням, яке відповідає шуканому переміщенню

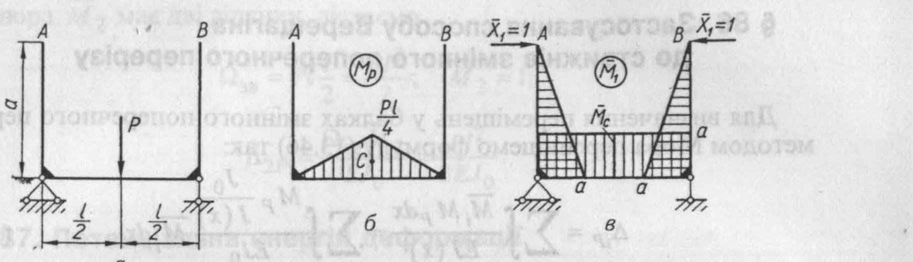


Рис. 386

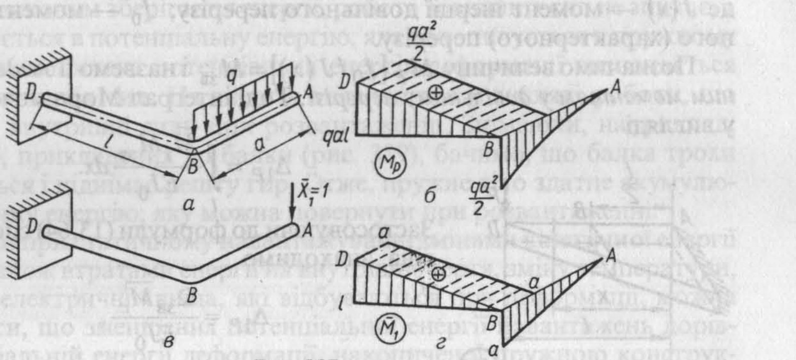


Рис. 387

(рис. 386, *в*)*. Таким навантаженням є одиничні зосереджені сили, прикладені в точках A, B. Епюри M_P і $\overline{M}_1$ побудовано на стиснутих волокнах. Маємо

$$\Omega = \frac{1}{2}\frac{Pl}{4}l = \frac{Pl^2}{8}; \quad \overline{M}_c = a.$$

Отже,

$$\Delta_{1P} = \frac{\Omega \overline{M}_c}{EJ} = \frac{Pl^2 a}{8EJ}.$$

Визначимо опускання вільного кінця ламаної консолі круглого поперечного перерізу, навантаженої на ділянці AB вертикальним рівномірно розподіленим навантаженням (рис. 387, *а*). Допоміжний стан та епюри згинальних і крутних моментів для основного і допоміжного станів зображено на рис. 387, *б—г*. Епюри крутних моментів розміщені в горизонтальній площині, а їхні ординати зображено штриховими лініями.

Обчислюємо по ділянках:

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EJ}\frac{qa^3}{6}\frac{3}{4}a + \frac{1}{EJ}\frac{1}{2}qal^2\frac{2}{3}l + \frac{1}{GJ_p}\frac{qa^2}{2}la = \frac{qa}{EJ}\left(\frac{a^3}{8} + \frac{l^3}{3}\right) + \frac{qa^3 l}{2GJ_p}.$$

*Для скорочення кількості рисунків тут і в деяких прикладах далі епюри побудовано безпосередньо на осях стрижнів, тобто схеми станів навантаження й епюри суміщено на одному рисунку.

§ 86. Застосування способу Верещагіна до стрижнів змінного поперечного перерізу

Для визначення переміщень у балках змінного поперечного перерізу методом Мора перепишемо формулу (13.46) так:

$$\Delta_{iP} = \sum \int\limits_{l} \frac{\overline{M}_i M_P dx}{EJ(x)} = \sum \int\limits_{l} \frac{M_P \dfrac{J_0}{J(x)} \overline{M}_i dx}{EJ_0}, \tag{13.63}$$

де $J(x)$ — момент інерції довільного перерізу; J_0 — момент інерції певного (характерного) перерізу.

Позначимо величину $M_P[J_0/J(x)] = M_{\text{зв}}$ і назвемо її *зведеним згинальним моментом у довільному перерізі*. Тоді інтеграл Мора можна записати у вигляді

$$\Delta_{1P} = \int\limits_{l} \frac{\overline{M}_i M_{\text{зв}}}{EJ_0} dx. \tag{13.64}$$

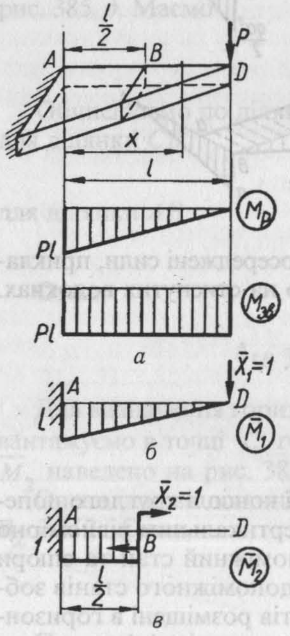


Рис. 388

Застосовуючи до формули (13.64) спосіб Верещагіна, знаходимо

$$\Delta_{1P} = \frac{\Omega_{\text{зв}} \overline{M}_c}{EJ_0}, \tag{13.65}$$

де $\Omega_{\text{зв}}$ — площа епюри $M_{\text{зв}}$ (тобто зведеної епюри); $\overline{M}_c$ — ордината одиничної епюри під центром ваги зведеної епюри.

Визначимо прогин вільного кінця і кут повороту перерізу B консолі змінного перерізу (рис. 388, *а*), якщо

$$J(x) = J_0 \frac{l - x}{l},$$

де J_0 — момент інерції перерізу в місці затиснення.

Поточна ордината епюри M_P дорівнює $-P(l-x)$. Зведені ординати постійні, оскільки

$$M_{\text{зв}} = M_P \frac{J_0}{J(x)} = -Pl.$$

Для визначення прогину будуємо допоміжний стан (рис. 388, *б*). Очевидно,

$$\Omega_{\text{зв}} = Pl^2; \quad \overline{M}_1 = \frac{l}{2}; \quad \Delta_{1P} = \frac{\Omega_{\text{зв}} \overline{M}_1}{EJ_0} = \frac{Pl^3}{2EJ_0}.$$

Щоб визначити кут повороту перерізу B, навантажуємо балку в допоміжному стані зосередженим моментом $\overline{X}_2 = 1$ (рис. 388, *в*). Враховуючи, що епюра $\overline{M}_2$ має дві ділянки, дістаємо

$$\Omega_{\text{зв}} = Pl \frac{l}{2} = \frac{Pl^2}{2}; \quad \overline{M}_2 = 1;$$

$$\Delta_{2P} = \frac{\Omega_{\text{зв}} \overline{M}_2}{EJ_0} = \frac{Pl^2}{2EJ_0}.$$

§ 87. Потенціальна енергія деформації

Згідно із законом зберігання енергії, робота зовнішніх сил не зникає, а трансформується в потенціальну енергію, яка накопичується в пружному тілі. Отже, накопичена потенціальна енергія деформації визначається роботою зовнішніх сил. Ця енергія виявляється у вигляді роботи, що здійснюють внутрішні сили при розвантаженні. Знімаючи, наприклад, частину гир, прикладених до балки (рис. 389), бачимо, що балка трохи випрямляється і піднімає решту гир. Отже, пружне тіло здатне акумулювати механічну енергію, яку можна повернути при розвантаженні.

Нехтуючи при статичному навантажуванні змінами кінетичної енергії системи, а також втратами енергії на внутрішнє тертя, зміну температури, магнітні та електричні явища, які відбуваються при деформації, можна стверджувати, що зменшення потенціальної енергії навантажень дорівнює потенціальній енергії деформації, накопиченої пружною конструкцією, тобто

$$U = U_P, \tag{13.66}$$

де U – приріст потенціальної енергії деформації; U_P — зменшення потенціальної енергії навантажень.

Зменшення потенціальної енергії навантажень чисельно дорівнює роботі зовнішніх сил при навантажуванні тіла. Отже, потенціальна енергія деформації чисельно дорівнює роботі зовнішніх сил при навантажуванні системи або роботі внутрішніх сил у процесі розвантажування.

На підставі формули (13.22) потенціальна енергія деформації в загальному випадку навантажування стрижня

$$U = A = \frac{1}{2}\int\limits_{s} \frac{M^2 ds}{EJ_y} + \frac{1}{2}\int\limits_{s} \frac{M_z^2 ds}{EJ_z} + \frac{1}{2}\int\limits_{s} \frac{M_{\text{кр}}^2 ds}{GJ_{\text{к}}} + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_{s} \frac{N^2 ds}{EF} + \frac{1}{2}\int\limits_{s} k_y \frac{Q_y^2 ds}{GF} + \frac{1}{2}\int\limits_{s} k_z \frac{Q_z^2 ds}{GF}. \tag{13.67}$$

Як видно з формули, потенціальна енергія деформації становить квадратичну функцію узагальнених сил або узагальнених переміщень, оскільки останні пов'язані лінійно з узагальненими силами. Отже, потенціальна енергія деформації завжди додатна, не залежить від порядку навантажування і цілком визначається остаточним значенням зусиль і переміщень.

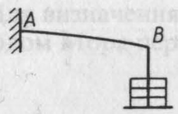


Рис. 389

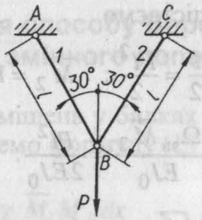


Рис. 390

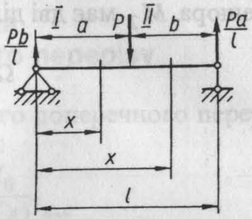


Рис. 391

Зазначимо також, що потенціальна енергія деформації як квадратична функція узагальнених навантажень не відповідає принципу незалежності дії сил. Це означає, що потенціальна енергія, накопичена внаслідок дії групи сил, не дорівнює сумі потенціальних енергій, спричинених дією кожного навантаження окремо. Закон незалежності дії сил при обчисленні потенціальної енергії можна застосовувати лише тоді, коли переміщення в напрямі однієї узагальненої сили, спричинене дією іншої сили, дорівнює нулю.

Приклад 59. *Визначимо потенціальну енергію деформації, накопичену в шарнірно-стрижневій системі (рис. 390), яка навантажена у вузлі B вертикальною силою P. Стрижні AB і BC мають однакові розміри і виготовлені з одного матеріалу.*

Розглядаючи рівновагу вузла B, знаходимо, що стрижні розтягаються однаковими силами:

$$N_1 = N_2 = P/\sqrt{3}. \tag{13.68}$$

Отже, потенціальна енергія деформації системи

$$U = \sum_{i=1}^{2} \frac{N_i^2 l}{2EF} = \frac{\left(P/\sqrt{3}\right)^2 l}{EF} = \frac{P^2 l}{3EJ}. \tag{13.69}$$

З іншого боку, на підставі формули (13.10) потенціальну енергію деформації можна визначити як половину добутку сили, прикладеної до вузла, на вертикальне переміщення вузла Δ_P, тобто

$$U = \frac{1}{2} P \Delta_P. \tag{13.70}$$

Порівнюючи формули (13.69) і (13.70), можна знайти переміщення точки B у напрямі сили:

$$\Delta_P = \frac{2}{3}\frac{Pl}{EF}.$$

Приклад 60. *Визначимо потенціальну енергію, накопичену при деформації балки постійного прямокутного перерізу* $b \times h$, *навантаженої, як зображено на рис. 391.*

Виходимо з формули (13.67), зберігаючи члени, які відповідають плоскому згинанню:

$$U = \int_l \frac{M^2(x)\,dx}{2EJ} + k \int_l \frac{Q^2(x)\,dx}{2GF}. \tag{13.71}$$

Обчислюємо по ділянках. Вирази для згинальних моментів і поперечних сил у довільних перерізах ділянок мають такий вигляд:

для *I* ділянки $(0 \le x \le a)$

$$M(x) = \frac{Pb}{l} x; \quad Q(x) = \frac{Pb}{l};$$

для *II* ділянки $(a \le x \le l)$

$$M(x) = \frac{Pa}{l}(l - x); \quad Q(x) = -\frac{Pa}{l}.$$

Отже,

$$U = \int_0^a \frac{\left(\frac{Pb}{l} x\right)^2 dx}{2EJ} + k \int_0^a \frac{\left(\frac{Pb}{l}\right)^2 dx}{2GF} + \int_a^l \frac{\left[\frac{Pa}{l}(l - x)\right]^2 dx}{2EJ} +$$

$$+ k \int_a^l \frac{\left(\frac{Pa}{l}\right)^2 dx}{2GF} = \frac{P^2 a^2 b^2}{6EJl} + k \frac{P^2 ab}{2GFl} = \frac{P^2 a^2 b^2}{6EJl} + \frac{3}{5}\frac{P^2 ab}{GFl}, \tag{13.72}$$

оскільки для прямокутного перерізу $k = 1{,}2$. Підставивши у формулу (13.72)

$$G = 0{,}4E; \quad J = \frac{bh^3}{12}; \quad F = bh,$$

знайдемо, що

$$U = \frac{2P^2 a^2 b^2}{Ebh^3 l}\left(1 + \frac{3}{4}\frac{h^2}{ab}\right).$$

Другий член у дужках виражає вплив поперечної сили. При звичайних розмірах балок він не перевищує 2…3 %. У зв'язку з цим при згинанні балки впливом поперечної сили при обчисленні потенціальної енергії, як правило, нехтують.

Бажаючи обчислити прогин балки в перерізі, де прикладена сила, потенціальну енергію деформації можна записати також у вигляді

$$U = \frac{1}{2} P \Delta_P. \tag{13.73}$$

Порівнюючи вирази (13.73) та (13.72), нехтуючи впливом поперечної сили, знайдемо прогин у перерізі B:

$$\Delta_P = \frac{Pa^2 b^2}{3EJl}. \tag{13.74}$$

§ 88. Теорема Кастільяно. Теорема Лагранжа

Нехай пружна система статично навантажена довільним навантаженням Q і деякою узагальненою силою P (рис. 392). Обчислимо потенціальну енергію, накопичену при деформації системи. Для зручності виберемо такий порядок навантажування. Спочатку навантажуємо систему силою P. Переміщення точки прикладення сили в її напрямі, спричинене цією самою силою, позначимо Δ_{PP}. Потім прикладаємо навантаження Q. Внаслідок додаткової деформації сила P дістане переміщення Δ_{PQ}. Повне (узагальнене) переміщення точки прикладення сили

$$\Delta_P = \Delta_{PP} + \Delta_{PQ}. \tag{13.75}$$

Очевидно, накопичена потенціальна енергія деформації чисельно дорівнює роботі зовнішніх сил:

Рис. 392

$$U = \frac{1}{2} P^2 \Delta_{PP} + P \Delta_{PQ} + U_{QQ}, \tag{13.76}$$

де U_{QQ} — енергія, накопичена внаслідок деформування системи тільки силами Q, яка чисельно дорівнює роботі цих сил на спричинених ними переміщеннях.

Другий член у формулі (13.76) не містить 1/2, оскільки на переміщенні Δ_{PQ} сила P, здійснюючи роботу, не змінювала свого значення. Оскільки $\Delta_{PP} = P\delta_{PP}$, то формулу (13.76) можна записати у вигляді

$$U = \frac{1}{2}P^2\delta_{PP} + P\Delta_{PQ} + U_{QQ}. \qquad (13.77)$$

Продиференціюємо вираз (13.77) по силі P, враховуючи вираз (13.75)

$$\frac{\partial U}{\partial P} = P\delta_{PP} + \Delta_{PQ} = \Delta_{PP} + \Delta_{PQ} = \Delta_P.$$

Отже,

$$\Delta_P = \frac{\partial U}{\partial P}. \qquad (13.78)$$

Переміщення точки прикладення узагальненої сили в напрямі її дії дорівнює частинній похідній від потенціальної енергії деформації по цій силі (теорема Кастільяно).

Зазначимо, що, згідно з формулою (13.77), друга похідна від потенціальної енергії по узагальненій силі

$$\frac{\partial^2 U}{\partial P^2} = \frac{\partial \Delta_P}{\partial P} = \delta_{PP} \qquad (13.79)$$

завжди додатна.

Для плоскої стрижневої системи, виходячи із загальної формули (13.67), потенціальну енергію деформації запишемо у вигляді

$$U = \int_s \frac{M^2(s)ds}{2EJ} + \int_s \frac{N^2(s)ds}{2EF} + \int_s k\frac{Q^2(s)ds}{2GF}, \qquad (13.80)$$

де $M(s)$, $N(s)$, $Q(s)$ — зусилля в перерізі стрижня.

Застосовуючи правило диференціювання по параметру, знаходимо

$$\Delta_P = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_s \frac{M(s)ds}{2EJ}\frac{\partial M(s)}{\partial P} + \int_s \frac{N(s)ds}{EF}\frac{\partial N(s)}{\partial P} + \int_s k\frac{Q(s)ds}{GF}\frac{\partial Q(s)}{\partial P}. \qquad (13.81)$$

Якщо знехтувати впливом осьових і поперечних сил на переміщення,

$$\Delta_P = \int_s \frac{M(s)ds}{EJ}\frac{\partial M(s)}{\partial P}. \qquad (13.82)$$

Тоді, коли треба розглянутим способом визначити лінійне чи кутове переміщення в точці, де узагальнена сила не діє, в цій точці слід прикласти відповідну фіктивну узагальнену силу. Далі, записавши вираз для потенціальної енергії від системи сил, включаючи зазначену фіктивну силу, слід взяти похідну по фіктивній силі і в здобутому виразі для переміщення покласти фіктивне навантаження таким, що дорівнює нулю.

Приклад 61. *Визначимо способом Кастільяно кут повороту вільного кінця консолі, навантаженої рівномірно розподіленим навантаженням (рис. 393, а).*

У зазначеному перерізі балки як фіктивне навантаження прикладаємо M^0 (рис. 393, *б*). Кут повороту перерізу A, згідно з формулою (13.78),

$$\Theta_A = \Delta_{MP} = \frac{\partial U}{\partial M^0} = \int_l \frac{M(x)dx}{EJ}\frac{\partial M(x)}{\partial M^0}.$$

Маємо

$$M(x) = -\frac{qx^2}{2} - M^0; \quad \frac{\partial M(x)}{\partial M^0} = -1; \quad \Theta_A = \frac{1}{EJ}\int_0^l \left(\frac{qx^2}{2} + M^0\right)dx.$$

Взявши $M^0 = 0$, дістанемо

$$\Theta_A = \frac{ql^3}{6EJ}.$$

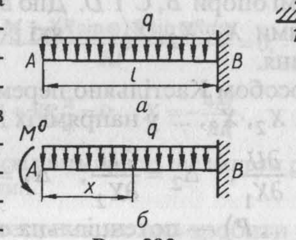


Рис. 393

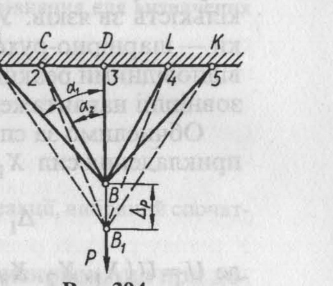


Рис. 394

Зазначимо, що загальна формула (13.45) для обчислення переміщень у стрижневих системах, яка не потребує складання виразів потенціальної енергії та диференціювання їх, витиснула з розрахункової практики спосіб Кастільяно. Проте останній є загальним способом визначення переміщень у нестрижневих системах (пластини, оболонки тощо).

Якщо виразити потенціальну енергію деформації як функцію незалежних узагальнених переміщень, то можна довести, що частинна похідна від потенціальної енергії по будь-якому переміщенню дорівнює відповідній узагальненій силі:

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_i} = P_i. \qquad (13.83)$$

Ця теорема відома в літературі як теорема Лагранжа.

Приклад 62. *Симетрична шарнірно-стрижнева система навантажена у вузлі B вертикальною силою P (рис. 394). Визначимо значення сили P, якщо вертикальне переміщення вузла дорівнює Δ_P.*

Введемо позначення: α_i — кут нахилу стрижня до вертикалі; l_i — довжина стрижня; E_iF_i — жорсткість поперечного перерізу стрижня. Стрижні з однаковим нахилом до вертикалі мають однакові жорсткості.

Очевидно, що подовження i–го стрижня

$$\Delta_i = \Delta_P \cos\alpha_i,$$

а зусилля в ньому

$$P_i = \frac{\Delta_i E_i F_i}{l_i}.$$

Потенціальна енергія деформації системи

$$U = \sum \frac{P_i \Delta_i}{2} = \sum \frac{\Delta_i^2 E_i F_i}{2l_i} = \Delta_P^2 \sum \frac{\cos^2\alpha_i E_i F_i}{2l_i}.$$

Диференціюючи по Δ_P, знаходимо

$$P = \frac{\partial U}{\partial \Delta_P} = \Delta_P \sum \frac{\cos^2 \alpha_i E_i F_i}{l_i}.$$

§ 89. Теорема про мінімум потенціальної енергії

Розглянемо довільну статично невизначувану систему (рис. 395, *а*), зусилля в елементах якої тільки з рівнянь рівноваги визначити не можна. Так, опорні закріплення зображеної балки дають шість реакцій, а рівнянь рівноваги для довільної плоскої системи сил можна скласти тільки три. Перетворимо систему на статично визначувану, відкинувши відповідну кількість зв'язків. У даному прикладі (рис. 395, *б*) відкинуто три зв'язки — шарнірно-рухомі опори B, C і D. Дію відкинутих зв'язків замінимо відповідними реакціями $X_1, X_2, X_3, \ldots$, які розглядатимемо як незалежні зовнішні навантаження.

Обчислимо за способом Кастільяно переміщення $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$ точок прикладення сил $X_1, X_2, X_3, \ldots$ у напрямі їх дії. Очевидно,

$$\Delta_1 = \frac{\partial U}{\partial X_1}; \quad \Delta_2 = \frac{\partial U}{\partial X_2}; \quad \Delta_3 = \frac{\partial U}{\partial X_3}; \quad \ldots,$$

де $U = U(X_1, X_2, X_3, \ldots, P)$ — потенціальна енергія деформації системи.

Оскільки ці переміщення дорівнюють нулю, то

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial X_2} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial X_3} = 0; \ \ldots \tag{13.84}$$

Рівняння (13.84) — необхідна умова екстремуму функції U. Легко бачити, що цей екстремум є мінімумом. Так, згідно з формулою (13.79), другі похідні функції U по $X_1, X_2, X_3, \ldots$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X_1^2} = \delta_{11}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial X_2^2} = \delta_{22}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial X_3^2} = \delta_{33}; \ \ldots \tag{13.85}$$

Переміщення $\delta_{11}, \delta_{22}, \delta_{33}$ — завжди додатні величини, отже, другі похідні функції U додатні, а умови (13.84) є умовами мінімуму функції U.

Отже, приходимо *до теореми про мінімум потенціальної енергії: в статично невизначуваних системах зайві невідомі зусилля набирають таких значень, при яких потенціальна енергія деформації має найменше значення (теорема Менабреа)*. Ця теорема відома також як теорема про найменшу роботу, оскільки робота зовнішніх сил чисельно дорівнює потенціальній енергії деформації.

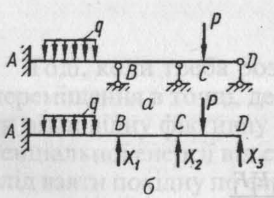


Рис. 395

Приклад 63. *Користуючись теоремою про мінімум потенціальної енергії деформації, визначимо реакцію шарнірно-рухомої опори стрижня малої кривини, зображеного на рис. 396. Стрижень навантажений в опорному перерізі B зосередженим моментом M.*

Позначимо невідому реакцію через X. Тоді на підставі теореми про мінімум потенціальної енергії деформації

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0. \tag{13.86}$$

Оскільки $U = \int\limits_s \frac{M^2(\varphi)ds}{2EJ}$, то формула (13.86) набирає вигляду

$$\int\limits_s \frac{M(\varphi)ds}{EJ}\frac{\partial M(\varphi)}{\partial X} = 0. \tag{13.87}$$

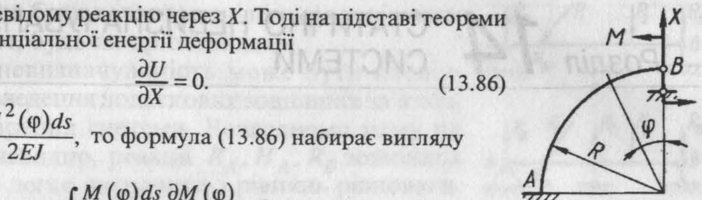


Рис. 396

Маємо

$$M(\varphi) = M + XR\sin\varphi; \quad \frac{\partial M(\varphi)}{\partial X} = R\sin\varphi; \quad ds = Rd\varphi.$$

Підставляючи ці значення у формулу (13.87), дістанемо рівняння для визначення реакції X:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{(M + XR\sin\varphi)R\sin\varphi Rd\varphi}{EJ} = 0;$$

$$M + XR\frac{\pi}{4} = 0; \quad X = -\frac{4M}{\pi R}.$$

Знак «мінус» у виразі для X свідчить про те, що напрям реакції, вибраний спочатку, треба змінити на протилежний.

На підставі викладеної теореми можна зробити висновок, що при добавлянні яких-небудь зв'язків потенціальна енергія деформації завжди зменшується.

Розділ 14 СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНІ СИСТЕМИ

§ 90. Основні поняття та визначення. Етапи розрахунку статично невизначуваної системи

Як уже зазначалося, статично невизначуваними називаються системи, силові фактори в елементах яких тільки з рівнянь рівноваги визначити не можна. У таких системах зв'язків більше, ніж потрібно для рівноваги. Отже, деякі зв'язки виявляються в цьому розумінні так би мовити *зайвими*, а зусилля в них — *зайвими невідомими*. За числом зайвих зв'язків або зайвих невідомих зусиль установлюють ступінь статичної невизначуваності системи.

У § 37 було розглянуто найпростіші приклади статично невизначуваних систем, елементи яких зазнавали лише осьового розтягання або стискання. У цьому розділі розглянемо більш загальні випадки, причому основну увагу приділимо статично невизначуваним балкам та рамам.

На рис. 397, *а* зображено шарнірно оперту балку — систему статично визначувану і геометрично незмінювану. Всі три реакції (R_A, H_A, R_B) визначаються з трьох умов рівноваги плоскої системи сил. Використовуючи метод перерізів, легко знайти силові фактори Q, M у будь-якому перерізі балки.

Додамо ще один зв'язок, наприклад шарнірно-рухому опору в перерізі C (рис. 397, *б*). Хоч унаслідок цього система стала більш міцною та жорсткою, проте з погляду геометричної незмінюваності цей зв'язок зайвий. Тепер з трьох рівнянь рівноваги чотири реакції (R_A, H_A, R_B, R_C) визначити не можна. Отже, зображена на рис. 397, *б* балка один раз статично невизначувана.

На рис. 398, *а* наведено двічі статично невизначувану балку. Для визначення п'яти реакцій є лише три рівняння рівноваги. Отже, система має два зайвих зв'язки. Вона може бути утворена, наприклад, із консолі (рис. 398, *б*) установленням шарнірно-рухомих опор у перерізах B та C.

У конструкціях часто застосовують статично невизначувані балки з ламаною віссю — рами. На відміну від ферм, де стрижні з'єднані між собою шарнірами й навантажені силами, прикладеними у вузлах, рами мають один або кілька жорстких вузлів. У жорсткому вузлі торці з'єднуваних стрижнів не дістають відносних поступальних переміщень, а також відносних поворотів.

Рамні конструкції можуть складатись як з прямолінійних, так і з криволінійних елементів. На рис. 399 зображено двічі статично невизначувану плоску раму. В цьому прикладі, як і в попередньому, для визначення п'яти реакцій зовнішніх зв'язків маємо тільки три рівняння рівноваги.

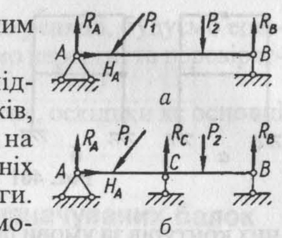


Рис. 397

Рами можуть бути навантажені цілком довільним навантаженням, будь-як орієнтованим.

Статична невизначуваність може бути наслідком не тільки введення додаткових зовнішніх зв'язків, а й умов утворення системи. Розглянемо раму на рис. 400, *а*. Очевидно, реакції R_A, H_A, R_B зовнішніх зв'язків (опор) легко визначити з рівнянь рівноваги. Проте після цього рівняння рівноваги не дають змоги визначити всі силові фактори в елементах рами.

Розріжемо раму на дві частини й розглянемо рівновагу однієї з частин (рис. 400, *б*). Дію відкинутої частини на залишену замінимо в кожному з перерізів розрізу трьома силовими факторами: осьовою силою N, поперечною силою Q та згинальним моментом M. Отже, з трьох рівнянь рівноваги треба визначити дев'ять невідомих зусиль. Система шість разів статично невизначувана. Вона складається з двох замкнених безшарнірних контурів, кожен з яких тричі статично невизначуваний.

Зазначимо, що встановлення шарніра на осі стрижня (рис. 401, *а*) перетворює на нуль згинальний момент у даному перерізі й, отже, знижує ступінь статичної невизначуваності на одиницю. Такий шарнір називають *одиночним*. Очевидно, рама, зображена на рис. 401, *а*, п'ять разів статично невизначувана.

Шарнір, розміщений у вузлі, де збігаються n стрижнів (рис. 401, *в*), знижує ступінь статичної невизначуваності на $n-1$, оскільки замінює собою таку саму кількість одиночних шарнірів (рис. 401, *г*). Такий шарнір зветься *загальним*. Рама, зображена на рис. 401, *б*, чотири рази статично невизначувана.

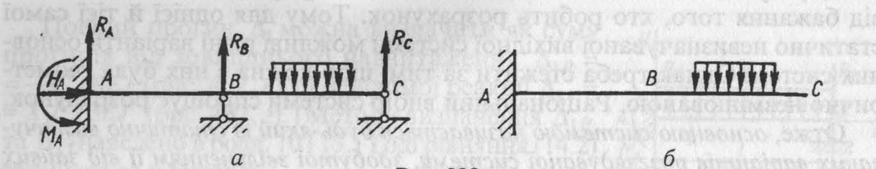


Рис. 398

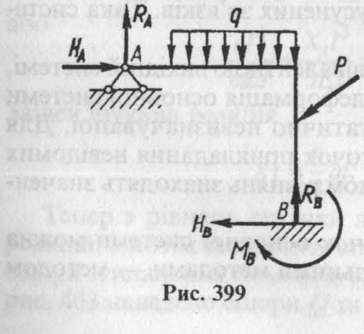


Рис. 399

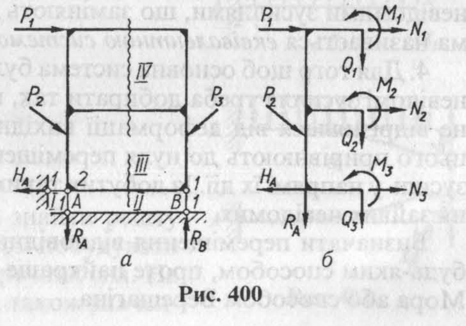


Рис. 400

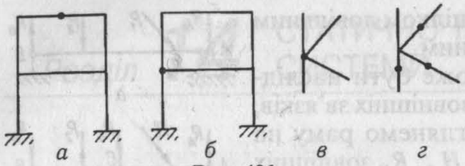


Рис. 401

Ступінь статичної невизначуваності плоских систем можна визначати за формулою

$$s = 3k - ш, \qquad (14.1)$$

де s — ступінь статичної невизначуваності; k — кількість замкнених контурів за умови повної відсутності шарнірів; $ш$ — кількість шарнірів у перерахунку на одиночні.

Основа (земля) розглядається як стрижень. Наприклад, рама, наведена на рис. 400, має чотири замкнених контури; біля кожного шарніра вказано відповідну кількість одиночних шарнірів, при цьому група стрижнів, жорстко зв'язаних між собою, вважається одним стрижнем.

Тож у розглядуваному прикладі $k = 4$, $ш = 1+2+1+1+1 = 6$. Отже, $s = 3 \cdot 4 - 6 = 6$.

Як уже зазначалося в § 37, для визначення зусиль у статично невизначуваних системах додатково до рівнянь статики складають так звані рівняння сумісності деформацій. Насправді, зайві зв'язки обмежують переміщення тих перерізів, до яких вони прикладені. Цю обставину й використовують для складання додаткових рівнянь, які разом з рівняннями статики дають змогу визначити всі силові фактори в елементах системи.

Розглянемо етапи розрахунку статично невизначуваної системи.

1. Визначаємо ступінь статичної невизначуваності, тобто кількість зайвих зв'язків або зайвих зусиль.

2. Усуваючи зайві зв'язки, заміняємо вихідну систему статично визначуваною, яку називають основною системою. Вибір зайвих зв'язків залежить від бажання того, хто робить розрахунок. Тому для однієї й тієї самої статично невизначуваної вихідної системи можливі різні варіанти основних систем. Однак треба стежити за тим, щоб кожна з них була геометрично незмінюваною. Раціональний вибір системи спрощує розрахунок.

Отже, *основною системою називається будь-який із статично визначуваних варіантів розглядуваної системи, здобутої звільненням її від зайвих зв'язків*.

3. Завантажуємо основну систему заданим навантаженням і зайвими невідомими зусиллями, що заміняють дію усунених зв'язків. Така система називається *еквівалентною системою*.

4. Для того щоб основна система була еквівалентною вихідній системі, невідомі зусилля треба добирати так, щоб деформація основної системи не відрізнялася від деформації вихідної статично невизначуваної. Для цього прирівнюють до нуля переміщення точок прикладання невідомих зусиль у напрямі їх дії. Із добутих таким чином рівнянь знаходять значення зайвих невідомих.

Визначати переміщення відповідних точок основної системи можна будь-яким способом, проте найкраще загальними методами — методом Мора або способом Верещагіна.

Знайшовши зайві невідомі зусилля, визначаємо реакції, будуємо епюри внутрішніх силових факторів, а також добираємо перерізи та перевіряємо міцність звичайними способами.

Наведена схема розрахунку має назву *методу сил*, оскільки як основні невідомі тут вибирають зусилля зайвих зв'язків.

§ 91. Розрахунок простих статично невизначуваних балок

Як приклад розрахуємо балку, один кінець якої закріплений, а інший обпирається на шарнірно-рухому опору (рис. 402, *а*).

Затискання лівого кінця, еквівалентне трьом стрижням, дає три реакції, шарнірно-рухома опора — одну реакцію. Всього треба визначити чотири реакції. Отже, балка один раз статично невизначувана. Для побудови основної системи слід усунути один зв'язок.

Як зайвий зв'язок виберемо шарнірно-рухому опору. Основна система, добута внаслідок усунення зайвого зв'язка, становить консоль.

Навантажуємо основну систему заданим розподіленим навантаженням, а замість відкинутої опори прикладаємо невідому реакцію $R_B = X_1$ (рис. 402, *б*). Надалі зайві зв'язки позначатимемо літерою X незалежно від того, сила це чи момент.

Повне переміщення точки B основної системи (від заданого навантаження й зайвого невідомого зусилля) у напрямі X_1, тобто у напрямі усуненого зв'язка, має дорівнювати нулю, оскільки в точці B вихідна система не має прогину. Отже, додаткове рівняння переміщень запишеться так:

$$\Delta_1 = 0. \qquad (14.2)$$

Повний прогин Δ_1 можна визначити як суму прогинів від зовнішнього навантаження $\Delta_{1P} = -ql^4/8EJ$ (рис. 402, *в*) та невідомої реакції $\Delta_{11} = X_1 l^3/3EJ$ (рис. 402, *г*). (Методи визначення Δ_{1P} та Δ_{11} наведено в розд. 10 і 13.) Тоді рівняння (14.2) запишеться у вигляді

$$\Delta_1 = \Delta_{1P} + \Delta_{11} = 0,$$

або

$$-\frac{ql^4}{8EJ} + \frac{X_1 l^3}{3EJ} = 0.$$

Звідси шукана реакція

$$X_1 = \frac{3}{8} ql.$$

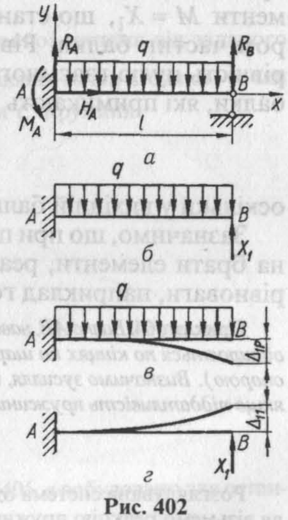


Рис. 402

Тепер з рівнянь статики легко знайти решту реакцій, а потім звичайним способом побудувати епюри згинальних моментів і поперечних сил. На рис. 403 наведено епюри Q та M, а також значен-

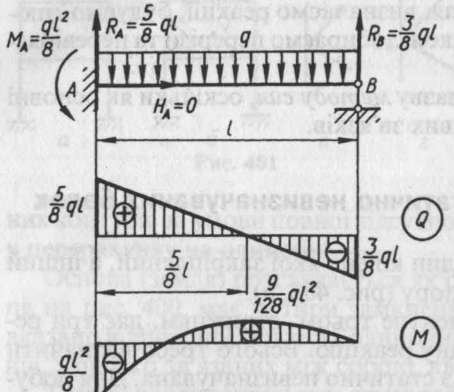


Рис. 403

ня реакцій опор. Перевіряють міцність або добирають перерізи також звичайним способом.

Нагадаємо, що вигляд основної системи залежить від того, які зв'язки (зусилля) вибрані як зайві. Так, взявши як зайве зусилля опорний момент M_A, дістанемо основну систему, замінивши затиснення шарнірно-нерухомою опорою (рис. 404, *а*). Тут основна система, крім заданого навантаження, навантажується невідомим моментом $M_A = X_1$, який визначається на підставі рівняння переміщень (14.2). Під Δ_1 у цьому разі слід розуміти повний кут повороту перерізу *A*.

На рис. 404, *б* зображено основну систему, здобуту в припущенні, що як зайву невідому взято реакцію R_A. Така конструкція опори перешкоджає повороту й горизонтальному переміщенню, але допускає вертикальне переміщення. У цьому разі рівняння переміщень (14.2) виражає рівність нулю в основній системі вертикального переміщення (прогину) точки *A*.

Нарешті, основну систему можна утворити й установленням проміжного шарніра в якому-небудь перерізі (рис. 404, *в*). Таким чином дістаємо статично визначувану шарнірну балку. Тут вже усунено не зовнішній, а внутрішній зв'язок. Оскільки встановленням шарніра ліквідується згинальний момент у даному перерізі балки, то для відновлення втрачених зв'язків прикладаємо два однакових за модулем та протилежно напрямлених моменти $M = X_1$, що становлять дію однієї на одну відокремлених шарніром частин балки. Рівняння переміщень (14.2) у цьому разі виражає рівність нулю взаємного кута повороту перерізів правої та лівої частин балки, які примикають до шарніра (рис. 404, *г*):

$$\Delta_1 = \Theta_{1\text{лів}} + \Theta_{1\text{пр}} = 0, \tag{14.3}$$

оскільки у вихідній балці ці перерізи утворюють один переріз.

Зазначимо, що при побудові основної системи як зайві зв'язки не можна брати елементи, реакції яких визначаються безпосередньо з рівнянь рівноваги, наприклад горизонтальну реакцію H_A опори на рис. 403.

Приклад 64. *Балка AB, навантажена рівномірно розподіленим навантаженням (рис. 405, а), обпирається по кінцях на шарнірні опори, а посередині підпирається пружиною (пружною опорою). Визначимо зусилля, що стискає пружину; побудуємо епюру згинальних моментів, якщо піддатливість пружини, тобто її осадка від одиничної сили (див. § 58),*

$$\alpha = \frac{64R^3n}{Gd^4}.$$

Розглядувана система один раз статично невизначувана. Як зайве невідоме зусилля візьмемо реакцію пружини $R_C = X_1$. Відповідно до цього на рис. 405, *б* побудова-

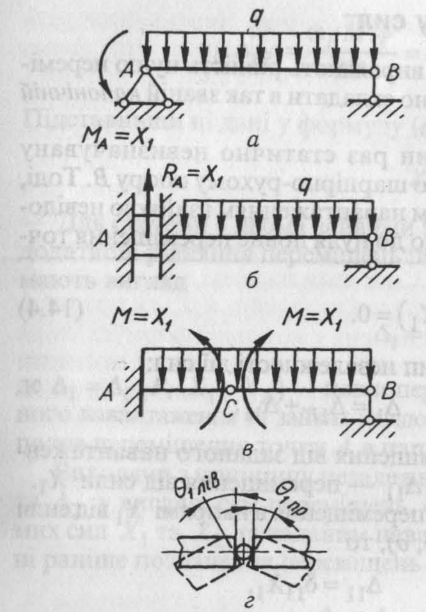


Рис. 404

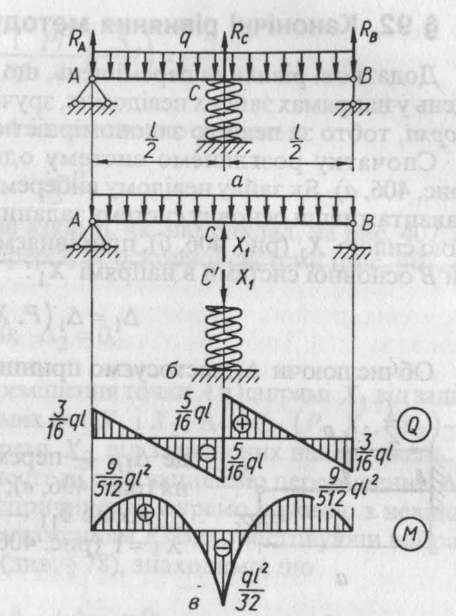


Рис. 405

но основну систему. Щоб вона деформувалась як задана балка, прогин точки *C* балки має дорівнювати осадці точки *C'* пружини. Інакше кажучи, взаємне переміщення точок *C* та *C'*, тобто Δ_1, має дорівнювати нулю.

Отже, рівняння переміщення можна записати так:

$$\Delta_1 = \Delta_{11} + \Delta_{1P} = 0,$$

де $\Delta_{1P} = (-5/384)\left(ql^4/EJ\right)$ — переміщення точки *C* основної системи від заданого навантаження *q*; $\Delta_{11} = \left(X_1 l^3/48EJ\right) + \lambda$ — взаємне переміщення точки *C* балки і точки *C'* пружини тільки від сил X_1, причому переміщення точки *C'* пружини

$$\lambda = \alpha X_1.$$

Додатний напрям переміщень відповідає напряму X_1.

Отже,

$$\frac{X_1 l^3}{48EJ} + \alpha X_1 - \frac{5ql^4}{384EJ} = 0.$$

Звідси

$$X_1 = \frac{\frac{5}{8}ql}{1 + \frac{48EJ\alpha}{l^3}}.$$

При абсолютно жорсткій пружині $\alpha = 0$ і

$$X_1 = \frac{5}{8}ql.$$

Епюри поперечних сил та згинальних моментів на рис. 405, *в* побудовано для останнього випадку.

§ 92. Канонічні рівняння методу сил

Додаткові рівняння переміщень, що виражають рівність нулю переміщень у напрямах зайвих невідомих, зручно складати в так званій *канонічній формі*, тобто за певною закономірністю.

Спочатку розглянемо систему один раз статично невизначувану (рис. 406, *а*). Як зайву невідому виберемо шарнірно-рухому опору *B*. Тоді, навантаживши основну систему заданим навантаженням і зайвою невідомою силою X_1 (рис. 406, *б*), прирівняємо до нуля повне переміщення точки *B* основної системи в напрямі X_1:

$$\Delta_1 = \Delta_1(P, X_1) = 0. \qquad (14.4)$$

Обчислюючи Δ_1, застосуємо принцип незалежності дії сил:

$$\Delta_1 = \Delta_{1P} + \Delta_{11},$$

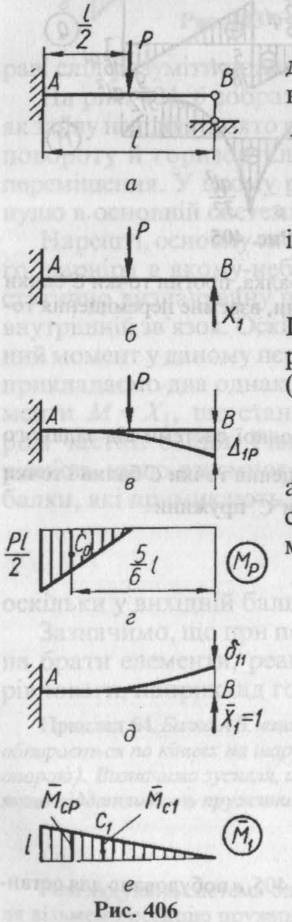


Рис. 406

де Δ_{1P} — переміщення від заданого навантаження (рис. 406, *в*); Δ_{11} — переміщення від сили X_1.

Якщо δ_{11} — переміщення в напрямі X_1 від сили $\bar{X}_1 = 1$ (рис. 406, *д*), то

$$\Delta_{11} = \delta_{11} X_1,$$

і рівняння переміщень (14.4) набирає вигляду

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0. \qquad (14.5)$$

Це канонічна форма рівняння переміщень для один раз статично невизначуваної системи. З формули (14.5)

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}, \qquad (14.6)$$

або, обчислюючи переміщення δ_{11} та Δ_{1P}, використовуючи формулу Верещагіна і дані рис. 406, *г*, *е*, матимемо

$$\delta_{11} = \frac{\omega_1 \bar{M}_{c1}}{EJ} = \frac{1}{EJ}\frac{l^2}{2}\frac{2}{3}l = \frac{l^3}{3EJ};$$

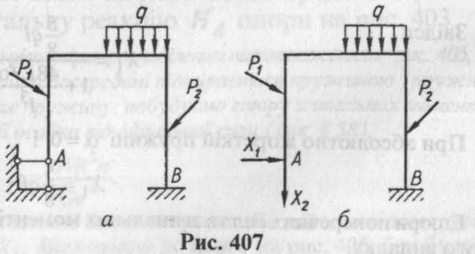


Рис. 407

$$\Delta_{1P} = \frac{\omega_P \bar{M}_{cP}}{EJ} = \frac{1}{FJ}\frac{Pl^2}{4}\left(-\frac{5}{6}l\right) = -\frac{5Pl^3}{48EJ}.$$

Підставивши ці дані у формулу (14.6), остаточно знайдемо

$$X_1 = \frac{5}{16}P.$$

Для системи з двома зайвими зв'язками, як, наприклад, на рис. 407, *а*, додаткові рівняння переміщень перерізу *A* основної системи (рис. 407, *б*) мають вигляд

$$\Delta_1 = 0; \quad \Delta_2 = 0,$$

де $\Delta_1 = \Delta_1(P,\ X_1,\ X_2)$ — повне переміщення точки *A* в напрямі X_1 від заданого навантаження та зайвих невідомих сил X_1 і X_2; $\Delta_2 = \Delta_2(P,\ X_1,\ X_2)$ — повне переміщення точки *A* в напрямі X_2 від зазначених навантажень.

Виходячи з принципу незалежності дії сил, запишемо переміщення Δ_1 та Δ_2 у вигляді сум переміщень, спричинених окремо кожною з невідомих сил X_1 та X_2 та заданим навантаженням *P*. Використовуючи вибрані раніше позначення переміщень (див. § 78), знаходимо, що

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{1P} = 0; \\ \Delta_2 &= \Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{2P} = 0. \end{aligned} \qquad (14.7)$$

Повне переміщення Δ_{ik} можна визначити як добуток питомого переміщення δ_{ik}, спричиненого дією одиничної сили, на відповідну узагальнену силу:

$$\Delta_{11} = \delta_{11} X_1; \quad \Delta_{12} = \delta_{12} X_2; \quad \ldots; \quad \Delta_{ik} = \delta_{ik} X_k.$$

Отже, рівняння (14.7) набирають вигляду

$$\begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1P} &= 0; \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2P} &= 0. \end{aligned} \qquad (14.8)$$

Це канонічна форма рівнянь переміщень для системи двічі статично невизначуваної.

За аналогією можна записати в канонічній формі рівняння переміщень для будь-якої *n* разів статично невизначуваної системи:

$$\begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \ldots + \delta_{1n} X_n + \Delta_{1P} &= 0; \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \ldots + \delta_{2n} X_n + \Delta_{2P} &= 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta_{n1} X_1 + \delta_{n2} X_2 + \ldots + \delta_{nn} X_n + \Delta_{nP} &= 0. \end{aligned} \qquad (14.9)$$

Переміщення Δ_{iP} та δ_{ik}, що входять до канонічних рівнянь, найчастіше визначають за методом Мора або способом Верещагіна. При цьому для балок та рам впливом поперечних та поздовжніх сил, як правило, нехтують і враховують лише згинальні моменти. Однак, визначаючи переміщення в балках прямокутного поперечного перерізу, для яких відношення висоти перерізу до довжини прогону $h/l \geq 1/5$, поперечні сили враховувати обов'язково. При розрахунку статично невизначуваних рам з великими зазначеними відношеннями $(h/l > 1/5)$ похибка, спричинена неврахуванням інтегралів поздовжніх та поперечних сил, також може стати істотною, особливо для високих рам. Слід мати на увазі, що в реальних балкових, рамних та арочних конструкціях відношення h/l, як правило, менше за $1/10$. Тому при обчисленні переміщень у загальній формулі Мора цілком допустимо зберегти інтеграл, що враховує лише згинальні моменти.

Для визначення переміщень будуємо епюри згинальних моментів (див., наприклад, рис. 406) в основній системі окремо від заданого навантаження (стан P) і від кожної одиничної сили: $\overline{X}_1 = 1$ (стан 1); $\overline{X}_2 = 1$ (стан 2); ..., $\overline{X}_n = 1$ (стан n). Ординати відповідних епюр позначимо, як звичайно, через $M_P, \overline{M}_1, \overline{M}_2, ..., \overline{M}_n$. Тоді на підставі формули (13.46) знаходимо

$$\Delta_{1P} = \int\limits_s \frac{\overline{M}_1 M_P ds}{EJ}; \quad \Delta_{2P} = \int\limits_s \frac{\overline{M}_2 M_P ds}{EJ}; \quad ...; \quad \Delta_{nP} = \int\limits_s \frac{\overline{M}_n M_P ds}{EJ}.$$

Питомі переміщення, що мають однакові індекси й називаються *головними коефіцієнтами канонічних рівнянь*, визначають так:

$$\delta_{11} = \int\limits_s \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_1 ds}{EJ}; \quad \delta_{22} = \int\limits_s \frac{\overline{M}_2 \overline{M}_2 ds}{EJ}; \quad ...; \quad \delta_{nn} = \int\limits_s \frac{\overline{M}_n \overline{M}_n ds}{EJ}.$$

Очевидно, що ці переміщення додатні.

Питомі переміщення, в яких індекси неоднакові, називають *побічними коефіцієнтами* й визначають за формулами

$$\delta_{12} = \int\limits_s \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_2 ds}{EJ}; \quad \delta_{13} = \int\limits_s \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_3 ds}{EJ}; \quad ...; \quad \delta_{ik} = \int\limits_s \frac{\overline{M}_i \overline{M}_k ds}{EJ}.$$

Вони можуть бути додатними або від'ємними, а також дорівнювати нулю.

На підставі теореми про взаємність переміщень $\delta_{ik} = \delta_{ki}$.

Для систем, що складаються з прямолінійних елементів, обчислювати переміщення зручно за способом Верещагіна. Наприклад, для статично невизначуваної балки, зображеної на рис. 406,

$$\Delta_{1P} = \frac{\Omega_P \overline{M}_{cP}}{EJ}; \quad \delta_{11} = \frac{\Omega_1 \overline{M}_{c1}}{EJ};$$

$$\Omega_P = \frac{Pl^2}{8}; \quad \overline{M}_{cP} = \frac{5}{6}l;$$

$$\Omega_1 = \frac{l^2}{2}; \quad \overline{M}_{c1} = \frac{2}{3}l.$$

Отже,

$$\Delta_{1P} = -\frac{5}{48}\frac{Pl^3}{EJ}; \quad \delta_{11} = \frac{l^3}{3EJ}.$$

З формули (14.6)

$$X_1 = \frac{5}{16}P.$$

Тоді, коли крім зовнішніх навантажень треба врахувати вплив температури, порядок розрахунку залишається попереднім. Вільні члени канонічних рівнянь при цьому є переміщеннями в основній системі не тільки від заданих навантажень, а й від зміни температури:

$$\begin{aligned} &\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + ... + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} + \Delta_{1T} = 0; \\ &\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + ... + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} + \Delta_{nT} = 0, \end{aligned} \tag{14.10}$$

де Δ_{iT} — переміщення в основній системі в напрямі X_1, спричинені зміною температури.

Визначивши коефіцієнти δ_{ik} і вільні члени Δ_{iP} та Δ_{iT}, із системи лінійних рівнянь (14.10) знаходимо значення зайвих невідомих зусиль X_1, $X_2, ..., X_n$. Далі звичайним способом будуємо епюри внутрішніх сил N, Q, M в елементах системи. Іноді будувати епюри зручно додаванням епюр M_P до епюр $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2, ..., \overline{M}_n$, попередньо помножених на значення $X_1, X_2, ..., X_n$ відповідно:

$$M = \overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_2 X_2 + ... + M_P;$$

$$Q = \overline{Q}_1 X_1 + \overline{Q}_2 X_2 + ... + Q_P;$$

$$N = \overline{N}_1 X_1 + \overline{N}_2 X_2 + ... + N_P.$$

Слід зазначити, що літерний вигляд канонічних рівнянь залишається незмінним при будь-якому можливому варіанті основної системи. Змінюється лише зміст зайвих невідомих та геометричний зміст переміщень. Наприклад, якщо як зайві невідомі вибирати внутрішні сили в будь-яких перерізах, то коефіцієнти в канонічних рівняннях є відповідними взаємними переміщеннями перерізів у напрямах зайвих невідомих зусиль.

На рис. 408 зображено тричі статично невизначувану плоску раму (a) та два варіанти основної системи ($б$ і $в$). Для будь-якої тричі статично невизначуваної системи канонічні рівняння мають вигляд

$$\begin{aligned} &\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} = 0; \\ &\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2P} = 0; \\ &\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0. \end{aligned} \tag{14.11}$$

При виборі основної системи за першим варіантом (рис. 408, *б*) рівняння (14.11) виражають вимогу рівності нулю переміщень перерізу A в напрямах невідомих сил X_1, X_2, X_3.

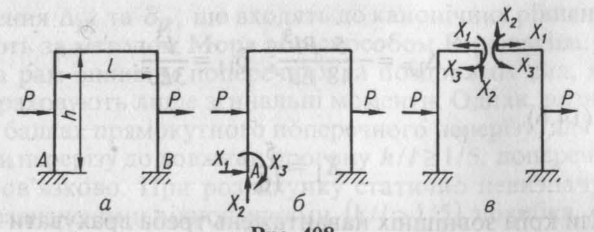


Рис. 408

Другий варіант основної системи (рис. 408, *в*) утворений розрізуванням ригеля. Оскільки в плоскій системі в перерізах діють взагалі три силових фактори (осьова сила, поперечна сила та згинальний момент), то до сторін розрізу слід прикласти як зайві невідомі силові фактори X_1, X_2, X_3, що визначають взаємну дію обох частин системи одна на одну в даному перерізі. При такому виборі основної системи рівняння (14.11) виражають рівність нулю повних взаємних переміщень сторін розрізу в напрямі зайвих невідомих. Наприклад, третє рівняння системи (14.11) означає рівність нулю переміщень у напрямі X_3, тобто взаємного кута повороту сторін розрізу під дією заданого навантаження та зайвих невідомих зусиль.

Вибираючи як зайві невідомі внутрішні зусилля, здебільшого можна значно спростити розрахунок. Наприклад, якщо вихідна система симетрична (за конфігурацією та розміщенням жорсткостей), то основну систему слід будувати також симетричною, оскільки при цьому деякі побічні коефіцієнти канонічних рівнянь дорівнюватимуть нулю. Так, при розрахунку симетричної рами, наведеної на рис. 408, *а*, основну систему доцільно утворити розрізуванням горизонтального стрижня (ригеля) посередині (рис. 409, *а*). При цьому основна система також буде симетричною. Тоді серед зайвих невідомих матимемо симетричні зусилля X_1, X_3 та кососиметричне X_2. Епюри згинальних моментів від сил $\overline{X}_1 = 1$, $\overline{X}_2 = 1$ та $\overline{X}_3 = 1$ зображено на рис. 409, *б—г*. Зазначимо, що епюри $\overline{M}_1$ та $\overline{M}_3$ симетричні, а епюра $\overline{M}_2$ кососиметрична. Перемноження симетричної епюри на кососиметричну дає в результаті нуль.

Рис. 409

Визначимо переміщення $\delta_{12} = \delta_{21}$. Застосовуючи спосіб Верещагіна, матимемо

$$\delta_{12} = \frac{1}{EJ}\left(-\frac{h^2}{2}\frac{l}{2} + \frac{h^2}{2}\frac{l}{2}\right) = 0. \tag{14.12}$$

Аналогічно

$$\delta_{23} = \delta_{32} = 0.$$

Отже, система рівнянь (14.11) спрощується і набирає вигляду

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} &= 0; \\ \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0; \\ \delta_{31}X_3 + \Delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} &= 0. \end{aligned} \tag{14.13}$$

Якщо при цьому задане навантаження P кососиметричне (див. рис. 408, *а*), то епюра M_P також кососиметрична (рис. 409, *а*) і переміщення $\Delta_{1P} = \Delta_{3P} = 0$. Тоді з першого та третього рівнянь (14.13) випливає, що симетричні зусилля в місці розрізу дорівнюють нулю:

$$X_1 = 0; \quad X_3 = 0.$$

Зазначимо, що коли навантаження симетричне, епюра M_P теж симетрична і тому $\Delta_{2P} = 0$. Тоді з другого рівняння (14.13) випливає, що кососиметричне зусилля $X_2 = 0$.

Приклад 65. *Побудуємо епюри силових факторів у елементах рами, зображеної на рис. 410, а. Рама навантажена рівномірно розподіленим навантаженням q, прикладеним до горизонтального стрижня (ригеля).*

Легко побачити, що система двічі статично невизначувана. На рис. 410, *б—г* наведено деякі можливі варіанти еквівалентної системи. Для розрахунку візьмемо варіант рис. 410, *б*. Щоб обчислити два зайвих невідомих зусилля X_1 та X_2, скористаємося канонічними рівняннями (14.8)

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0. \end{aligned}$$

Рис. 410

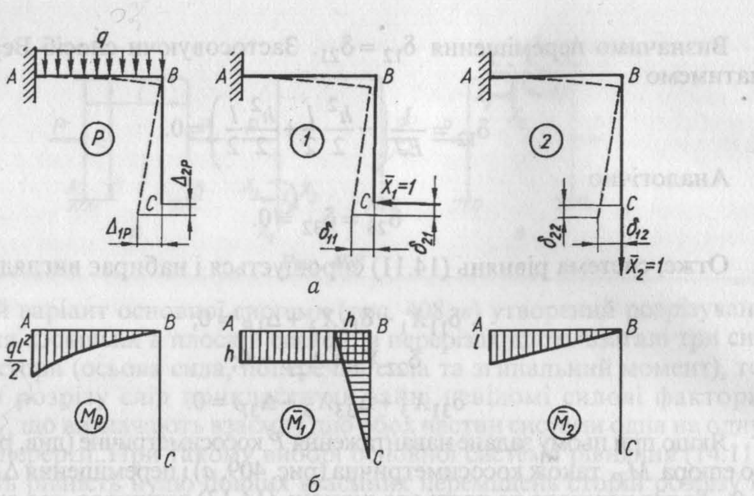


Рис. 411

Для визначення переміщень δ_{ik}, Δ_{iP} розглянемо основну систему, окремо завантажену заданим навантаженням та кожною з одиничних сил $\overline{X}_1 = 1, \overline{X}_2 = 1$ (рис. 411, *а*). Оскільки стрижні прямолінійні, то переміщення зручно знаходити способом Верещагіна. Епюри згинальних моментів $M_P, \overline{M}_1, \overline{M}_2$ наведено на рис. 411, *б*.

Для визначення Δ_{1P} та Δ_{2P} площі епюр M_P перемножаємо на ординати епюр $\overline{M}_1$ та $\overline{M}_2$, що відповідають центрам ваги епюр M_P:

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{E_1J_1}\frac{ql^3}{6}h = \frac{ql^4}{6EJ}; \quad \Delta_{2P} = \frac{1}{E_1J_1}\frac{ql^3}{6}\frac{3}{4}l = \frac{ql^4}{8EJ}.$$

Тут і далі заради спрощення вважаємо $h = l$ і $E_1J_1 = E_2J_2 = EJ$.

Переміщення δ_{11} та δ_{22} знайдемо аналогічним множенням епюр $\overline{M}_1$ на $\overline{M}_1$ та $\overline{M}_2$ на $\overline{M}_2$:

$$\delta_{11} = \frac{1}{E_1J_1}hlh + \frac{1}{E_2J_2}\frac{h^2}{2}\frac{2}{3}h = \frac{4}{3}\frac{l^3}{EJ}; \quad \delta_{22} = \frac{1}{E_1J_1}\frac{l^2}{2}\frac{2}{3}l = \frac{l^3}{3EJ}.$$

Нарешті, δ_{12} визначаємо перемноженням епюр $\overline{M}_1$ та $\overline{M}_2$:

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{E_1J_1}hl\frac{1}{2} = \frac{l^3}{2EJ}.$$

Підставляючи значення переміщень у канонічні рівняння, знаходимо

$$\frac{4}{3}X_1 + \frac{1}{2}X_2 = -\frac{ql}{6}; \quad \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{3}X_2 = -\frac{ql}{8}.$$

Звідси

$$X_1 = \frac{ql}{8}; \quad X_2 = -\frac{3}{7}ql.$$

Знак «мінус» у виразі для X_2 показує, що спочатку вибраний напрям цієї сили (див. рис. 410, *б*) слід змінити на протилежний.

Розглядаючи тепер еквівалентну систему, тобто статично визначувану основну систему під дією заданого навантаження та знайдених сил X_1 та X_2, легко побудувати остаточні епюри внутрішніх силових факторів та скласти умови міцності елементів рами.

Остаточні епюри згинальних моментів, поперечних та осьових сил наведено на рис. 412.

Доберемо прямокутний переріз для стрижнів рами, якщо $q = 10$ кН/м, $l = 2$ м. Матеріал стрижнів Ст2, $[\sigma] = 140$ МПа, $[\tau] = 90$ МПа. Відношення висоти a до ширини b перерізу становить $2:1$.

Як видно з епюр внутрішніх сил (рис. 412), у небезпечному перерізі

$$M_{\max} = \frac{3}{28}ql^2 = 4{,}3 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad Q_{\max} = \frac{4}{7}ql = 11{,}43 \text{ кН};$$

$$N = \frac{ql}{28} = 0{,}715 \text{ кН}.$$

Оскільки осьова сила незначна, то розміри перерізу добираємо тільки з умови міцності на згинання:

$$W = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{4{,}3\cdot10^{-3}}{140}\text{ м}^3 = 30{,}6\cdot10^{-6}\text{ м}^3 = 30{,}6\text{ см}^3.$$

Оскільки $W = \frac{a^2b}{6} = \frac{a^3}{12}$, то, округлюючи, дістаємо

$$a \ge \sqrt[3]{12\cdot30{,}6} \text{ см} \approx 7{,}2 \text{ см}; \quad b = a/2 = 3{,}6 \text{ см}; \quad W = 31{,}1 \text{ см}^3.$$

Найбільше нормальне напруження в поперечному перерізі визначається як сума напружень від дії згинального моменту та осьової сили:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} + \frac{N}{F} = \left(\frac{4{,}3\cdot10^{-3}}{31{,}1\cdot10^{-6}} + \frac{0{,}715}{7{,}2\cdot3{,}6\cdot10^{-4}}\right)\text{МПа} =$$

$$= (138 + 0{,}276)\text{ МПа} = 138{,}3 \text{ МПа} < 140 \text{ МПа}.$$

Найбільше дотичне напруження

$$\tau_{\max} = \frac{3Q_{\max}}{2F} = \frac{3\cdot11{,}43\cdot10^{-3}}{2\cdot7{,}2\cdot3{,}6\cdot10^{-4}}\text{ МПа} = 6{,}55 \text{ МПа} < 90 \text{ МПа}.$$

Приклад 66. *Розрахуємо однопрогонову раму (рис. 413, а), навантажену горизонтальною силою P посередині лівого стояка. Заради спрощення обчислень візьмемо* $h = l; E_1J_1 = E_2J_2 = E_3J_3 = EJ$.

Система, що становить один замкнений контур, тричі статично невизначувана. Для утворення основної системи слід усунути три зв'язки. Різні варіанти еквівалент-

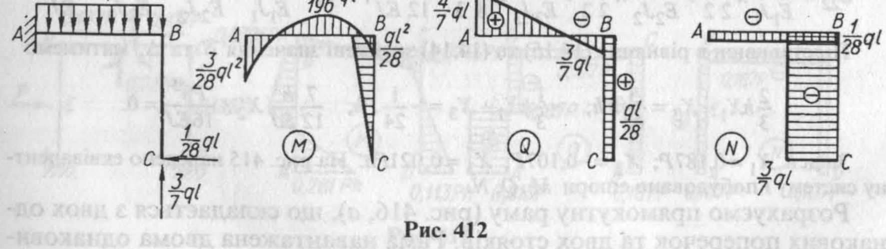


Рис. 412

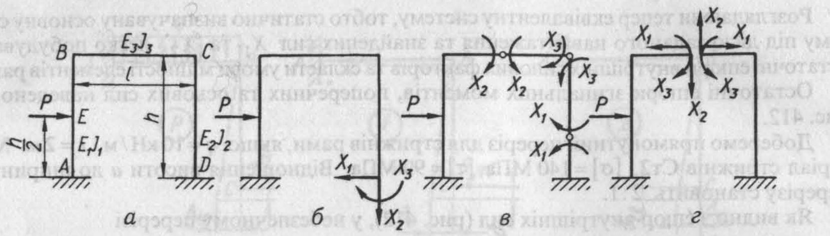


Рис. 413

ної системи наведено на рис. 413, *б—г*. Зважаючи на симетрію рами, як основну систему доцільно вибрати симетричний варіант (рис. 413, *г*). У цьому разі зайвими невідомими будуть зусилля в розрізі.

Для визначення зайвих невідомих зусиль скористаємося канонічними рівняннями (14.11)

$$\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\delta_{13}X_3+\Delta_{1P}=0;$$
$$\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\delta_{23}X_3+\Delta_{2P}=0;$$
$$\delta_{31}X_1+\delta_{32}X_2+\delta_{33}X_3+\Delta_{3P}=0.$$

У цих рівняннях переміщення δ та Δ є відповідними переміщеннями сторін розрізу.

Щоб визначити переміщення, застосуємо спосіб Верещагіна. На рис. 414 зображено епюри згинальних моментів для основної системи від заданого навантаження та від одиничних узагальнених сил $\overline{X}_1=1$, $\overline{X}_2=1$, $\overline{X}_3=1$. Зазначимо, що епюри $\overline{M}_1$ та $\overline{M}_3$ симетричні, а епюра $\overline{M}_2$ — кососиметрична. Як зазначалося, побічні коефіцієнти, що визначаються перемноженням симетричної епюри на кососиметричну, дорівнюють нулю. Внаслідок цього $\delta_{12}=\delta_{21}=0$; $\delta_{23}=\delta_{32}=0$.

Канонічні рівняння набирають вигляду

$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1+\delta_{13}X_3+\Delta_{1P}=0;\\ \delta_{31}X_1+\delta_{33}X_3+\Delta_{3P}=0;\end{aligned} \qquad (14.14)$$

$$\delta_{22}X_2+\Delta_{2P}=0. \qquad (14.15)$$

Перемножуючи відповідні епюри, знаходимо, що

$$\Delta_{1P}=-\frac{1}{E_1J_1}\frac{Ph^2}{8}\frac{5}{6}h=-\frac{5}{48}\frac{Ph^3}{EJ};\quad \Delta_{2P}=\frac{1}{E_1J_1}\frac{Ph^2}{8}\frac{l}{2}=\frac{Ph^3}{16EJ};\quad \Delta_{3P}=\frac{1}{E_1J_1}\frac{Ph^2}{8}1=\frac{Ph^2}{8EJ};$$

$$\delta_{11}=\frac{1}{E_1J_1}\frac{h^2}{2}\frac{2}{3}h+\frac{1}{E_2J_2}\frac{h^2}{2}\frac{2}{3}h=\frac{2h^3}{3EJ};\quad \delta_{13}=\delta_{31}=-\frac{1}{E_1J_1}\frac{h^2}{2}1-\frac{1}{E_3J_3}\frac{h^2}{2}1=-\frac{h^2}{EJ};$$

$$\delta_{22}=\frac{1}{E_1J_1}h\frac{l}{2}\frac{l}{2}+\frac{1}{E_2J_2}h\frac{l}{2}\frac{l}{2}+\frac{1}{E_3J_3}2\frac{l^2}{8}\frac{l}{3}=\frac{7}{12}\frac{h^3}{EJ};\quad \delta_{33}=\frac{h}{E_1J_1}+\frac{l}{E_2J_2}+\frac{h}{E_3J_3}=\frac{3h}{EJ}.$$

Підставивши в рівняння (14.15) та (14.14) знайдені значення δ та Δ, матимемо

$$\frac{2}{3}hX_1-X_3=\frac{5}{48}Ph;\quad -\frac{1}{3}hX_1+X_3=-\frac{1}{24}Ph;\quad \frac{7}{12}\frac{h^3}{EJ}X_2+\frac{Ph^3}{16EJ}=0.$$

Звідси $X_1=0{,}187P$; $X_2=-0{,}107P$; $X_3=0{,}021Ph$. На рис. 415 наведено еквівалентну систему і побудовано епюри M, Q, N.

Розрахуємо прямокутну раму (рис. 416, *а*), що складається з двох однакових поперечок та двох стояків. Рама навантажена двома однакови-

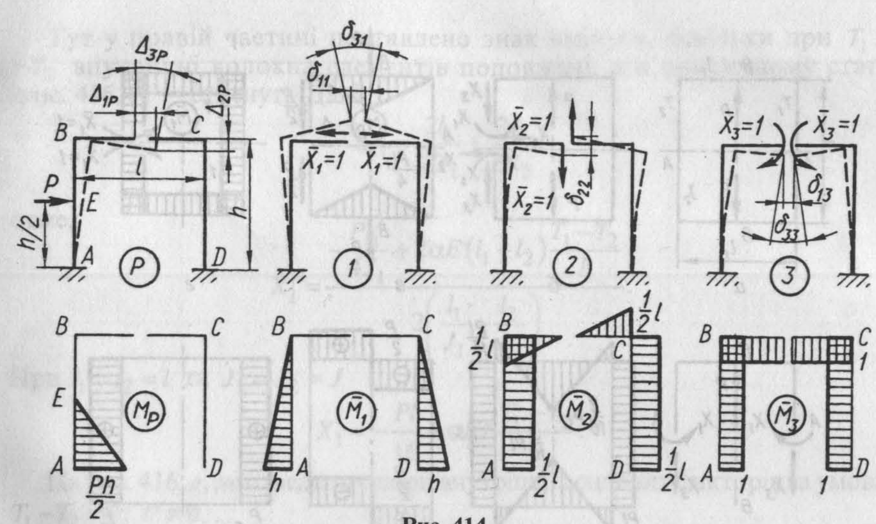


Рис. 414

ми протилежно напрямленими силами, прикладеними посередині поперечок. Усередині рами температура T_1, а зовні — T_2; $T_1>T_2$. Жорсткість поперечок EJ_1, стояків — EJ_2.

Рама, що утворює замкнений контур без шарнірів, тричі статично невизначувана. Задачу можна істотно спростити, використовуючи симетрію системи та навантажування. Виберемо симетричну основну систему, розрізавши один із стояків по осі симетрії (рис. 416, *б*). У місці розрізу прикладемо систему сил X_1, X_2, X_3. Як зазначалося, внаслідок симетрії навантаження поперечна сила $X_2=0$.

Розсічемо тепер раму по осі $A-A$ (рис. 416, *д*). Ураховуючи симетрію системи відносно осі $B-B$, з умов рівноваги відразу визначаємо силу X_3:

$$2X_3=P;\quad X_3=P/2.$$

Залишається знайти лише один статично невизначуваний фактор X_1. Канонічне рівняння переміщень має вигляд

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}+\Delta_{1T}=0,$$

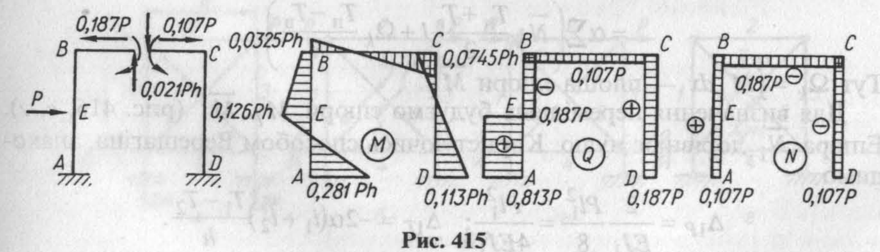


Рис. 415

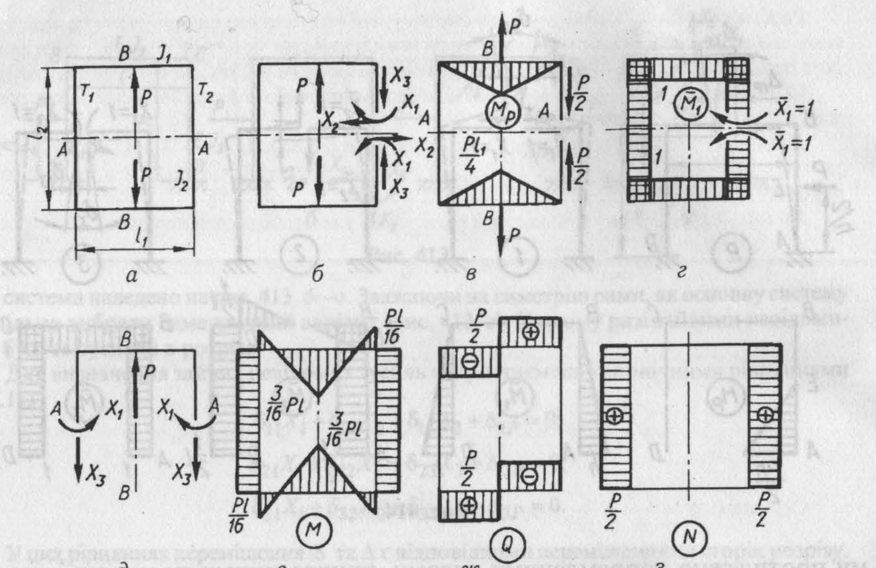


Рис. 416

де $\Delta_{1P}+\Delta_{1T}=\Delta_{1P,T}$ — взаємний кут повороту сторін розрізу, спричинений дією навантаження P та температури T.

Температурні переміщення визначаємо за формулою (13.56)

$$\Delta_{kT}=\sum\int_l \overline{N}_k\alpha\frac{T_\text{н}+T_\text{в}}{2}dx+\sum\int_l \overline{M}_k\alpha\frac{T_\text{н}-T_\text{в}}{h}dx,$$

де $\frac{T_\text{н}+T_\text{в}}{2}=\frac{T_1+T_2}{2}$ середня температура нагрівання елемента; $T_\text{н}-T_\text{в}=T_1-T_2$ — різниця температур крайніх волокон.

Якщо деформації елемента dx від дії температури та одичних силових факторів одного знака, то підінтегральні вирази додатні. Якщо в межах ділянки температура постійна, то

$$\Delta_{kT}=\sum\left(\overline{N}_k\alpha\frac{T_\text{н}+T_\text{в}}{2}l+\alpha\frac{T_\text{н}-T_\text{в}}{h}\int\overline{M}_k dx\right)=$$

$$=\alpha\sum\left(\overline{N}_k\frac{T_\text{н}+T_\text{в}}{2}l+\Omega_k\frac{T_\text{н}-T_\text{в}}{h}\right).$$

Тут $\Omega_k=\int\overline{M}_k dx$ — площа епюри $\overline{M}_k$.

Для визначення переміщень будуємо епюри M_P, $\overline{M}_1$ (рис. 416, *в*, *г*). Епюра $\overline{N}_1$ дорівнює нулю. Користуючись способом Верещагіна, знаходимо

$$\Delta_{1P}=\frac{2}{EJ_1}\frac{Pl_1^2}{8}=\frac{Pl_1^2}{4EJ_1};\quad \Delta_{1T}=-2\alpha(l_1+l_2)\frac{T_1-T_2}{h}.$$

Тут у правій частині поставлено знак «мінус», оскільки при $T_1>T_2$ внутрішні волокна елементів подовжені, а в одиничному стані (рис. 416, *г*) — стиснуті. Далі,

$$\delta_{11}=\frac{2l_1}{EJ_1}+\frac{2l_2}{EJ_2},$$

отже,

$$X_1=\frac{-\frac{Pl_1^2}{4J_1}+2\alpha E(l_1+l_2)\frac{T_1-T_2}{h}}{2\left(\frac{l_1}{J_1}+\frac{l_2}{J_2}\right)}.$$

При $l_1=l_2=l$ та $J_1=J_2=J$

$$X_1=-\frac{Pl}{16}+\alpha EJ\frac{T_1-T_2}{h}.$$

На рис. 416, *е*, *ж* наведено епюри внутрішніх силових факторів за умови $T_1-T_2=0$; $P\neq 0$.

Приклад 67. *Розрахуємо ферму, зображену на рис. 417, а, в припущенні, що всі стрижні виготовлені з одного матеріалу і мають однакові перерізи. Стрижні 5 та 6 загального вузла не мають.*

Легко переконатися, що система один раз статично невизначувана. Основну систему, утворену розрізуванням стрижня 6, наведено на рис. 417, *б*. Зайве невідоме зусилля X_1 визначаємо з канонічного рівняння, яке в цьому разі виражає рівність нулю взаємного зміщення сторін розрізу:

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0.$$

Оскільки в елементах ферми діють тільки осьові зусилля, то переміщення δ_{11} та Δ_{1P} визначимо (див. § 83) за формулами

$$\delta_{11}=\sum_1^6\frac{\overline{N}_i^2 l}{EF};\tag{14.16}$$

$$\Delta_{1P}=\sum_1^6\frac{\overline{N}_i N_P l}{EF},\tag{14.17}$$

де $\overline{N}_i$ — зусилля в стрижнях від навантаження $X_1=1$; N_P — зусилля в стрижнях від заданого навантаження.

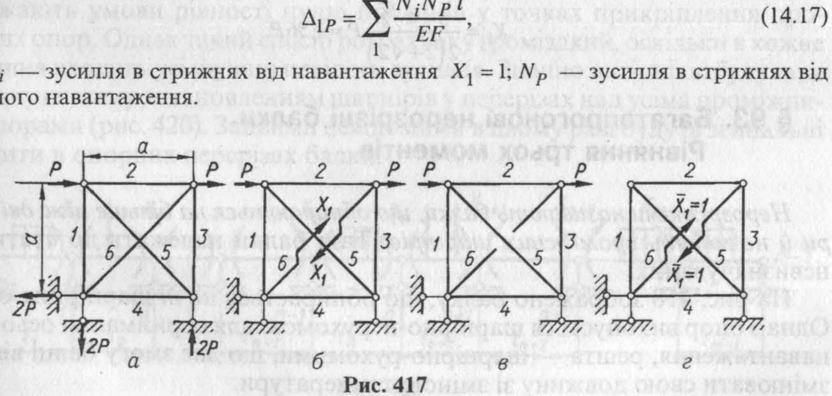


Рис. 417

Таблиця 17

Номер стрижня	Довжина стрижня l	$\overline{N}_i$	N_P	$\overline{N}_i N_P l$	$\overline{N}_i^2 l$
1	a	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$2P$	$-Pa\sqrt{2}$	$\frac{a}{2}$
2	a	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	P	$-Pa\sqrt{2}$	$\frac{a}{2}$
3	a	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	0	$\frac{a}{2}$
4	a	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$2P$	$-Pa\sqrt{2}$	$\frac{a}{2}$
5	$a\sqrt{2}$	1	$-2P\sqrt{2}$	$-4Pa$	$a\sqrt{2}$
6	$a\sqrt{2}$	1	0	0	$a\sqrt{2}$
Σ	—	—	—	$-Pa\frac{\sqrt{2}}{2}\left(5+4\sqrt{2}\right)$	$2a\left(1+\sqrt{2}\right)$

Для визначення зусиль N_P та $\overline{N}_i$ розглядаємо основну систему в стані P (рис. 417, *в*) та в стані *1* (рис. 417, *г*).

Обчислювати зручно за допомогою таблиці (табл. 17). Знак «мінус» при $\overline{N}_i$ та N_P показує, що у відповідному стрижні зусилля стискальні. У таблиці не наведено жорсткості, оскільки для всіх елементів вони однакові. Отже,

$$\Delta_{1P} = -\frac{Pa}{\sqrt{2}EF}\left(5+4\sqrt{2}\right);\ \delta_{11} = \frac{2a\left(1+\sqrt{2}\right)}{EF}.$$

Підставивши ці значення в канонічне рівняння, знаходимо

$$X_1 = \frac{5+4\sqrt{2}}{2\left(2+\sqrt{2}\right)}P \approx 1{,}56P.$$

§ 93. Багатопрогонові нерозрізні балки. Рівняння трьох моментів

Нерозрізними називають балки, що обпираються на більше ніж дві опори й не мають проміжних шарнірів. Такі балки належать до статично невизначуваних.

На рис. 418 зображено балку, що обпирається на m шарнірних опор. Одна з опор виконується шарнірно-нерухомою для сприймання осьового навантаження, решта — шарнірно-рухомими, що дає змогу балці вільно змінювати свою довжину зі зміною температури.

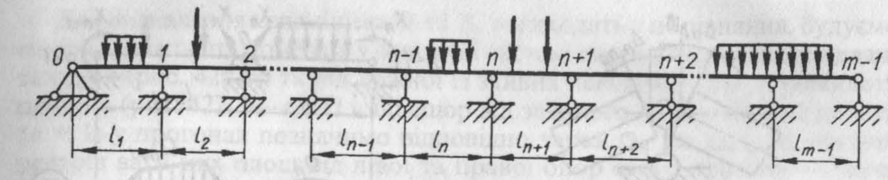


Рис. 418

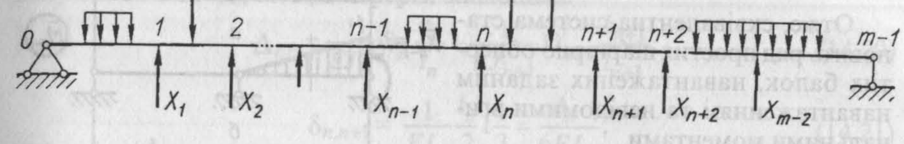


Рис. 419

Опори нумерують зліва направо, позначаючи крайню ліву номером 0; номер прогону визначається номером правої опори, що належить йому.

При обпиранні на m шарнірних опор маємо стільки ж вертикальних реакцій. Оскільки умов рівноваги можна скласти тільки дві, то така система $(m-2)$ разів статично невизначувана.

Як видно, кількість зайвих зв'язків, а отже, і зайвих реакцій дорівнює кількості проміжних опор. Іноді крайня опора виконується у вигляді затиснення. У цьому разі ступінь статичної невизначуваності збільшується на одиницю порівняно з шарнірною опорою.

Для утворення основної системи можна звільнитися від усіх проміжних опор, замінивши їх дію невідомими реакціями $X_1, X_2, \ldots, X_{m-2}$, прикладеними до основної системи додатково до заданого навантаження (рис. 419). Додаткові рівняння переміщень

$$\Delta_1 = 0;\quad \Delta_2 = 0;\quad \ldots;\quad \Delta_{m-2} = 0$$

виражають умови рівності нулю прогинів у точках прикріплення проміжних опор. Однак такий спосіб розрахунку громіздкий, оскільки в кожне рівняння входять усі шукані невідомі зусилля. Значно вигідніше будувати основну систему встановленням шарнірів у перерізах над усіма проміжними опорами (рис. 420). Зайвими невідомими в цьому разі будуть згинальні моменти в опорних перерізах балки.

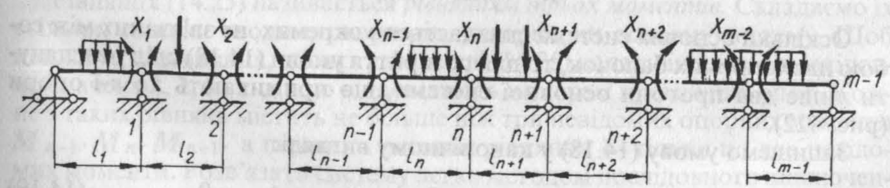


Рис. 420

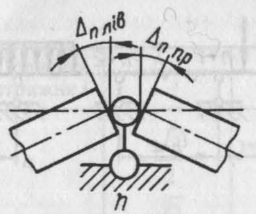


Рис. 421

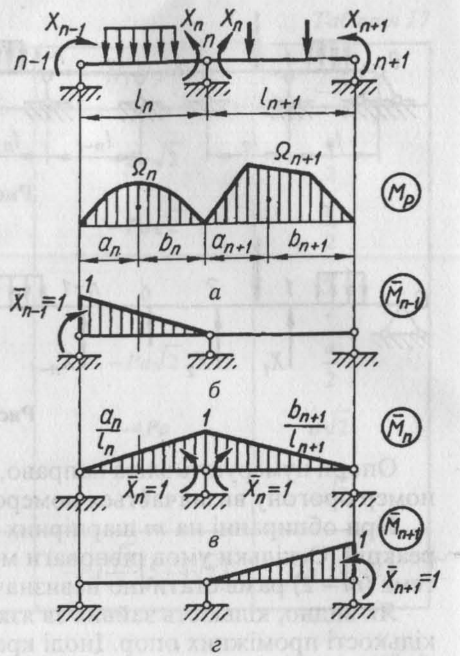


Рис. 422

Отже, еквівалентна система становить ряд простих шарнірно обпертих балок, навантажених заданим навантаженням та невідомими згинальними моментами

$$M_1 = X_1;\quad M_2 = X_2;\ \ldots;\ M_{n+1} = X_{n+1};\ \ldots,$$

прикладеними в перерізах, де поставлено шарніри. Напрями моментів для певності вибрано додатними. При такому виборі основної системи дія заданого навантаження поширюється тільки на той прогін, де воно прикладено; вплив його на інші прогони визначається опорними згинальними моментами M_i.

Складемо тепер додаткові рівняння переміщень. Вони виражають рівність нулю переміщень опорних перерізів у напрямах дії невідомих моментів M_i.

Дійсно, кожна двохопорна балка основної системи під дією заданого навантаження та опорних моментів деформується незалежно від інших. Це означає, що торці двох суміжних балочок, що примикають до однієї опори, наприклад n-ї (рис. 421), можуть повернутися на деякі кути $\Delta_{n\,лів}$ та $\Delta_{n\,пр}$. Оскільки у вихідній статично невизначуваній системі кожна пара таких перерізів становить один переріз, то з умов суцільності їх взаємний кут повороту має дорівнювати нулю. Звідси для кожної проміжної опори

$$\Delta_n = \Delta_{n\,лів} + \Delta_{n\,пр} = 0. \tag{14.18}$$

Оскільки основна система складається з окремих, не зв'язаних між собою двохопорних балочок, то для розкриття умови (14.18) слід розглянути лише два прогони основної системи, що примикають до n-ї опори (рис. 422).

Запишемо умову (14.18) у канонічному вигляді:

$$\delta_{n.n-1} X_{n-1} + \delta_{nn} X_n + \delta_{n.n+1} X_{n+1} + \Delta_{nP} = 0. \tag{14.19}$$

Для визначення переміщень δ та Δ, що входять у це рівняння, будуємо епюри згинальних моментів у основній системі окремо від заданого навантаження (рис. 422, *а*) та від кожної із зайвих невідомих, що дорівнюють одиниці (рис. 422, *б—г*). Площі епюр від заданого навантаження на n та $(n+1)$-у прогонах позначимо відповідно через Ω_n та Ω_{n+1}, а відстані центрів ваги цих площ від лівої та правої опор свого прогону — через a_n, b_n, a_{n+1} та b_{n+1} відповідно.

Застосовуючи спосіб Верещагіна і вважаючи, що вздовж кожного прогону балка має однаковий переріз, знаходимо

$$\Delta_{nP} = \frac{1}{EJ_n}\Omega_n\frac{a_n}{l_n} + \frac{1}{EJ_{n+1}}\Omega_{n+1}\frac{b_{n+1}}{l_{n+1}}; \tag{14.20}$$

$$\delta_{n.n+1} = \frac{1}{EJ_n}\frac{l_n}{2}1\frac{1}{3} = \frac{l_n}{6EJ_n}; \tag{14.21}$$

$$\delta_{nn} = \frac{1}{EJ_n}\frac{l_n}{2}1\frac{2}{3} + \frac{1}{EJ_{n+1}}\frac{l_{n+1}}{2}1\frac{2}{3} = \frac{l_n}{3EJ_n} + \frac{l_{n+1}}{3EJ_{n+1}}; \tag{14.22}$$

$$\delta_{n.n+1} = \frac{1}{EJ_{n+1}}\frac{l_{n+1}}{2}1\frac{1}{3} = \frac{l_{n+1}}{6EJ_{n+1}}. \tag{14.23}$$

Підставляючи вирази (14.20) — (14.23) у формулу (14.19), дістаємо рівняння

$$X_{n-1}\frac{l_n}{J_n} + 2X_n\left(\frac{l_n}{J_n} + \frac{l_{n+1}}{J_{n+1}}\right) + X_{n+1}\frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} = -6\left(\frac{\Omega_n a_n}{J_n l_n} + \frac{\Omega_{n+1} b_{n+1}}{J_{n+1} l_{n+1}}\right) \tag{14.24}$$

Оскільки при такому виборі основної системи всі зайві невідомі є згинальними моментами в опорних перерізах балки, то в рівнянні (14.24) замість X_i пишуть M_i. Отже,

$$M_{n-1}\frac{l_n}{J_n} + 2M_n\left(\frac{l_n}{J_n} + \frac{l_{n+1}}{J_{n+1}}\right) + M_{n+1}\frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} = -6\left(\frac{\Omega_n a_n}{J_n l_n} + \frac{\Omega_{n+1} b_{n+1}}{J_{n+1} l_{n+1}}\right) \tag{14.25}$$

Рівняння (14.25) називається *рівнянням трьох моментів.* Складаємо їх стільки, скільки вводимо шарнірів, утворюючи основну систему. Щоб написати ці рівняння, досить у формулі (14.25) надати індексу n послідовно значень 1, 2, 3 і т. д., що відповідають номерам проміжних опор. Кожне з таких рівнянь містить не більше ніж три невідомих опорних моменти M_{n-1}, M_n, M_{n+1}, а перше та останнє рівняння — тільки по два невідомих моменти. Розв'язати систему легко методом послідовного виключення невідомих.

Для балки постійного поперечного перерізу ($J = \text{const}$) рівняння трьох моментів спрощується так:

$$M_{n-1}l_n + 2M_n\left(l_n + l_{n+1}\right) + M_{n+1}l_{n+1} = $$
$$= -6\left(\frac{\Omega_n a_n}{l_n} + \frac{\Omega_{n+1}b_{n+1}}{l_{n+1}}\right). \quad (14.26)$$

Розглянемо приклади складання рівнянь трьох моментів. На рис. 423 зображено двопрогонову балку. Це система один раз статично невизначувана. Рівняння трьох моментів слід написати один раз для проміжної опори 1.

Поклавши в рівнянні (14.26) $n = 1$, маємо

$$M_0 l_1 + 2M_1\left(l_1 + l_2\right) + M_2 l_2 = -6\left(\frac{\Omega_1 a_1}{l_1} + \frac{\Omega_2 b_2}{l_2}\right). \quad (14.27)$$

Оскільки крайня ліва опора шарнірна і не навантажена зосередженим моментом, то

$$M_0 = 0.$$

Момент на крайній правій опорі дорівнює моменту від навантаження, прикладеного на консолі. Отже,

$$M_2 = -\frac{ql_3^2}{2}.$$

Очевидно,

$$\Omega_1 = \frac{1}{2}P\frac{cd}{l_1}l_1 = \frac{1}{2}Pcd;$$

$$a_1 = \frac{1}{3}\left(l_1 + c\right); \; b_1 = \frac{1}{3}\left(l_1 + d\right);$$

$$\Omega_2 = \frac{2}{3}\frac{ql_2^2}{8}l_2 = \frac{ql_2^3}{12};$$

$$a_2 = b_2 = \frac{l_2}{2}.$$

Отже, рівняння (14.27) набирає вигляду

$$2M_1\left(l_1 + l_2\right) = -6\left(\frac{Pcd}{6}\frac{l_1 + c}{l_1} + \frac{ql_2^3}{24}\right) + \frac{ql_3^2}{2}l_2.$$

Звідси легко знайти момент M_1.

Якщо лівий кінець балки затиснутий (рис. 424, *а*), то затиснення можна замінити додатковим прогоном нескінченно великої жорсткості або нескінченно малої довжини (рис. 424, *б*). Рівняння трьох моментів для 1 та 2-ї опор такі:

$$M_0 l_1 + 2M_1\left(l_1 + l_2\right) + M_2 l_2 = -6\left(\frac{\Omega_1 a_1}{l_1} + \frac{\Omega_2 b_2}{l_2}\right);$$

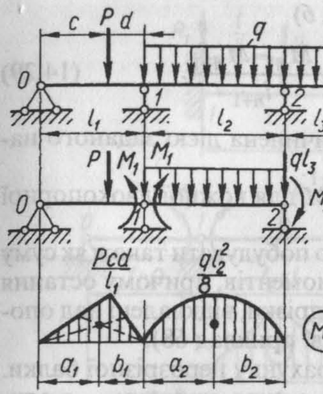


Рис. 423

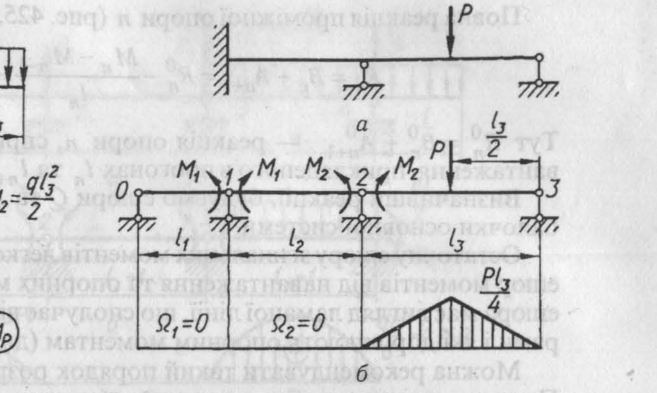


Рис. 424

$$M_1 l_2 + 2M_2\left(l_2 + l_3\right) + M_3 l_3 =$$
$$= -6\left(\frac{\Omega_2 a_2}{l_2} + \frac{\Omega_3 b_3}{l_3}\right).$$

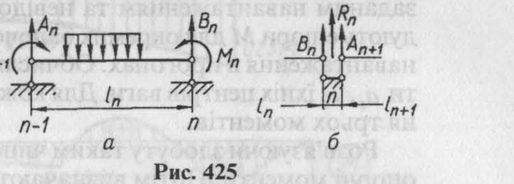


Рис. 425

Очевидно,

$$\Omega_1 = \Omega_2 = 0; \; \Omega_3 = \frac{Pl_3^2}{8};$$

$$a_3 = b_3 = \frac{l_3}{2}; \; M_3 = 0.$$

Крім того, в першому рівнянні системи слід покласти $l_1 = 0$. Тоді

$$2M_1 l_2 + M_2 l_2 = 0;$$

$$M_1 l_2 + 2M_2\left(l_2 + l_3\right) = -6\frac{Pl_3^2}{16}.$$

Аналогічно робимо, якщо затиснутий правий кінець балки.

Визначивши опорні моменти, обчислення реакцій, побудову епюр згинальних моментів та поперечних сил виконуємо звичайним способом.

Спочатку визначаємо реакції опор кожної простої балочки від заданого навантаження та опорних моментів. Позначимо ці реакції для n-го прогону через A_n та B_n (рис. 425, *а*). Очевидно, що

$$A_n = A_n^0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n};$$
$$B_n = B_n^0 - \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n}, \quad (14.28)$$

де A_n^0, B_n^0 — реакції тільки від заданого навантаження в прогоні.

Повна реакція проміжної опори n (рис. 425, *б*)

$$R_n = B_n + A_{n+1} = R_n^0 - \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} - \frac{M_n - M_{n+1}}{l_{n+1}}. \qquad (14.29)$$

Тут $R_n^0 = B_n^0 + A_{n+1}^0$ — реакція опори n, спричинена дією заданого навантаження, прикладеного в прогонах l_n та l_{n+1}.

Визначивши реакції, будуємо епюри Q та M для кожної двохопорної балочки основної системи.

Остаточну епюру згинальних моментів легко побудувати також як суму епюр моментів від навантаження та опорних моментів, причому остання епюра має вигляд ламаної лінії, що сполучає відрізки, відкладені над опорами і які дорівнюють опорним моментам (див. приклад 68).

Можна рекомендувати такий порядок розрахунку нерозрізної балки. Пронумерувавши опори та прогони (опори — з нуля, прогони — з одиниці), під вихідною балкою зображують основну систему, навантажену заданим навантаженням та невідомими опорними моментами. Далі будують епюри M для окремих балочок основної системи тільки від заданого навантаження в прогонах. Обчислюють площі Ω_i цих епюр та координати a_i, b_i їхніх центрів ваги. Для кожної проміжної опори записують рівняння трьох моментів.

Розв'язуючи здобуту таким чином систему рівнянь, знаходять невідомі опорні моменти. Потім визначають реакції і будують епюри поперечних сил та згинальних моментів. Останню епюру, як зазначалося, можна побудувати як суму епюр моментів від навантаження та від опорних моментів.

Приклад 68. *Побудуємо епюри згинальних моментів та поперечних сил для балки, зображеної на рис. 426, а.*

Для простоти обчислень взято $q = 2P/l$. Еквівалентну систему наведено на рис. 426, *б*, причому затиснення лівого кінця балки замінено додатковим прогоном. Маємо

$$\Omega_1 = \Omega_3 = 0;$$

$$\Omega_2 = \frac{Pl^2}{8}; \quad a_2 = b_2 = \frac{l}{2}; \quad \Omega_4 = \frac{ql^3}{12} = \frac{Pl^2}{6}; \quad a_4 = b_4 = \frac{l}{2}.$$

Складаємо рівняння трьох моментів для трьох проміжних опор ($n = 1;\ 2;\ 3$):

$$2M_1 + M_2 = -\frac{3}{8}Pl, \quad (n=1);$$

$$M_1 + 4M_2 + M_3 = -\frac{3}{8}Pl, \quad (n=2); \qquad (14.30)$$

$$M_2 + 4M_3 + M_4 = -\frac{Pl}{2}, \quad (n=3).$$

Очевидно, момент M_4 дорівнює опорному моменту навантаження, прикладеного до консолі, тобто

$$M_4 = -\frac{Pl}{4}. \qquad (14.31)$$

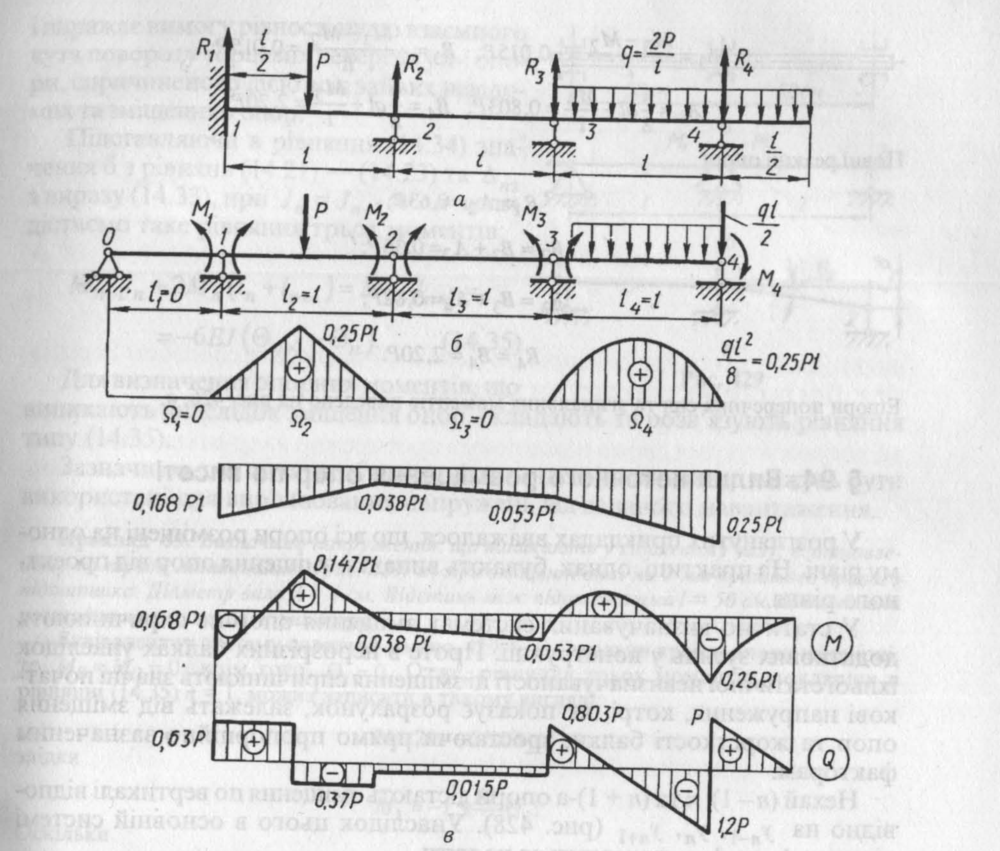


Рис. 426

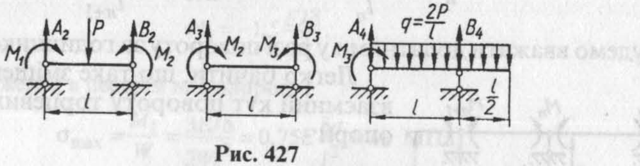


Рис. 427

Розв'язуючи систему рівнянь (14.30) з урахуванням виразу (14.31), дістаємо

$$M_1 = -0{,}168Pl; \quad M_2 = -0{,}038Pl; \quad M_3 = -0{,}053Pl.$$

Від'ємні значення моментів свідчать про те, що насправді вони напрямлені протилежно наведеним на рис. 426, *б*.

Реакції опор (рис. 427) визначаємо за формулами (14.28) та (14.29):

$$A_2 = 0{,}5P + 0{,}13P = 0{,}63P; \quad B_2 = 0{,}5P - 0{,}13P = 0{,}37P;$$

$$A_3 = \frac{M_3 - M_2}{l} = -0{,}015P; \quad B_3 = -\frac{M_3 - M_2}{l} = 0{,}015P;$$

$$A_4 = \frac{3}{8}ql - \frac{M_3}{l} = 0{,}803P; \quad B_4 = \frac{9}{8}ql + \frac{M_3}{l} = 2{,}20P.$$

Повні реакції опор

$$R_1 = A_2 = 0{,}63P;$$

$$R_2 = B_2 + A_3 = 0{,}36P;$$

$$R_3 = B_3 + A_4 = 0{,}82P;$$

$$R_4 = B_4 = 2{,}20P.$$

Епюри поперечних сил та згинальних моментів наведено на рис. 426, *в*.

§ 94. Вплив неточного розміщення опор по висоті

У розглянутих прикладах вважалося, що всі опори розміщені на одному рівні. На практиці, однак, бувають випадки зміщення опор від проектного рівня.

У статично визначуваних системах зміщення опор не спричинюють додаткових зусиль у конструкції. Проте в нерозрізних балках унаслідок їхньої статичної невизначуваності ці зміщення спричинюють значні початкові напруження, котрі, як показує розрахунок, залежать від зміщення опор та жорсткості балки, зростаючи прямо пропорційно зазначеним факторам.

Нехай $(n-1)$, n та $(n+1)$-а опори дістають зміщення по вертикалі відповідно на y_{n-1}, y_n, y_{n+1} (рис. 428). Унаслідок цього в основній системі ділянки l_n та l_{n+1} повернуться на кути

$$\Theta_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{l_n} \quad \text{та} \quad \Theta_{n+1} = \frac{y_{n+1} - y_n}{l_{n+1}}, \tag{14.32}$$

які будемо вважати додатними у разі повороту за годинниковою стрілкою.

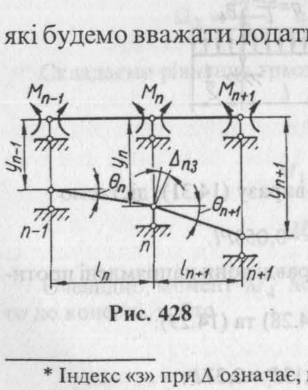


Рис. 428

Легко бачити, що таке зміщення спричинює взаємний кут повороту торцевих перерізів у n-ї опори

$$\Delta_{nз}{}^* = \Theta_{n+1} - \Theta_n. \tag{14.33}$$

Отже, канонічне рівняння (14.19) при розрахунку зміщення опор набирає вигляду

$$\delta_{n,n-1}X_{n-1} + \delta_{nn}X_n + \delta_{n,n+1}X_{n+1} + \Delta_{nз} = 0 \tag{14.34}$$

* Індекс «з» при Δ означає, що узагальнене переміщення спричинене зміщенням опори.

і виражає вимогу рівності нулю взаємного кута повороту торцевих перерізів у n-ї опори, спричиненого дією всіх зайвих невідомих та зміщенням опор.

Підставляючи в рівняння (14.34) значення δ з рівнянь (14.21) — (14.23) та $\Delta_{nз}$ з виразу (14.33), при $J_n = J_{n-1} = \ldots = \text{const}$ дістаємо таке рівняння трьох моментів:

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) = M_{n+1}l_{n+1} =$$

$$= -6EJ(\Theta_{n+1} - \Theta_n). \tag{14.35}$$

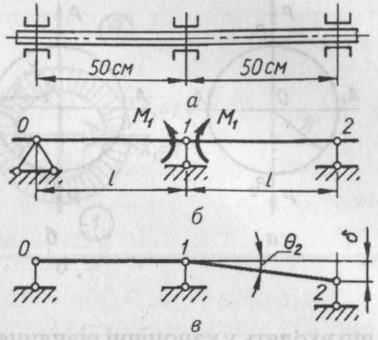


Рис. 429

Для визначення опорних моментів, що виникають унаслідок зміщення опор, складають та розв'язують рівняння типу (14.35).

Зазначимо, що початкові напруження від зміщення опор можуть бути використані для вирівнювання напружень від заданого навантаження.

Приклад 69. *Визначимо напруження, що виникають у сталевому валу, встановленому на трьох підшипниках (рис. 429, а) при зміщенні вниз на 2 мм крайнього правого підшипника. Діаметр вала d = 4 см. Відстань між підшипниками l = 50 см. Підшипники розглядатимемо як шарнірні опори.*

Еквівалентну систему наведено на рис. 429, *б*, *в*. Оскільки крайні опори шарнірні, то $M_0 = M_2 = 0$; крім того, $\Theta_1 = 0$. Отже, рівняння трьох моментів, поклавши в рівнянні (14.35) $n = 1$, можна записати в такому вигляді:

$$2M_1 2l = -6EJ\Theta_2,$$

звідки

$$M_1 = -1{,}5\frac{EJ}{l}\Theta_2.$$

Оскільки

$$\Theta_2 = \frac{y_2}{l} = \frac{\delta}{l},$$

то

$$M_1 = -1{,}5\frac{EJ\delta}{l^2}.$$

Найбільше напруження в перерізі над опорою 1

$$\sigma_{max} = \frac{M_1}{W} = \frac{3EJ\delta}{2Wl^2} = 0{,}75E\frac{\delta d}{l^2} = 48 \text{ МПа}.$$

§ 95. Розрахунок статично невизначуваних криволінійних стрижнів

Статично невизначувані системи, що містять криволінійні стрижні, розраховують за методом сил у такій самій послідовності, як і системи, розглянуті в попередніх параграфах. Однак у цих випадках переміщення,

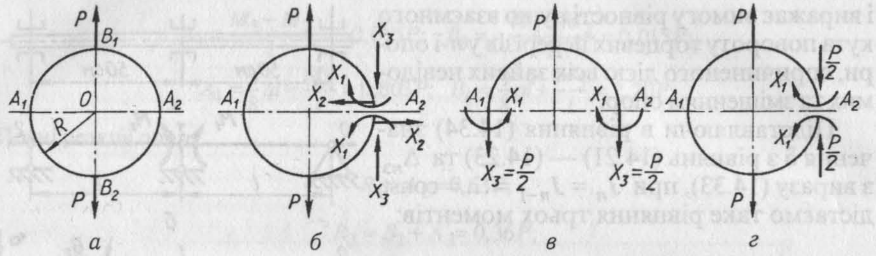


Рис. 430

що входять у канонічні рівняння, не можна обчислювати способом Верещагіна. Для цього рекомендується застосовувати метод Мора.

Як приклад розглянемо кругове кільце постійного поперечного перерізу, що розтягується двома однаковими протилежно напрямленими силами (рис. 430, *а*). Кільце як замкнена система тричі статично невизначуване. Однак використання симетрії при виборі основної системи істотно спрощує розв'язання.

Виберемо основну систему, розрізавши кільце по перерізу A_2 (рис. 430, *б*). З умов симетрії випливає, що поперечне зусилля в цьому перерізі $X_2 = 0$. Розрізавши кільце на дві частини по осі A_1A_2 (рис. 430, *в*), з умов рівноваги відсіченої частини знаходимо, що осьове зусилля $X_3 = P/2$. Залишається тільки визначити невідомий згинальний момент у перерізі A_2. Остаточну еквівалентну систему наведено на рис. 430, *г*.

Канонічне рівняння переміщень, що виражає умову рівності нулю взаємного кута повороту граней розрізу, має вигляд

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Коефіцієнти цього рівняння визначимо способом Мора, спочатку розглядаючи основну систему під дією заданого навантаження, а потім — під дією зайвого невідомого одиничного моменту (рис. 431). Впливом осьових та поперечних сил нехтуємо. Очевидно,

$$\Delta_{1P} = \int_s \frac{\overline{M}_1 M_P ds}{EJ};$$

$$\delta_{11} = \int_s \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_1 ds}{EJ}.$$

Ураховуючи симетрію в станах *P* та *1* основної системи (рис. 431, *а*, *б*), при обчисленні переміщень Δ_{1P} та δ_{11} можна обмежитися розглядом однієї чверті кільця. Маємо

$$M_P = \frac{PR}{2}(1-\cos\varphi), \quad \left(0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right); \quad \overline{M}_1 = 1.$$

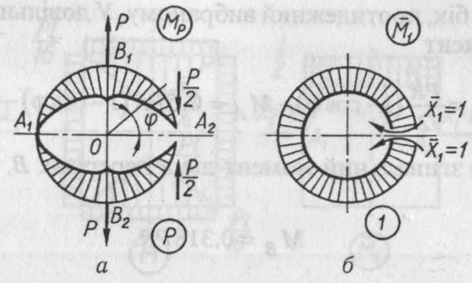


Рис. 431

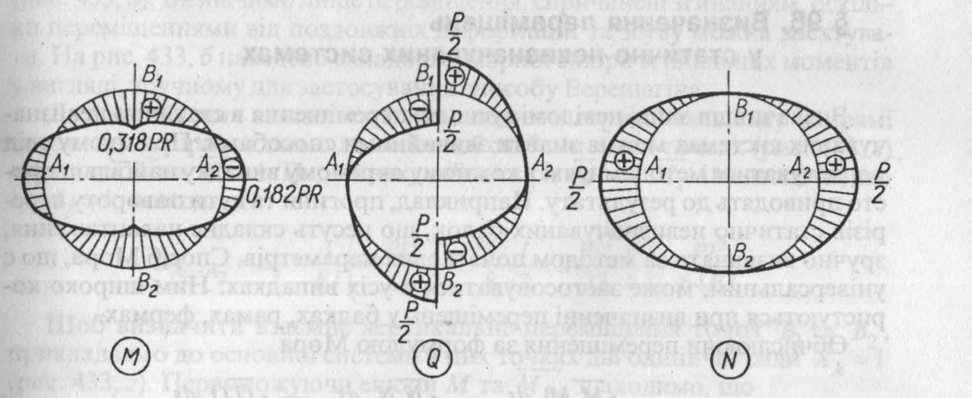


Рис. 432

Додатний напрям для згинального моменту вибрано таким, при якому зовнішні волокна розтягнуті. Отже,

$$\Delta_{1P} = 4\int_0^{\pi/2} \frac{PR^2(1-\cos\varphi)d\varphi}{2EJ} = \frac{2PR^2}{EJ}\left(\frac{\pi}{2}-1\right);$$

$$\delta_{11} = 4\int_0^{\pi/2} \frac{Rd\varphi}{EJ} = \frac{2\pi R}{EJ}.$$

Тоді

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{\pi}\right)PR = -0{,}182PR.$$

Отже, згинальний момент у перерізах *A*

$$M_A = -0{,}182PR$$

і напрямлений у бік, протилежний вибраному. У довільному перерізі кільця згинальний момент

$$M(\varphi)=\frac{PR}{2}(1-\cos\varphi)-M_A=0{,}5PR(1-\cos\varphi)-0{,}182PR.$$

Найбільший згинальний момент діє в перерізах B, при $\varphi=\pi/2$, і становить

$$M_B=0{,}318PR.$$

Поперечна сила $Q(\varphi)=0{,}5P\sin\varphi$, осьова сила $N(\varphi)=0{,}5P\cos\varphi$. На рис. 432 зображено епюри внутрішніх силових факторів у перерізах кільця.

§ 96. Визначення переміщень у статично невизначуваних системах

Визначивши зайві невідомі зусилля, переміщення в статично невизначуваних системах можна знайти звичайними способами. При цьому слід користуватися методами, які в кожному окремому випадку найбільш просто приводять до результату. Наприклад, прогини та кути повороту перерізів статично невизначуваних балок, що несуть складне навантаження, зручно визначати за методом початкових параметрів. Спосіб Мора, що є універсальним, може застосовуватися в усіх випадках. Ним широко користуються при визначенні переміщень у балках, рамах, фермах.

Обчислюючи переміщення за формулою Мора

$$\Delta_{iP}=\sum_s\int\frac{\overline{M_i}M_p\,ds}{EJ}+\sum_s\int\frac{\overline{N_i}N_p\,ds}{EF}+\sum_s\int\frac{\overline{Q_i}Q_p\,ds}{GF},\tag{14.36}$$

слід розглянути задану систему під дією навантаження (остаточні епюри силових факторів M, N та Q статично невизначуваної системи), а також під дією одиничного силового фактора, що відповідає шуканому переміщенню (одиничні епюри $\overline{M_i}$, $\overline{N_i}$, $\overline{Q_i}$). Якщо при цьому одиничні навантаження прикладати безпосередньо до заданої статично невизначуваної системи, то кожен раз для побудови одиничних епюр $\overline{M_i}$, $\overline{N_i}$, $\overline{Q_i}$ знову доведеться розв'язувати статично невизначувану задачу. Однак цього можна уникнути, якщо врахувати, що вихідна статично невизначувана система й основна статично визначувана, навантажена заданими силами та знайденими зайвими невідомими, повністю тотожні за умовами роботи. Тому, визначаючи будь-яке переміщення, ми маємо право прикладати одиничне навантаження до основної статично невизначуваної системи. Остання може бути вибрана за будь-яким можливим варіантом.

Як приклад обчислимо взаємні переміщення точок A_1, A_2 та B_1, B_2 відповідно в горизонтальному та вертикальному напрямах для рами

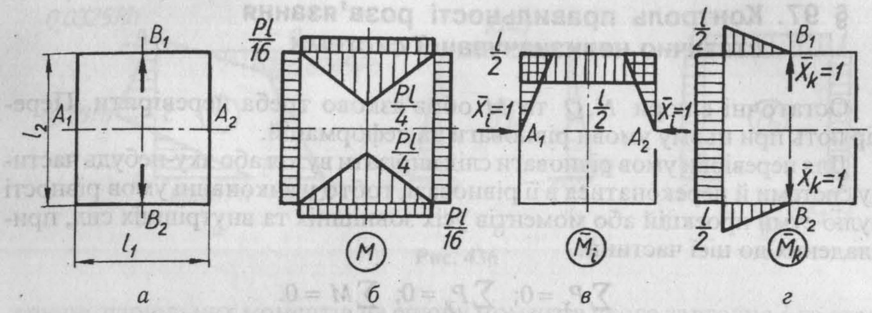


Рис. 433

(рис. 433, *а*). Визначимо лише переміщення, спричинені згинанням, оскільки переміщеннями від поздовжніх деформацій та зсуву можна знехтувати. На рис. 433, *б* наведено складові сумарної епюри згинальних моментів у вигляді, зручному для застосування способу Верещагіна.

Для визначення взаємного переміщення в горизонтальному напрямі точок A_1, A_2 прикладаємо до основної системи в цих точках (рис. 433, *в*) одиничні сили $\overline{X_i}=1$. Перемножуючи епюри $\overline{M}$ та $\overline{M_i}$ і вважаючи, що $l_1=l_2=l$, знаходимо

$$\Delta_{A_1-A_2}=\Delta_i=\frac{1}{EJ}\left(\frac{Pl^2}{16}\frac{l}{2}+\frac{Pl^2}{8}\frac{l}{2}-2\frac{Pl^2}{32}\frac{l}{4}\right)=\frac{Pl^3}{64EJ}.$$

Щоб визначити взаємне вертикальне переміщення точок B_1 та B_2, прикладаємо до основної системи в цих точках дві одиничні сили $\overline{X_k}=1$ (рис. 433, *г*). Перемножуючи епюри M та $\overline{M_k}$, знаходимо, що

$$\Delta_{B_1-B_2}=\Delta_k=\frac{1}{EJ}\left(\frac{Pl^2}{16}\frac{l}{2}-\frac{Pl^2}{16}\frac{1}{6}2+\frac{l^2}{8}\frac{Pl}{16}2\right)=\frac{5}{192}\frac{Pl^3}{EJ}.$$

Зазначимо, що у разі дії на статично невизначувану систему температури до переміщень основної системи, навантаженої знайденими зайвими невідомими, слід додати суто температурні переміщення. При цьому формула (14.36) набере вигляду

$$\Delta_{iP}=\sum_s\int\frac{\overline{M_i}M_T\,ds}{EJ}+\sum_s\int\frac{\overline{N_i}N_T\,ds}{EF}+\sum_s\int k\frac{\overline{Q_i}Q_T\,ds}{GF}+$$

$$+\sum_s\int\overline{N_i}\alpha\frac{T_{\text{н}}-T_{\text{в}}}{2}\,ds+\sum_s\int\overline{M_i}\alpha\frac{T_{\text{н}}-T_{\text{в}}}{h}\,ds,\tag{14.37}$$

де M_T, N_T, Q_T — внутрішні силові фактори від зайвих невідомих, обумовлених дією температури.

§ 97. Контроль правильності розв'язання статично невизначуваної системи

Остаточні епюри N, Q та M обов'язково треба перевірити. Перевіряють при цьому умови рівноваги та деформацій.

Для перевірки умов рівноваги слід вирізати вузол або яку-небудь частину системи й переконатися в її рівновазі, тобто у виконанні умов рівності нулю суми проекцій або моментів усіх зовнішніх та внутрішніх сил, прикладених до цієї частини:

$$\sum P_x = 0; \ \sum P_y = 0; \ \sum M = 0.$$

При цьому потрібні величини слід брати безпосередньо з остаточних епюр.

Розглянемо, наприклад, як мають бути перевірені умови рівноваги для епюри згинальних моментів, наведеної на рис. 434. Виріжемо вузли B та C (рис. 435). Дію відкинутих частин рами на вузли замінимо відповідно згинальними моментами M_{BA}, M_{BC}, M_{BE} та M_{CB}, M_{CD}. Напрями моментів відповідають розміщенню епюр на стиснутих волокнах.

З умов рівноваги вузла B випливає, що

$$M_{BA} + M_{BE} - M_{BC} = 0.$$

З умови рівноваги вузла C випливає, що моменти M_{CB} та M_{CD} мають бути однаковими за модулем та протилежні за напрямом. Аналогічно можна перевірити епюри N та Q.

Зазначимо, що перевірка умов рівноваги не є достатньою, оскільки перевірка правильності побудови епюр за знайденими значеннями зайвих невідомих зусиль не дає підстав для міркування про правильність самих величин.

Загальним контролем є перевірка виконання умов нерозривності деформацій. При цьому слід переконатися, що остаточні епюри узгоджуються з умовами опорних закріплень та нерозривності контуру.

Оскільки в заданій статично невизначуваній системі переміщення в напрямі будь-якого зайвого зв'язку дорівнює нулю, то добуток остаточної

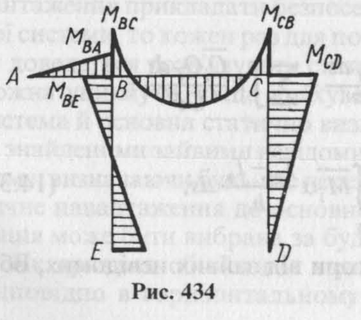


Рис. 434

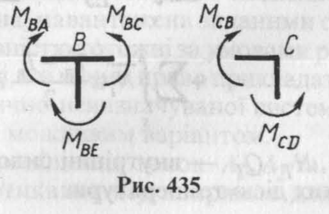


Рис. 435

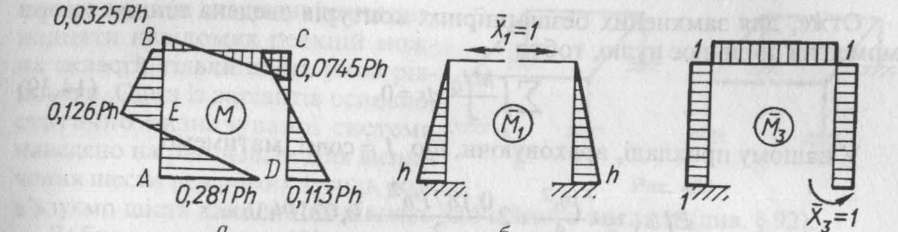


Рис. 436

епюри згинальних моментів на епюру моментів якого завгодно i-го стану основної системи має дорівнювати нулю, тобто

$$\sum \int_s \frac{\overline{M}_i M ds}{EJ} = 0. \qquad (14.38)$$

Як основну систему i-го стану найкраще вибирати систему, відмінну від взятої при розрахунку. Кількість перевірок умов деформацій має дорівнювати кількості зайвих зв'язків.

Як приклад перевіримо умови деформацій для рами, розглянутої у § 92 (див. приклад 66). Остаточну епюру M наведено також на рис. 436, *а*.

Обчислимо взаємні переміщення в горизонтальному напрямі граней розрізу ригеля. Для цього слід помножити епюру M на одиничну епюру $\overline{M}_1$ (рис. 436, *б*). При множенні часто зручно замінити епюру M її складовими:

$$M = M_P + X_1 \overline{M}_1 + X_2 \overline{M}_2 + \ldots$$

Дістанемо

$$EJ\Delta_1 = \sum \int_s \overline{M}_1 M ds = \frac{Ph^2}{8} \frac{5}{6} h + \frac{2 \cdot 0{,}187 Ph^2}{2} \frac{2}{3} h - 0{,}021 Ph \cdot 2h \frac{h}{2} =$$
$$= Ph^3(-0{,}104 + 0{,}125 - 0{,}021) = Ph^3(-0{,}125 + 0{,}125) = 0.$$

Тепер перевіримо, чи дорівнює нулю кут повороту перерізу D вихідної системи. З цією метою, множачи епюру M на одиничну епюру $\overline{M}_3$ основної системи (рис. 436, *в*), знаходимо помножений на EJ_0 кут повороту:

$$EJ_0\Delta_3 = \sum \int_s \frac{\overline{M}_3 M ds J_0}{J}.$$

Тут EJ_0 — жорсткість поперечного перерізу якого-небудь елемента рами. Оскільки в безшарнірній системі $\overline{M}_3 = 1$, то

$$EJ_0\Delta_3 = \sum \int_s M \frac{J_0}{J} ds.$$

Інтеграл у правій частині є площею епюри M, помноженою на відношення J_0/J. Це *зведена площа епюри M*.

Отже, для замкнених безшарнірних контурів зведена площа епюри моментів дорівнює нулю, тобто

$$\sum \int_s \frac{MJ_0}{J}\, ds = 0. \qquad (14.39)$$

У нашому прикладі, враховуючи, що $J = \text{const}$, матимемо

$$EJ\Delta_3 = -\frac{Ph^2}{8} + 2\frac{0{,}187Ph^2}{2} - 0{,}021Ph3h =$$

$$= Ph^2(-0{,}125 + 0{,}187 - 0{,}063) = Ph^2(-0{,}188 + 0{,}187) = -0{,}001Ph^2.$$

Оскільки при розрахунку системи зайві невідомі обчислюються з певною точністю, то й результати перевірки, звичайно, мають деяку похибку — шукані переміщення не дорівнюють нулю. Тому при перевірці рекомендується окремо обчислювати суми додатних та від'ємних членів. Якщо різниця між обома сумами, виражена в процентах до меншої з них, невелика (до 5 %), то результат розрахунку можна вважати задовільним. У нашому прикладі

$$\frac{-0{,}188 + 0{,}187}{0{,}187} = -0{,}535\ \%.$$

Аналогічно контролюють правильність розрахунку нерозрізної балки.

§ 98. Про розрахунок просторових рамних систем

У загальному випадку дії сил на брус (див. розд. 12) у поперечних перерізах маємо шість внутрішніх силових факторів (рис. 437) — N, Q_y, Q_z, M_x, M_y та M_z. Для нерухомого прикріплення перерізу слід накласти шість зв'язків, зусилля в яких можна знайти з шести рівнянь рівноваги твердого тіла. Кількість зв'язків у просторових системах, що перевищує зазначену, дає ступінь статичної невизначуваності. Так, просторова рама, зображена на рис. 438, *а*, шість разів статично невизначувана, оскільки для визначення дванадцяти невідомих реакцій можна скласти тільки шість умов рівноваги. Один із варіантів основної статично визначуваної системи наведено на рис. 438, *б*. Для визначення шести невідомих зусиль розв'язуємо шість канонічних рівнянь звичайного вигляду (див. § 92).

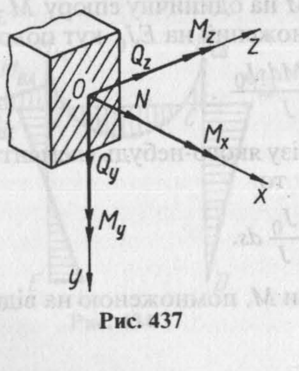


Рис. 437

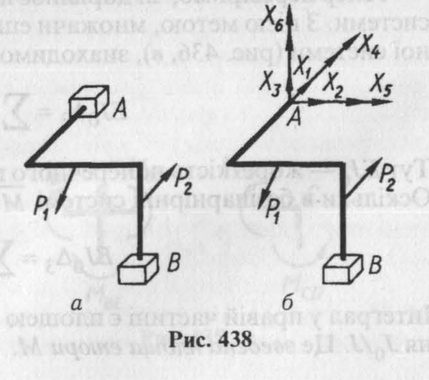


Рис. 438

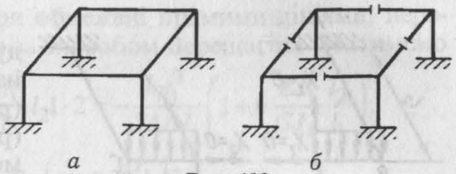


Рис. 439

Зображена на рис. 439, *а* просторова рама 24 рази статично невизначувана. Це легко виявити за кількістю розрізів, які треба зробити, щоб утворити основну систему (рис. 439, *б*), причому кожний розріз вивільняє шість зв'язків.

У машинобудівних конструкціях застосовують плоскі рами, що працюють на просторове навантаження. На рис. 440, *а* наведено плоску раму із затиснутими кінцями, навантажену перпендикулярно до площини рами.

На підставі принципу взаємності можна довести, що в плоских системах, навантажених перпендикулярно до площини системи, силові фактори, які характеризують роботу рами в її площині, дорівнюють нулю. Отже, з шести невідомих зусиль (рис. 440, *б*) три дорівнюють нулю, тобто $X_4 = X_5 = X_6 = 0$.

Ця обставина значно спрощує розрахунок плоских рам, навантажених просторовим навантаженням. Будь-яке навантаження можна розкласти на складові в площині рами та перпендикулярні до неї. Використовуючи принцип незалежності дії сил, можна розрахувати систему окремо від навантажень у площині рами та від перпендикулярних до неї.

Як приклад розрахуємо раму, зображену на рис. 440. Щоб використати її симетрію, утворимо основну систему, розрізавши стрижень BC посередині (рис. 441). Такий варіант вигідніший, ніж зображений на рис. 440, *в*.

З міркувань симетрії основної системи випливає, що кососиметричні силові фактори в перерізах розрізу (крутний момент X_2 та поперечна сила X_3) дорівнюють нулю. Невідомий згинальний момент X_1 легко знайти з канонічного рівняння переміщень

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

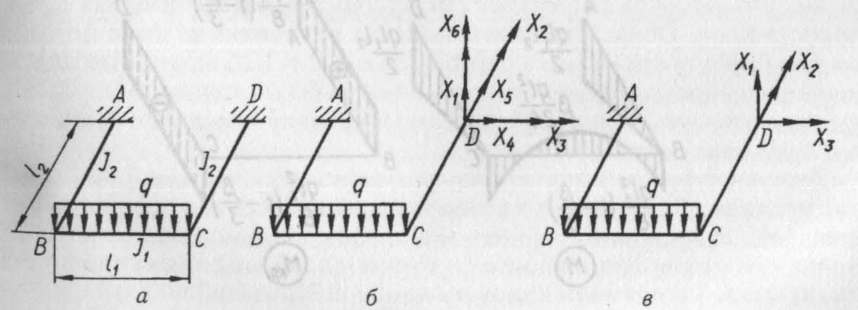


Рис. 440

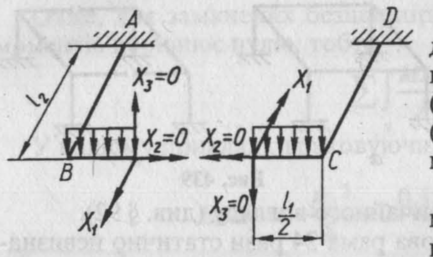


Рис. 441

Для визначення переміщень будуємо в основній системі епюри згинальних та крутних моментів для P-го (рис. 442, *а*) та одиничного $X_1 = 1$ (рис. 442, *б*) станів. Епюри крутних моментів заштриховано.

Переміщення обчислюємо за формулами Мора для просторового випадку дії сил, причому нехтуємо впливом осьових та поперечних сил. Маємо

$$\Delta_{1P} = \sum \int_s \frac{\overline{M}_{y1} M_{yP} ds}{EJ_y} + \sum \int_s \frac{\overline{M}_{z1} M_{zP} ds}{EJ_z} + \sum \int_s \frac{\overline{M}_{x1} M_{xP} ds}{GJ_k}; \qquad (14.40)$$

$$\delta_{11} = \sum \int_s \frac{\overline{M}_{y1} \overline{M}_{y1} ds}{EJ_y} + \sum \int_s \frac{\overline{M}_{z1} \overline{M}_{z1} ds}{EJ_z} + \sum \int_s \frac{\overline{M}_{x1} \overline{M}_{x1} ds}{GJ_k}. \qquad (14.41)$$

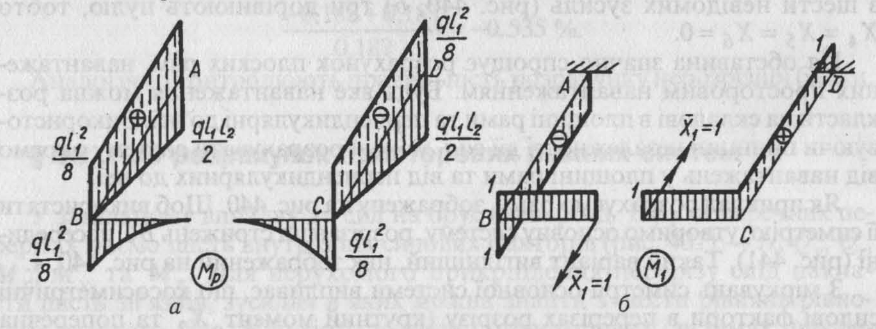


Рис. 442

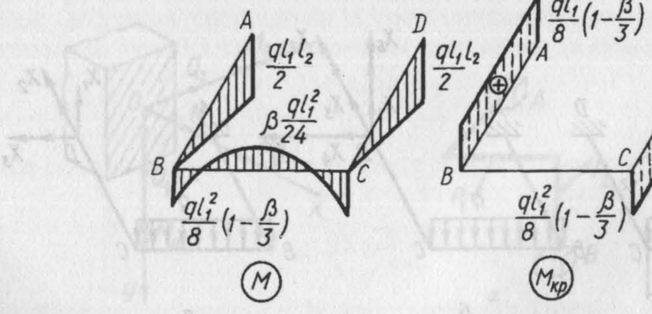


Рис. 443

Враховуючи, що одиничні епюри обмежені прямими лініями, переміщення Δ_{1P}, δ_{11} можна визначити за способом Верещагіна. Матимемо

$$\Delta_{1P} = -\frac{1}{EJ_1}\frac{ql_1^2}{2}\frac{1}{3}\frac{l_1}{2}1\cdot 2 - \frac{1}{GJ_k}\frac{ql_1^2}{8}l_2 1\cdot 2 = -\frac{ql_1^3}{24EJ_1}\left(1 + 6\frac{EJ_1}{GJ_k}\frac{l_2}{l_1}\right);$$

$$\delta_{11} = \frac{l_1}{EJ_1} + \frac{2l_2}{GJ_k} = \frac{l_1}{EJ_1}\left(1 + 2\frac{EJ_1}{GJ_k}\frac{l_2}{l_1}\right).$$

Отже,

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{ql_1^2}{24}\frac{1 + 6\dfrac{EJ_1}{GJ_k}\dfrac{l_2}{l_1}}{1 + 2\dfrac{EJ_1}{GJ_k}\dfrac{l_2}{l_1}} = \beta\frac{ql_1^2}{24},$$

де

$$\beta = \frac{1 + 6\dfrac{EJ_1}{GJ_k}\dfrac{l_2}{l_1}}{1 + 2\dfrac{EJ_1}{GJ_k}\dfrac{l_2}{l_1}}.$$

Остаточні епюри згинальних та крутних моментів наведено на рис. 443.

Розділ **15** РОЗРАХУНОК ПЛОСКИХ КРИВИХ БРУСІВ

§ 99. Визначення напружень у кривих брусах

У різних конструкціях часто застосовують бруси з криволінійною віссю. До них належать вантажопідйомні гаки, кільця ланцюгів, вушки, ободи шківів та коліс, арки тощо. Осі цих брусів — плоскі криві. Бруси з просторовою кривою віссю застосовуються нечасто і тут не розглядаються.

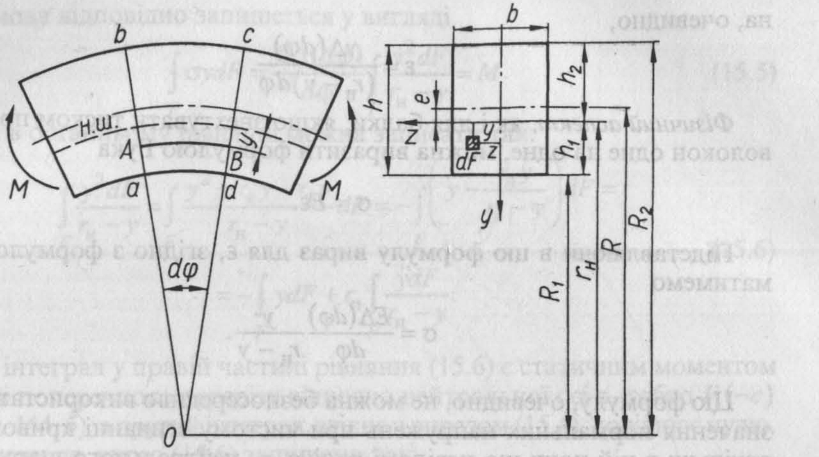
У поперечних перерізах плоского кривого бруса взагалі є три внутрішніх силових фактори — N, Q та M. Правила визначення їх та побудови їхніх епюр для кривих брусів розглянуто в § 23. У § 24 виведено диференціальні залежності (3. 13) — (3.15) між внутрішніми силовими факторами й навантаженнями.

У цьому розділі розглянемо визначення напружень та переміщень у кривих брусах, а також розрахунок їх на міцність. При цьому обмежимося розглядом брусів, що мають поздовжню площину симетрії (рис. 444), в якій і діють зовнішні навантаження. Внаслідок симетрії переміщення точок осі бруса також відбуватимуться в цій площині.

Дослідження свідчать, що при згинанні розподіл нормальних напружень у поперечному перерізі, а також максимальні напруження в кривому брусі істотно відрізняються від тих, які виникають у балці з прямою віссю. За інших однакових умов ця відмінність тим більша, чим більше відношення висоти h поперечного перерізу до радіуса R кривини його осі (рис. 444).

У зв'язку з цим розрізняють *бруси малої кривини*, в яких $h/R < 1/5$, та *бруси великої кривини*, в яких $h/R \geq 1/5$. При згинанні брусів малої кривини нормальні напруження з достатньою для інженерних розрахунків точністю можна визначати за формулами (10.10), (10. 13), виведеними для балок з прямою віссю. Обчислення максимальних напружень за цими формулами для бруса прямокутного перерізу при $h/R = 1/15$ дають різницю 2 % порівняно з напруженнями, визначеними за більш точними формулами, які виводитимуться нижче. При $h/R = 1/10$ різниця зростає до 3,5 %, а при $h/R = 1/5$ вона досягне 7 %.

Виведення формули для нормальних напружень при згинанні бруса великої кривини. Розглянемо випадок чистого згинання кривого бруса (рис. 444). Для прямого стрижня ми спочатку вважали невідомим положення нейтрального шару, а потім з'ясували, що він розміщений на рівні осі стрижня. Тепер також припустимо, що нейтральний шар має поки що невідомий радіус кривини $r_н$, взагалі інший, ніж радіус R осі стрижня.



а *б*

Рис. 444

Виведемо формулу для напружень σ при згинанні за тією самою схемою, яка застосовувалася для бруса з прямою віссю, і в його основу покладемо ті самі гіпотези: гіпотезу плоских перерізів та гіпотезу про те, що поздовжні волокна не тиснуть одне на одне.

Проведемо в перерізі осі y та z, як зображено на рис. 444. Вісь z збігається з нейтральною лінією перерізу, положення її поки що не визначене. Додатним вважаємо напрям осі y до центра кривини бруса.

Для виведення рівнянь *статичного аспекту задачі* розсічемо кривий брус на дві частини будь-яким поперечним перерізом, наприклад ab (рис. 444, *а*), і виділимо в перерізі елемент площі dF на відстані y від нейтральної лінії (рис. 444, *б* та 445, *а*). На елемент діє зусилля σdF. З умов (10.2) та (10.3) при $N = 0$, $M_z = M$ дістанемо

$$\int_F \sigma dF = 0; \quad \int_F \sigma y dF = M. \tag{15.1}$$

Умова $M_y = \int_F \sigma z dF = 0$ виконується автоматично внаслідок симетрії перерізу відносно осі y.

Розглядаючи *геометричний аспект задачі,* виділимо з кривого бруса (рис. 444, *а*) двома нескінченно близькими перерізами ab та cd елементарну ділянку, якій до деформації відповідає кут $d\varphi$. Після деформації кут між цими перерізами зміниться на деяку величину $\Delta(d\varphi)$ (рис. 445, *б*). Спостерігаючи деформацію довільного волокна AB, яке розміщене на відстані y від нейтрального шару та має до деформації довжину $(r_н - y)d\varphi$, легко помітити, що внаслідок деформації під навантаженням за рахунок взаємного повороту перерізів ab та cd розглядуване волокно подовжується на величину $y\Delta(d\varphi)$. Тоді відносне подовження вибраного довільного волокна, очевидно,

$$\varepsilon = \frac{y\Delta(d\varphi)}{(r_{н} - y)d\varphi}. \tag{15.2}$$

Фізичний аспект, як і для балки, якщо знехтувати тиском поздовжніх волокон одне на одне, можна виразити формулою Гука

$$\sigma = E\varepsilon.$$

Підставляючи в цю формулу вираз для ε, згідно з формулою (15.2), матимемо

$$\sigma = \frac{E\Delta(d\varphi)}{d\varphi}\frac{y}{r_{н} - y}. \tag{15.3}$$

Цю формулу, очевидно, не можна безпосередньо використати для визначення нормальних напружень при чистому згинанні кривого бруса, оскільки в ній поки що невідомі радіус $r_{н}$ нейтрального шару та зміна кута $\Delta(d\varphi)$. Для визначення $r_{н}$ та $\Delta(d\varphi)$ скористаємося двома умовами (15.1). З першої умови маємо

$$\int_F \sigma dF = \frac{E\Delta(d\varphi)}{d\varphi}\int_F \frac{ydF}{r_{н} - y} = 0.$$

Оскільки в цьому виразі $E\Delta(d\varphi)/d\varphi \neq 0$, то

$$\int_F \frac{ydF}{r_{н} - y} = 0. \tag{15.4}$$

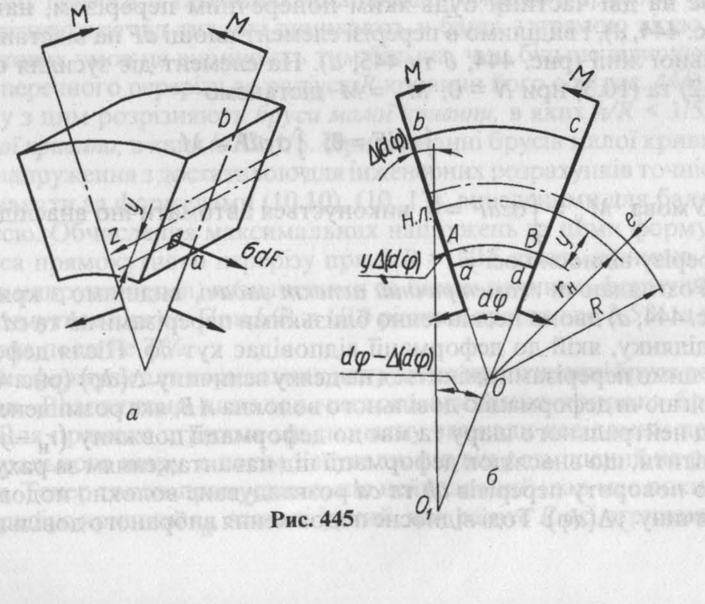


Рис. 445

Друга умова відповідно запишеться у вигляді

$$\int_F \sigma y dF = \frac{E\Delta(d\varphi)}{d\varphi}\int_F \frac{y^2 dF}{r_{н} - y} = M. \tag{15.5}$$

Інтеграл в останньому рівнянні можна записати так:

$$\int_F \frac{y^2 dF}{r_{н} - y} = \int_F \frac{y^2 + r_{н}y - r_{н}y}{r_{н} - y}dF = -\int_F \left(y - \frac{r_{н}y}{r_{н} - y}\right)dF = $$

$$= -\int_F ydF + r_{н}\int_F \frac{ydF}{r_{н} - y}. \tag{15.6}$$

Перший інтеграл у правій частині рівняння (15.6) є статичним моментом S_z площі поперечного перерізу відносно нейтральної осі z, тобто $F(-e)$ (див. рис. 444, *б*), а другий інтеграл, згідно з виразом (15.4), дорівнює нулю. Враховуючи це, вираз (15.6) запишемо так:

$$\int_F \frac{y^2 dF}{r_{н} - y} = -S_z = -(-e)F, \tag{15.7}$$

де e — відстань від центра ваги перерізу кривого бруса до нейтральної осі; F — площа поперечного перерізу бруса.

Очевидно, інтеграл у лівій частині виразу (15.7) — завжди величина додатна, а це означає, що статичний момент S_z — величина від'ємна. Оскільки статичний момент дорівнює добутку додатної величини F на координату e центра ваги площі відносно нейтральної осі z, то з цього випливає, що e — завжди координата від'ємна. Тому можна стверджувати, що при згинанні кривого бруса нейтральна вісь завжди зміщується від центра ваги перерізу до центра кривини бруса.

Надалі у формулах, що містять e та S_z, враховуємо їхні абсолютні значення.

Підставляючи вираз (15.7) в умову (15.5), дістанемо

$$\frac{E\Delta(d\varphi)}{d\varphi}eF = M,$$

звідки

$$\frac{E\Delta(d\varphi)}{d\varphi} = \frac{M}{eF}. \tag{15.8}$$

Ураховуючи вираз (15.8), формулу (15.3) для визначення напружень тепер можна записати так:

$$\sigma = \frac{My}{eF\,(r_{н} - y)} \tag{15.9}$$

або

$$\sigma = \frac{My}{S_z\,(r_{н} - y)},$$

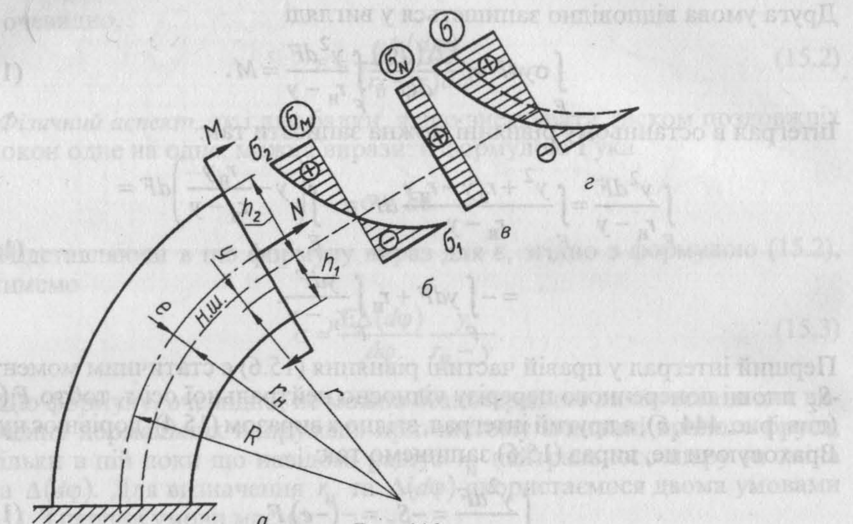


Рис. 446

де M — згинальний момент у перерізі; S_z —статичний момент площі перерізу кривого бруса відносно нейтральної лінії.

З аналізу формули (15.9) випливає, що, як і в балці з прямою віссю, нормальне напруження по ширині перерізу однакове (не залежить від z) і змінюється тільки зі зміною відстані точки від нейтральної лінії. По висоті перерізу напруження в правому брусі (рис. 446, *а*) змінюється за гіперболічним законом (рис. 446, *б*). Найбільші за модулем напруження будуть у крайніх точках перерізу біля угнутої поверхні бруса.

Абсолютні значення напружень у крайніх точках перерізу кривого бруса, згідно з виразом (15.9), обчислюються за формулами

$$\sigma_1 = \frac{Mh_1}{FeR_1}; \; \sigma_2 = \frac{Mh_2}{FeR_2}, \tag{15.10}$$

де R_1 та R_2 — відповідно радіуси кривини внутрішнього та зовнішнього волокон кривого бруса; h_1 та h_2 — відстані від нейтральної лінії до цих волокон (див. рис. 444).

Знаки напружень легко визначити за напрямом згинального моменту в перерізі.

Якщо на кривий стрижень діє осьова сила N (рис. 446, *а*), то в стрижні, крім напруження, спричиненого згинальним моментом і яке визначається за формулою (15.9), діятимуть нормальні напруження

$$\sigma_н = N / F,$$

епюру яких наведено на рис. 446, *в*.

Підсумувавши напруження від згинання та розтягання (склавши ординати епюр напружень рис. 446, *б, в*), знайдемо сумарне напруження в перерізі кривого бруса, епюру якого наведено на рис. 446, *г*.

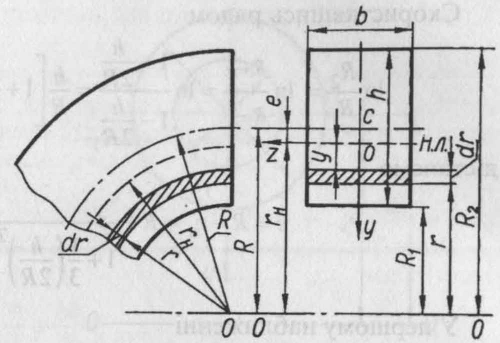


Рис. 447

Визначення положення нейтральної осі в кривому брусі при чистому згинанні. Для визначення напружень у кривому брусі при згинанні за формулами (15.9) та (15.10) треба насамперед обчислити значення e (відстань від нейтрального шару до центра ваги) або радіус $r_н$ нейтрального шару, оскільки

$$e = R - r_н, \tag{15.11}$$

де R — радіус шару, який містить центри ваги перерізів кривого бруса.

Покажемо, як визначається положення нейтрального шару на прикладі бруса прямокутного поперечного перерізу заввишки h та завширшки b (рис. 447). Для цього будемо виходити з рівняння (15.4)

$$\int_F \frac{ydF}{r_н - y} = 0.$$

Зробимо в цьому рівнянні таку заміну змінних (рис. 447):

$$r = r_н - y, \text{ або } y = r_н - r.$$

Тоді рівняння (15.4) можна переписати так:

$$\int_F \frac{r_н - r}{r} dF = 0, \text{ або } r_н \int_F \frac{dF}{r} - F = 0,$$

звідки

$$r_н = \frac{F}{\int_F \frac{dF}{r}}. \tag{15.12}$$

Ураховуючи, що

$$F = bh, \quad dF = bdr,$$

матимемо

$$r_н = \frac{bh}{\int_{R_1}^{R_2} \frac{bdr}{r}} = \frac{h}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{h}{2{,}303 \lg \frac{R_2}{R_1}}. \tag{15.13}$$

Тут 2,303 — модуль переходу до десяткових логарифмів.

Скориставшись рядом

$$\ln\frac{R_2}{R_1}=\ln\frac{R+\frac{h}{2}}{R-\frac{h}{2}}=\ln\frac{1+\frac{h}{2R}}{1-\frac{h}{2R}}=\frac{h}{R}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2R}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{h}{2R}\right)^4+\ldots\right],$$

дістанемо

$$e=R-r_{\text{н}}=R-\frac{R}{1+\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2R}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{h}{2R}\right)^4+\ldots}.$$

У першому наближенні

$$e=R\left(1-\frac{1}{1+\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2R}\right)^2}\right)\approx\frac{h^2}{12R}.$$

Друге наближення дає

$$e=\frac{h^2}{12R}\left[1+\frac{4}{15}\left(\frac{h}{2R}\right)^2\right].$$

Користуючись формулою (15.12), аналогічно можна знайти вираз для e при інших формах поперечного перерізу бруса.

Приклад 70. *Визначимо положення нейтрального шару для двотаврового перерізу (рис. 448).*

Враховуючи позначення на рис. 448, значення e для двотаврового перерізу можна обчислити за формулою

$$e=R-\frac{F}{\int\limits_F\frac{dF}{r}}=R-\frac{\sum F_n}{\sum\int\limits_{F_n}\frac{dF}{r}}= \qquad (15.14)$$

$$=R-\frac{b_1h_1+b_2h_2+b_3h_3}{b_1\ln\frac{R_1+h_1}{R_1}+b_3\ln\frac{R_2-h_2}{R_1+h_1}+b_2\ln\frac{R_2}{R_2-h_2}}.$$

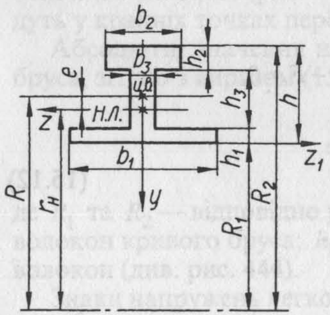


Рис. 448

Поклавши тут $b_2=h_2=0$ або $b_1=h_1=0$, визначимо ексцентриситет e для таврового перерізу.

Положення центра ваги перерізу знайдемо за формулою

$$R-R_1=\frac{S_{z_1}}{F}=\frac{\frac{b_1h_1^2}{2}+b_3h_3\left(h_1+\frac{h_3}{2}\right)+b_2h_2\left(h_1-\frac{h_2}{2}\right)}{b_1h_1+b_2h_2+b_3h_3}. \qquad (15.15)$$

Приклад 71. *Визначимо ексцентриситет нейтральної лінії для трапецієподібного перерізу (рис. 449)*

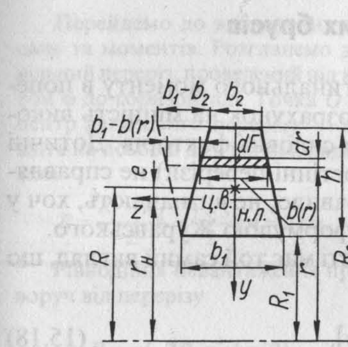


Рис. 449

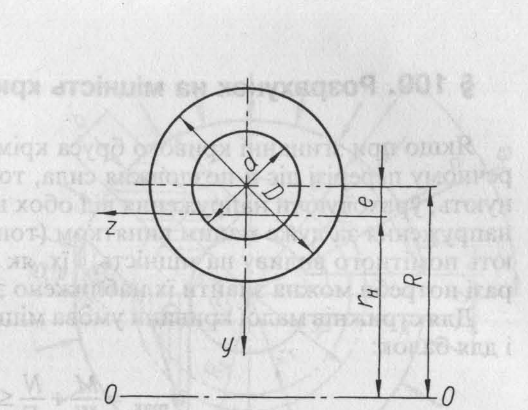


Рис. 450

$$F=\frac{b_1+b_2}{2}h;\; dF=b(r)dr.$$

Ширину перерізу $b(r)$ на довільній відстані r знаходимо з подібності трикутників:

$$\frac{b_1-b(r)}{b-b_2}=\frac{r-R_1}{h},$$

звідки

$$b(r)=b_1+\frac{b_1-b_2}{h}R_1-\frac{b_1-b_2}{h}r.$$

Тоді

$$\int\limits_F\frac{dF}{r}=\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{b(r)dr}{r}=\left(b_1+\frac{b_1-b_2}{h}R_1\right)\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r}-\frac{b_1-b_2}{h}\int\limits_{R_1}^{R_2}dr;$$

$$\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r}=\ln r\Bigg|_{R_1}^{R_2}=\ln\frac{R_2}{R_1};\quad\int\limits_{R_1}^{R_2}dr=R_2-R_1=h.$$

Користуючись формулами (15.11) та (15.12), знаходимо, що

$$e=R-r_{\text{н}}=R-\frac{\frac{b_1+b_2}{2}h}{\left(b_1+\frac{b_1-b_2}{h}R_1\right)\ln\frac{R_2}{R_1}-(b_1-b_2)}. \qquad (15.16)$$

Положення центра ваги перерізу визначається за формулою

$$R-R_1=\frac{h}{3}\frac{b_1+2b_2}{b_1+b_2},$$

яку неважко дістати, поділивши статичний момент перерізу відносно основи на площу.

Із загальної формули (15.16), поклавши $b_1=0$ або $b_2=0$, визначаємо ексцентриситет відповідно розміщених трикутних перерізів.

Для круглого порожнистого перерізу (рис. 450) аналогічно можна знайти

$$e=R-\frac{\sqrt{4R^2-d^2}+\sqrt{4R^2-D^2}}{4}. \qquad (15.17)$$

§ 100. Розрахунок на міцність кривих брусів

Якщо при згинанні кривого бруса крім згинального моменту в поперечному перерізі діє й поздовжня сила, то розрахунок на міцність виконують, ураховуючи напруження від обох цих силових факторів. Дотичні напруження за дуже малим винятком (тонкостінні перерізи) не справляють помітного впливу на міцність, і їх, як правило, не визначають, хоч у разі потреби можна знайти їх наближено за формулою Журавського.

Для стрижнів малої кривини умова міцності має той самий вигляд, що і для балок:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} + \frac{N}{F} \le [\sigma]. \tag{15.18}$$

Для стрижнів великої кривини на підставі формули (15.9) умова міцності запишеться так:

$$\sigma_{\max} = \frac{My}{S_z r} + \frac{N}{F} \le [\sigma] \ . \tag{15.19}$$

При цьому треба розглядати перерізи, в яких сумарні напруження від згинального моменту та від поздовжньої сили найбільші. У цих перерізах небезпечною буде одна з крайніх точок. Для цих точок у формулу (15.19) слід підставити $y = h_1$ або $y = h_2$ та відповідно $r = R_1$ або $r = R_2$.

У проектувальному розрахунку бруса великої кривини для визначення розмірів поперечного перерізу можна скористатись умовою міцності при згинанні балки з відповідною формою поперечного перерізу, а потім, дещо збільшивши здобуті розміри, перевірити міцність бруса за умовою (15.19). Якщо брус великої кривини виготовлений з матеріалу, що має різні допустимі напруження на розтягання та стискання (деякі чавуни, пластмаси тощо), то умова міцності має виконуватися для крайніх точок як у розтягнутій, так і у стиснутій зонах.

Приклад 72. *Пластмасове кільце прямокутного перерізу $b \times h$ зазнає дії рівномірного зовнішнього тиску p, МПа (рис. 451). Визначимо допустимий тиск для двох варіантів матеріалу:*

а) вініпласт з границею міцності на розтягання $\sigma_{в.р} = 54$ МПа та границею міцності на стискання $\sigma_{в.ст} = 90$ МПа;

б) волокніт з границею міцності на розтягання $\sigma_{в.р} = 30$ МПа, на стискання — $\sigma_{в.ст} = 120$ МПа.

Дано: $b = 8$ мм; $R_1 = 10$ мм; $R_2 = 30$ мм; $\delta = 2$ мм.

Обчислимо допустимі напруження. Взявши коефіцієнт запасу міцності $n = 3$ (для крихкого матеріалу), знайдемо: для вініпласту

$$[\sigma_+] = \frac{54}{3} \text{ МПа} = 18 \text{ МПа}; \quad [\sigma_-] = \frac{90}{3} \text{ МПа} = 30 \text{ МПа};$$

для волокніту

$$[\sigma_+] = \frac{30}{3} \text{ МПа} = 10 \text{ МПа}; \quad [\sigma_-] = \frac{120}{3} \text{ МПа} = 40 \text{ МПа}.$$

Перейдемо до визначення зусиль та моментів. Розглянемо довільний переріз, проведений під кутом φ до горизонталі. Точка O — центр ваги цього перерізу — лежить на осьовій дузі кільця, радіус якої

$$R = \frac{R_1 + R_2}{2} = \frac{1+3}{2} \text{ см} = 2 \text{ см}.$$

Рівнодійна навантаження праворуч від перерізу

$$P = pb \cdot 2R_2 \sin(\varphi/2).$$

Обчислюючи момент сили відносно точки O і проекціюючи силу на дотичну до дуги в цій точці, дістанемо

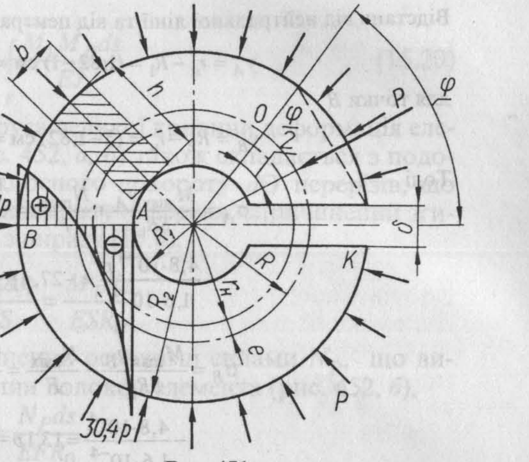


Рис. 451

$$M(\varphi) = PR\sin(\varphi/2) = pbR_2R(1-\cos\varphi);$$

$$N(\varphi) = -P\sin(\varphi/2) = -pbR_2(1-\cos\varphi).$$

Згинальний момент та осьова сила досягають найбільшого значення в перерізі AB, де кут $\varphi = \pi$, причому

$$M_{\max} = 2pbR_2R = 2p \cdot 0{,}8 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 9{,}6 \cdot 10^{-6}\, p \text{ МН}\cdot\text{м};$$

$$N_{\max} = -p \cdot 0{,}8 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = -4{,}8 \cdot 10^{-4}\, p \text{ МН}.$$

Висота перерізу $h = R_2 - R_1 = (3-1)$ см $= 2$ см та $h/R = 1 > 1/5$, тому слід користуватися умовою міцності для кривого бруса. Оскільки осьова сила в небезпечному перерізі AB стискальна, а матеріал кільця крихкий, застосовуємо умову міцності (15.19) до двох імовірних небезпечних точок — A та B.

Радіус $r_н$ нейтрального шару при чистому згинанні знаходимо за формулою (15.13)

$$r_н = \frac{h}{2{,}303 \lg \dfrac{1+\dfrac{h}{2R}}{1-\dfrac{h}{2R}}} = \frac{2}{2{,}303 \lg \dfrac{1{,}5}{0{,}5}} = \frac{2}{2{,}303 \cdot 0{,}477} \text{ см} = 1{,}82 \text{ см}.$$

Ексцентриситет нейтральної лінії при чистому згинанні

$$e = R - r_н = (2 - 1{,}82) \text{ см} = 0{,}18 \text{ см}.$$

Площа перерізу

$$F = bh = 0{,}8 \cdot 2 \text{ см}^2 = 1{,}6 \text{ см}^2.$$

Статичний момент перерізу відносно нейтральної лінії

$$S = Fe = 1{,}6 \cdot 0{,}18 \text{ см}^3 = 0{,}288 \text{ см}^3.$$

Відстань від нейтральної лінії та від центра кривини для точки A

$$y_A = r_н - R_1 = (1,82-1)\ \text{см} = 0,82\ \text{см};\quad r_A = R_1 = 1\ \text{см};$$

для точки B

$$y_B = R_2 - r_н = (3-1,82)\ \text{см} = 1,18\ \text{см};\quad r_B = R_2 = 3\ \text{см}.$$

Тоді

$$\sigma_A = \frac{M_{\max} y_A}{SR_1} + \frac{N_{\max}}{F} = \frac{9,6\cdot10^{-6}\,p\cdot0,82\cdot10^{-2}}{0,288\cdot10^{-6}\cdot1\cdot10^{-2}} - \frac{4,8\cdot10^{-4}\,p}{1,6\cdot10^{-4}} = -27,4p - 3p = -30,4p\ \text{МПа};$$

$$\sigma_B = \frac{M_{\max} y_B}{SR_2} - \frac{N_{\max}}{F} = \frac{9,6\cdot10^{-6}\,p\cdot1,18\cdot10^{-2}}{0,288\cdot10^{-6}\cdot3\cdot10^{-2}} - \frac{4,8\cdot10^{-4}}{1,6\cdot10^{-4}} = 13,1p - 3p = 10,1p\ \text{МПа}.$$

Крім того, при $r = r_н$

$$y = 0 \ \text{та}\ \sigma = N_{\max}/F = -3p.$$

За цими даними для наочності на рис. 451 побудовано епюру σ.

Тепер запишемо умови міцності й визначимо допустиме значення p:

у випадку вініпласту для точки A

$$30,4p \le 30 \ \text{ та }\ p \le 0,99\ \text{МПа};$$

для точки B

$$10,1p \le 18 \ \text{ та }\ p \le 1,78\ \text{МПа};$$

у випадку волокніту для точки A

$$30,4p \le 40 \ \text{ та }\ p \le 1,32\ \text{МПа};$$

для точки B

$$10,1p \le 10 \ \text{ та }\ p \le 0,99\ \text{МПа}.$$

Отже, якщо кільце виготовлене з вініпласту, то $p_{доп} = 0,99$ МПа і небезпечною є точка A; якщо воно волокнітове, то $p_{доп} = 0,99$ МПа і небезпечною є точка B. Отже, незважаючи на помітну різницю в механічних характеристиках вініпласту та волокніту, $p_{доп}$ в обох випадках однакове й дорівнює приблизно 1,0 МПа.

§ 101. Визначення переміщень у кривих стрижнях

Визначати переміщення в кривих стрижнях потрібно для перевірки їхньої жорсткості, а також при розв'язанні статично невизначуваних задач. Як у випадку стрижнів малої, так і великої кривини для визначення переміщень зручно скористатися методом Мора. У стрижнях малої кривини можна знехтувати поздовжніми деформаціями й деформаціями зсуву. Тоді для плоского згинання формула Мора матиме такий самий вигляд, що

і для балок:

$$\Delta_{iP} = \sum \int_s \frac{\overline{M}_i M_P ds}{EJ}. \tag{15.20}$$

У випадку плоского згинання бруса великої кривини деформація елемента від дії зусиль M_P та N_P (рис. 452, *а, б*) також складається з подовження $\Delta(ds)$ відрізка ds осі й відносного повороту $d\Theta$ перерізів, що обмежують елемент. Взаємний кут повороту перерізів, спричинений згинальними моментами, як випливає з виразу (15.8),

$$d\Theta_1 = \frac{M_P d\varphi}{ES} = \frac{M_P ds}{ESR_0}.$$

Кут повороту перерізів, спричинений осьовими силами N_P, що виникає внаслідок неоднакової довжини волокон елемента (рис. 452, *б*),

$$d\Theta_2 = \frac{N_P ds}{EFR_0}.$$

Повний кут повороту перерізу

$$d\Theta = d\Theta_1 + d\Theta_2 = \frac{M_P ds}{ESR_0} + \frac{N_P ds}{EFR_0}. \tag{15.21}$$

Подовження осьового елемента, спричинене поворотом перерізів на кут $d\Theta_1$,

$$\Delta(ds)_1 = e_1 d\Theta_1 = \frac{M_P ds}{ESR_0} e_1 = \frac{M_P ds}{EFR_0}.$$

Подовження осьового елемента внаслідок дії осьових сил

$$\Delta(ds)_2 = \frac{N_P ds}{EF}.$$

Повне подовження осьового волокна

$$\Delta(ds) = \Delta(ds)_1 + \Delta(ds)_2 = \frac{M_P ds}{EFR_0} + \frac{N_P ds}{EF}. \tag{15.22}$$

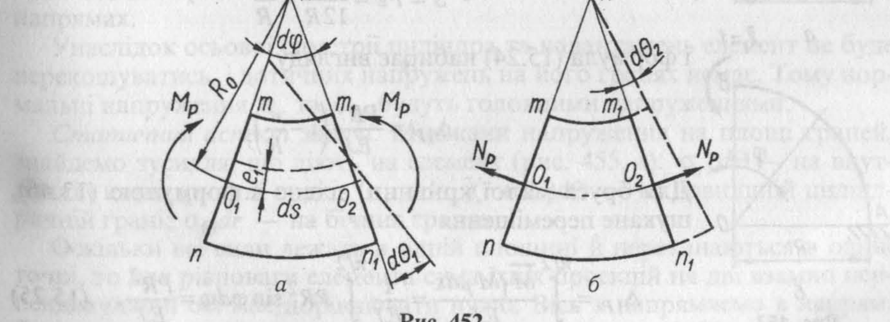


Рис. 452

Підставляючи формули (15.21) та (15.22) у вираз (13.44), знаходимо загальну формулу для визначення переміщень бруса великої кривини:

$$\Delta_{iP}\sum\int\left(\frac{\overline{M}_iM_P}{ESR_0}ds+\frac{\overline{N}_iM_P+\overline{M}_iN_P}{EFR_0}ds+\frac{\overline{N}_iN_P}{EF}ds+\frac{k\overline{Q}_iQ_P}{GF}ds\right). \qquad (15.23)$$

Впливом поперечної сили нехтують. Тоді останній доданок у формулі (15.23) відкидається.

Як приклад обчислимо кут повороту вільного кінця бруса великої кривини, виконаного у вигляді чверті кільця постійного перерізу (рис. 453, *а*). Допоміжний стан наведено на рис. 453, *б*.

У довільному перерізі, що визначається полярним кутом φ, внутрішні силові фактори для дійсного та допоміжного станів такі:

$$M_P=PR\sin\varphi;\; N_P=-P\sin\varphi;\; Q_P=P\cos\varphi;\; \left(0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right);$$

$$\overline{M}_1=1;\; \overline{N}_1=0;\; \overline{Q}_1=0.$$

Згідно з формулою (15.23), шукане переміщення

$$\Delta_{1P}=\int_0^{\pi/2}\frac{\overline{M}_1M_Pd\varphi}{ES}+\int_0^{\pi/2}\frac{\overline{M}_1N_PRd\varphi}{EF}=\frac{1}{ES}\int_0^{\pi/2}PR\sin\varphi d\varphi-\frac{1}{EF}\int_0^{\pi/2}P\sin\varphi d\varphi=$$

$$=\frac{PR}{ES}-\frac{P}{EF}=\frac{PR}{ES}\left(1-\frac{S}{FR}\right). \qquad (15.24)$$

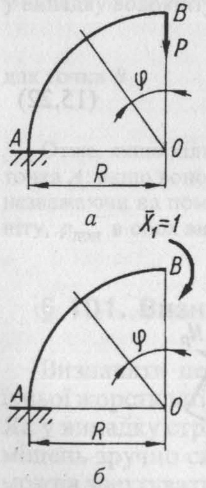


Рис. 453

Як уже було показано (див. § 99), для кривого бруса прямокутного поперечного перерізу в першому наближенні можна взяти $e\approx h^2/12R$. Тоді

$$S=Fe\approx\frac{bh^3}{12R}=\frac{J}{R}$$

і формула (15.24) набирає вигляду

$$\Delta_{1P}=\frac{PR^2}{EJ}\left(1-\frac{e}{R}\right).$$

Для бруса малої кривини, згідно з формулою (13.46), шукане переміщення

$$\Delta_{1P}=\int_0^{\pi/2}\frac{\overline{M}_1M_Pds}{EJ}=\frac{1}{EJ}\int_0^{\pi/2}PR^2\sin\varphi d\varphi=\frac{PR^2}{EJ}. \qquad (15.25)$$

Розділ 16 РОЗРАХУНОК ТОВСТОСТІННИХ ЦИЛІНДРІВ І ОБЕРТОВИХ ДИСКІВ

§ 102. Товстостінний циліндр, що зазнає дії внутрішнього і зовнішнього тисків

Циліндр слід вважати товстостінним, якщо товщина його стінки більша за одну десяту середнього радіуса циліндра.

При розрахунку тонкостінних циліндрів припускається, що в тангенціальному (коловому) напрямі напруження постійні по товщині стінки, а в радіальному — їх взагалі немає. Ці припущення неприйнятні для товстостінних циліндрів.

Розглянемо циліндр з внутрішнім радіусом r_1 і зовнішнім r_2, що зазнає дії внутрішнього тиску p_1 та зовнішнього p_2 (рис. 454). Внаслідок осьової симетрії циліндра та навантажень напруження і деформації також симетричні відносно його осі.

Двома перерізами, перпендикулярними до осі циліндра і розміщеними один від одного на відстані, що дорівнює одиниці, виріжемо кільце (рис. 454). У цьому кільці виділимо елемент *abcd* двома площинами, що проходять крізь вісь циліндра й утворюють між собою кут $d\Theta$ (рис. 455, *а*), та двома співвісними циліндричними поверхнями з радіусами r та $r+dr$ (рис. 455, *б*). Нормальні напруження на циліндричній поверхні елемента радіусом r (радіальні напруження) позначимо через σ_r; на радіусі $r+dr$ напруження дістануть приросту і дорівнюватимуть $\sigma_r+d\sigma_r$. Нормальні напруження на плоских гранях (тангенціальні, або колові, напруження) позначимо через σ_Θ.

Зображені на рис. 455, *б* напрями напружень вважаються додатніми і відповідають розтяганню елемента у двох взаємно перпендикулярних напрямах.

Унаслідок осьової симетрії циліндра та навантажень елемент не буде перекошуватись, і дотичних напружень на його гранях немає. Тому нормальні напруження σ_r та σ_Θ будуть головними напруженнями.

Статичний аспект задачі. Множачи напруження на площі граней, знайдемо зусилля, що діють на елемент (рис. 455, *в*): $\sigma_r rd\Theta$ — на внутрішній циліндричній грані; $(\sigma_r+d\sigma_r)(r+dr)d\Theta$ — на зовнішній циліндричній грані; $\sigma_\Theta dr$ — на бічних гранях.

Оскільки всі сили лежать в одній площині й перетинаються в одній точці, то для рівноваги елемента сума їхніх проекцій на дві взамно перпендикулярні осі має дорівнювати нулю. Вісь x напрямлемо в напрямі бісектриси кута $d\Theta$, а вісь y — перпендикулярно до неї. Умовами рівно-

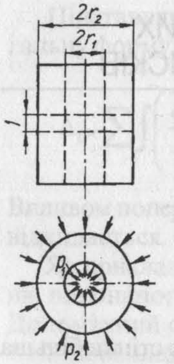


Рис. 454

ваги будуть

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0.$$

Завдяки симетрії елемента друга умова задовольняється тотожно, а перша після підставлення виразів для зусиль має такий вигляд:

$$\sum X = -\sigma_r r d\Theta + (\sigma_r + d\sigma_r)(r+dr)d\Theta - 2[\sigma_\Theta dr \sin(d\Theta/2)] = 0.$$

Розкривши дужки, дістанемо

$$-\sigma_r r d\Theta + \sigma_r r d\Theta + d\sigma_r r d\Theta + \sigma_r dr d\Theta + d\sigma_r dr d\Theta - 2\sigma_\Theta dr \sin(d\Theta/2) = 0.$$

У цьому рівнянні взаємно знищуються члени $\pm\sigma_r r d\Theta$. Унаслідок малості кута $d\Theta/2$ вважаємо, що $\sin(d\Theta/2) = d\Theta/2$.

Відкидаємо член вищого порядку малості $d\sigma_r dr d\Theta$ і ділимо решту членів на $dr d\Theta$. Після цього матимемо

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\Theta = 0. \qquad (16.1)$$

Рівняння (16.1) містить два невідомих напруження σ_r та σ_Θ. Для визначення їх, дотримуючись загального плану розв'язання статично невизначуваних задач, розглянемо ще геометричний та фізичний аспекти задачі.

Геометричний аспект задачі. Деформація елемента симетрична відносно осі й тому спричинює радіальні переміщення всіх точок циліндра (рис. 455, *г*). Позначимо радіальне переміщення циліндричної поверхні радіусом r через u, тоді переміщення циліндричної поверхні радіусом $r+dr$ буде $u+du$. Абсолютне радіальне подовження елемента dr дорівнюватиме du, а відносне подовження

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}. \qquad (16.2)$$

Відносне подовження в тангенціальному (коловому) напрямі на радіусі r знайдемо так. Довжина елемента по колу циліндричної поверхні радіусом r після його приросту на величину u дорівнює $(r+u)d\Theta$. Віднімаючи з останньої довжини початкову $rd\Theta$, дістанемо абсолютний приріст довжини елемента на радіусі r у коловому напрямі:

$$(r+u)d\Theta - r d\Theta = u d\Theta.$$

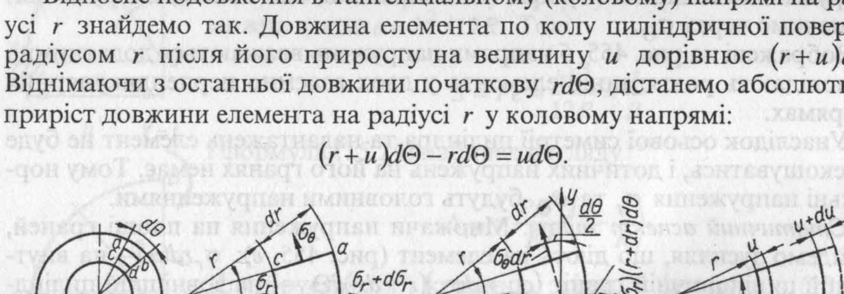


Рис. 455

Поділивши абсолютне подовження на початкову довжину $rd\Theta$, знайдемо колове відносне подовження:

$$\varepsilon_\Theta = u/r. \qquad (16.3)$$

Фізичний аспект задачі. При двосторонньому розтяганні, якого зазнає розглядуваний елемент, згідно із законом Гука, напруження та деформації пов'язані між собою такими залежностями:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\Theta); \quad \sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_\Theta + \mu\varepsilon_r).$$

Ураховуючи формули (16.2) та (16.3), знайдемо

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{du}{dr} + \mu\frac{u}{r}\right); \quad \sigma_\Theta = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{u}{r} + \mu\frac{du}{dr}\right). \qquad (16.4)$$

Підставляючи вирази (16.4) у рівняння (16.1), для визначення переміщення u дістанемо лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами (рівняння Ейлера):

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0. \qquad (16.5)$$

Записавши це рівняння у вигляді

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d(ur)}{dr}\right] = 0$$

та інтегруючи його по r послідовно двічі, знайдемо загальний розв'язок рівняння:

$$u = Ar + B\frac{1}{r}. \qquad (16.6)$$

Підставляючи розв'язок (16.6) у формули (16.4), дістанемо вирази для напружень у точках на відстані r від осі циліндра:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}\left[(1+\mu)A - \frac{1-\mu}{r^2}B\right]; \qquad (16.7)$$

$$\sigma_\Theta = \frac{E}{1-\mu^2}\left[(1+\mu)A + \frac{1-\mu}{r^2}B\right]. \qquad (16.8)$$

Сталі інтегрування A та B знаходимо з умов для σ_r на внутрішній та зовнішній поверхнях циліндра. На внутрішній поверхні $(r = r_1)$ ці напруження дорівнюють внутрішньому тиску, тобто $\sigma_r = -p_1$, а на зовнішній поверхні $(r = r_2)$ — зовнішньому тиску: $\sigma_r = -p_2$.

Для визначення сталих A та B, згідно з рівнянням (16.7), виведемо два таких рівняння:

$$-p_1 = \frac{E}{1-\mu^2}\left[(1+\mu)A - \frac{1-\mu}{r_1^2}B\right]; \quad p_2 = \frac{E}{1-\mu^2}\left[(1+\mu)A - \frac{1-\mu}{r_2^2}B\right].$$

Розв'язуючи ці рівняння відносно A та B, знайдемо:

$$A=\frac{1-\mu}{E}\frac{r_1^2p_1-r_2^2p_2}{r_2^2-r_1^2};\quad B=\frac{1+\mu}{E}\frac{r_1^2r_2^2\left(p_1-p_2\right)}{r_2^2-r_1^2}.$$

Підставляючи значення сталих у вирази (16.6), (16.7) та (16.8), дістанемо формули для визначення радіального переміщення та напружень (формули Ламе):

$$u=\frac{1-\mu}{E}\frac{r_1^2p_1-r_2^2p_2}{r_2^2-r_1^2}r+\frac{1+\mu}{E}\frac{r_1^2r_2^2\left(p_1-p_2\right)}{r_2^2-r_1^2}\frac{1}{r};\tag{16.9}$$

$$\sigma_r=\frac{r_1^2p_1-r_2^2p_2}{r_2^2-r_1^2}-\frac{r_1^2r_2^2\left(p_1-p_2\right)}{r_2^2-r_1^2}\frac{1}{r^2};\tag{16.10}$$

$$\sigma_\Theta=\frac{r_1^2p_1-r_2^2p_2}{r_2^2-r_1^2}+\frac{r_1^2r_2^2\left(p_1-p_2\right)}{r_2^2-r_1^2}\frac{1}{r^2}.\tag{16.11}$$

Склавши ліві та праві частини виразів для σ_r та σ_Θ, переконаємося в тому, що сума радіального та колового напружень — величина стала:

$$\sigma_r+\sigma_\Theta=\text{const}.$$

Відносна деформація розглядуваного кільця в напрямі, паралельному осі циліндра, також стала на будь-якому радіусі:

$$\varepsilon_z=-\frac{\mu}{E}\left(\sigma_r+\sigma_\Theta\right)=\text{const}.$$

На підставі цього циліндр можна розглядати як складений з окремих кілець, нанизаних на вісь. Поперечні перерізи циліндра при деформації залишаються плоскими.

Якщо циліндр крім радіальних тисків сприймає ще й поздовжню силу N (наприклад, якщо є днища), в його поперечних перерізах виникає напруження

$$\sigma_z=\frac{N}{F}=\frac{N}{\pi\left(r_2^2-r_1^2\right)},\tag{16.12}$$

а до виразу (16.9) для радіальних переміщень додається доданок

$$\Delta u=-\mu\frac{\sigma_z}{E}r.\tag{16.13}$$

Напруження σ_r та σ_Θ при цьому не змінюються.

Зазначимо, що всі наведені формули для деформацій та напружень σ_r, σ_Θ та σ_z справедливі для перерізів, досить віддалених від днищ. Поблизу закритих торців циліндра деформації та напруження дещо змінюються внаслідок впливу днищ.

Розглянемо два окремих випадки навантажування циліндра.

1. *Циліндр навантажений тільки внутрішнім тиском,* а зовнішнього тиску немає або він малий, і тому ним можна знехтувати, тобто $p_1=p$;

$p_2=0$. Формули (16.9) — (16.11) для напружень та радіального переміщення набирають такого вигляду:

$$\sigma_r=\frac{r_1^2}{r_2^2-r_1^2}\left(1-\frac{r_2^2}{r^2}\right)p;\tag{16.14}$$

$$\sigma_\Theta=\frac{r_1^2}{r_2^2-r_1^2}\left(1+\frac{r_2^2}{r^2}\right)p;\tag{16.15}$$

$$u=\frac{1-\mu}{E}\frac{r_1^2p}{r_2^2-r_1^2}r+\frac{1+\mu}{E}\frac{r_1^2r_2^2p}{r_2^2-r_1^2}\frac{1}{r}.\tag{16.16}$$

Напруження σ_r скрізь стискальні, а σ_Θ — розтягальні. Найбільші значення σ_r та σ_Θ будуть біля внутрішньої поверхні циліндра (якщо $r=r_1$):

$$\left(\sigma_r\right)_{r=r_1}=-p;\quad\left(\sigma_\Theta\right)_{r=r_1}=\frac{1+k^2}{1-k^2}p,\tag{16.17}$$

де

$$k=r_1/r_2.$$

Радіальне переміщення біля внутрішньої поверхні циліндра

$$u_{r=r_1}=\frac{r_1}{E}\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}+\mu\right)p.\tag{16.18}$$

Напруження та переміщення біля зовнішньої поверхні циліндра такі:

$$\left(\sigma_r\right)_{r=r_2}=0;\quad\left(\sigma_\Theta\right)_{r=r_2}=\frac{2k^2}{1-k^2}p;\tag{16.19}$$

$$u_{r=r_2}=\frac{r_2}{E}\frac{2k^2}{1-k^2}p.\tag{16.20}$$

Епюри напружень σ_r та σ_Θ для розглядуваного випадку при відношенні $k=r_1/r_2=0{,}5$ наведено на рис. 456, *а*. Напруження змінюються за гіперболічним законом. Найбільш небезпечною з погляду міцності є точка, що лежить біля внутрішньої поверхні циліндра.

Визначимо допустимий внутрішній тиск у циліндрі при безмежному збільшенні товщини стінки. Поклавши $r_2\to\infty$ та взявши у формулах (16.17) $k=0$, матимемо $\left(\sigma_r\right)_{r=r_1}=-p;\ \left(\sigma_\Theta\right)_{r=r_1}=p$.

Використаємо, наприклад, III теорію міцності:

$$\sigma_{\text{екв III}}=\sigma_1-\sigma_3\le[\sigma].$$

У розглядуваному випадку $\sigma_1=\left(\sigma_\Theta\right)_{r=r_1}=p$ та $\sigma_3\left(\sigma_r\right)_{r=r_1}=-p$, і ця умова міцності набирає вигляду

$$2p\le[\sigma],$$

звідки

$$p \le [\sigma]/2.$$

Циліндр з дуже товстою стінкою не допускає внутрішнього тиску, більшого за певне значення. Отже, збільшення товщини стінки циліндра не завжди є ефективним способом підвищення міцності.

2. *Циліндр навантажений тільки зовнішнім тиском:* $p_2 = p$; $p_1 = 0$. У цьому разі формули (16.10) та (16.11) для напружень та формула (16.9) для переміщень набирають такого вигляду:

$$\sigma_r = -\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right)p; \tag{16.21}$$

$$\sigma_\Theta = -\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right)p; \tag{16.22}$$

$$u = -\frac{1-\mu}{E}\frac{r_2^2 p}{r_2^2 - r_1^2}r - \frac{1-\mu}{E}\frac{r_1^2 r_2^2 p}{r_2^2 - r_1^2}\frac{1}{r}. \tag{16.23}$$

Обидва напруження стискальні, причому за абсолютним значенням $\sigma_\Theta > \sigma_r$, а радіальне переміщення напрямлене до осі циліндра (радіуси зменшуються).

Біля внутрішньої поверхні циліндра $(r = r_1)$

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = 0; \quad (\sigma_\Theta)_{r=r_1} = -\frac{2}{1-k^2}p; \tag{16.24}$$

$$u_{r=r_1} = \frac{r_1}{E}\frac{2}{1-k^2}p. \tag{16.25}$$

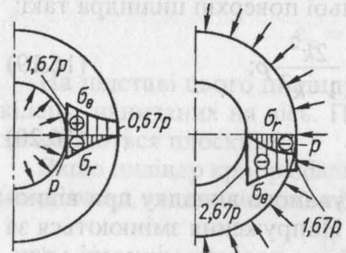


Рис. 456

Біля зовнішньої поверхні циліндра $(r = r_2)$

$$(\sigma_r)_{r=r_2} = -p; \quad (\sigma_\Theta)_{r=r_2} = -\frac{1+k^2}{1-k^2}p; \tag{16.26}$$

$$u_{r=r_2} = -\frac{r_2}{E}\left(\frac{1+k^2}{1-k^2} - \mu\right)p. \tag{16.27}$$

Епюри напружень σ_r та σ_Θ при $k = r_1 / r_2 = 0{,}5$ наведено на рис. 456, *б*. Найбільшого значення напруження σ_Θ досягає біля внутрішньої поверхні циліндра. Як і у випадку внутрішнього тиску, найнебезпечнішою є точка біля внутрішньої поверхні циліндра.

Зменшення зовнішнього радіуса суцільного циліндра (без внутрішнього отвору) дістанемо, поклавши у формулі (16.23) $r_1 = 0$ та $r = r_2$. Тоді

$$u_{r=r_2} = -\frac{pr_2}{E}(1-\mu). \tag{16.28}$$

§ 103. Розрахунок складених циліндрів

Міцність циліндра, що зазнає дії внутрішнього тиску, зі збільшенням товщини стінки зростає тільки до певної границі. Вище було зазначено, що навіть при нескінченно великому зовнішньому радіусі внутрішній тиск у циліндрі не може перевищувати певного значення. Виходячи з розрахунку на міцність за допустимими напруженнями й скориставшись III теорією міцності, ми дійшли висновку, що ні при якому збільшенні товщини стінки циліндра його не можна виготовити на тиск більший ніж $p = [\sigma]/2$. Пояснюється це тим, що зі збільшенням радіуса напруження σ_r та σ_Θ швидко зменшуються, і матеріал зовнішніх шарів циліндра працює малоефективно.

Розподіл напружень можна поліпшити, розвантаживши внутрішні шари за рахунок більш інтенсивного використання зовнішніх. Для цього треба зробити циліндр складеним, надягнувши один циліндр на інший з натягом (як правило, за допомогою гарячої посадки). У таких циліндрах допустимий внутрішній тиск може бути значно більшим, ніж у суцільному циліндрі. Так само виготовляють гарматні стволи.

При насадженні одного циліндра на інший з натягом колові напруження σ_Θ у внутрішньому циліндрі стають стискальними, а в зовнішньому — розтягальними (рис. 457, *а*). Якщо такий складений циліндр піддати внутрішньому тиску, то в ньому виникнуть додаткові розтягальні колові та стискальні радіальні напруження (рис. 457, *б*). Ці напруження визначаються за формулами (16.14) та (16.15) як для суцільного циліндра. Колові напруження від внутрішнього тиску будуть додаватися до напружень від посадки в зовнішньому циліндрі та відніматися від них у внутрішньому циліндрі. Радіальні напруження від внутрішнього тиску та від тиску посадки додаються в обох циліндрах. Сумарні епюри напружень після прикладання тиску матимуть вигляд, як на рис. 457, *в*. Характерним для них є стрибок на епюрі σ_Θ та перелом у епюрі σ_r на радіусі контакту циліндрів.

Розглянемо розрахунок складених циліндрів. Насамперед знайдемо залежність тиску p_c по контактній поверхні від натягу δ — різниці між зовнішнім діаметром внутрішнього циліндра *I* та внутрішнім діаметром зовнішнього циліндра *II* (рис. 458).

Оскільки після насадження одного циліндра на інший зовнішній радіус внутрішнього циліндра та внутрішній радіус зовнішнього стають однакови-

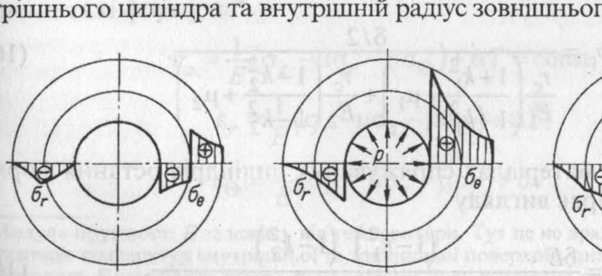


Рис. 457

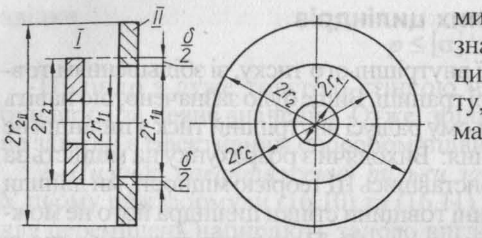


Рис. 458

ми, то очевидно, що сума абсолютних значень радіальних переміщень обох циліндрів на радіусі поверхні контакту, спричинених контактним тиском, має дорівнювати половині натягу:

$$|u_I|+|u_{II}|=\delta/2. \qquad (16.29)$$

Натяг δ дуже малий порівняно з розмірами радіуса поверхні контакту, тому при обчисленні переміщень вважатимемо, що $r_{2I}=r_{II}=r_c$ (рис. 458).

Позначимо через $k_1=r_1/r_c$ відношення внутрішнього радіуса циліндра до радіуса поверхні контакту, а через $k_2=r_c/r_2$ — відношення радіуса поверхні контакту до зовнішнього радіуса циліндра.

Хоча здебільшого частини складених циліндрів виготовляють з одного матеріалу, для спільності при розв'язанні задачі спочатку вважатимемо ці матеріали різними.

Контактний тиск p_c буде зовнішнім для внутрішнього циліндра та внутрішнім для зовнішнього циліндра. Абсолютне значення радіального переміщення внутрішнього циліндра на контактній поверхні знайдемо за формулою (16.27):

$$|u_I|=\frac{r_c}{E_1}\left(\frac{1+k_1^2}{1-k_1^2}-\mu_1\right)p_c, \qquad (16.30)$$

а зовнішнього — за формулою (16.18):

$$|u_{II}|=\frac{r_c}{E_2}\left(\frac{1+k_2^2}{1-k_2^2}+\mu_2\right)p_c. \qquad (16.31)$$

Підставляючи значення цих переміщень у рівняння (16.29), матимемо

$$\frac{r_c}{E_1}\left(\frac{1+k_1^2}{1-k_1^2}-\mu_1\right)p_c+\frac{r_c}{E_2}\left(\frac{1-k_2^2}{1-k_2^2}+\mu_2\right)p_c=\frac{\delta}{2}.$$

Розв'язуючи рівняння відносно p_c, дістанемо

$$p_c=\frac{\delta/2}{\dfrac{r_c}{E_1}\left(\dfrac{1+k_1^2}{1-k_2^2}-\mu_1\right)+\dfrac{r_c}{E_2}\left(\dfrac{1-k_2^2}{1-k_2^2}+\mu_2\right)}. \qquad (16.32)$$

При однакових матеріалах спряжуваних циліндрів остання формула спрощується і набирає вигляду

$$p_c=\frac{\delta E}{2r_c}\frac{\left(1-k_1^2\right)\left(1-k_2^2\right)}{\left(1+k_1^2\right)\left(1-k_2^2\right)+\left(1+k_2^2\right)\left(1-k_1^2\right)}. \qquad (16.33)$$

Напруження, спричинені тиском p_c, обчислюють за формулами (16.21), (16.22) для внутрішнього циліндра та за формулами (16.14), (16.15) для зовнішнього.

Зазначимо таке. Натяг визначають, вимірюючи діаметри спряжуваних деталей мікрометричними інструментами або іншими точними приладами. Поверхні деталей ніколи не бувають абсолютно гладкими: на них завжди є сліди обробки — так звані гребінці, які зминаються при запресовуванні. Внаслідок цього дійсний натяг дещо менший за виміряний, а дійсний контактний тиск менший ніж визначений за формулою (16.32) або (16.33).

Крім цього, треба мати на увазі, що формули (16.32) та (16.33) справедливі лише тоді, коли в жодній із спряжуваних деталей напруження не перевищують границі пропорційності. При появі пластичних деформацій контактний тиск буде менший, ніж той, що визначається за цими формулами. Знайти його можна методами теорії пластичності.

§ 104. Температурні напруження в товстостінних циліндрах

Якщо товстостінний циліндр нагрівається нерівномірно, то в ньому виникають температурні напруження, які додаються до напружень, спричинених тиском.

Часто температурне поле симетричне відносно осі циліндра і постійне по його довжині. За цієї умови також можна вважати, що поперечні перерізи, які лежать на достатній відстані від кінців циліндра, залишаються плоскими і деформація ε_z постійна.

Для розв'язання температурної задачі можна скористатися тим самим методом, який було застосовано при розрахунку циліндра на дію внутрішнього та зовнішнього тисків. При цьому рівняння рівноваги (16.1) не зміниться. Геометричні співвідношення (16.2) та (16.3) також збережуться. Дещо іншими будуть фізичні залежності.

Позначимо через T підвищення температури, яке залежить від радіуса r, а через α — температурний коефіцієнт лінійного розширення.

Скористаємось узагальненим законом Гука, додавши до деформацій, обумовлених напруженнями, температурні розширення. Тоді для ε_z, ε_r, ε_Θ дістанемо такі формули*:

$$\varepsilon_z=\frac{1}{E}(\sigma_z-\mu\sigma_r-\mu\sigma_\Theta)+\alpha T=\text{const};$$

$$\varepsilon_r=\frac{1}{E}(\sigma_r-\mu\sigma_z-\mu\sigma_\Theta)+\alpha T; \qquad (16.34)$$

$$\varepsilon_\Theta=\frac{1}{E}(\sigma_\Theta-\mu\sigma_z-\mu\sigma_r)+\alpha T.$$

*Модуль пружності E залежить від температури. Тут це не враховано, що допустимо, якщо різниця температур внутрішньої та зовнішньої поверхонь циліндра невелика. У цьому разі модуль E слід брати таким, що дорівнює його значенню при середній температурі стінки циліндра.

Розв'язуючи ці рівняння відносно напружень, знайдемо, що

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[(1-\mu)\varepsilon_z + \mu\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\Theta - (1+\mu)\alpha T\right];$$

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[(1-\mu)\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\Theta + \mu\varepsilon_z - (1+\mu)\alpha T\right]; \qquad (16.35)$$

$$\sigma_\Theta = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[(1-\mu)\varepsilon_\Theta + \mu\varepsilon_r + \mu\varepsilon_z - (1+\mu)\alpha T\right].$$

Виражаючи в цих формулах деформації через переміщення:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \text{ і } \varepsilon_\Theta = \frac{u}{r},$$

а потім підставляючи добуті значення для σ_r та σ_Θ у рівняння рівноваги (16.1):

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\Theta = 0,$$

дістанемо таке диференціальне рівняння для переміщення u:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{1+\mu}{1-\mu}\alpha\frac{dT}{dr}. \qquad (16.36)$$

З цього рівняння можна визначити переміщення, якщо відомий закон зміни температури $T(r)$ по товщині стінки циліндра.

Останнє рівняння запишемо у вигляді

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d(ur)}{dr}\right] = \frac{1+\mu}{1-\mu}\alpha\frac{dT}{dr}.$$

Інтегруючи це рівняння двічі по r, знайдемо загальний розв'язок:

$$u = \frac{1}{r}\frac{1+\mu}{1-\mu}\int_{r_1}^{r}\alpha Trdr + Ar + \frac{B}{r}. \qquad (16.37)$$

Сталі A та B визначаються з умов для σ_r на внутрішній та зовнішній поверхнях циліндра. Оскільки ці поверхні вільні від навантаження, то

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = 0 \text{ і } (\sigma_r)_{r=r_2} = 0.$$

Підставляючи у вираз (16.35) для σ_r деформації $\varepsilon_r = du/dr$ та $\varepsilon_\Theta = u/r$, а потім здобутий розв'язок (16.37) для u, матимемо

$$\sigma_r = \frac{E}{1+\mu}\left(-\frac{1+\mu}{1-\mu}\frac{1}{r^2}\int_{r_1}^{r}\alpha Trdr + \frac{A}{1-2\mu} - \frac{B}{r^2} + \frac{\mu}{1-2\mu}\varepsilon_z\right). \qquad (16.38)$$

Прирівнюючи цей вираз до нуля при $r = r_1$, $r = r_2$, матимемо два рівняння для визначення A та B, розв'язуючи які, знайдемо, що

$$A = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{1-\mu}\frac{1}{r_2^2 - r_1^2}\int_{r_1}^{r_2}\alpha Trdr - \mu\varepsilon_z; \quad B = \frac{1+\mu}{1-\mu}\frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\int_{r_1}^{r_2}\alpha Trdr.$$

Підставивши ці значення у формули (16.35), визначимо

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu}\left[-\frac{1}{r^2}\int_{r_1}^{r}\alpha Trdr + \frac{r^2 - r_1^2}{r^2\left(r_2^2 - r_1^2\right)}\int_{r_1}^{r_2}\alpha Trdr\right]; \qquad (16.39)$$

$$\sigma_\Theta = \frac{E}{1-\mu}\left[\frac{1}{r^2}\int_{r_1}^{r}\alpha Trdr + \frac{r^2 + r_1^2}{r^2\left(r_2^2 - r_1^2\right)}\int_{r_1}^{r_2}\alpha Trdr - \alpha T\right]; \qquad (16.40)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1-\mu}\left[\frac{2\mu}{r_2^2 - r_1^2}\int_{r_1}^{r_2}\alpha Trdr + (1-\mu)\varepsilon_z - \alpha T\right]. \qquad (16.41)$$

В останньому виразі невідома величина ε_z. Якщо циліндр має змогу вільно розширюватися, то ε_z знаходять з умови, що поздовжня сила в поперечному перерізі дорівнює нулю, тобто

$$N = \int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}\sigma_z r dr d\varphi = 0, \qquad (16.42)$$

або

$$\int_{r_1}^{r_2}\sigma_z r dr = 0. \qquad (16.43)$$

Підставляючи сюди значення σ_z з виразу (16.41), знайдемо

$$\varepsilon_z = \frac{2}{r_2^2 - r_1^2}\int_{r_1}^{r_2}\alpha Trdr. \qquad (16.44)$$

Остаточний вираз для σ_z такий:

$$\sigma_z = \frac{E}{1-\mu}\left(\frac{2}{r_2^2 - r_1^2}\int_{r_1}^{r_2}\alpha Trdr - \alpha T\right). \qquad (16.45)$$

Обчислити інтеграл $\int\alpha Trdr$ та визначити напруження можна, якщо відомий закон зміни температури $T(r)$ по товщині стінки циліндра.

Найбільш простим та часто застосовуваним у технічних розрахунках законом зміни температури є лінійний закон. Нехай $T^* = T_1 - T_2$ означає перевищення температури внутрішньої поверхні циліндра над температурою зовнішньої поверхні. Тоді лінійний закон зміни температури по радіусу циліндра виразиться формулою

$$T(r) = T^*\frac{r_2 - r}{r_2 - r_1}. \qquad (16.46)$$

Підставивши цей вираз у формули (16.39), (16.40), (16.45) для напружень та виконавши інтегрування, дістанемо

$$\sigma_r = \frac{E\alpha T^*}{3(1-\mu)(r_2 - r_1)}\left[r - \frac{r_1^3}{r^2} - \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right)\frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2}\right]; \quad (16.47)$$

$$\sigma_\Theta = \frac{E\alpha T^*}{3(1-\mu)(r_2 - r_1)}\left[2r + \frac{r_1^3}{r^2} - \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right)\frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2}\right]; \quad (16.48)$$

$$\sigma_z = \frac{E\alpha T^*}{3(1-\mu)(r_2 - r_1)}\left[3r - \frac{2\left(r_2^3 - r_1^3\right)}{r_2^2 - r_1^2}\right]. \quad (16.49)$$

Біля внутрішньої поверхні циліндра (при $r = r_1$)

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = 0;$$

$$(\sigma_\Theta)_{r=r_1} = (\sigma_z)_{r=r_1} = \frac{E\alpha T^*}{3(1-\mu)(r_2 - r_1)}\left[3r_1 - \frac{2\left(r_2^3 - r_1^3\right)}{r_2^2 - r_1^2}\right]. \quad (16.50)$$

Біля зовнішньої поверхні циліндра (при $r = r_2$)

$$(\sigma_r)_{r=r_2} = 0;$$

$$(\sigma_\Theta)_{r=r_2} = (\sigma_z)_{r=r_2} = \frac{E\alpha T^*}{3(1-\mu)(r_2 - r_1)}\left[3r_2 - \frac{2\left(r_2^3 - r_1^3\right)}{r_2^2 - r_1^2}\right]. \quad (16.51)$$

Епюри розподілу напружень по товщині стінки циліндра з відношенням $k = r_1 / r_2 = 0{,}5$ при $\mu = 0{,}3$ наведено на рис 459, *а*.

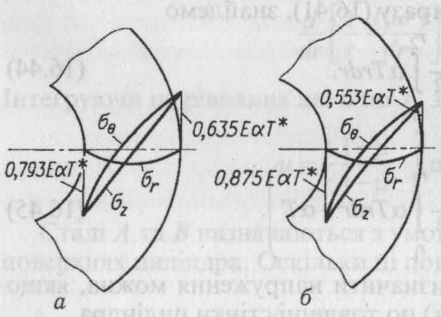


Рис. 459

Іноді припускають, що в товстостінних циліндрах температура змінюється за логарифмічним законом, який встановлюється теорією теплопередачі:

$$T(r) = \frac{T^*}{\ln(r_2 / r_1)}\ln\frac{r_2}{r_1}. \quad (16.52)$$

Підставивши цей вираз у формули (16.39), (16.40), (16.45) та виконавши інтегрування, матимемо

$$\sigma_r = -\frac{E\alpha T^*}{2(1-\mu)\ \ln(r_2 / r_1)}\left[\ln\frac{r_2}{r} + \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 - \frac{r_2^2}{r^2}\right)\ln\frac{r_2}{r_1}\right]; \quad (16.53)$$

$$\sigma_\Theta = \frac{E\alpha T^*}{2(1-\mu)\ \ln(r_2 / r_1)}\left[1 - \ln\frac{r_2}{r} - \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 + \frac{r_2^2}{r^2}\right)\ln\frac{r_2}{r_1}\right]; \quad (16.54)$$

$$\sigma_z = \frac{E\alpha T^*}{2(1-\mu)\ \ln(r_2 / r_1)}\left(1 - 2\ln\frac{r_2}{r} - \frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\ln\frac{r_2}{r_1}\right). \quad (16.55)$$

Біля внутрішньої поверхні циліндра

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = 0;$$

$$(\sigma_\Theta)_{r=r_1} = (\sigma_z)_{r=r_1} = \frac{E\alpha T^*}{2(1-\mu)\ \ln(r_2 / r_1)}\left(1 - \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\ln\frac{r_2}{r_1}\right). \quad (16.56)$$

Біля зовнішньої поверхні

$$(\sigma_r)_{r=r_2} = 0;$$

$$(\sigma_\Theta)_{r=r_2} = (\sigma_z)_{r=r_2} = \frac{E\alpha T^*}{2(1-\mu)\ln(r_2 / r_1)}\left(1 - \frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\ln\frac{r_2}{r_1}\right). \quad (16.57)$$

Епюри розподілу напружень по товщині стінки циліндра з відношенням $k = r_1 / r_2 = 0{,}5$ при $\mu = 0{,}3$ у разі зміни температури за логарифмічним законом наведено на рис. 459, *б*.

Зазначимо, що поблизу торців циліндра напруження, які визначаються виведеними формулами, можуть мати місце лише тоді, коли торці будуть навантажені поверхневим навантаженням, що змінюється відповідно до формули для σ_z.

§ 105. Приклади розрахунку товстостінних циліндрів

1. *Товстостінний циліндр* зазнає дії внутрішнього тиску $p_1 = 100$ МПа та зовнішнього $p_2 = 60$ МПа. Дослідимо, як змінюватимуться напруження σ_1 та σ_Θ зі зміною товщини стінки циліндра, що характеризується відношенням внутрішнього радіуса до зовнішнього $k = r_1 / r_2$.

Напруження визначаються за формулами (16.10) та (16.11), які в цьому разі зручніше записати, ввівши відношення $k = r_1 / r_2$:

$$\sigma_r = \frac{k^2 p_1 - p_2}{1 - k^2} - \frac{p_1 - p_2}{1 - k^2}\frac{r_1^2}{r^2}; \quad (16.58)$$

$$\sigma_\Theta = \frac{k^2 p_1 - p_2}{1 - k^2} + \frac{p_1 - p_2}{1 - k^2}\frac{r_1^2}{r^2}. \quad (16.59)$$

При зміні товщини стінки циліндра напруження σ_r залишається стискальним і плавно змінюється за гіперболічним законом від значення $-p_1$ біля внутрішньої поверхні до значення $-p_2$ біля зовнішньої (рис. 460, *а*).

Для обчислення напружень σ_Θ біля внутрішньої поверхні циліндра $(r = r_1)$ та біля зовнішньої $(r = r_2)$ формулу (16.59) можна записати відповідно так:

$$(\sigma_\Theta)_{r=r_1} = \frac{1}{1-k^2}\left[\left(1 + k^2\right)p_1 - 2p_1\right]; \quad (\sigma_\Theta)_{r=r_2} = \frac{1}{1-k^2}\left[2k^2 p_1 - \left(1 + k^2\right)p_2\right].$$

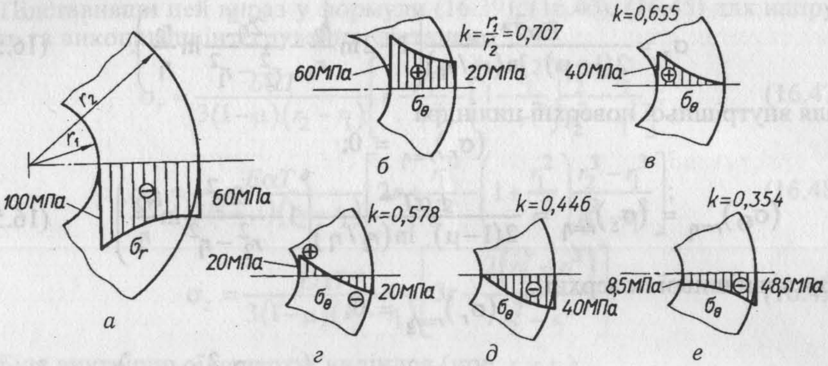


Рис. 460

Підставляючи сюди різні значення k, можемо обчислити напруження σ_Θ біля внутрішньої та зовнішньої поверхонь циліндра при заданих значеннях p_1 та p_2.

На рис. 460, *б—е* зображено епюри σ_Θ при значеннях $k = 0{,}707;\ 0{,}655;\ 0{,}578;\ 0{,}446;\ 0{,}354$.

2. *Сталева труба* з внутрішнім діаметром $2r_1 = 40$ мм зазнає дії внутрішнього тиску $p = 250$ МПа. Визначимо товщину S стінки труби за IV теорією міцності, якщо допустиме напруження для сталі $[\sigma] = 500$ МПа.

Небезпечними є точки труби біля внутрішньої поверхні, де головні напруження такі:

$$\sigma_1=\sigma_\Theta=\frac{r_2^2+r_1^2}{r_2^2-r_1^2}\,p=\frac{1+k^2}{1-k^2}\,p; \qquad (16.60)$$

$$\sigma_2=\sigma_z=0;\quad \sigma_3=\sigma_r=-p.$$

Умова міцності за IV теорією

$$\sigma_{\text{екв IV}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2}\le[\sigma]$$

після підставляння напружень з формул (16.60) набирає вигляду

$$\sigma_{\text{екв IV}}=\sqrt{\sigma_\Theta^2-\sigma_\Theta\sigma_r+\sigma_r^2}\le[\sigma], \qquad (16.61)$$

або

$$\sigma_{\text{екв IV}}=\sqrt{\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\,p\right)^2+\frac{1+k^2}{1-k^2}\,p^2+p^2}\le[\sigma], \qquad (16.62)$$

звідки

$$\left([\sigma]^2-p^2\right)k^4-2[\sigma]^2k^2+\left([\sigma]^2-3p^2\right)=0.$$

Розв'язуючи відносно k^2, маємо

$$k^2=\frac{\left(\frac{[\sigma]}{p}\right)^2\pm\sqrt{\left(\frac{2[\sigma]}{p}\right)^2-3}}{\left([\sigma]/p\right)^2-1}.$$

Оскільки $k^2<1$, то перед коренем слід взяти знак «мінус». Тоді

$$r_2=\frac{r_1}{k}=\frac{r_1}{\sqrt{\dfrac{\left(\frac{[\sigma]}{p}\right)^2-\sqrt{\left(\frac{2[\sigma]}{p}\right)^2-3}}{\left([\sigma]/p\right)^2-1}}}=$$

$$=\frac{20}{\sqrt{\dfrac{\left(\frac{500}{250}\right)^2-\sqrt{\left(\frac{2\cdot 500}{250}\right)^2-3}}{(500/250)^2-1}}}\ \text{мм}=55\ \text{мм}.$$

Товщина стінки труби $S = (55 - 20)$ мм $= 35$ мм.

3. Знайдемо оптимальний тиск p_c натягу *складеного циліндра* з умови рівноміцності внутрішнього та зовнішнього циліндрів та допустимий внутрішній тиск p_1. Дано: $r_1 = 40$ мм; $r_2 = 110$ мм; $r_c = 80$ мм; $[\sigma] = 600$ МПа. Розрахунок виконаємо за IV теорією міцності.

Напруження у внутрішньому циліндрі будуть найбільшими при $r = r_1$ і такими за формулами (16.14), (16.15) та (16.24):

$$(\sigma_{rI})_{r=r_1}=-p_1;$$

$$(\sigma_{\Theta I})_{r=r_1}=\frac{r_2^2+r_1^2}{r_2^2-r_1^2}\,p_1-\frac{2r_c^2}{r_c^2-r_1^2}\,p_c=1{,}31p_1-2{,}67p_c. \qquad (16.63)$$

У зовнішньому циліндрі напруження будуть найбільшими при $r = r_c$ і такими за формулами (16.14), (16.15), (16.17):

$$(\sigma_{rII})_{r=r_c}=\frac{r_1^2}{r_2^2-r_1^2}\left(1-\frac{r_2^2}{r_c^2}\right)p_1-p_c=-0{,}136p_1-p_c;$$

$$(\sigma_{\Theta II})_{r=r_c}=\frac{r_1^2}{r_2^2-r_1^2}\left(1+\frac{r_2^2}{r_c^2}\right)p_1+\frac{r_2^2+r_c^2}{r_2^2-r_c^2}\,p_c=0{,}44p_1+3{,}25p_c.$$

Умова рівноміцності за IV теорією має вигляд

$$\sqrt{(\sigma_{\Theta I})^2-(\sigma_{\Theta I})(\sigma_{rI})+(\sigma_{rI})^2}=\sqrt{(\sigma_{\Theta II})^2-(\sigma_{\Theta II})(\sigma_{rII})+(\sigma_{rII})^2}.$$

Підставивши вирази напружень через тиски, звільнившись від радикалів та звівши подібні члени, дістанемо

$$3{,}74p_1^2-13{,}62p_1p_c-7{,}68p_c^2=0.$$

Розв'язавши це рівняння відносно p_c, знайдемо, що

$$p_1 = 4{,}12\,p_c. \tag{16.64}$$

Оптимальний тиск p_c визначається умовою міцності

$$\sqrt{(\sigma_{\Theta I})^2 - (\sigma_{\Theta I})(\sigma_{rI}) + (\sigma_{rI})^2} = [\sigma].$$

Використовуючи формули (16.63) для σ_{rI} і $\sigma_{\Theta I}$ та залежність (16.64), матимемо

$$(1{,}31\cdot 4{,}12 - 2{,}67)^2\, p_c^2 + (1{,}31\cdot 4{,}12 - 2{,}67)\,p_c^2 + 4{,}12^2\, p_c^2 = [\sigma],$$

звідки знаходимо, що $p_c = 114{,}5$ МПа.

Допустимий внутрішній тиск

$$p_1 = 4{,}12\,p_c = 4{,}12\cdot 114{,}5\text{ МПа} = 472\text{ МПа}.$$

4. *Сталева труба* з внутрішнім діаметром $2r_1 = 4$ см та зовнішнім $2r_2 = 8$ см нагрівається так, що температура внутрішньої поверхні $T_1 = 300°$C, а зовнішньої $T_2 = 200°$C. Визначимо температурні напруження в трубі, вважаючи, що по товщині стінки температура змінюється за лінійним законом. При розрахунку візьмемо $E = 2\cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0{,}3$; $\alpha = 125\cdot 10^{-7}$ Перевищення температури внутрішньої поверхні над зовнішньою $T^* = T_1 - T_2 = 100$ °C.

За формулою (16.50) знаходимо колове та осьове напруження біля внутрішньої поверхні труби:

$$(\sigma_\Theta)_{r=r_1} = (\sigma_z)_{r=r_1} = \frac{E\alpha T^*}{3(1-\mu)(r_2 - r_1)}\left[3r_1 - \frac{2\left(r_2^3 - r_1^3\right)}{r_2^2 - r_1^2}\right] =$$

$$= \frac{2\cdot 10^5\cdot 125\cdot 10^{-7}\cdot 100}{3(1-0{,}3)(4-2)}\left[3\cdot 2 - \frac{2\left(4^3 - 2^3\right)}{4^2 - 2^2}\right]\text{ МПа} = -198\text{ МПа}.$$

За формулою (16.51) знаходимо напруження σ_Θ та σ_z біля зовнішньої поверхні:

$$(\sigma_\Theta)_{r=r_2} = (\sigma_z)_{r=r_2} = \frac{E\alpha T^*}{3(1-\mu)(r_2 - r_1)}\left[3r_2 - \frac{2\left(r_2^3 - r_1^3\right)}{r_2^2 - r_1^2}\right] =$$

$$= \frac{2\cdot 10^5\cdot 125\cdot 10^{-7}\cdot 100}{3(1-0{,}3)(4-2)}\left[3\cdot 2 - \frac{2\left(4^3 - 2^3\right)}{4^2 - 2^2}\right]\text{ МПа} = 159\text{ МПа}.$$

В інших точках поперечного перерізу труби напруження можна обчислити за формулами (16.47) — (16.49).

§ 106. Розрахунок обертових дисків

Обертові диски широко застосовують у парових та газових турбінах, у компресорах, вентиляторах та машинах хімічної промисловості. Диски зазнають дії навантажень, що спричинюють розтягання та згинання їх, а також дії високих температур. Істотне значення мають відцентрові сили. Як правило, навантаження та температурне поле симетричні відносно осі диска, внаслідок чого і напруження є функціями тільки відстані від осі обертання.

Обмежимося розглядом диска постійної товщини, який навантажено силами, що діють паралельно його серединній площині й рівномірно розподілені по його товщині. Розглянемо також нагрівання диска при лінійному законі зміни температури вздовж радіуса.

Вважатимемо, що диск тонкий і внаслідок цього напруження по його товщині не змінюються, а в напрямах, паралельних осі, взагалі їх немає $(\sigma_z = 0)$. У такій постановці задача про визначення напружень у диску належить до так званої плоскої задачі теорії пружності, точніше — до задачі про плоский напружений стан.

Розглянемо обертовий диск постійної товщини h, що має центральний отвір (рис. 461, *а*). До позначень на рисунку додамо ще й такі: γ / g — питома маса матеріалу диска; ω — кутова швидкість обертання.

Як і в розглянутому вже прикладі розрахунку товстостінного циліндра, виріжемо уявно елемент диска двома меридіональними площинами, кут між якими в серединній площині дорівнює $d\Theta$, і двома циліндричними поверхнями радіусами r та $r + dr$ (рис. 462, *а*).

Крім сил, прикладених по гранях елемента (рис. 462, *б*), на елемент діють сили інерції у вигляді відцентрової сили, розподіленої по всьому об'єму й зведеної до рівнодійної

$$dm\omega^2 r = \frac{\gamma}{g} hrd\Theta dr\omega^2 r.$$

Ця сила також лежить у серединній площині диска й напрямлена вздовж радіуса від осі обертання.

Прирівнявши до нуля суму проекцій усіх сил на вісь x, що збігається з бісектрисою кута $d\Theta$, дістанемо рівняння рівноваги в такому вигляді:

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\Theta + \frac{\gamma}{g}\omega^2 r^2 = 0. \tag{16.65}$$

Це рівняння відрізняється від рівняння рівноваги (16.1), здобутого при розрахунку товстостінного циліндра, тільки доданком $(\gamma / g)\omega^2 r^2$, який обумовлений дією відцентрових сил. Геометричні та фізичні рівняння не відрізняються від рівнянь (16.2) — (16.4), виведених для товстостінного циліндра.

Диференціальне рівняння для радіальних переміщень точок диска у цьому разі набирає вигляду

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = -\frac{1-\mu^2}{E}\frac{\gamma}{g}\omega^2 r. \tag{16.66}$$

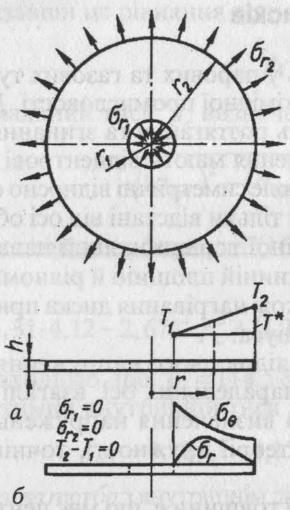


Рис. 461

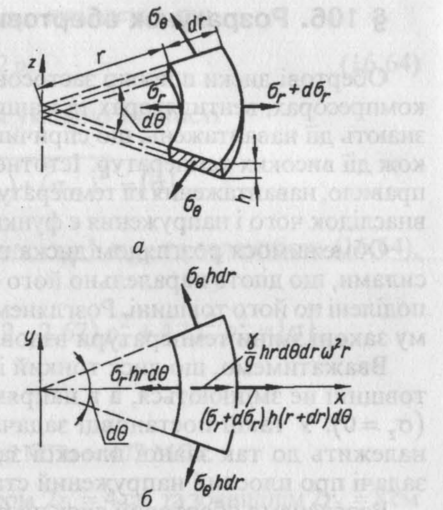


Рис. 462

Це диференціальне рівняння відрізняється від рівняння (16.5) лише правою частиною. Записавши його у вигляді

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d(ur)}{dr}\right] = -\frac{1-\mu^2}{E}\frac{\gamma}{g}\omega^2 r \qquad (16.67)$$

та проінтегрувавши послідовно двічі, знайдемо

$$u = A_1 r + \frac{B_1}{r} - \frac{1-\mu^2}{8E}\frac{\gamma}{g}\omega^2 r^3. \qquad (16.68)$$

Підставивши цей розв'язок у вираз (16.4) для напружень, матимемо

$$\sigma_r = A + \frac{B}{r^2} - \frac{3+\mu}{8}\frac{\gamma}{g}\omega^2 r^2; \qquad (16.69)$$

$$\sigma_\Theta = A - \frac{B}{r^2} - \frac{1+3\mu}{8}\frac{\gamma}{g}\omega^2 r^2, \qquad (16.70)$$

де

$$A = \frac{E}{1-\mu}A_1, \quad \text{а} \quad B = \frac{E}{1+\mu}B_1.$$

Сталі A та B (а отже, A_1 та B_1) визначаються з граничних умов. Найчастіше відомі радіальні напруження на зовнішньому та внутрішньому контурах диска. Тоді при $r = r_1$ $\sigma_r = \sigma_{r_1}$, а при $r = r_2$ $\sigma_r = \sigma_{r_2}$. Відповідно до виразу (16.69) ці умови дають два рівняння:

$$\sigma_{r_1} = A + \frac{B}{r_1^2} - \frac{3+\mu}{8}\frac{\gamma}{g}\omega^2 r_1^2; \quad \sigma_{r_2} = A + \frac{B}{r_2^2} - \frac{3+\mu}{8}\frac{\gamma}{g}\omega^2 r_2^2,$$

розв'язуючи які відносно A та B, знайдемо

$$A = \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\sigma_{r_2} - \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\sigma_{r_1} + \frac{3+\mu}{8}\frac{\gamma}{g}\omega^2\left(r_1^2 + r_2^2\right); \qquad (16.71)$$

$$B = \frac{r_2^2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\sigma_{r_2} - \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\sigma_{r_1} - \frac{3+\mu}{8}\frac{\gamma}{g}\omega^2 r_1^2 r_2^2. \qquad (16.72)$$

Якщо на зовнішньому та внутрішньому контурах диска напружень немає, тобто $\sigma_{r_2} = 0$ та $\sigma_{r_1} = 0$, то

$$A = \frac{3+\mu}{8}\frac{\gamma}{g}\omega^2\left(r_1^2 + r_2^2\right); \qquad (16.73)$$

$$B = \frac{3+\mu}{8}\frac{\gamma}{g}\omega^2 r_1^2 r_2^2. \qquad (16.74)$$

Підставляючи останні значення A та B у формули (16.69) та (16.70), матимемо

$$\sigma_r = \frac{3+\mu}{8}\frac{\gamma}{g}\omega^2\left(r_1^2 + r_2^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} - r^2\right); \qquad (16.75)$$

$$\sigma_\Theta = \frac{1}{8}\frac{\gamma}{g}\omega^2\left[(3+\mu)\left(r_1^2 + r_2^2 + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2}\right) - (1+3\mu)\,r^2\right]. \qquad (16.76)$$

Взявши для стислості

$$\frac{r_1}{r_2} = k; \quad \frac{r}{r_2} = \rho; \quad \frac{3+\mu}{8}\frac{\gamma}{g}\omega^2 r_2^2 = c; \quad \frac{1+3\mu}{3+\mu} = m, \qquad (16.77)$$

формули (16.75) та (16.76) можна переписати так:

$$\sigma_r = c\left[1 + k^2\left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) - \rho^2\right]; \qquad (16.78)$$

$$\sigma_\Theta = c\left[1 + k^2\left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right) - m\rho^2\right]. \qquad (16.79)$$

Напруження σ_r додатне і, як неважко переконатися, досягає найбільшого значення при $\rho = \sqrt{k} = \sqrt{r_1 / r_2}$. Тоді

$$\sigma_{r\,\max} = c(1-k)^2. \qquad (16.80)$$

Напруження σ_Θ при всіх значеннях ρ також додатне і досягає найбільшого значення біля внутрішнього краю диска (при $\rho = k$):

$$\sigma_{\Theta\,\max} = c\left[2 + (1-m)\,k^2\right]. \qquad (16.81)$$

Порівнюючи формули (16.80) та (16.81), переконуємося, що $\sigma_{\Theta\,\max}$ завжди більше ніж $\sigma_{r\,\max}$. Тому, перевіряючи міцність диска за енергетичною теорією формозміни, умову міцності слід записати у вигляді

$$\sigma_{\text{екв IV}} = \sigma_{\Theta \max} = c\left[2+(1-m)k^2\right] \le [\sigma]. \quad (16.82)$$

У випадку крихких матеріалів перевірку слід виконувати за теорією Мора, яка при $\sigma_3 = \sigma_r = 0$ приводить до тієї самої формули (16.82).

Характер розподілу напружень σ_r та σ_Θ уздовж радіуса диска з отвором при $k = 0{,}2$ та $\mu = 0{,}3$ показано на рис. 461, *б*.

Формули для напружень у суцільному диску (без отвору) можна дістати з формул (16.69) та (16.70), якщо взяти до уваги, що на осі диска (при $r = 0$) напруження повинні мати скінченні значення. Для виконання цієї умови стала B має дорівнювати нулю, і тоді формули наберуть такого вигляду:

$$\sigma_r = A - \frac{3-\mu}{8}\frac{\gamma}{g}\omega^2 r^2; \quad (16.83)$$

$$\sigma_\Theta = A - \frac{1+3\mu}{8}\frac{\gamma}{g}\omega^2 r^2. \quad (16.84)$$

Сталу A знайдемо з граничних умов на зовнішньому контурі (при $r = r_2$). Якщо диск зазнає дії лише сил інерції власної маси, спричинених його обертанням, а зовнішнього навантаження на зовнішньому контурі немає, тобто $\sigma_{r_2} = 0$, то, згідно з формулою (16.83),

$$A = \frac{3+\mu}{8}\frac{\gamma}{g}\omega^2 r_2^2. \quad (16.85)$$

Підставляючи це значення A у формули (16.83) та (16.84), маємо

$$\sigma_r = c\left(1-\rho^2\right); \quad (16.86)$$

$$\sigma_\Theta = c\left(1-m\rho^2\right). \quad (16.87)$$

Обидва напруження додатні при всіх значеннях ρ та збільшуються в міру наближення до осі диска. На осі диска при $\rho = 0$

$$\sigma_{r\max} = \sigma_{\Theta\max} = c = \frac{3+\mu}{8}\frac{\gamma}{g}\omega^2 r_2^2. \quad (16.88)$$

За знайденими напруженнями легко визначити переміщення та деформації в диску.

Найбільш цікаво знати радіальне переміщення та збільшення радіуса, що дорівнює йому. Згідно з виразом (16.3),

$$u = \varepsilon_\Theta r. \quad (16.89)$$

Оскільки

$$\varepsilon_\Theta = \frac{1}{E}\left(\sigma_\Theta - \mu\sigma_r\right),$$

то

$$u = \frac{r}{E}\left(\sigma_\Theta - \mu\sigma_r\right). \quad (16.90)$$

Для визначення переміщення на зовнішньому контурі та збільшення радіуса у формулу (16.90) треба підставити $r = r_2$, $\sigma_\Theta = \sigma_{\Theta 2}$ та $\sigma_r = \sigma_{r_2}$.

У разі нерівномірного нагрівання диска до напружень, спричинених відцентровими силами його власної маси та контурними навантаженнями, додаються температурні напруження.

Визначимо окремо температурні напруження. Хід розв'язання цієї задачі аналогічний щойно розглянутій. Рівняння рівноваги дістанемо з рівняння (16.65), поклавши $\omega = 0$. Воно буде таким самим, як для розрахунку товстостінного циліндра [формула (16.1)]:

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\Theta = 0. \quad (16.91)$$

Відносні деформації з урахуванням температурного розширення визначаються так:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E}\left(\sigma_r - \mu\sigma_\Theta\right) + \alpha T; \\ \varepsilon_\Theta &= \frac{1}{E}\left(\sigma_\Theta - \mu\sigma_r\right) + \alpha T. \end{aligned} \quad (16.92)$$

Розв'язуючи спільно ці рівняння відносно напружень, дістанемо

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\Theta - (1+\mu)\,\alpha T\right]; \\ \sigma_\Theta &= \frac{E}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_\Theta + \mu\varepsilon_r - (1+\mu)\,\alpha T\right]. \end{aligned} \quad (16.93)$$

Ураховуючи вирази (16.2) та (16.3), матимемо

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2}\left[\frac{du}{dr} + \mu\frac{u}{r} - (1+\mu)\,\alpha T\right]; \\ \sigma_\Theta &= \frac{E}{1-\mu^2}\left[\frac{u}{r} + \mu\frac{du}{dr} - (1+\mu)\,\alpha T\right]. \end{aligned} \quad (16.94)$$

Позначимо $T^* = T_2 - T_1$ (див. рис. 461, *а*). При лінійній зміні температури вздовж радіуса диска $T = T^*(r - r_1)/(r_2 - r_1)$, і останні вирази набирають вигляду

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\frac{du}{dr} + \mu\frac{u}{r} - (1+\mu)\alpha T^*\frac{r - r_1}{r_2 - r_1}\right]; \quad (16.95)$$

$$\sigma_\Theta = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\frac{u}{r} + \mu\frac{du}{dr} - (1-\mu)\alpha T^*\frac{r - r_1}{r_2 - r_1}\right]. \quad (16.96)$$

Модуль пружності та коефіцієнт Пуассона вважаємо сталими, такими, що не залежать від температури і дорівнюють їхнім значенням при середній температурі диска.

Підставляючи формули (16.95) та (16.96) у рівняння рівноваги (16.91), дістаємо таке диференціальне рівняння для визначення переміщень у температурній задачі:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{1+\mu}{r_2 - r_1}\alpha T^*. \quad (16.97)$$

Записавши рівняння у вигляді

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d(ur)}{dr}\right]=\frac{1+\mu}{r_2-r_1}\alpha T^* \qquad (16.98)$$

та проінтегрувавши його послідовно двічі, визначимо переміщення:

$$u=C_1r+\frac{D_1}{r}+\frac{1+\mu}{3(r_2-r_1)}\alpha T^* r^2. \qquad (16.99)$$

Підставивши цей розв'язок у формули (16.95) та (16.96) для напружень, матимемо

$$\sigma_r=C+\frac{D}{r^2}+\frac{T^*}{3(r_2-r_1)}\alpha Er; \qquad (16.100)$$

$$\sigma_\Theta=C-\frac{D}{r^2}-\frac{2}{3}\frac{T^*}{r_2-r_1}\alpha Er, \qquad (16.101)$$

де

$$C=\frac{E}{1-\mu}\left(C_1+\frac{\alpha T^* r_1}{r_2-r_1}\right);\ D=\frac{E}{1+\mu}=D_1.$$

Сталі C та D можна визначити з граничних умов: при $r=r_1$ напруження $\sigma_{r_1}=0$, при $r=r_2$ напруження $\sigma_{r_2}=0$.

Якщо обертовий диск нагрівається нерівномірно, то напруження від відцентрових сил та температурні напруження слід складати. У разі лінійної зміни температури вздовж радіуса, склавши праві частини виразів (16.96) та (16.100), а також виразів (16.70) та (16.101), матимемо

$$\sigma_r=K+\frac{L}{r^2}-\frac{3+\mu}{8}\frac{\gamma}{g}\omega^2r^2-\frac{T^*}{3(r_2-r_1)}\alpha Er; \qquad (16.102)$$

$$\sigma_\Theta=K-\frac{L}{r^2}-\frac{1+3\mu}{8}\frac{\gamma}{g}\omega^2r^2-\frac{2}{3}\frac{T^*}{r_2-r_1}\alpha Er, \qquad (16.103)$$

де $K=A+C$, $L=B+D$ — нові сталі, які також визначаються з граничних умов.

Приклад 73. *Знайдемо напруження в обертовому нерівномірно нагрітому диску постійної товщини з центральним отвором. Зовнішній діаметр диска d_2=500 мм, діаметр отвору d_1=100 мм, товщина диска h = 10 мм і частота обертання n=3000 хв$^{-1}$. На одиницю довжини зовнішнього контуру диска при цій частоті обертання діють відцентрові сили обода та лопаток $P_{r_2}=0{,}1$ МН/м; внутрішній діаметр диска вважаємо вільним. Температура біля внутрішнього контуру $T_1=200$ °C, а біля зовнішнього $T_2=300$ °C і змінюється вздовж радіуса за лінійним законом. Матеріал диска — сталь з такими характеристиками: $E=2\cdot10^5$ МПа; $\mu=0{,}3$; $\gamma=78{,}5$ кН/м^3; $\alpha=125\cdot10^{-7}$.*

Визначимо сумарні напруження від відцентрових сил та від нерівномірного нагрівання. Для цього скористаємося формулами (16.102) та (16.103). Обчислимо величини, що входять до цих формул:

$$\frac{3+\mu}{8}\frac{\gamma}{g}\omega^2=\frac{3{,}3}{8}\frac{78{,}5}{9{,}81}\left(\frac{3{,}14\cdot3000}{30}\right)^2=325\ \text{МПа/м}^2;$$

$$\frac{1+3\mu}{8}\frac{\gamma}{g}\omega^2=\frac{1{,}9}{8}\frac{78{,}5}{9{,}81}\left(\frac{3{,}14\cdot3000}{30}\right)^2=187\ \text{МПа/м}^2;$$

$$\frac{T^*}{3(r_2-r_1)}\alpha E=\frac{100}{3(25-5)\cdot10^{-2}}125\cdot10^{-7}\cdot2\cdot10^5=416\text{МПа/м};$$

$$\frac{2}{3}\frac{T^*}{r_2-r_1}\alpha E=\frac{2}{3}\frac{100}{3(25-5)\cdot10^{-2}}125\cdot10^{-7}\cdot2\cdot10^5=833\text{МПа/м}.$$

Підставивши ці значення у формули (16.102) та (16.103), матимемо

$$\sigma_r=K+\frac{L}{r^2}-325r^2-416r;$$

$$\sigma_\Theta=K-\frac{L}{r^2}-187r^2-833r.$$

Сталі K та L знайдемо з граничних умов:

при $r=r_1=5$ см $\sigma_r=\sigma_{r_1}=0$;

при $r=r_2=25$ см

$$\sigma_r=\sigma_{r_2}=\frac{P_{r_2}}{h}=\frac{0{,}10}{0{,}01}\ \text{МПа}=10\ \text{МПа}.$$

Ці умови дають два таких рівняння:

$$10=K+\frac{L}{0{,}25^2}-325\cdot0{,}25^2-416\cdot0{,}25;$$

$$0=K+\frac{L}{0{,}05^2}-325\cdot0{,}05^2-416\cdot0{,}05,$$

або

$$625\cdot10^{-4}K+L=83945\cdot10^{-4};\quad 25\cdot10^{-4}K+L=540\cdot10^{-4}$$

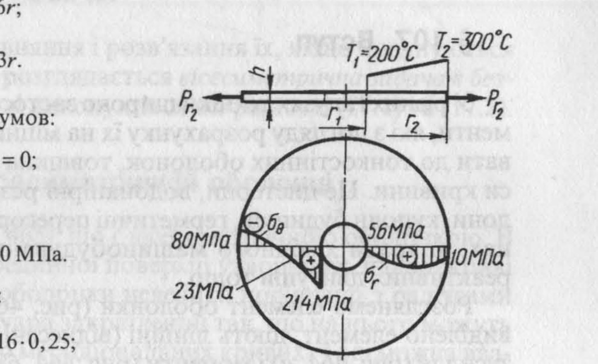


Рис. 463

Розв'язавши рівняння, знайдемо, що $K=139$ МПа, а $L=-2935\cdot10^{-4}$ МПа·м^2. Рівняння для визначення напружень набирають такого вигляду:

$$\sigma_r=139-\frac{2935\cdot10^{-4}}{r^2}-325r^2-416r;\quad \sigma_\Theta=139+\frac{2935\cdot10^{-4}}{r^2}-187r^2-833r.$$

Обчислимо напруження σ_r при середньому значенні радіуса

$$r_{\text{ср}}=\frac{r_1+r_2}{2}=\frac{5+25}{2}\ \text{см}=15\ \text{см}.$$

Матимемо

$$(\sigma_r)_{r=15}=\left(139-\frac{2935\cdot10^{-4}}{0{,}15^2}-325\cdot0{,}15^2-416\cdot0{,}15\right)\text{МПа}=56\ \text{МПа}.$$

Напруження σ_Θ обчислимо при $r=r_1=5$ см, $r=r_{\text{ср}}=15$ см та $r=r_2=25$ см:

$$(\sigma_\Theta)_{r=5}=\left(139+\frac{2935\cdot10^{-4}}{0{,}05^2}-187\cdot0{,}05^2-833\cdot0{,}05\right)\text{МПа}=214\ \text{МПа};$$

$$(\sigma_\Theta)_{r=15}=\left(139+\frac{2935\cdot10^{-4}}{0{,}15^2}-187\cdot0{,}15^2-833\cdot0{,}15\right)\text{МПа}=23\ \text{МПа};$$

$$(\sigma_\Theta)_{r=25}=\left(139+\frac{2935\cdot10^{-4}}{0{,}25^2}-187\cdot0{,}25^2-833\cdot0{,}25\right)\text{МПа}=-80\ \text{МПа}.$$

Епюри напружень наведено на рис. 463.

Розділ 17 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ТОНКОСТІННИХ ОБОЛОНОК

§ 107. Вступ

У різних галузях техніки широко застосовують такі конструктивні елементи, які з погляду розрахунку їх на міцність і жорсткість можна зарахувати до тонкостінних оболонок, товщина яких значно менша, ніж радіуси кривини. Це цистерни, водонапірні резервуари, повітряні й газові балони, куполи будинків, герметичні перегородки в літаках і підводних човнах, апарати хімічного машинобудування, частини корпусів турбін і реактивних двигунів тощо.

Розглянемо елемент оболонки (рис. 464). Взагалі у перерізах, якими виділено елемент, діють лінійні (віднесені до одиниці довжини перерізу) зусилля (рис. 464, *а*) і моменти (рис. 464, *б*): нормальні зусилля N_1 та N_2; дотичні (зсувальні) зусилля S_1 та S_2; поперечні сили Q_1 та Q_2; згинальні моменти M_1 та M_2; крутні моменти $M_{1кр}$ та $M_{2кр}$. Вихідні диференціальні рівняння для розрахунку оболонок, здобуті з урахуванням усіх цих зусиль і моментів, виявляються такими складними, що інтегрування їх навіть для найпростіших задач пов'язане з великими математичними труднощами.

Проте в багатьох окремих випадках вихідні диференціальні рівняння і розв'язання задачі значно спрощуються. Цього можна досягнути, по-перше, враховуючи характер самої задачі. Якщо оболонка становить тіло обертання і навантаження симетричне відносно осі оболонки, то задачу називають *вісесиметричною* і в цьому разі в усіх перерізах, утворених площинами, що проходять крізь вісь симетрії, і в перпендикулярних до них перерізах

$$M_{1кр} = M_{2кр} = S_1 = S_2 = 0;\; Q_1 = 0 \text{ (або } Q_2 = 0). \qquad (17.1)$$

По-друге, якщо форма оболонки, характер навантаження та закріплень дають змогу зробити висновок, що які-небудь зусилля або моменти всюди малі порівняно з рештою силових факторів, то виходять з припущення, що ці зусилля і моменти дорівнюють нулю. Наприклад, часто вважають, що

$$M_1 = M_2 = M_{1кр} = M_{2кр} = 0;\; Q_1 = Q_2 = 0, \qquad (17.2)$$

і в результаті доходять до так званої *безмоментної теорії оболонок.*

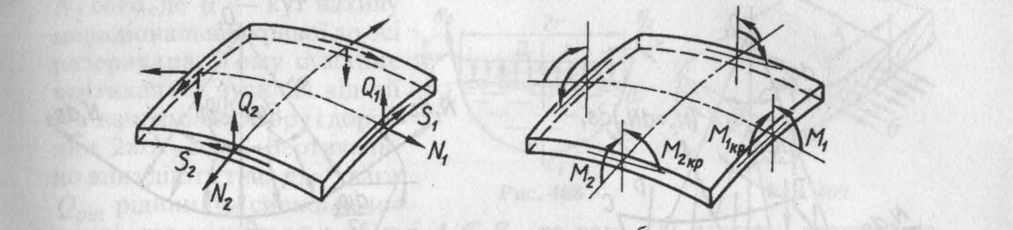


Рис. 464

Ще більше спрощуються рівняння і розв'язання їх, якщо поєднуються обидві зазначені обставини — розглядається *вісесиметрична задача в безмоментній теорії оболонок.* Тоді виконуються всі рівності (17.1) та (17.2).

§ 108. Напруження у вісесиметричній оболонці

Розглянемо резервуар (рис. 465), що є вісесиметричною оболонкою. В ній меридіональні перерізи серединної поверхні утворюють плавні криві без зломів. Товщина стінки *h* оболонки невелика порівняно з радіусами кривини. Вільний край резервуара закріплений так, що на нього можуть діяти тільки зусилля, дотичні до меридіональних кривих. Тоді можна вважати, що оболонка перебуває в безмоментному напруженому стані, для якого справедливі рівності (17.2).

Нехай резервуар заповнений (частково або повністю) газом, рідиною чи сипкою речовиною. Тиск *p*, МПа, в цьому разі може змінюватися по висоті (тобто вздовж осі резервуара), але буде однаковий в усіх точках площини, перпендикулярної до осі резервуара. Тоді оболонка перебуватиме не тільки в безмоментному, а й у вісесиметричному напруженому стані.

Виділимо прямокутний криволінійний елемент $ABCD$ оболонки (рис. 465) двома близькими осьовими перерізами та двома ортогональними до них і до поверхні оболонки перерізами (останні перерізи є двома конічними поверхнями з вершинами на осі резервуара). Довжини граней елемента позначимо ds_1 і ds_2.

Згідно з рівностями (17.1) та (17.2), у гранях елемента діють тільки нормальні лінійні зусилля N_1 і N_2 та відповідні напруження σ_1 і σ_2 (розтягальні у разі внутрішнього тиску і стискальні — у разі зовнішнього). Отже, грані елемента — головні площадки.

У гранях AB і CD зусилля N_2 можуть відрізнятися на величину dN_2; зусилля N_1 у гранях BC і AD унаслідок осьової симетрії однакові. Рівнодійне зусилля в кожній грані елемента дорівнює добутку відповідного лінійного зусилля на довжину грані.

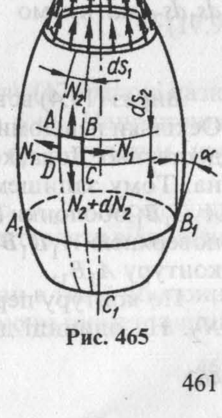


Рис. 465

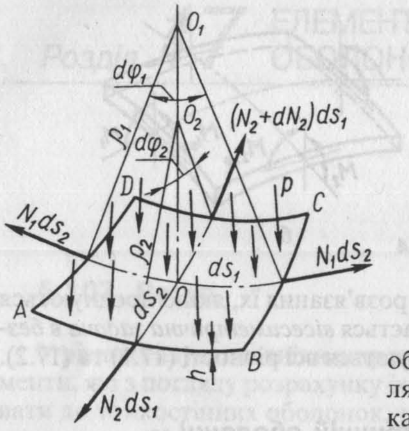


Рис. 466

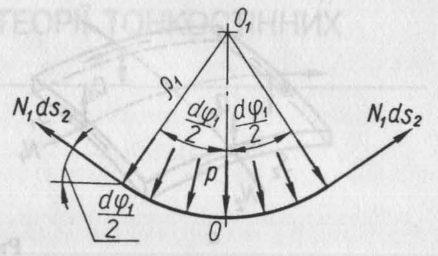


Рис. 467

Елемент $ABCD$ серединної поверхні оболонки з прикладеними до нього зусиллями і тиском зображено на рис. 466. Точка O — центр елемента, точки O_1 і O_2 — центри головних кривин серединної поверхні, OO_1 — нормаль до поверхні елемента. Головні радіуси кривини серединної поверхні позначено через ρ_1 і ρ_2, причому ρ_1 — радіус широтної кривини, а ρ_2 — радіус меридіональної кривини. Очевидно,

$$ds_1=\rho_1 d\varphi_1;\quad ds_2=\rho_2 d\varphi_2. \tag{17.3}$$

Запишемо умову рівноваги елемента, прирівнюючи до нуля суму проекцій усіх сил на нормаль до елемента. Розглядаючи рис. 466 і 467, дістаємо

$$2N_1ds_2\sin(d\varphi_1/2)+N_2ds_1\sin(d\varphi_2/2)+(N_2+dN_2)ds_1\sin(d\varphi_2/2)-pds_1ds_2=0.$$

Доданок $dN_2ds_1\sin(d\varphi_2/2)$ має більш високий порядок малості, і ним можна знехтувати. Враховуючи також малість кутів $d\varphi_1$ та $d\varphi_2$ і співвідношення (17.3), знаходимо, що

$$\sin\frac{d\varphi_1}{2}=\frac{d\varphi_1}{2}=\frac{1}{2}\frac{ds_1}{\rho_1};\quad \sin\frac{d\varphi_2}{2}=\frac{1}{2}\frac{ds_2}{\rho_2}.$$

Підставляючи ці вирази в рівняння рівноваги і поділивши його на ds_1ds_2, матимемо

$$N_1/\rho_1+N_2/\rho_2=p. \tag{17.4}$$

Вираз (17.4) встановлює залежність між двома зусиллями — N_1 та N_2. Оскільки невідомих зусиль два, то для визначення їх одного рівняння недостатньо. Додаткових рівнянь рівноваги елемента скласти більше не можна. Тому запишемо рівняння рівноваги довільної скінченної частини $A_1C_1B_1$ оболонки (рис. 465 і 468). Для цього проведемо переріз конічною поверхнею $A_1D_1B_1$, нормальною до серединної поверхні оболонки, по контуру A_1B_1.

По контуру перерізу A_1B_1 (по колу радіусом r) діють лінійні зусилля N_2. На одиниці довжини контуру вони дають вертикальну проекцію

$N_2\cos\alpha$, де α — кут нахилу меридіональної кривої до осі резервуара. Тому сумарне вертикальне зусилля від дії N_2 напрямлене вгору і дорівнює $2\pi rN_2\cos\alpha$. Вертикально вниз діють тиск $p\pi r^2$, вага $Q_{\text{рід}}$ рідини (чи сипкої речовини), що міститься в об'ємі $A_1C_1B_1$, та вага $Q_{\text{р}}$ частини резервуара $A_1C_1B_1$. Тоді з умови рівноваги

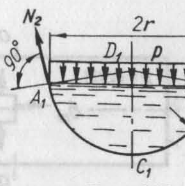


Рис. 468

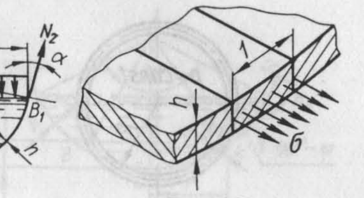


Рис. 469

$$2\pi rN_2\cos\alpha - p\pi r^2 - Q_{\text{рід}} - Q_{\text{р}} = 0; \tag{17.5}$$

$$N_2=\frac{pr}{2\cos\alpha}+\frac{Q_{\text{рід}}+Q_{\text{р}}}{2\pi r\cos\alpha}.$$

Рівняння (17.4) і (17.5) дають змогу знайти всі зусилля в вісесиметричній безмоментній оболонці. Часто це рівняння записують у напруженнях.

Вважаючи, що згинальних і крутних моментів в оболонці немає, припускаємо тим самим, що по товщині її напруження розподіляються рівномірно (як при простому розтяганні-стисканні). Тому (рис.469)

$$N=\sigma\cdot h\cdot 1=\sigma h. \tag{17.6}$$

Крім того, меридіональні напруження і радіуси кривини часто позначають σ_m і ρ_m, а не σ_2 і ρ_2, широтні (колові) величини — σ_t і ρ_t замість σ_1 і ρ_1. Відповідно до цього

$$N_1=\sigma_t h;\quad N_2=\sigma_m h. \tag{17.7}$$

Підставляючи ці вирази в рівняння (17.4) та (17.5) і враховуючи зауваження щодо індексів, дістанемо

$$\frac{\sigma_t}{\rho_t}+\frac{\sigma_m}{\rho_m}=\frac{p}{h} \tag{17.8}$$

та

$$\sigma_m=\frac{pr}{2h\cos\alpha}+\frac{Q_{\text{рід}}+Q_{\text{р}}}{2\pi rh\cos\alpha}. \tag{17.9}$$

Формула (17.8) має назву *формули Лапласа*; формулу (17.9) іноді називають *рівнянням рівноваги зони або просто рівнянням зони.* Напруження σ_m зветься *меридіональним нормальним напруженням,* σ_t — *коловим (широтним, кільцевим) нормальним напруженням.*

Оскільки оболонка тонкостінна, то замість радіусів ρ_t, ρ_m і r серединної поверхні оболонки у формули (17.8) та (17.9) можна підставляти відповідні радіуси зовнішньої чи внутрішньої поверхні.

Слід звернути увагу ще й на те, що напружений стан в такій оболонці ми визначали тільки з рівнянь рівноваги, не розглядаючи геометричний

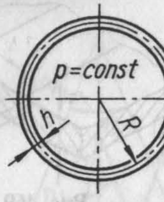


Рис. 470

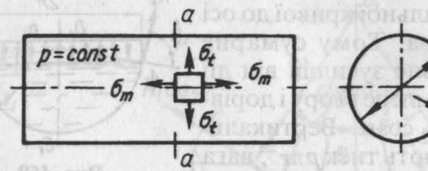


Рис. 471

та фізичний аспекти задачі. Це пояснюється тим, що ми відразу постулювали закон розподілу напружень по товщині оболонки — вважали їх постійними.

Як уже зазначалося, напруження σ_m і σ_t — головні. Третє головне напруження напрямлене нормально до поверхні оболонки в даній точці. На одній з поверхонь резервуара (внутрішній чи зовнішній — залежно від того, з якого боку діє тиск) воно дорівнює тиску p, а на протилежній — нулю. В тонкостінних оболонках завжди σ_m і σ_t значно більші ніж p і, отже, третім головним напруженням порівняно з σ_m і σ_t можна знехтувати, тобто вважати його нульовим.

Отже, вважаємо, що матеріал оболонки перебуває в плоскому напруженому стані. Тоді для розрахунку на міцність у небезпечних точках залежно від стану матеріалу слід застосовувати відповідну теорію міцності. Наприклад, для пластичних матеріалів за IV теорією міцності умова міцності має вигляд

$$\sigma_{\text{екв IV}} = \sqrt{\sigma_m^2 + \sigma_t^2 - \sigma_m \sigma_t} \le [\sigma]. \qquad (17.10)$$

Розглянемо приклади розрахунку безмоментних оболонок.

Сферичний балон заповнено газом, тиск якого дорівнює p (рис. 470). У цьому разі внаслідок центральної симетрії

$$\rho_m = \rho_t = R; \; \sigma_m = \sigma_t = \sigma.$$

Тому на підставі формули (17.8)

$$2\frac{\sigma}{R} = \frac{p}{h}, \text{ або } \sigma = \frac{pR}{2h}.$$

Отже, головні напруження

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pR}{2h}. \qquad (17.11)$$

Умови міцності за I, III і IV теоріями міцності мають однаковий вигляд:

$$\sigma_{\text{екв IV}} = \frac{pR}{2h} \le [\sigma]. \qquad (17.12)$$

Циліндричний балон заповнено газом, тиск якого дорівнює p (рис. 471).

Тут

$$\rho_t = R; \; \rho_m = \infty.$$

Тоді з рівняння (17.8)

$$\frac{\sigma_t}{R} + \frac{\sigma_m}{\infty} = \frac{p}{h},$$

тобто

$$\sigma_t = \frac{pR}{h}. \qquad (17.13)$$

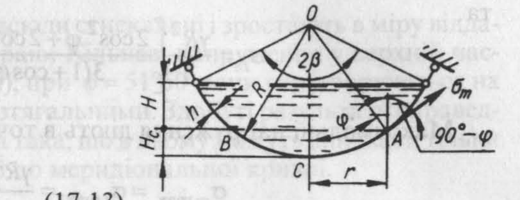


Рис. 472

Для визначення σ_m проведемо переріз *a—a*, перпендикулярний до осі циліндра, і розглянемо рівновагу будь-якої з частин циліндра. В результаті, виходячи з формули (17.9) і поклавши $Q_{\text{рід}} = Q_p = 0$ та $\alpha = 0$, матимемо

$$\sigma_m = \frac{pR}{2h}. \qquad (17.14)$$

Отже, кільцеві напруження σ_t удвічі більші за меридіональні σ_m. Тому, наприклад, у клепаного резервуара поздовжній шов має бути в два рази міцніший, ніж поперечний.

Зазначимо, що здобуті результати справедливі тільки для центральної частини циліндра, оскільки ті частини, що примикають до днищ, не можна розрахувати за безмоментною теорією (докладніше про це розповідається нижче).

Резервуар у вигляді кульового сегмента (рис. 472) заповнено рідиною (або сипкою речовиною) з густиною γ. Вводимо полярний кут φ, який визначає положення довільної точки A. Тоді

$$\alpha = 90° - \varphi; \; \rho_t = \rho_m = R; \; r = R\sin\varphi; \; H = R(\cos\varphi - \cos\beta);$$

$$p = \gamma H = \gamma R(\cos\varphi - \cos\beta).$$

З рівняння Лапласа (17.8) випливає, що

$$\sigma_m + \sigma_t = \frac{pR}{h} = \frac{\gamma R^2}{h}(\cos\varphi - \cos\beta).$$

Тепер скористаємося рівнянням (17.9). Величина $Q_{\text{рід}}$ дорівнює вазі рідини в об'ємі кульового сегмента ACB:

$$Q_{\text{рід}} = \gamma V_{ACB} = \gamma \frac{1}{3}\pi H_c^2 (3R - H_c).$$

Висота кульового сегмента

$$H_c = R(1 - \cos\varphi).$$

Тому

$$Q_{\text{рід}} = \frac{\pi\gamma}{3} R^3 (1 - \cos\varphi)^2 (2 + \cos\varphi).$$

Підставляючи в рівняння (17.9) вирази для p, r, $Q_{\text{рід}}$, α і нехтуючи вагою резервуара Q_p, дістаємо

$$\sigma_m = \frac{\gamma R^2}{h}\left[\frac{1 + \cos\varphi + \cos^2\varphi}{3(1 + \cos\varphi)} - \frac{\cos\beta}{2}\right]. \qquad (17.15)$$

та

$$\sigma_t = \frac{\gamma R^2}{h}\left[\frac{2\cos^2\varphi + 2\cos\varphi - 1}{3(1+\cos\varphi)} - \frac{\cos\beta}{2}\right]. \tag{17.16}$$

Максимальні напруження діють в точці C, де $\varphi = 0$:

$$\sigma_{m\max} = \sigma_{t\max} = \frac{\gamma R^2(1-\cos\beta)}{2h}. \tag{17.17}$$

На краю оболонки ($\varphi = \beta$)

$$\sigma_m(\beta) = -\sigma_t(\beta) = \frac{\gamma R^2}{6h}\frac{2-\cos\beta-\cos^2\beta}{1+\cos\beta}, \tag{17.18}$$

причому кільцеві напруження стають стискальними.

Купол у вигляді кульового сегмента радіусом R з товщиною стінки h (рис. 473) виготовлений з матеріалу густиною γ. Вага одиниці площі поверхні купола $q = \gamma h$. Її складову, нормальну до поверхні,

$$q_n = q\cos\varphi = \gamma h\cos\varphi$$

можна розглядати як тиск, що діє на поверхню. Всередині купола тиск дорівнює нулю, тому в рівнянні Лапласа слід покласти $p = -q_n$, а в рівнянні зони $p = 0$.

Ураховуючи, що $\rho_t = \rho_m = R$, з рівняння Лапласа знаходимо

$$\sigma_m + \sigma_t = \frac{pR}{h} = -\gamma R\cos\varphi. \tag{17.19}$$

Щоб дістати додаткове рівняння, обчислимо вагу частини ACB резервуара:

$$Q_p = qS_{ACB} = \gamma h S_{ACB},$$

де площа бокової поверхні кульового сегмента ACB

$$S_{ACB} = 2\pi R H_c = 2\pi R^2(1-\cos\varphi).$$

Отже,

$$Q_p = 2\pi\gamma h R^2(1-\cos\varphi).$$

Підставивши тепер у формулу (17.9) вираз для Q_p і $r = R\sin\varphi$; $\alpha = 90° - \varphi$; $p = 0$, а також ураховуючи (знаком «мінус»), що в перерізі AB вага частини ACB купола спричинює стискання, знайдемо

Рис. 473

$$\sigma_m = -\frac{\gamma R}{1+\cos\varphi}. \tag{17.20}$$

Тоді з рівняння (17.19)

$$\sigma_t = \gamma R\frac{1-\cos\varphi-\cos^2\varphi}{1+\cos\varphi}. \tag{17.21}$$

Меридіональні напруження всюди стискальні і зростають в міру віддалення від вершини купола до краю. Кільцеві напруження у верхній частині купола від'ємні (стискальні); при $\varphi = 51°50'$ вони перетворюються на нуль, а при $\varphi > 51°50'$ стають розтягальними. Здобуті результати справедливі, якщо опорна будова купола така, що в ньому можуть виникати тільки реакції, напрямлені по дотичній до меридіональної кривої.

§ 109. Розпірні кільця в оболонках

Досі ми розглядали оболонки, меридіональні перерізи яких становили плавні криві, кривина яких не змінюється. Розрахунок таких тонкостінних оболонок за безмоментною теорією дає цілком прийнятні для практики результати.

Тепер дослідимо вплив переломів меридіональної кривої на напружений стан оболонки. Нехай у деякому перерізі A—A (рис. 474) оболонка має такий перелом, що дотичні до меридіональної кривої ліворуч і праворуч від точки A утворюють між собою кут не 180°, а 180° — $(\alpha_1 + \alpha_2)$. Розглянемо меридіональні напруження σ_{m_1} і σ_{m_2} (рис. 475) у перерізах B—B та C—C, нескінченно близьких до A—A (ці перерізи утворені конічними поверхнями O_1BB і O_2CC, нормальними до серединної поверхні оболонки). Лінійні зусилля в цих перерізах дорівнюють $\sigma_{m_1}h_1$ і $\sigma_{m_2}h_2$ (рис. 476), де h_1 і h_2 — товщини частин *1* і *2* оболонки.

З умови рівноваги кільця $BBCC$ випливає, що

$$\sigma_{m_1}h_1\cos\alpha_1 2\pi r = \sigma_{m_2}h_2\cos\alpha_2 2\pi r,$$

тобто

$$\sigma_{m_1}h_1\cos\alpha_1 = \sigma_{m_2}h_2\cos\alpha_2. \tag{17.22}$$

Отже, проекції зусиль $\sigma_{m_1}h_1$ і $\sigma_{m_2}h_2$ на вісь оболонки взаємно зрівноважуються. Інакше буде з проекціями цих зусиль на площину A—A (рис. 476). Додаючись, вони дадуть лінійне радіальне зусилля

$$q = \sigma_{m_1}h_1\sin\alpha_1 + \sigma_{m_2}h_2\sin\alpha_2. \tag{17.23}$$

Зусилля q можна розглядати як місцеве навантаження, що стискає оболонку. Це навантаження може спричинити в оболонці значні згинальні

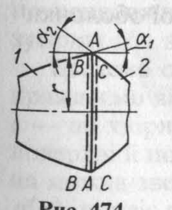


Рис. 474

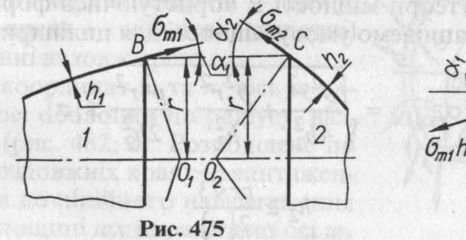


Рис. 475

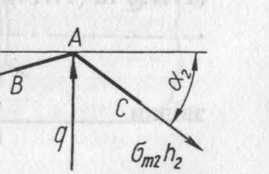


Рис. 476

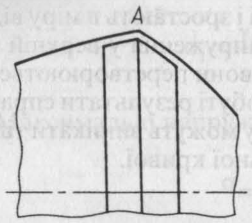


Рис. 477

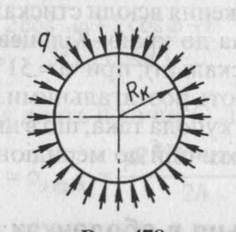


Рис. 478

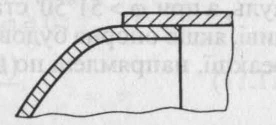


Рис. 479

напруження. Щоб зменшити згин, у резервуарах часто встановлюють кільця жорсткості, або розпірні кільця (рис. 477), які сприймають радіальні зусилля q.

Розпірне кільце навантажене за схемою рис. 478. У ньому виникають тільки стискальні напруження, і умова міцності для кільця має вигляд

$$\frac{qR_к}{F_к} \le [\sigma], \tag{17.24}$$

де $R_к$ — радіус осі кільця; $F_к$ — площа поперечного перерізу кільця, а q визначається за формулою (17.23).

Іноді замість розпірного кільця утворюють місцеве стовщення оболонки (рис. 479), загинаючи краї днища резервуара всередину обичайки.

Якщо оболонка зазнає зовнішнього тиску, то меридіональні напруження будуть стискальними і, згідно з формулою (17.24), радіальне зусилля q напрямлене назовні. Тоді кільце жорсткості чинитиме опір не стисканню, а розтяганню. При цьому, очевидно, умова міцності (17.24) залишається такою самою.

Зазначимо, що розпірне кільце не ліквідує повністю згинальні напруження, а лише зменшує їх.

Розглянемо як приклад циліндричний резервуар зі сферичними днищами (рис. 480), заповнений газом, тиск якого дорівнює p, МПа. У місці кріплення днищ до циліндра поставлено розпірні кільця. Треба визначити товщини стінок і площу перерізу кільця, якщо допустимі напруження відомі.

Товщину h_1 стінки днища знаходимо з формули (17.12):

$$h_1 \ge \frac{pR}{2[\sigma]}.$$

Виходячи з IV теорії міцності й користуючись формулами (17.10), (17.13) та (17.14), запишемо умову міцності для циліндричної оболонки

$$\sigma_{екв\,IV} = \sqrt{\frac{p^2r^2}{4h_2^2} + \frac{p^2r^2}{h_2^2} - \frac{p^2r^2}{2h_2^2}} \le [\sigma],$$

звідки

$$h_2 \ge \frac{pr\sqrt{3}}{2[\sigma]}.$$

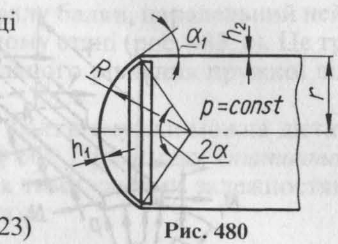


Рис. 480

Тоді меридіональне напруження в днищі

$$\sigma_{m_1} = \frac{pR}{2h_1},$$

а в циліндричній оболонці

$$\sigma_{m_2} = -\frac{pr}{2h_2}.$$

Підставляючи ці значення у формулу (17.23) і враховуючи, що в даному прикладі $\alpha_1 = 90° - \alpha$, $\alpha_2 = 0$, знаходимо радіальне зусилля, прикладене до розпірного кільця:

$$q = \frac{pR}{2}\cos\alpha.$$

Нарешті, вважаючи, що радіус кільця $R_к \approx r$, з формули (17.24) визначаємо потрібну площу поперечного перерізу кільця:

$$F_к = \frac{qR_к}{[\sigma]} = \frac{pRr\cos\alpha}{2[\sigma]}.$$

§ 110. Крайова задача для тонкостінної циліндричної оболонки

Розглянемо одну з найпростіших задач моментної теорії оболонок: по краю тонкої напівнескінченної циліндричної оболонки (рис. 481) рівномірно розподілені лінійні поперечні сили Q_0 і згинальні моменти M_0; крім того, на оболонку діє постійний внутрішній тиск p; треба визначити переміщення точок оболонки і напруження в ній.

Ця задача має деяке самостійне значення, і, крім того, здобуті в ній результати в наступному параграфі використовуватимуться для визначення місцевих згинальних напружень.

Виділимо з оболонки напівнескінченну смужку одиничної ширини (рис. 481 і 482, *а*) двома осьовими перерізами. Центральний кут між ними малий і становить

$$\varphi = 1/R. \tag{17.25}$$

У кінцевому перерізі на смужку діють зусилля Q_0 і момент M_0, по поверхні — тиск p, по поздовжніх краях — кільцеві (широтні) зусилля N_1, змінні вздовж краю.

Введемо осі координат w та x: вісь w напрямляємо від осі оболонки по радіусу, вісь x — по твірній (рис. 482, *а*). Розподілене по поверхні й по поздовжніх краях навантаження можна звести до лінійного навантаження $q(x)$, що діє в площині wx паралельно осі w.

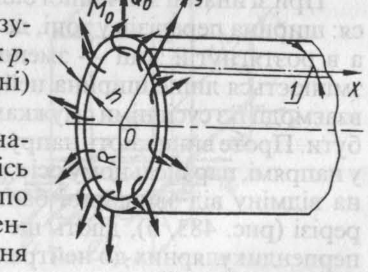


Рис. 481

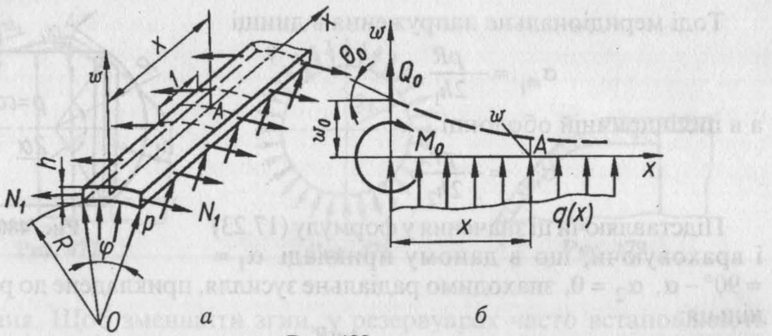


Рис. 482

Виділивши в околі довільної точки A (рис. 482, *а*) елемент смужки завдовжки одиниця і вважаючи, що $q(x) > 0$, якщо навантаження діє від осі оболонки назовні, матимемо

$$q(x) = -q_1(x) + q_2.$$

Ураховуючи малість кута φ і формулу (17.25), дістанемо

$$q_1(x) = 2N_1 \cdot 1 \cdot \sin(\varphi/2) = N_1\varphi = N_1/R; \; q_2 = p \cdot 1 \cdot 1 = p.$$

Отже,

$$q(x) = p - N_1/R. \tag{17.26}$$

Розподілене навантаження $q(x)$, а також Q_0 і M_0 спричинюють плоске згинання смужки в площині wx. Цю смужку можна назвати балкою-смужкою і далі розглядати її як напівнескінченну балку (рис. 482, *а)* прямокутного перерізу $1 \times h$.

Розглядаючи згинання балки-смужки, треба врахувати, що, прогинаючись, вона взаємодіє з сусідніми смужками. Один аспект цієї взаємодії враховується доданком — N_1/R у виразі (17.26) для лінійного навантаження $q(x)$. Крім того, зазначена взаємодія приводить до збільшення жорсткості балки-смужки на згинання в площині wx порівняно зі звичайною балкою. З'ясуємо, чому це відбувається і як має враховуватися.

При згинанні звичайної балки форма її поперечних перерізів змінюється: ширина перерізів у зоні, де поздовжні волокна стиснуті, збільшується, а в розтягнутій зоні — зменшується (штрихові лінії на рис. 483, *б*). Не змінюється лише ширина нейтрального шару. В балці-смужці внаслідок взаємодії її з сусідніми смужками таких змін поперечного перерізу не може бути. Проте виникають напруження σ_z, які перешкоджають зміні розмірів у напрямі, паралельному осі z, внаслідок чого $\varepsilon_z = 0$. Отже, в балці-смужці, на відміну від звичайної балки, крім напружень σ_x у поперечному перерізі (рис. 483, *а*), діють ще й напруження σ_z у поздовжніх перерізах, перпендикулярних до нейтрального шару (рис. 483, *б*). Цим пояснюється збільшення жорсткості на згинання балки-смужки.

Кожний нескінченно тонкий шар матеріалу балки, паралельний нейтральному, перебуває в плоскому напруженому стані (рис. 483, *в*). Це треба враховувати при виведенні диференціального рівняння пружної лінії балки-смужки.

Диференціальне рівняння згинання для балки-смужки можна дістати так само, як і для звичайної балки (див. § 66). При цьому *статичний* і *геометричний аспекти задачі* виражаються тими самими залежностями (10.3) і (10.6), що і для звичайної балки, а саме:

а) статичне рівняння —

$$\int_F \sigma_x y dF = M(x); \tag{17.27}$$

б) геометрична залежність —

$$\varepsilon_x = \frac{y}{\rho}, \text{ або } \varepsilon_x = \frac{d^2w(x)}{dx^2}y. \tag{17.28}$$

Фізичний аспект задачі (залежність між напруженням σ_x у поперечному перерізі та відносною деформацією ε_x) для балки-смужки на підставі узагальненого закону Гука з урахуванням того, що $\varepsilon_z = 0$, виражається так:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\sigma_z}{E}; \; \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \mu\frac{\sigma_x}{E} = 0, \text{ або } \sigma_z = \mu\sigma_x.$$

З цих формул знаходимо

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}\varepsilon_x. \tag{17.29}$$

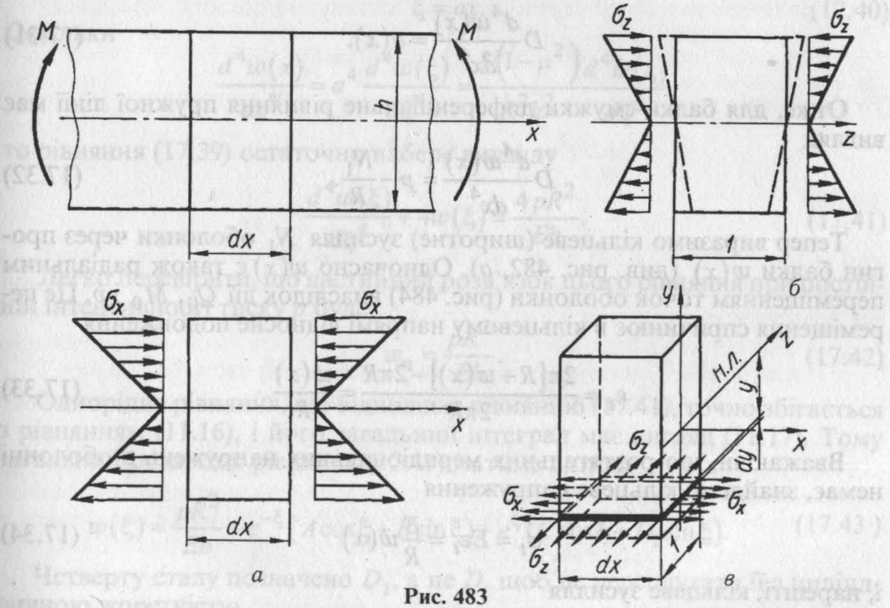


Рис. 483

Підставивши вирази (17.28) і (17.29) у рівняння (17.27), матимемо

$$\frac{E}{1-\mu^2}\frac{d^2w(x)}{dx^2}\int_F dFy^2 = M(x).$$

Для балки-смужки з розмірами перерізу $1\times h$ елемент площі $dF = 1dy$. Тоді

$$\frac{E}{1-\mu^2}\frac{d^2w(x)}{dx^2}\int_{-h/2}^{+h/2} y^2dy = M(x),$$

і після обчислення інтеграла

$$\frac{E}{1-\mu^2}\frac{h^3}{12}\frac{d^2w(x)}{dx^2} = M(x).$$

Вводячи позначення для так званої циліндричної жорсткості $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$, диференціальне рівняння згинання балки-смужки запишемо у вигляді

$$D\frac{d^2w(x)}{dx^2} = M(x). \tag{17.30}$$

Двічі диференціюючи по x обидві частини цього рівняння і враховуючи, що $d^2M(x)/dx^2 = q(x)$, матимемо

$$D\frac{d^4w(x)}{dx^4} = q(x). \tag{17.31}$$

Отже, для балки-смужки диференціальне рівняння пружної лінії має вигляд

$$D\frac{d^4w(x)}{dx^4} = p - \frac{N_1}{R}. \tag{17.32}$$

Тепер виразимо кільцеве (широтне) зусилля N_1 оболонки через прогин балки $w(x)$ (див. рис. 482, *а*). Одночасно $w(x)$ є також радіальним переміщенням точок оболонки (рис. 484) внаслідок дії Q_0, M_0 і p. Це переміщення спричинює в кільцевому напрямі відносне подовження

$$\varepsilon_t = \frac{2\pi[R+w(x)]-2\pi R}{2\pi R} = \frac{w(x)}{R}. \tag{17.33}$$

Вважаючи, що розтягальних меридіональних напружень в оболонці немає, знайдемо кільцеве напруження

$$\sigma_t = E\varepsilon_t = \frac{E}{R}w(x) \tag{17.34}$$

і, нарешті, кільцеве зусилля

$$N_1 = \sigma_t\cdot h\cdot 1 = \frac{Eh}{R}w(x). \tag{17.35}$$

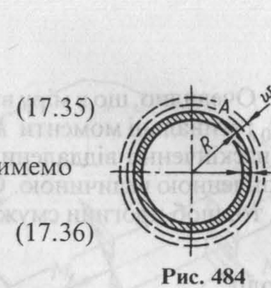


Рис. 484

Підставляючи цей вираз у рівняння (17.32), матимемо

$$D\frac{d^4w(x)}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2}w(x) = p. \tag{17.36}$$

Рівняння (17.36) ідентичне рівнянню (11.12) (див. § 73), що описує згинання балки на пружній основі, якщо взяти

$$\alpha = \frac{Eh}{R^2}. \tag{17.37}$$

Тому перетворимо рівняння (17.36) так само, як це зроблено в § 73.

Поділивши рівняння (17.36) на D, враховуючи вираз (17.30) і позначивши

$$a = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{R^2h^2}}, \tag{17.38}$$

дістанемо

$$\frac{d^4w(x)}{dx^4} + 4a^4w(x) = \frac{p}{D}. \tag{17.39}$$

Введемо нову безрозмірну незалежну змінну

$$\xi = ax. \tag{17.40}$$

Оскільки

$$\frac{d^4w(x)}{dx^4} = a^4\frac{d^4w(\xi)}{d\xi^4} = \frac{3(1-\mu^2)}{R^2h^2}\frac{d^4w(\xi)}{d\xi^4},$$

то рівняння (17.39) остаточно набере вигляду

$$\frac{d^4w(\xi)}{d\xi^4} + 4w(\xi) = \frac{4pR^2}{Eh}. \tag{17.41}$$

Легко перевірити, що частинний розв'язок цього рівняння при постійній інтенсивності тиску p буде

$$w_ч = \frac{pR^2}{Eh}. \tag{17.42}$$

Однорідне рівняння, що відповідає рівнянню (17.41), точно збігається з рівнянням (11.16), і його загальний інтеграл має вигляд (11.17). Тому загальний розв'язок рівняння (17.41) матиме вигляд

$$w(\xi) = \frac{pR^2}{Eh} + e^{-\xi}(A\cos\xi + B\sin\xi) + e^{\xi}(C\cos\xi + D_1\sin\xi). \tag{17.43}$$

Четверту сталу позначено D_1, а не D, щоб не переплутати її з циліндричною жорсткістю.

Очевидно, що в міру віддалення від краю, де діють лінійні поперечні сили Q_0 і згинальні моменти M_0, вплив їх на переміщення w має зменшуватись і в нескінченно віддалених точках зовсім зникнути. Отже, $w(\infty)$ має бути скінченною величиною. Оскільки e^{ξ} безмежно збільшується зі зростанням ξ, то, щоб прогини смужки безмежно не зростали, треба покласти

$$C = D_1 = 0.$$

Тоді

$$w(\xi) = \frac{pR^2}{Eh} + e^{-\xi}(A\cos\xi + B\sin\xi). \tag{17.44}$$

Скориставшись відомими диференціальними залежностями для балок (замінивши жорсткість EJ циліндричною жорсткістю D):

$$\Theta = \frac{dw}{dx} = a\frac{dw}{d\xi};\quad M = D\frac{d^2w}{dx^2} = Da^2\frac{d^2w}{d\xi^2};$$

$$Q = D\frac{d^3w}{dx^3} = Da^3\frac{d^3w}{d\xi^3},$$

з формули (17.44) дістанемо такі вирази для кутів нахилу пружної лінії, згинальних моментів і поперечних сил:

$$\begin{aligned} \Theta &= ae^{-\xi}\left[A(\cos\xi + \sin\xi) + B(\cos\xi - \sin\xi)\right]; \\ M &= Da^2e^{-\xi}(2A\sin\xi - 2B\cos\xi); \\ Q &= Da^3e^{-\xi}\left[2A(\cos\xi - \sin\xi) + 2B(\cos\xi + \sin\xi)\right]. \end{aligned} \tag{17.45}$$

Виразимо сталі A і B через Q_0 і M_0. Оскільки (див. рис. 482, *б*)

$$M_0 = M_{|\xi=0};\quad Q_0 = Q_{|\xi=0},$$

то з останніх двох формул (17.45), поклавши $\xi = 0$, визначимо

$$-2BDa^2 = M_0;\quad Da^3(2A + 2B) = Q_0,$$

звідки

$$A = \frac{1}{2a^3D}(Q_0 + aM_0);\quad B = -\frac{1}{2a^2D}M_0.$$

Підставивши значення коефіцієнтів у вирази (17.44) і (17.45), остаточно знаходимо:

$$\begin{aligned} w &= \frac{pR^2}{Eh} + \frac{1}{2a^3D}e^{-\xi}\left[Q_0\cos\xi + aM_0(\cos\xi - \sin\xi)\right]; \\ \Theta &= \frac{1}{2a^2D}e^{-\xi}\left[Q_0(\cos\xi + \sin\xi) + 2aM_0\cos\xi\right]; \\ M &= \frac{1}{a}e^{-\xi}\left[Q_0\sin\xi + aM_0(\cos\xi + \sin\xi)\right]; \\ Q &= e^{-\xi}\left[Q_0(\cos\xi - \sin\xi) - 2aM_0\sin\xi\right], \end{aligned} \tag{17.46}$$

причому a дається формулою (17.38), ξ — формулою (17.40).

Здобуті формули є розв'язками поставленої задачі, оскільки дають змогу обчислити в довільному поперечному перерізі оболонки радіальне переміщення w, кут Θ нахилу деформованої твірної до осі оболонки, лінійний згинальний момент M і лінійну поперечну силу Q. Додатні напрями цих величин збігаються з додатними напрямами w_0, Θ_0, M_0 і Q_0 (на рис. 482, *б* $w_0 > 0$, $M_0 > 0$, $Q_0 > 0$, а $\Theta_0 < 0$).

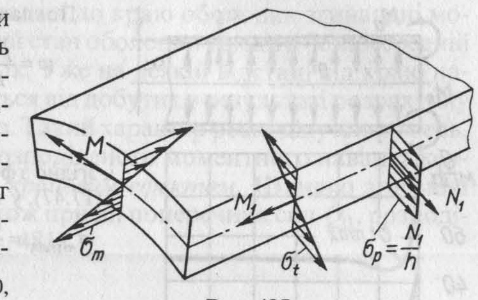


Рис. 485

Дослідивши згинальні напруження в балці-смужці, виділеної з тонкостінної циліндричної оболонки, ми дістали розв'язок і для всієї оболонки. Напруження σ_x у балці-смужці є згинальними напруженнями σ_m у меридіональному напрямі оболонки (в її поперечних перерізах), а напруження σ_z — згинальними напруженнями σ_t у кільцевому напрямі (в поздовжніх перерізах). Епюри σ_m і σ_t наведено на рис. 485. Напруженням σ_m відповідає згинальний момент M, а напруженням σ_t момент M_1.

Вище було показано, що $\sigma_z = \mu\sigma_x$, тобто $\sigma_t = \mu\sigma_m$. Тоді, очевидно,

$$M_1 = \mu M. \tag{17.47}$$

У поздовжніх перерізах оболонка також зазнає розтягання або стискання (залежно від того, зсередини чи ззовні діє тиск).

Максимальні напруження визначаються за формулами

$$\sigma_{m\,\max} = \frac{M}{W};\quad \sigma_{t\,\max} = \pm\frac{M_1}{W} + \frac{N_1}{F},$$

де

$$W = \frac{1\cdot h^2}{6};\quad F = 1\cdot h.$$

Отже,

$$\sigma_{m\,\max} = \frac{6M}{h^2};\quad \sigma_{t\,\max} = \frac{6M_1}{h^2} + \frac{N_1}{h}. \tag{17.48}$$

Величини M_1 і N_1 знаходимо за формулами (17.47) і (17.35) після обчислення за формулами (17.46) w і M. Знаючи максимальні напруження і вибравши ту чи іншу теорію міцності, можна виконати розрахунок на міцність. При цьому треба правильно вибрати знак у формулі для $\sigma_{t\,\max}$.

З'ясуємо тепер, як далеко від краю оболонки поширюється вплив крайових моментів M_0. Зробимо це на числовому прикладі.

Приклад 74. *Сталева труба ($E = 2\cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0{,}3$) радіусом $R = 40$ мм із товщиною стінки $h = 2$ мм зазнає дії рівномірного внутрішнього тиску $p = 2{,}5$ МПа і крайових моментів $M_0 = 33{,}3$ Н · м/м (рис. 486). Побудуємо епюри зміни максимальних меридіональних і кільцевих напружень уздовж осі труби.*

За відсутності крайових моментів у всіх перерізах було б

$$\sigma_m = 0;\ \sigma_t = \frac{pR}{h} = \frac{2{,}5\cdot 4}{0{,}2}\ \text{МПа} = 50\ \text{МПа}. \tag{17.49}$$

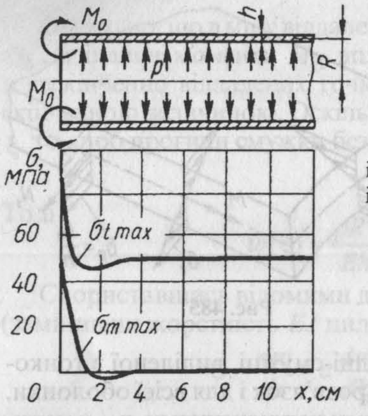


Рис. 486

Поклавши $Q_0 = 0$, з формул (17.46) знайдемо

$$w = \frac{pR^2}{Eh} + \frac{M_0}{2a^2 D} e^{-\xi}(\cos\xi - \sin\xi); \qquad (17.50)$$

$$M = M_0 e^{-\xi}(\cos\xi + \sin\xi)$$

і, згідно з формулами (17.48), (17.35), (17.38), (17.30) і (17.47), у точках біля внутрішньої поверхні

$$\sigma_{m\max} = \frac{6M}{h^2} = \frac{6M_0}{h^2} e^{-\xi}(\cos\xi + \sin\xi); \qquad (17.51)$$

$$\sigma_{t\max} = \frac{6\mu M}{h^2} + \frac{E}{R} w = \frac{pR}{h} + \mu\sigma_{m\max} + \frac{6M_0}{h^2}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{3}} e^{-\xi}(\cos\xi - \sin\xi).$$

Підставивши числові значення p, R, M_0, h, μ, матимемо

$$\sigma_{t\max} = 50 + 42{,}5e^{-\xi}\cos\xi - 12{,}5e^{-\xi}\sin\xi = 25\left(2 + 1{,}7e^{-\xi}\cos\xi - 0{,}5e^{-\xi}\sin\xi\right). \; (17.52)$$

Нарешті, згідно з формулами (17.40) і (17.38),

$$x = \frac{\xi}{a} = \xi \sqrt[4]{\frac{R^2h^2}{3\left(1-\mu^2\right)}} = \frac{\sqrt{4\cdot 0{,}2}}{\sqrt[4]{3\cdot 0{,}91}}\xi = 0{,}695\xi.$$

Користуючись таблицями функцій $e^{-\xi}(\cos\xi + \sin\xi)$, $e^{-\xi}\cos\xi$ і $e^{-\xi}\sin\xi$ (табл. 18 і дод. 12), обчислюємо значення $\sigma_{m\max}$ і $\sigma_{t\max}$ для ряду значень ξ (табл. 18) і за цими даними будуємо епюри зміни по довжині оболонки максимальних меридіональних і кільцевих напружень у точках біля внутрішньої поверхні в поперечних і поздовжніх перерізах оболонки (рис. 486).

Таблиця 18

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x, см	ξ	$e^{-\xi}\cos\xi$	$e^{-\xi}\sin\xi$	[3] + [4]	$\sigma_{m\max} =$ $= 50\cdot[5]$	1,7·[3]	0,5·[4]	[2] + [7] – – [8]	$\sigma_{t\max} =$ $= 25\cdot[9]$
0	0	1,000	0	1,000	50,0	1,700	0	3,700	92,5
0,21	0,3	0,708	0,219	0,927	46,4	1,204	0,110	3,094	77,4
0,49	0,7	0,371	0,329	0,700	35,0	0,631	0,165	2,476	61,9
0,76	1,1	0,151	0,297	0,448	22,4	0,257	0,148	2,109	52,7
1,04	1,5	0,016	0,222	0,238	11,9	0,027	0,111	1,916	47,9
1,32	1,9	–0,048	0,141	0,093	4,7	–0,082	0,071	1,847	46,2
1,60	2,3	–0,067	0,075	0,008	0,4	–0,114	0,038	1,848	46,2
1,88	2,7	–0,061	0,029	–0,032	–1,6	–0,104	0,014	1,882	47,0
2,15	3,1	–0,045	0,002	–0,043	–2,2	–0,076	0,001	1,923	48,1
2,43	3,5	–0,028	–0,011	–0,039	–2,0	–0,048	0,006	1,958	49,0
2,71	3,9	–0,015	–0,014	–0,029	–1,5	–0,026	–0,007	1,981	49,5
2,99	4,3	–0,005	–0,013	–0,018	–0,9	–0,008	–0,007	1,999	50,0
3,27	4,7	0,000	–0,009	–0,009	–0,4	0,00	–0,004	2,004	50,1
3,54	5,1	0,002	–0,005	–0,003	–0,2	0,003	–0,003	2,000	50,0
3,82	5,5	0,003	0,003	0,000	0	0,005	–0,002	2,008	50,2
4,10	5,9	0,003	0,001	0,002	0,1	0,005	–0,001	2,006	50,2

Ці епюри показують, що прикладені до краю оболонки згинальні моменти M_0 впливають на напружений стан оболонки тільки в безпосередній близькості від місця прикладання їх. Уже на деякій відстані від краю напруження практично не відрізняються від добутих у результаті розрахунку оболонки за безмоментною теорією. Такий характер розподілу напружень, спричинений в даному разі дією розподіленого моментного навантаження на краю оболонки, називають *крайовим ефектом.* Швидко згасаючі місцеві напруження виникають також при дії поперечних сил Q_0, розподілених по краю оболонки (див. рис. 481).

§ 111. Приклади врахування згинальних напружень в оболонках

Введене поняття крайового ефекту в оболонках здебільшого спрощує розрахунок конструкцій, які за своєю розрахунковою схемою належать до циліндричних оболонок. Слід зазначити, що виведені в попередньому параграфі формули для напівнескінченної циліндричної оболонки можна застосувати і для скінченних оболонок, якщо тільки їхня довжина значно перевищує розміри зони крайового ефекту.

Припустимо, що до *довгого тонкостінного циліндра* (рис. 487) в перерізі A — A прикладене рівномірно розподілене по периметру перерізу навантаження інтенсивністю q, Н/м. У цьому разі крайовий ефект симетричний відносно перерізу A — A. Тому:

а) навантаження q розподіляється порівну на ліву та праву частини циліндра, тобто (див. рис. 481)

$$Q_0 = -\frac{q}{2},$$

причому початок координат вибираємо в точці O (рис. 487);

б) дотична до пружної лінії балки-смужки в перерізі A — A паралельна осі циліндра, тобто (див. рис. 482)

$$\Theta_0 = \Theta_{|\xi=0} = 0.$$

Тоді з другого рівняння (17.46) знаходимо, що

$$M_0 = \frac{q}{4a},$$

де

$$a = \sqrt[4]{\frac{3\left(1-\mu^2\right)}{R^2h^2}}.$$

Підставляючи значення Q_0 і M_0 у формули (17.46), враховуючи, що $p = 0$, дістаємо

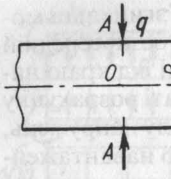


Рис. 487

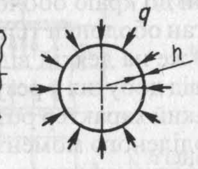


Рис. 488

$$
\begin{aligned}
w &= -\frac{q}{8a^3 D} e^{-\xi} (\cos\xi + \sin\xi);\\
\Theta &= \frac{q}{4a^2 D} e^{-\xi} \sin\xi;\\
M &= \frac{q}{4a} e^{-\xi} (\cos\xi - \sin\xi);\\
Q &= -\frac{q}{2} e^{-\xi} \cos\xi.
\end{aligned}
\qquad (17.53)
$$

Звідси, зокрема для перерізу A — A $(\xi = 0)$,

$$w_{\max} = w_0 = -\frac{q}{8a^3 D} = -\frac{q}{2E}\sqrt[4]{3\left(1-\mu^2\right)}\left(\frac{R}{h}\right)^{3/2}; \qquad (17.54)$$

$$M_{\max} = M_0 = \frac{q}{4a} = \frac{q\sqrt{Rh}}{4\sqrt[4]{3\left(1-\mu^2\right)}}. \qquad (17.55)$$

Максимальні напруження обчислюють за формулами (17.48).

Нехай на *тонкостінну трубу* (рис. 488) насаджено з натягом тонке кільце, площа поперечного перерізу якого дорівнює $F_к$; модуль пружності $E_к$.

Якщо позначити через q інтенсивність радіального зусилля, що виникає між кільцем і трубою, а через δ — натяг (різниця між зовнішнім радіусом труби і внутрішнім радіусом кільця до насадження), то з умови сумісності деформацій

$$|w_k| + |w_{\max}| = \delta,$$

де $w_к = \dfrac{qR^2}{E_к F_к}$ — збільшення радіуса кільця після запресування; $w_{\max}$ — максимальний прогин труби, тобто прогин у перерізі посадки кільця.

Труба перебуває в умовах, близьких до умов попереднього прикладу, тому $w_{\max}$ визначається за формулою (17.54). Підставивши вирази для $w_к$ і $w_{\max}$ в умову сумісності деформацій, знайдемо

$$q\left[\frac{R^2}{E_к F_к} + \frac{1}{2E}\sqrt[4]{3\left(1-\mu^2\right)}\left(\frac{R}{h}\right)^{3/2}\right] = \delta,$$

звідки визначимо q. Потім за формулами (17.55) і (17.47) знайдемо згинальні моменти, а за формулами (17.48) — напруження. Переміщення обчислимо за формулою (17.54).

Розділ 18 РОЗРАХУНОК КОНСТРУКЦІЙ ЗА ГРАНИЧНИМИ СТАНАМИ

§ 112. Основні відомості про граничний стан

Розрахунки на міцність окремих стрижнів, балок та конструкцій, розглянуті раніше, ґрунтуються на оцінці міцності матеріалу в небезпечній точці. При таких розрахунках найбільші нормальні, дотичні або еквівалентні напруження (залежно від виду напруженого стану та вибраної теорії міцності) у небезпечному перерізі та в небезпечній точці порівнюються з допустимим напруженням. Якщо найбільші розрахункові напруження не перевищують допустимих, то вважають, що належний запас міцності конструкції забезпечено. Такий спосіб розрахунку на міцність називають *розрахунком за допустимими напруженнями.*

Метод розрахунку на міцність за допустимими напруженнями, безперечно, забезпечує міцність конструкції, проте здебільшого не дає змоги раціонально використовувати всі її можливості й часто призводить до завищеної ваги.

При розрахунку за допустимими напруженнями небезпечним, або граничним, станом конструкції вважається такий її стан, при якому найбільше напруження хоч би в одній точці матеріалу конструкції досягає небезпечного значення — границі текучості (для пластичного матеріалу) або тимчасового опору (для крихкого матеріалу). Стан решти маси матеріалу не враховується.

Проте при нерівномірному розподілі напружень (наприклад, при згинанні, крученні) у статично невизначуваних конструкціях, виготовлених з пластичних матеріалів, поява місцевих напружень, які дорівнюють границі текучості, здебільшого не є небезпечною для всієї конструкції. Практика свідчить, що при появі місцевих пластичних деформацій конструкція ще може задовольняти вимоги, що ставляться до неї, і для переходу її в граничний стан потрібне дальше зростання навантаження. Отже, насправді конструкція має запас міцності більший, ніж при розрахунку за допустимими напруженнями.

У зв'язку з цим недоліком методу розрахунку на міцність за допустимими напруженнями виникла потреба в новому підході до оцінки міцності конструкцій. Було запропоновано метод розрахунку конструкцій за граничним станом.

Під граничним станом конструкції розуміють такий її стан, при якому вона втрачає здатність чинити опір зовнішньому навантаженню або перестає задовольняти експлуатаційні вимоги.

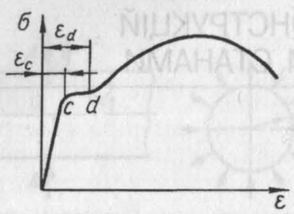


Рис. 489

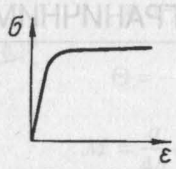


Рис. 490

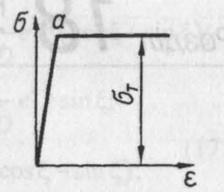


Рис. 491

Наведемо деякі приклади, що характеризують граничні стани.

Випробування слабкоармованих залізобетонних балок показують: щойно напруження в арматурі досягають границі текучості, балка сильно і необоротно провисає, а також покривається багатьма тріщинами. Зрозуміло, що дальша експлуатація такої балки неможлива, хоч для руйнування її й потрібне ще деяке збільшення навантаження. Отже, залізобетонна балка переходить у граничний стан, як тільки напруження в арматурі досягають границі текучості.

Сталеві стрижневі конструкції можуть перетворитися на кінематично змінювані після утворення достатньої кількості так званих пластичних шарнірів, тобто появи в стрижнях таких перерізів, у всіх точках яких напруження дорівнюють границі текучості. Проте в деяких типах конструкцій цей процес може відбуватися так, що після утворення перших пластичних шарнірів (задовго до перетворення цих конструкцій на кінематично змінювані) дальша експлуатація їх стане неможливою внаслідок значних залишкових деформацій, що виникають. У цих випадках виникають граничні стани конструкцій.

Розрізняють три види граничних станів:

а) перший граничний стан — за несівною здатністю (міцністю, стійкістю та опором утоми при змінних напруженнях);

б) другий граничний стан — за розвитком надмірних деформацій (прогинів, перекосів та ін.);

в) третій граничний стан — за утворенням або розкриттям тріщин.

Розрахунки за граничними станами широко застосовуються при проектуванні будівельних конструкцій та споруд. Поширюються методи цих розрахунків і в машинобудуванні, причому і тут виявляється їхня прогресивна роль: вони дають змогу використати резерви міцності, які не використовуються при розрахунках за допустимими напруженнями. Розрахунок за граничними станами дає змогу зменшити вагу конструкцій.

Тут розглядатимуться деякі приклади розрахунків за несівною здатністю конструкцій з пластичних матеріалів, які мають площадку текучості на діаграмах розтягання, стискання і чистого зсуву.

Площадку текучості мають діаграми напружень маловуглецевих сталей та деяких інших матеріалів (рис. 489). Наприклад, крива на діаграмі напружень алюмінію (рис. 490) за межею дії закону Гука має дуже слабкий нахил, і при розрахунках її можна вважати горизонтальною прямою.

Щоб спростити розрахунки, діаграми розтягання, стискання та чистого зсуву для пластичних матеріалів схематизують так, що пряма закону Гука безпосередньо сполучається з горизонтальною прямою без плавного переходу (рис. 491). Саме цим приймається рівність між границями пропорційності та текучості. Довжина горизонтальної ділянки діаграми не обмежується, тобто матеріал вважається таким, що не зміцнюється (ідеально пластичним). Така діаграма має назву *діаграми Прандтля.*

Зазначена схематизація досить точна для матеріалів типу алюмінію і цілком допустима для матеріалів, що мають діаграми з обмеженою довжиною площадки текучості (див. рис. 489). Це випливає з таких міркувань. За наявності такої площадки текучості, як, наприклад, у м'яких вуглецевих сталей, відносне подовження на початку зміцнення ε_d у кілька разів перевищує відносне подовження ε_c на початку появи пластичної деформації. Тому навіть при нерівномірному початковому розподілі напружень (згинання, кручення, наявність концентраторів), але дальшому послідовному поширенні пластичної зони з вирівнюванням напружень, границі текучості вони досягнуть одночасно по всьому перерізу раніше, ніж почнеться зміцнення матеріалу в точках з найбільшою пластичною деформацією. Отже, граничний стан, що визначається значною пластичною деформацією, настане до початку зміцнення матеріалу, і граничне навантаження можна обчислити за границею текучості.

Для складного напруженого стану, як зазначалося в розд. 6, запропоновано різні теорії переходу матеріалу в пластичний стан. Найпростіше розрахунки виконуються при використанні теорії пластичності Сен-Венана. Згідно з цією теорією, пластичний стан матеріалу при складному напруженому стані настає тоді, коли найбільші дотичні напруження досягають граничного значення — границі текучості при зсуві:

$$\tau_{max} = \tau_{т}. \tag{18.1}$$

Наведеними вище положеннями й будемо користуватися надалі.

§ 113. Розрахунки при розтяганні й стисканні

При розтяганні та стисканні напруження по площині поперечного перерізу стрижня розподіляються рівномірно. Внаслідок цього розрахунок на міцність статично визначуваних систем за допустимими напруженнями і за граничним станом дає один і той самий результат. У разі статично невизначуваних систем результати різні.

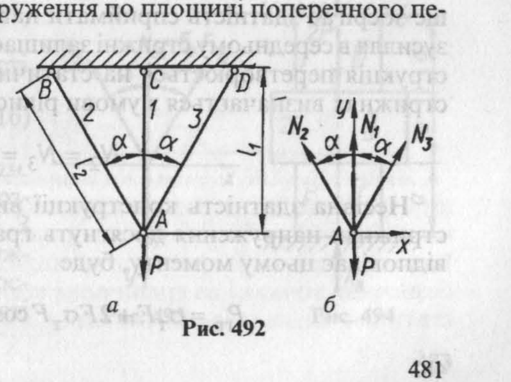


Рис. 492

Доведемо це на прикладах.

Визначимо запас міцності тристрижневої підвіски (рис. 492, *а*, *б*), навантаженої силою P. Площі поперечних перерізів стрижнів однакові. Матеріал пластичний з границею текучості $\sigma_т$.

Розрахунок за допустимим напруженням. Задача один раз статично невизначувана. Її розв'язання розглянуто в § 37. При $F_1 = F_2$ коефіцієнт $k=1$, і тоді з формул (5.50) та (5.51) знайдемо

$$N_1 = \frac{1}{1+2\cos^3\alpha}P; \tag{18.2}$$

$$N_2 = N_3 = \frac{\cos^2\alpha}{1+2\cos^3\alpha}P. \tag{18.3}$$

Очевидно, завжди $N_1 > N_2 = N_3$, тобто більше зусилля виникає в середньому стрижні. Отже, в середньому стрижні буде й найбільше напруження:

$$\sigma = \frac{N_1}{F} = \frac{1}{1+2\cos^3\alpha}\frac{P}{F}. \tag{18.4}$$

Запас міцності при розрахунку за граничним напруженням

$$n_т = \frac{\sigma_т}{\sigma} = \frac{\left(1+2\cos^3\alpha\right)F\sigma_т}{P}. \tag{18.5}$$

Розрахунок за граничним станом. Граничний стан конструкції буде характеризуватися вичерпуванням несівної здатності, яке настане тоді, коли в усіх стрижнях напруження досягнуть границі текучості. Знайдемо граничне навантаження для конструкції.

Оскільки напруження в стрижнях при пружній роботі їх неоднакові (у середньому стрижні більші, ніж у крайніх), то границі текучості напруження досягнуть не одночасно в усіх стрижнях. Спочатку при навантаженні $P_{1т}$ настане пластична деформація в середньому стрижні. Зусилля в ньому

$$N_{1т} = \sigma_т F. \tag{18.6}$$

При цьому, згідно з виразом (18.2),

$$P_{1т} = \left(1+2\cos^3\alpha\right)\sigma_т F. \tag{18.7}$$

Після появи пластичної плинності в середньому стрижні конструкція ще зберігає здатність сприймати навантаження, що зростає. При цьому зусилля в середньому стрижні залишається постійним і дорівнює $N_{1т}$. Конструкція перетворюється на статично визначувану, і зусилля в крайніх стрижнях визначається з умови рівноваги вузла (рис. 493):

$$N_2 = N_3 = \frac{P-\sigma_т F}{2\cos\alpha}. \tag{18.8}$$

Несівна здатність конструкції вичерпується тоді, коли й у крайніх стрижнях напруження досягнуть границі текучості. Навантаження, що відповідає цьому моменту, буде

$$P_{гр} = \sigma_т F + 2F\sigma_т F\cos\alpha = (1+2\cos\alpha)\sigma_т F. \tag{18.9}$$

Запас міцності при розрахунку за граничним станом

$$n_{гр} = \frac{P_{гр}}{P} = \frac{(1+2\cos\alpha)\,\sigma_т F}{P}. \tag{18.10}$$

Очевидно, що $n_{гр} > n_т$. Наприклад, при $\alpha = 30°$ $n_{гр}/n_т = 1{,}19$. Отже, розрахунок за граничним станом дає змогу виявити прихований запас працездатності конструкції.

Визначимо запас міцності трисхідчастого бруса (рис. 494), виготовленого з пластичного матеріалу.

Розрахунок за допустимим напруженням. Задача один раз статично невизначувана. Умова рівноваги має такий вигляд:

$$R_A + R_B - 2P = 0. \tag{18.11}$$

Деформації ділянок бруса мають задовольняти умову

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0,$$

або

$$-\frac{R_B a}{EF} - \frac{R_B a}{2EF} + \frac{R_A a}{EF} = 0.$$

Звідси випливає, що

$$R_A = \frac{3}{2}R_B. \tag{18.12}$$

Підставляючи значення R_A у вираз (18.11), знайдемо

$$R_B = \frac{4}{5}P. \tag{18.13}$$

Реакція верхнього закріплення

$$R_A = \frac{6}{5}P. \tag{18.14}$$

Ділянки I та III бруса стиснуті зусиллями $N_I = N_{II} = (4/5)P$, а ділянка III розтягнута зусиллям $N_{III} = (6/5)P$.

Найбільші напруження виникають у поперечних перерізах верхньої ділянки. Ці напруження

$$\sigma_{III} = \frac{N_{III}}{F} = \frac{6P}{5F}. \tag{18.15}$$

Запас міцності за границею текучості

$$n_т = \frac{\sigma_т}{\sigma_{III}} = \frac{5}{6}\frac{\sigma_т F}{P}. \tag{18.16}$$

Розрахунок за граничним станом. Насамперед з'ясуємо, який стан для розглядуваної системи буде граничним. З розрахунку випливає, що в межах пружності $\sigma_{III} > \sigma_I > \sigma_{II}$. Тому при зростанні навантаження границі текучості

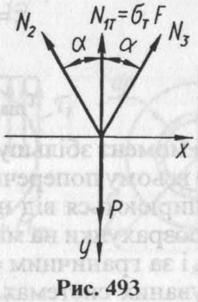


Рис. 493

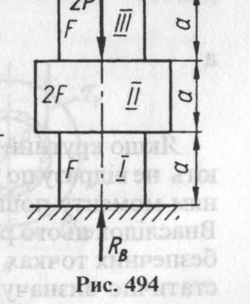


Рис. 494

спочатку досягнуть напруження на верхній ділянці. Цей стан не призведе до вичерпання несівної здатності системи, оскільки нижні ділянки, що перебувають у пружному стані, будуть чинити опір навантаженню, яке зростає. Зусилля, що сприймається верхньою ділянкою, при цьому постійне:

$$N_{III\ \text{гр}} = R_A = \sigma_\text{т} F. \qquad (18.17)$$

Ділянки *I* та *II* стиснуті зусиллям

$$N_I = N_{II} = R_B = 2P - R_A = 2P - \sigma_\text{т} F. \qquad (18.18)$$

При дальшому зростанні навантажень *P* пластичний стан настане в нижній ділянці *I*, де напруження більші, ніж на ділянці *II*. Цей момент і відповідає вичерпанню несівної здатності системи, оскільки середня ділянка між пластично деформованими зонами не зустріне зростаючого опору переміщенню.

Отже, граничний стан системи характеризується появою текучості одночасно у верхній та нижній ділянках.

Граничне навантаження знайдемо з умови

$$\sigma_{I\ \text{гр}} = \frac{N_{I\ \text{гр}}}{F} = \frac{2P_\text{гр} - \sigma_\text{т} F}{F} = \sigma_\text{т}. \qquad (18.19)$$

Звідси

$$P_\text{гр} = \sigma_\text{т} F. \qquad (18.20)$$

Запас міцності системи, навантаженої силами *P*,

$$n_\text{гр} = \frac{P_\text{гр}}{P} = \frac{\sigma_\text{т} F}{P}. \qquad (18.21)$$

Порівнюючи формули (18.16) та (18.21), бачимо, що запас міцності виявився більшим, ніж при розрахунку за допустимим напруженням.

§ 114. Розрахунки при крученні

При крученні стрижнів з круглим поперечним перерізом дотичні напруження в пружній зоні пропорційні відстаням точок перерізу від осі стрижня (рис. 495) і визначаються за формулами

$$\tau = \frac{M_\text{кр}}{J_p}\rho, \qquad (18.22)$$

а

$$\tau_{\max} = \frac{M_\text{кр}}{W_p}. \qquad (18.23)$$

Якщо крутний момент збільшується, то пластичні деформації виникають не відразу по всьому поперечному перерізу, а поступово, і зі зростанням моменту поширюються від найвіддаленіших точок до осі стрижня. Внаслідок цього розрахунки на міцність за напруженнями в найбільш небезпечних точках і за граничним станом дають різні результати навіть у статично визначуваних системах. Розрахунок за граничним станом і в

цьому разі дає змогу виявити додаткові резерви міцності.

Розглядаючи кручення в пластичній зоні, будемо припускати, що залежність між дотичними напруженнями й відносним зсувом для матеріалу відповідає ідеалізованій діаграмі з необмеженою горизонтальною ділянкою (рис. 496).

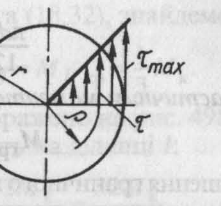


Рис. 495

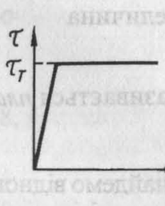


Рис. 496

При деякому значенні крутного моменту $M_\text{т} = \tau_\text{т} W_p$ напруження $\tau_{\max}$ у найбільш віддалених точках перерізу досягнуть границі текучості. Внаслідок збільшення напружень в усіх точках, що лежать ближче до осі, стрижень збереже здатність сприймати зростаючий крутний момент. У міру дальшого збільшення останнього зростання напружень припиняється в тих точках, де вони досягли границі текучості, а в решті точок, які утворюють так зване пружне ядро, напруження зростають. Епюру напружень, що відповідає цьому стану стрижня, наведено на рис. 497, *а*. Пружне ядро має радіус r_1.

Якщо пластична зона пошириться на весь переріз, несівна здатність стрижня буде вичерпана, оскільки далі він буде закручуватися без збільшення крутного моменту. Епюру напружень у цьому стані стрижня зображено на рис. 497, *б*.

Обчислимо граничний крутний момент $M_\text{гр}$, що відповідає вичерпанню несівної здатності стрижня.

Виділимо в поперечному перерізі елементарну площадку у вигляді кільця завширшки $d\rho$ (рис. 497, *в*). Розмір площадки, на якій діють дотичні напруження $\tau_\text{т}$, становить $dF = 2\pi\rho d\rho$, а момент від цих напружень відносно осі стрижня буде $\tau_\text{т} = 2\pi\rho^2 d\rho$.

Крутний момент у перерізі дорівнює сумі всіх елементарних моментів внутрішніх сил. Тому

$$M_\text{гр} = \tau_\text{т} 2\pi \int_0^{d/2} \rho^2 d\rho,$$

або

$$M_\text{гр} = \tau_\text{т} \frac{\pi d^3}{12}. \qquad (18.24)$$

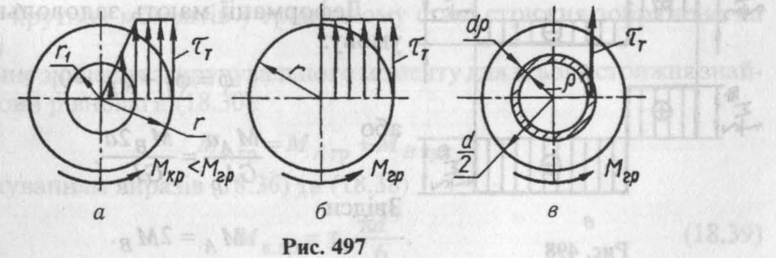


Рис. 497

Величина

$$\frac{\pi d^3}{12} = W_{p\,\text{пл}} \tag{18.25}$$

називається *пластичним моментом опору при крученні.* Тоді

$$M_{\text{гр}} = \tau_{\text{т}} W_{p\,\text{пл}}. \tag{18.26}$$

Знайдемо відношення граничного моменту $M_{\text{гр}}$ та моменту $M_{\text{т}}$, при якому в перерізі вперше виникнуть напруження текучості:

$$\frac{M_{\text{гр}}}{M_{\text{т}}} = \frac{W_{p\,\text{пл}}}{W_p}. \tag{18.27}$$

Підставивши значення $W_{p\,\text{пл}} = \pi d^3/12$ та $W_p = \pi d^3/16$, дістанемо

$$\frac{M_{\text{гр}}}{M_{\text{т}}} = \frac{4}{3}, \tag{18.28}$$

або

$$M_{\text{гр}} = \frac{4}{3} M_{\text{т}} = 1{,}33 M_{\text{т}}. \tag{18.29}$$

Такий прихований запас працездатності круглого стрижня, що виявляється при переході від розрахунку за допустимими напруженнями до розрахунку за граничним станом.

У скручуваних стрижнів кільцевого поперечного перерізу розподіл напружень у пружній стадії ближче до рівномірного, тому різниця в запасах міцності, що виявляється при розрахунку за граничним станом та за допустимими напруженнями, буде меншою.

Як приклад розглянемо стрижень круглого поперечного перерізу, кінці якого жорстко затиснуті (рис. 498, *а*). У проміжному перерізі стрижня прикладений закручувальний момент $M_{\text{к}}$. Визначимо запас міцності при розрахунку за допустимим напруженням та за граничним станом.

Розрахунок за допустимим напруженням. Розкриємо статичну невизначуваність при пружному стані матеріалу. Позначивши реактивні моменти через M_A та M_B, дістанемо рівняння рівноваги в такому вигляді:

$$M_A + M_B = M_{\text{к}}. \tag{18.30}$$

Деформації мають задовольняти таку умову:

$$\varphi = \varphi_I + \varphi_{II} = 0,$$

або

$$\frac{M_A a}{GJ_p} = \frac{M_B 2a}{GJ_p}. \tag{18.31}$$

Звідси

$$M_A = 2M_B. \tag{18.32}$$

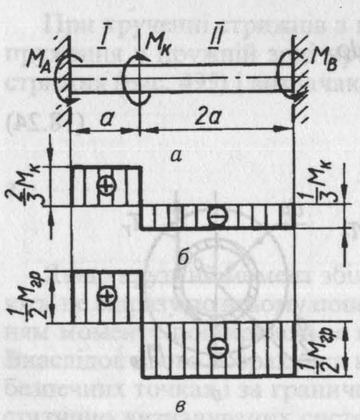


Рис. 498

Розв'язуючи разом рівняння (18.30) та (18.32), знайдемо

$$M_A = M_{I\,\text{кр}} = \frac{2}{3} M_{\text{к}}; \quad M_B = M_{II\,\text{кр}} = \frac{1}{3} M_{\text{к}}.$$

Епюру закручувальних моментів зображено на рис. 498, *б*. Найбільші дотичні напруження будуть на ділянці *I*:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{I\text{кр}}}{W_p} = \frac{M_A}{W_p} = \frac{2M_{\text{к}}}{3\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{32 M_{\text{к}}}{3\pi d^3}.$$

Розраховуючи за допустимими напруженнями, маємо

$$\tau_{\max} = \frac{32 M_{\text{к}}}{3\pi d^3} \le [\tau] = \frac{\tau_{\text{т}}}{n_{\text{т}}}. \tag{18.33}$$

Звідси запас міцності за границею текучості

$$n_{\text{т}} = \frac{\tau_{\text{т}}}{\tau_{\max}} = \frac{3\pi d^3 \tau_{\text{т}}}{32 M_{\text{к}}}. \tag{18.34}$$

Розрахунок за граничним станом. При збільшенні закручувального моменту найбільші напруження на ділянці *I* досягають границі текучості, і далі зона текучості поширюватиметься до осі стрижня. Якщо текучість охопить весь переріз, реактивний момент M_A досягне свого граничного значення

$$M_{A\,\text{гр}} = \tau_{\text{т}} W_{p\,\text{пл}}, \tag{18.35}$$

або

$$M_{A\,\text{гр}} = \tau_{\text{т}} \frac{\pi d^3}{12}. \tag{18.36}$$

Цей стан не буде граничним для всього стрижня, оскільки ділянка *II*, що перебуває в пружному або в пружно-пластичному стані (з пружним ядром), збереже здатність чинити опір зростаючому моменту $M_{\text{к}}$. Несівна здатність стрижня вичерпається, якщо й на ділянці *II* зона пластичності пошириться на весь переріз. Реактивний момент M_B при цьому досягне свого граничного значення

$$M_{B\,\text{гр}} = \tau_{\text{т}} W_{p\,\text{пл}}, \tag{18.37}$$

або

$$M_{B\,\text{гр}} = \tau_{\text{т}} \frac{\pi d^3}{12}. \tag{18.38}$$

Епюру крутних моментів у граничному стані стрижня зображено на рис. 498, *в*.

Граничне значення закручувального моменту для всього стрижня знайдемо з умови рівноваги (18.30):

$$M_{\text{к.гр}} = M_{A\,\text{гр}} + M_{B\,\text{гр}},$$

або з урахуванням виразів (18.36) та (18.38)

$$M_{\text{к.гр}} = \tau_{\text{т}} \frac{\pi d^3}{6}. \tag{18.39}$$

Запас міцності

$$n_{гр} = \frac{M_{к.гр}}{M_к} = \frac{\tau_т \pi d^3}{6M_к} \qquad (18.40)$$

Отже, розрахунок за граничним станом показав, що запас міцності стрижня значно вищий, ніж той, який дає розрахунок за допустимим напруженням [формула (18.34)]. Відношення цих запасів міцності $n_{гр} / n_т = 1{,}78$.

Слід зазначити, що розрахунки за несівною здатністю цілком прийнятні при дії постійних крутних моментів.

§ 115. Розрахунки при згинанні

У поперечних перерізах балки при згинанні нормальні напруження в пружному стані матеріалу розподіляються нерівномірно, лінійно змінюючись по висоті балки (рис. 499, *а*). Найбільші нормальні напруження в найвіддаленіших від нейтральної лінії точках поперечного перерізу визначаються за формулою

$$\sigma_{max} = M / W.$$

При розрахунку міцності за допустимими напруженнями запас міцності визначається як відношення границі текучості матеріалу до найбільшого напруження. Таким чином, як небезпечний вибирається стан балки, що відповідає досягненню найбільшими нормальними напруженнями в небезпечних точках границі текучості. Такий стан лише умовно можна вважати небезпечним. Балка ще зберігає здатність сприймати згинальний момент, що збільшується.

Визначимо граничний згинальний момент у разі чистого згинання. Розглянемо спочатку балку, поперечні перерізи якої мають дві осі симетрії. Границі текучості при розтяганні та стисканні вважатимемо однаковими.

Після появи текучості в найвіддаленіших від нейтральної осі точках перерізу при дальшому збільшенні згинального моменту пластичний стан матеріалу поширюється в напрямі до нейтральної осі. До повного вичерпання несівної здатності балки в її поперечних перерізах будуть дві зони — пластична та пружна (рис. 499, *б*). Граничний стан настане тоді, коли текучість пошириться на весь поперечний переріз, оскільки після цього дальша деформація балки відбувається без збільшення згинального моменту. Епюру нормальних напружень у поперечному перерізі для граничного стану зображено на рис. 499, *в*. У розглядуваному поперечному перерізі утворюється так званий пластичний шарнір, який передає постійний момент, що дорівнює граничному згинальному моменту.

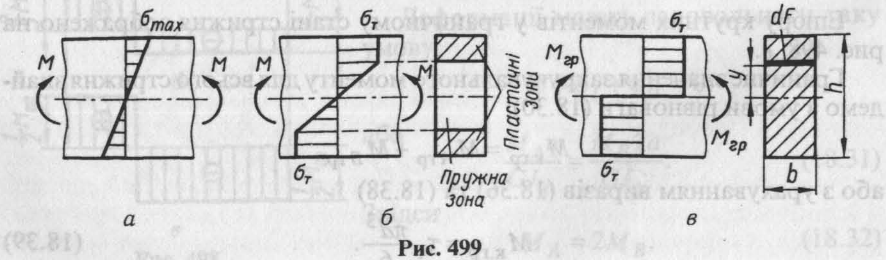


Рис. 499

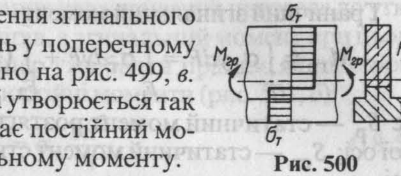


Рис. 500

Граничний момент можна обчислити як суму моментів відносно нейтральної осі сил $\sigma_т dF$ у поперечному перерізі (рис. 499, *в*):

$$M_{гр} = \int_F \sigma_т y dF = \sigma_т 2 \int_{F/2} y dF = \sigma_т 2 S_{max}, \qquad (18.41)$$

де S_{max} — статичний момент площі половини поперечного перерізу відносно нейтральної осі.

Величину $2S_{max}$ називають *пластичним моментом опору* та позначають $W_{пл}$. Тоді

$$M_{гр} = \sigma_т W_{пл}. \qquad (18.42)$$

Для прямокутного поперечного перерізу завширшки b та заввишки h

$$W_{пл} = \frac{bh^2}{4}. \qquad (18.43)$$

Небезпечний згинальний момент при розрахунку за допустимими напруженнями

$$M_т = \sigma_т W.$$

Відношення

$$M_{пл} / M_т = W_{пл} / W \qquad (18.44)$$

характеризує ступінь збільшення запасу міцності балки при переході до розрахунку за граничним станом. Для балки прямокутного перерізу

$$\frac{W_{пл}}{W} = \frac{bh^2/4}{bh^2/6} = 1{,}5.$$

Для двотаврових прокатних балок у середньому $W_{пл} / W_т = 1{,}18$.

Якщо переріз балки має тільки одну вісь симетрії в площині навантаження (рис. 500), то в граничному стані нейтральна вісь не пройде крізь центр ваги поперечного перерізу. Положення нейтральної осі визначається з рівності нулю суми проекцій на вісь балки всіх сил $\sigma_т dF$, розподілених по її перерізу:

$$\int_F \sigma_т dF = \int_{F_1} \sigma_т dF + \int_{F_2} (-\sigma_т) dF = 0, \qquad (18.45)$$

де F_1 — площа розтягнутої зони перерізу; F_2 — площа стиснутої зони. Звідси

$$F_1 - F_2 = 0, \quad \text{або} \quad F_1 = F_2,$$

тобто в граничному стані нейтральна вісь перерізу має ділити його площу навпіл.

Граничний згинальний момент

$$M_{гр} = \int_F \sigma_т y dF = \int_{F_1} \sigma_т dy F + \int_{F_2} (-\sigma_т)(-y)\, dF = \sigma_т (S_р + S_{ст}), \quad (18.46)$$

де $S_р$ — статичний момент розтягнутої зони перерізу відносно нейтральної осі; $S_{ст}$ — статичний момент стиснутої зони перерізу відносно тієї самої осі.

У цьому разі пластичний момент опору

$$W_{пл} = S_р + S_{ст}. \quad (18.47)$$

Наведені міркування щодо визначення граничного стану, еквівалентного утворенню пластичного шарніра в поперечному перерізі балки, точно кажучи, справедливі лише для чистого згинання, якщо немає дотичних напружень. Визначення граничного стану з урахуванням поперечної сили більш складне. Це питання тут не висвітлюється.

Розглянемо приклад розрахунку балки на згинання за допустимими напруженнями та за граничним станом без урахування впливу поперечної сили.

Балка прямокутного поперечного перерізу, затиснута по кінцях, несе рівномірно розподілене по довжині навантаження інтенсивністю q (рис. 501, *а*). Визначимо найбільшу інтенсивність цього навантаження, допустиму згідно з розрахунком за допустимими напруженнями та за граничним станом при одному і тому самому запасі міцності n.

Розрахунок за допустимими напруженнями. Балка статично невизначувана. Її розрахунок істотно спрощується завдяки симетрії. Використовуючи методи розд. 14, легко знаходимо зайві невідомі та будуємо епюру згинальних моментів (рис. 501, *а*). Найбільший згинальний момент діє в опорних затиснутих перерізах:

$$M_{max} = ql^2/12. \quad (18.48)$$

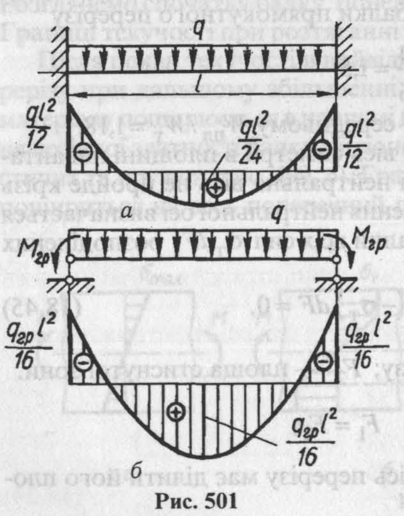


Рис. 501

При збільшенні навантаження q максимальні напруження в цих самих перерізах першими досягають границі текучості. Вибираючи запас міцності за границею текучості таким, що дорівнює n, знайдемо найбільшу допустиму інтенсивність навантаження з умови міцності:

$$M_{max} / W = \sigma_т / n. \quad (18.49)$$

Ураховуючи, що $W = bh^2/6$, а $M_{max} = q_1 l^2/12$, маємо

$$q_1 = 2\frac{\sigma_т}{n}\frac{bh^2}{l^2}. \quad (18.50)$$

Розрахунок за граничним станом. Після появи пластичних деформацій у найбільш віддалених від нейтральної осі точках опорних перерізів дальше зростання навантаження призведе до утворення в цих перерізах пластичних шарнірів, а згинальний момент при цьому досягне граничного значення $M_{гр}$. Тепер уже балка працює як шарнірно обперта, до якої на опорах прикладені постійні моменти (рис. 501, *б*):

$$M_{гр} = \sigma_т W_{пл} = \sigma_т \frac{bh^2}{4}. \quad (18.51)$$

При дальшому збільшенні навантаження ці моменти зберігають своє значення, і задача стає статично невизначуваною. В довільних перерізах балки згинальні моменти зростатимуть доти, доки посередині прогону момент не стане дорівнювати тому самому значенню $M_{гр}$, тобто доки не утвориться пластичний шарнір. При цьому три пластичних шарніри розмістяться на одній прямій, тому дальше зростання навантаження неможливо. Несівна здатність балки вичерпується.

Умова рівності згинальних моментів в опорних перерізах та посередині прогону має вигляд

$$\frac{q_{гр} l^2}{8} - M_{гр} = M_{гр}, \quad (18.52)$$

звідки знаходимо, що

$$M_{гр} = \frac{q_{гр} l^2}{16}. \quad (18.53)$$

Прирівнюючи праві частини формул (18.51) та (18.53), знайдемо

$$q_{гр} = 4\sigma_т \frac{bh^2}{l^2}. \quad (18.54)$$

Вибираючи запас міцності таким, що дорівнює n, знайдемо найбільшу допустиму інтенсивність навантаження:

$$q_2 = \frac{q_{гр}}{n} = 4\frac{\sigma_т}{n}\frac{bh^2}{l^2}. \quad (18.55)$$

Відношення найбільших допустимих навантажень при розрахунках за граничним станом та за допустимими напруженнями

$$q_2 / q_1 = 2.$$

Розрахунок за граничним станом часто дає змогу виявити додаткові резерви міцності. Як зазначалося вище, він дістав поширення при розрахунках будівельних конструкцій і дедалі більше застосовується в машинобудуванні. Однак цей метод не слід вважати універсальним, здатним повністю замінити розрахунки за допустимими напруженнями.

Розрахунок за граничним станом з певним запасом міцності не гарантує від появи місцевих пластичних деформацій. Останнє ще допустимо при постійних навантаженнях, які виникають переважно в будівельних конструкціях. При змінних навантаженнях, на які найчастіше розраховують машинобудівні конструкції, поява пластичних деформацій здебільшого недопустима. Тому в таких випадках розрахунок слід виконувати за допустимими напруженнями.

Розділ 19 СТІЙКІСТЬ СТИСНУТИХ СТРИЖНІВ

§ 116. Стійка та нестійка пружна рівновага

Виконуючи розрахунки на міцність та жорсткість при різних деформаціях, ми вважали, що під час деформації будь-якої системи має місце лише одна наперед відома форма рівноваги. Насправді у деформованому стані рівновага між зовнішніми та спричиненими ними внутрішніми силами пружності може бути не тільки стійкою, а й нестійкою.

Пружна рівновага буде *стійкою,* якщо деформоване тіло при будь-якому малому відхиленні від стану рівноваги намагається повернутися до початкового стану й повертається до нього після припинення зовнішнього впливу, який порушив початковий стан рівноваги.

Пружна рівновага *нестійка,* якщо деформоване тіло, виведене з неї будь-якою зовнішньою дією, продовжує деформуватися в напрямі наданого йому відхилення й після припинення зовнішньої дії у вихідний стан не повертається.

Між цими двома станами рівноваги існує перехідний стан, який зветься *критичним,* при якому деформоване тіло перебуває у байдужій рівновазі: воно може зберегти вихідну форму, але може й втратити її внаслідок навіть дуже незначного впливу.

Стійкість форми рівноваги деформованого тіла залежить від прикладених до нього навантажень. Наприклад, якщо сили, що стискають стрижень, невеликі, то вихідна форма рівноваги залишається стійкою (рис. 502, *а*). При зростанні прикладених сил досягається стан байдужої рівноваги, при якому поряд з прямолінійною формою стрижня можливі суміжні з нею злегка викривлені форми рівноваги (штрихові лінії на рис. 502, *б*). При дальшому найнезначнішому збільшенні навантаження характер деформації стрижня різко змінюється — стрижень випинається (рис. 502, *в*), прямолінійна форма рівноваги перестає бути стійкою. Це означає, що навантаження перевищило критичне значення.

Навантаження, перевищення якого спричинює втрату стійкості вихідної форми тіла, називають критичним і позначають $P_{кр}$.

Можна стверджувати, що досягнення навантаженнями критичних значень рівнозначне руйнуванню конструкції, оскільки нестійка форма рівноваги неминуче буде втрачена, що пов'язано з практично необмеженим зростанням деформацій та напружень. Особлива небезпека руйнування внаслідок втрати стійкості полягає в тому, що, як правило, воно відбувається раптово

й при низьких значеннях напружень, коли міцність елемента ще далеко не вичерпана.

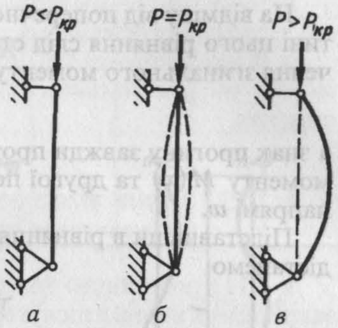


Рис. 502

До моменту настання критичного стану пружні деформації за модулем зовсім невеликі, і зростання їх майже непомітне для ока. Проте з моменту настання критичного стану до моменту руйнування залишкові деформації наростають надто швидко, й практично немає часу вжити заходів щодо запобігання катастрофі, яка загрожує. Отже, при розрахунку на стійкість критичне навантаження подібне руйнувальному при розрахунку на міцність. Для забезпечення певного запасу стійкості необхідно, щоб задовольнялася умова

$$P \le [P]. \tag{19.1}$$

Тут

$$[P] = P_{кр} / n_{ст}, \tag{19.2}$$

де P — діюче навантаження; $n_{ст}$ — коефіцієнт запасу стійкості.

Отже, щоб розрахувати стиснуті стрижні на стійкість, треба вивчити способи визначення критичних навантажень $P_{кр}$.

З усієї різноманітності розрахунків на стійкість пружних систем докладно розглянемо лише приклад втрати стійкості при стисканні довгого тонкого стрижня, або так зване поздовжнє згинання.

§ 117. Формула Ейлера для визначення критичної сили стиснутого стрижня

Припустимо, що під дією сили P, яка дещо перевищує критичну силу $P_{кр}$, стрижень з шарнірно закріпленими кінцями (рис. 503, *а*) трохи зігнувся (рис. 503, *б*). Віднесемо викривлену вісь стрижня до прямокутної системи координат, вибравши початок координат у точці O.

Припустимо, що критична сила $P_{кр}$ не спричинює в стрижні напружень, які перевищують границю пропорційності, і що розглядаються лише малі відхилення від прямолінійної форми. Тоді для визначення поздовжньої сили можна скористатися наближеним диференціальним рівнянням (10.44) пружної лінії:

$$EJ_{min} \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \pm M(x). \tag{19.3}$$

Тут J_{min} — найменший момент інерції перерізу стрижня.

Ураховується найменша жорсткість стрижня EJ_{min}, оскільки, очевидно, прогин відбудеться перпендикулярно до осі найменшої жорсткості, якщо решта умов для згинання в усіх площинах однакові, як у розглядуваному прикладі.

На відміну від поперечного згинання при поздовжньому в правій частині цього рівняння слід ставити знак «мінус», оскільки абсолютне значення згинального моменту

$$|M(x)| = |Pw|, \tag{19.4}$$

а знак прогину завжди протилежний знаку другої похідної, тобто знаки моменту $M(x)$ та другої похідної d^2w/dx^2 протилежні при будь-якому напрямі w.

Підставивши в рівняння (19.3) вираз (19.4) для згинального моменту, дістанемо

$$EJ_{\min}\frac{d^2w}{dx^2} = -Pw, \tag{19.5}$$

або

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{P}{EJ_{\min}}w = 0. \tag{19.6}$$

Ввівши позначення

$$\frac{P}{EJ_{\min}} = k^2, \tag{19.7}$$

перепишемо рівняння (19.6):

$$\frac{d^2w}{dx^2} + k^2w = 0. \tag{19.8}$$

Ми дістали однорідне лінійне диференціальне рівняння, загальний інтервал якого, як відомо, можна виразити гармонічною функцією

$$w = A\sin kx + B\cos kx. \tag{19.9}$$

Сталі інтегрування A та B мають добиратися так, щоб задовольнялися граничні умови

$$w(x)|_{x=0} = 0; \quad w(x)|_{x=l} = 0.$$

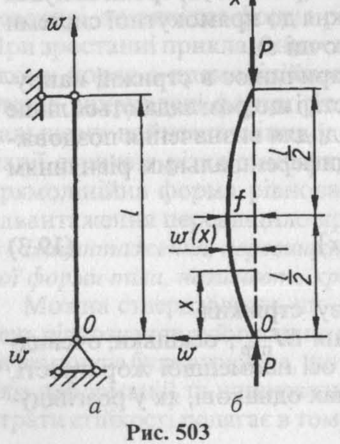


Рис. 503

З першої граничної умови випливає, що $B = 0$, тобто

$$w(x) = A\sin kx. \tag{19.10}$$

Із другої умови знайдемо

$$A\sin kl = 0. \tag{19.11}$$

Якщо припустити, що $A = 0$, то прогин буде тотожно дорівнювати нулю, тобто

$$w(x) \equiv 0.$$

Цей розв'язок відповідає одній з можливих форм рівноваги стиснутого стрижня, а саме — прямолінійній формі. Нас же цікавить значення сили P, при якому стає можливою друга форма рівноваги — криволінійна. Оскільки $A \neq 0$, то при викривленій формі стрижня має виконуватися рівність

$$\sin kl = 0.$$

Корінь цього рівняння kl може мати нескінченну кількість значень: 0; π; 2π; ...; $n\pi$, тобто

$$kl = n\pi,$$

де n — довільне ціле число.

Однак перший корінь $kl = 0$ відкидається, оскільки він не відповідає вихідним даним задачі. Отже,

$$k^2l^2 = n^2\pi^2. \tag{19.12}$$

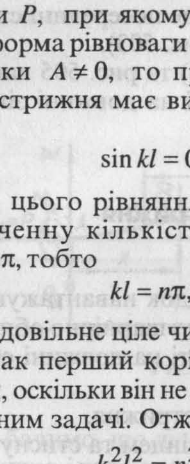


Рис. 504

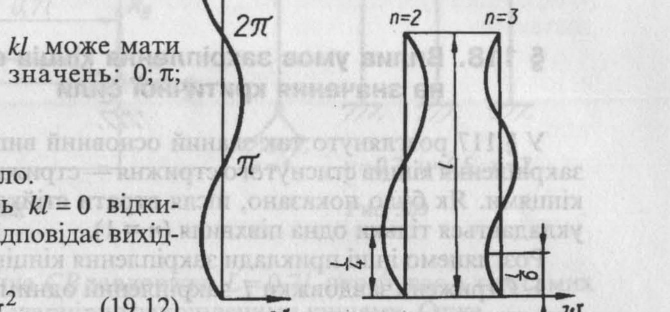


Рис. 505

Тоді з рівняння (19.7) дістанемо вираз для стискальної сили

$$P = \frac{n^2\pi^2EJ_{\min}}{l^2}. \tag{19.13}$$

Рівняння (19.13) є формулою, що вперше була виведена Ейлером.

Практично нас цікавить найменше значення поздовжньої стискальної сили, при якому стає можливим поздовжнє згинання. Найменше значення критичної сили $P_{кр}$ дістанемо при $n = 1$ та $kl = \pi$:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2EJ_{\min}}{l^2}. \tag{19.14}$$

Повертаючись до рівнянь (19.10), (19.12), запишемо рівняння зігнутої осі стрижня при малих деформаціях:

$$w(x) = A\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Найбільший прогин стрижня $w_{\max} = f$ при $\sin(n\pi x/l) = 1$. Тоді $w(x) = w_{\max} = f = A$. Отже, рівняння пружної лінії стиснутого стрижня має вигляд

$$w = f\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{19.15}$$

Графік цієї залежності наведено на рис. 504. Максимум w має місце при такому значенні x, для якого $\frac{dw}{dx} = 0$, тобто

$$\frac{dw}{dx} = f\frac{n\pi}{l}\cos\frac{n\pi x}{l} = 0, \quad \text{або} \quad \cos\frac{n\pi x}{l} = 0.$$

Найменше значення аргумента, при якому косинус дорівнює нулю, буде $\pi/2$, отже, $n\pi x/l = \pi/2$, звідки

$$x = \frac{l}{2n}. \tag{19.16}$$

Якщо $n = 1$, то $x = l/2$, а максимум w має місце посередині стрижня, що відповідає так званому основному випадку (рис. 503).

Із співвідношення (19.16) або з рівняння (19.15) та рис. 505 випливає, що n є числом півхвиль синусоїди, які розміщені на довжині зігнутого стрижня.

§ 118. Вплив умов закріплення кінців стрижня на значення критичної сили

У § 117 розглянуто так званий основний випадок навантажування й закріплення кінців стиснутого стрижня — стрижня з шарнірно обпертими кінцями. Як було показано, після втрати стійкості на довжині стрижня укладається тільки одна півхвиля ($n = 1$).

Розглянемо інші приклади закріплення кінців стрижня.

1. Стрижень завдовжки l закріплений одним кінцем та стиснутий поздовжньою силою, прикладеною до вільного кінця (рис. 506, *а*). Порівнюючи рис. 506, *а* та *б*, бачимо, що зігнута вісь стрижня, закріпленого одним кінцем, перебуває в тих самих умовах, що і верхня половина стрижня завдовжки $2l$ з шарнірно закріпленими кінцями. Отже, критична сила для стрижня з одним закріпленим, а іншим вільним кінцем така сама, як і для стрижня з шарнірно обпертими кінцями при довжині $L = 2l$, тобто

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(2l)^2} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{4l^2}. \tag{19.17}$$

При цьому зігнута вісь стрижня (рис. 506, *а*) має вигляд половини півхвилі синусоїди.

2. Стрижень завдовжки l, в якого обидва кінці жорстко закріплені (рис. 507). Після втрати стійкості стрижня внаслідок симетрії його середня частина завдовжки $l/2$ працює в тих самих умовах, що і стрижень при шарнірно обпертих кінцях. При цьому утворюються дві півхвилі: середня завдовжки $L = l/2$ та дві крайні половинки півхвилі завдовжки $l/4$.

Критичну силу в цьому разі знаходимо з рівняння (19.14) при $L = l/2$:

$$P_{\text{кр}} = \frac{4\pi^2 EJ_{\min}}{l^2}. \tag{19.18}$$

3. Стрижень завдовжки l закріплений одним кінцем та шарнірно обпертий на іншому (рис. 508). Після втрати стійкості права частина CB стрижня має вигляд півхвилі синусоїди. Порівнюючи рис. 508 та

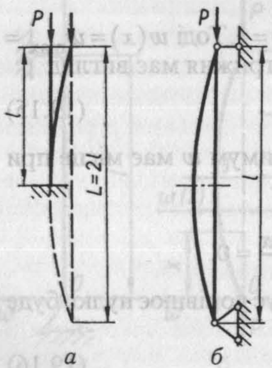


Рис. 506

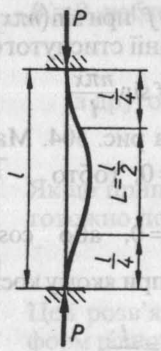


Рис. 507

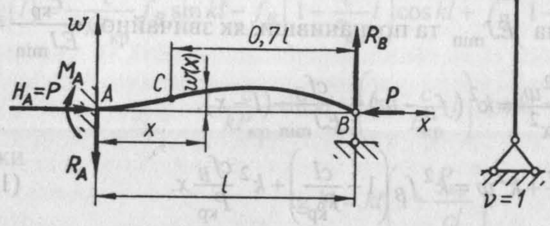


Рис. 508

Рис. 509

506, *б*, бачимо, що ділянка CB завдовжки $L = 0{,}7l$ перебуває в тих самих умовах, що і стрижень з шарнірно закріпленими кінцями. Отже,

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(0{,}7l)^2}. \tag{19.19}$$

Співвідношення (19.14), (19.17) — (19.19) можна об'єднати в одну формулу

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\nu l)^2}, \tag{19.20}$$

де $\nu l = l_{\text{зв}}$ — зведена довжина стрижня; l — фактична довжина стрижня; ν — коефіцієнт зведення довжини.

Отже, різні випадки обпирання та навантажування стрижня зводяться до основного випадку введенням у формулу для $P_{\text{кр}}$ так званої зведеної довжини $l_{\text{зв}} = \nu l$. Це поняття вперше було використано Ф. С. Ясинським.

З формули Ейлера (19.20) випливає, що критичне навантаження залежить від найменшої жорсткості $EJ_{\min}$, довжини стрижня l та коефіцієнта ν.

На рис. 509 наведено значення ν для розглянутих стрижнів. Проте такі розрахункові схеми на практиці нечасто зустрічаються в чистому вигляді. Найчастіше закріплення кінців бувають пружними. Найбільш поширені такі випадки пружного закріплення кінців:

а) один кінець стрижня жорстко закріплений, а інший пружно обпертий;

б) обидва кінці пружно закріплені.

Розглянемо перший випадок (рис. 510). Після втрати стійкості пружно обпертий кінець стояка переміщується у вертикальному напрямі на величину f_B; при цьому виникає пружна реакція R_B. Ця реакція пропорційна відхиленню f_B:

$$R_B = cf_B,$$

де c — коефіцієнт пружності опори B.

Складемо диференціальне рівняння пружної лінії стиснутого стрижня після втрати стійкості:

$$EJ_{\min}\frac{d^2w}{dx^2}=P_{\text{кр}}\left(f_B-w\right)-cf_B\left(l-x\right). \tag{19.21}$$

Поділивши почленно на $EJ_{\min}$ та позначивши, як звичайно, $\frac{P_{\text{кр}}}{EJ_{\min}}=k^2$, дістанемо

$$\frac{d^2w}{dx^2}=k^2\left(f_B-w\right)-\frac{cf_B}{EJ_{\min}}\left(l-x\right),$$

або

$$\frac{d^2w}{dx^2}+k^2w=k^2f_B\left(1-\frac{cl}{P_{\text{кр}}}\right)+k^2\frac{cf_B}{P_{\text{кр}}}x. \tag{19.22}$$

Загальний інтеграл цього диференціального рівняння

$$w=C\sin kx+D\cos kx+f_B\left(1-\frac{c}{P_{\text{кр}}}l\right)+\frac{c}{P_{\text{кр}}}f_Bx. \tag{19.23}$$

Для визначення сталих інтегрування і критичного навантаження маємо такі граничні умови:

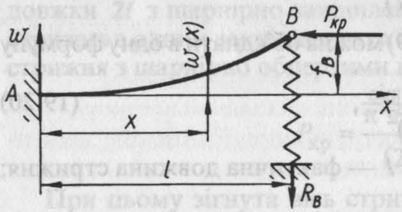


Рис. 510

при $x=0$

$$w(0)=w_A=0; \tag{19.24}$$

$$\frac{dw}{dx}=\Theta(0)=\Theta_A=0; \tag{19.25}$$

при $x=l$

$$w(l)=w_B=f_B. \tag{19.26}$$

Використовуючи граничну умову (19.24), з рівняння (19.23) знаходимо

$$D=-f_B\left(1-\frac{c}{P_{\text{кр}}}l\right).$$

Щоб застосувати граничну умову (19.25), обчислимо похідну від переміщення w:

$$\frac{dw}{dx}=kC\cos kx-kD\sin kx+\frac{c}{P_{\text{кр}}}f_B,$$

звідки при $x=0$

$$kC+\frac{c}{P_{\text{кр}}}f_B=0, \quad \text{або} \quad C=-\frac{c}{kP_{\text{кр}}}f_B.$$

Підставивши добуті вирази для довільних сталих у формулу (19.23), дістанемо остаточне рівняння зігнутої осі стиснутого стрижня:

$$w(x)=-\frac{c}{kP_{\text{кр}}}f_B\sin kx-f_B\left(1-\frac{c}{P_{\text{кр}}}l\right)\cos kx+f_B\left(1-\frac{c}{P_{\text{кр}}}l\right)+\frac{cf_B}{P_{\text{кр}}}x. \tag{19.27}$$

Граничну умову (19.26) використаємо, щоб вивести рівняння, яке дає змогу визначити критичне навантаження. Поклавши в рівнянні (19.27) $x=l$, знаходимо, що

$$w(l)=-\frac{c}{kP_{\text{кр}}}f_B\sin kl-f_B\left(1-\frac{c}{P_{\text{кр}}}l\right)\cos kl+f_B\left(1-\frac{c}{P_{\text{кр}}}l\right)+\frac{c}{P_{\text{кр}}}f_Bl=f_B,$$

або

$$-\frac{c}{kP_{\text{кр}}}\sin kl-\left(1-\frac{c}{P_{\text{кр}}}l\right)\cos kl=0,$$

звідки

$$\operatorname{tg}kl=kl\left(1-\frac{P_{\text{кр}}}{cl}\right). \tag{19.28}$$

Якщо розв'язати це рівняння, тобто визначити найменший корінь k, то тим самим можна знайти значення критичного навантаження, оскільки

$$P_{\text{кр}}=k^2EJ_{\min}.$$

Розглянемо два граничних випадки. Поклавши $c=0$, матимемо

$$\operatorname{tg}kl=\infty, \quad \text{тобто} \quad kl=\pi/2,$$

і таку розрахункову схему стрижня, коли один кінець (лівий) жорстко закріплений, а інший (правий) вільний. Критична сила

$$P_{\text{кр}}=\frac{\pi^2EJ_{\min}}{(2l)^2}=\frac{\pi^2EJ_{\min}}{4l^2}.$$

Поклавши $c=\infty$ (дуже жорстка опора), дістанемо визначальне рівняння

$$\operatorname{tg}kl=kl, \quad \text{тобто} \quad kl=4{,}493=\pi/0{,}7.$$

Критична сила

$$P_{\text{кр}}=\frac{\pi^2EJ_{\min}}{(0{,}7l)^2},$$

що дає формулу для стрижня, один кінець якого закріплений, а інший — шарнірно обпертий.

Отже, якщо коефіцієнт пружності опори c змінюється від нуля до нескінченності, то це можна врахувати коефіцієнтом зведення ν, який при цьому відповідно змінюється від 2 до 0,7.

§ 119. Поняття про втрату стійкості при напруженнях, що перевищують границю пропорційності

Виведення формули Ейлера ґрунтується на застосуванні диференціального рівняння пружної лінії. Тому скористатися цією формулою можна лише тоді, коли справедливий закон Гука, тобто доки критичне напруження (напруження стискання, що відповідає критичній силі) не перевищує границі пропорційності:

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} \le \sigma_{пц}. \tag{19.29}$$

Дійсно, якщо прямолінійна форма стрижня залишається стійкою й при напруженнях, що перевищують границю пропорційності, то диференціальне рівняння (19.3), що передбачає справедливість закону Гука, вже непридатне.

Виведемо формулу для критичного напруження $\sigma_{кр}$. Відповідно до виразів (19.29) та (19.20)

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{F(\nu l/l)^2} = \frac{\pi^2 E}{(\nu l/l)^2}. \tag{19.30}$$

Тут $i^2 = i^2_{min} = J_{min} / F$ — квадрат найменшого з головних радіусів інерції стрижня; $F = F_{бр}$ — площа брутто поперечного перерізу стрижня. Ввівши безрозмірну величину

$$\lambda = \nu l / i, \tag{19.31}$$

що називається *гнучкістю стрижня,* остаточно знайдемо

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \tag{19.32}$$

тобто критичне напруження стрижня залежить тільки від пружних властивостей матеріалу (модуля пружності E) та гнучкості стрижня λ.

Функціональна залежність (19.32) становить видозміну формули Ейлера. У системі координат $\sigma_{кр} \approx \lambda$ цю залежність можна подати у вигляді гіперболічної кривої, що зветься *гіперболою Ейлера.* Як приклад наведемо такий графік (рис. 511) для стрижня зі сталі марки Ст3, для якої модуль пружності $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ МПа, границя текучості $\sigma_т = 240$ МПа, а границя пропорційності $\sigma_{пц} = 200$ МПа. Графік показує, що в міру зростання гнучкості стрижня критичне напруження прямує до нуля, і навпаки, в міру наближення гнучкості стрижня до нуля критичне напруження прямує до нескінченності.

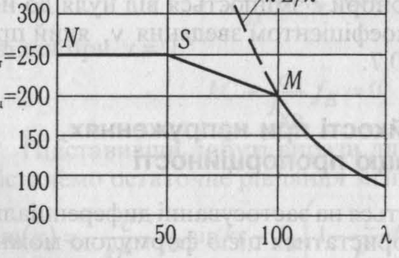


Рис. 511

Однак з умови (19.29) застосованості формули Ейлера відповідно до формули (19.32) маємо

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \le \sigma_{пц},$$

і, отже,

$$\lambda_{гр} \ge \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}. \tag{19.33}$$

Це означає, що формула Ейлера стає непридатною при гнучкості стрижня, меншій за граничне значення $\lambda_{гр}$, яке залежить тільки від властивостей матеріалу, тобто в розглядуваному прикладі при

$$\lambda < \lambda_{гр} = \sqrt{\frac{3{,}14^2 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5}{200}} \approx 100.$$

Те саме можна дістати і графічно. Якщо на осі ординат $(\sigma_{кр})$ відкласти значення границі пропорційності $\left(\sigma_{пц} = 200 \text{ МПа}\right)$ і провести зі здобутої точки K пряму, паралельну осі абсцис, то вона в перетині з гіперболою Ейлера дасть точку M, абсциса якої і є $\lambda_{гр}$. Ліворуч від точки M гіперболу Ейлера зображено штриховою лінією, оскільки вона тут дає значення напружень вищі за границю пропорційності, тобто такі, що не відповідають умовам її застосування.

Проте явище поздовжнього згинання продовжує існувати й за границею пружності. Дослідами встановлено, що дійсні критичні напруження для стрижнів середньої та малої гнучкості $\lambda < \lambda_{гр}$ менші, ніж визначені за формулою Ейлера. Отже, в цьому разі формула Ейлера дає завищені значення критичної сили, тобто завжди переоцінює дійсну стійкість стрижня. Тому *використання формули Ейлера для стрижнів, що втрачають стійкість за границею пружності, не тільки принципово неправильне, а й дуже небезпечне за своїми наслідками.*

Теоретичне розв'язання задачі про стійкість за границею пропорційності складне, тому зазвичай користуються емпіричними формулами, здобутими в результаті обробки багатьох дослідних даних.

Ф. С. Ясинський зібрав та обробив великий дослідний матеріал щодо поздовжнього згинання стрижнів, у результаті чого склав таблицю критичних напружень залежно від гнучкості для низки матеріалів та запропонував просту емпіричну формулу для обчислення критичних напружень за границею пропорційності:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda. \tag{19.34}$$

Значення коефіцієнтів a та b для деяких матеріалів наведено в табл. 19.

Для чавуну користуються параболічною залежністю

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda + c\lambda^2, \tag{19.35}$$

де $c = 0{,}53$.

Таблиця 19

Матеріал	$\lambda_{гр}$	a	b
		МПа	
Ст2, Ст3	100	310	1,14
Ст5	100	464	3,26
Сталь 40	90	321	1,16
Крементиста сталь	100	589	3,82
Деревина (сосна)	110	29,3	0,194
Чавун	80	776	12,0

За цими даними для кожного матеріалу при $0 < \lambda < \lambda_{гр}$ можна побудувати графік залежності критичних напружень від гнучкості стрижня.

За деяким значенням гнучкості (позначимо його λ_0) напруження $\sigma_{кр}$, обчислене за формулою (19.34) або (19.35), стає таким, що дорівнює граничному напруженню при стисканні, а саме:
для пластичних матеріалів

$$\sigma_{кр} = \sigma_т,$$

а для крихких матеріалів

$$\sigma_{кр} = \sigma_в. \tag{19.36}$$

Стрижні, в яких $\lambda < \lambda_0$, називають *стрижнями малої гнучкості.* Їх розраховують тільки на міцність.

У розглядуваному прикладі (рис. 511) частина графіка критичних напружень за границею пропорційності (при $50 < \lambda < 100$) має вигляд злегка нахиленої прямої SM, а частина (при $0 < \lambda < 50$) — горизонтальної лінії NS. Отже, графік $\sigma_{кр} = f(\lambda)$ для сталі Ст3 складається з трьох частин: гіперболи Ейлера при $\lambda > 100$, похилої прямої при $50 < \lambda < 100$ та майже горизонтальної прямої при $\lambda < 50$. Похила пряма SM відповідає напруженням між границею пропорційності і границею текучості. Горизонтальна пряма SN відповідає напруженню, що дорівнює границі текучості.

§ 120. Розрахунки на стійкість за допомогою коефіцієнтів зменшення основного допустимого напруження

Можна вважати, що центрально стиснуті стрижні втрачають свою несівну здатність від втрати стійкості раніше, ніж від втрати міцності, оскільки критичне напруження завжди менше за границю текучості або границю міцності:

$$\sigma_{кр} < \sigma_н,$$

де $\sigma_н = \sigma_т$ — для пластичних матеріалів; $\sigma_н = \sigma_в$ —для крихких матеріалів.

Слід нагадати, що для стрижнів малої гнучкості $(\lambda < \lambda_0)$ важко казати про явище втрати стійкості прямолінійної форми стрижня, як це має місце для стрижнів середньої та великої гнучкості. Несівна здатність стрижнів малої гнучкості визначається міцністю матеріалу.

Критичне напруження для центрально стиснутих стрижнів середньої та великої гнучкості, мабуть, більш небезпечне, ніж границя текучості для пластичних матеріалів або границя міцності для крихких матеріалів при простому розтяганні. Очевидно, що при практичному вирішенні питання щодо стійкості стрижня не можна припустити виникнення в ньому критичного напруження, а слід взяти відповідний запас стійкості.

Щоб визначити допустиме напруження на стійкість, треба вибрати коефіцієнт запасу $n_{ст}$. Тоді

$$[\sigma_{ст}] = \sigma_{кр} / n_{ст}. \tag{19.37}$$

Коефіцієнт запасу на стійкість беруть дещо більший, ніж основний коефіцієнт запасу на міцність ($n_{ст} > n$). Це обумовлено тим, що для центрально стиснутих стрижнів низка обставин, неминучих на практиці (ексцентриситет прикладання стискальних сил, початкова кривина і неоднорідність стрижня), сприяють поздовжньому згинанню, тоді як при інших видах деформації ці обставини майже не відбиваються. Коефіцієнт запасу стійкості для сталей вибирають у межах 1,8...3,0; для чавуну — 5,0....5,5; для деревини — 2,8...3,2. Зазначимо, що менші значення $n_{ст}$ вибирають для більшої гнучкості.

Допустиме напруження на стійкість $[\sigma_{ст}] = \sigma_{кр} / n_{ст}$ та допустиме напруження на міцність при стисканні $[\sigma_-] = \sigma_н / n$ взаємно пов'язані. Складемо відношення їх:

$$\frac{[\sigma_{ст}]}{[\sigma_-]} = \frac{\sigma_{кр}}{n_{ст}} \frac{n}{\sigma_н}, \quad \text{або} \quad [\sigma_{ст}] = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_н} \frac{n}{n_{ст}} [\sigma_-]. \tag{19.38}$$

Позначивши

$$\frac{\sigma_{кр}}{\sigma_н} \frac{n}{n_{ст}} = \varphi,$$

матимемо

$$[\sigma_{ст}] = \varphi [\sigma_-]. \tag{19.39}$$

Тут φ — коефіцієнт зменшення основного допустимого напруження при розрахунку на стійкість. Цей коефіцієнт для кожного матеріалу можна обчислити при всіх значеннях гнучкості λ й подати у вигляді таблиці або графіка залежності φ від λ. Значення коефіцієнта φ для сталей, чавуну та деревини наведено в табл. 20. Користуючись аналогічними таблицями, можна досить просто розрахувати стрижні на стійкість.

Таблиця 20

Гнучкість λ	Коефіцієнт φ				Гнучкість λ	Коефіцієнт φ			
	Ст2 Ст3 Ст4	Ст5	Чавун	Деревина		Ст2 Ст3 Ст4	Ст5	Чавун	Деревина
0	1,00	1	1	1					
10	0,99	0,98	0,97	0,99	110	0,52	0,43	—	0,25
20	0,96	0,95	0,91	0,97	120	0,45	0,36	—	0,22
30	0,94	0,92	0,81	0,93	130	0,40	0,33	—	0,18
40	0,92	0,89	0,69	0,87	140	0,36	0,29	—	0,16
50	0,89	0,86	0,57	0,80	150	0,32	0,26	—	0,14
60	0,86	0,82	0,44	0,71	160	0,29	0,24	—	0,12
70	0,81	0,76	0,34	0,60	170	0,26	0,21	—	0,11
80	0,75	0,70	0,26	0,48	180	0,23	0,19	—	0,10
90	0,69	0,62	0,20	0,38	190	0,21	0,17	—	0,09
100	0,60	0,51	0,16	0,31	200	0,19	0,16	—	0,08

Складемо умову стійкості стиснутих стрижнів:

$$\sigma \le |\sigma_{ст}|. \qquad (19.40)$$

Оскільки

$$\sigma = N / F_{бр}, \quad а \quad [\sigma_{ст}] = \varphi[\sigma_-],$$

то умова стійкості набирає вигляду

$$\sigma = N / F_{бр} \le \varphi[\sigma_-]. \qquad (19.41)$$

При розрахунку на стійкість місцеві ослаблення перерізу практично не змінюють значення критичної сили, тому в розрахункові формули вводиться повна площа $F_{бр}$ поперечного перерізу.

Розглянемо два види розрахунку на стійкість стиснутих стрижнів — перевірний та проектувальний.

Перевірний розрахунок стиснутих стрижнів. Порядок перевірного розрахунку на стійкість при використанні таблиці коефіцієнтів φ такий:

1) виходячи з відомих розмірів та форми поперечного перерізу, визначаємо найменший осьовий момент інерції $J_{\min}$, площу $F_{бр}$, обчислюємо мінімальний радіус інерції

$$i_{\min} = \sqrt{J_{\min} / F_{бр}}$$

та гнучкість

$$\lambda = \nu l / i_{\min};$$

2) за таблицею знаходимо коефіцієнт φ та обчислюємо допустиме напруження на стійкість за формулою

$$[\sigma_{ст}] = \varphi[\sigma_-];$$

3) порівнюємо дійсне напруження $\sigma = P / F_{бр}$ з допустимим напруженням $\sigma_{ст}$ на стійкість:

$$\sigma \le [\sigma_{ст}].$$

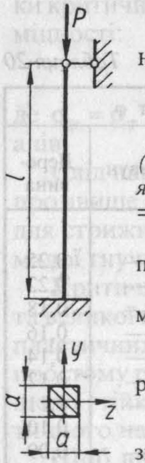


Рис. 512

Приклад 75. *Перевіримо на стійкість стиснуту дерев'яну колону (рис. 512) квадратного поперечного перерізу (a =15 см) завдовжки l = 5 м, якщо основне допустиме напруження [σ₋]=10 МПа, а стискальна сила P = = 100 кН.*

Визначаємо такі величини:

площу —

$$F = a^2 = 225 \text{ см}^2;$$

момент інерції —

$$J = \frac{a^4}{12} = \frac{15^4}{12} \text{ см}^4 = 4210 \text{ см}^4;$$

радіус інерції —

$$i = \sqrt{J / F} = a / \sqrt{12} = 4{,}34 \text{ см};$$

зведену довжину

$$l_{зв} = \nu l = 0{,}7 l = 0{,}7 \cdot 5 \text{ м} = 3{,}5 \text{ м} = 350 \text{ см};$$

гнучкість —

$$\lambda = \frac{\nu l}{i} = \frac{350}{4{,}34} = 80{,}6.$$

За табл. 20 інтерполяцією знаходимо, що

$$\varphi = 0{,}48 - \frac{0{,}48 - 0{,}38}{10} 0{,}6 = 0{,}474.$$

Тоді

$$[\sigma_{ст}] = \varphi[\sigma_-] = 0{,}474 \cdot 10{,}0 = 4{,}74 \text{ МПа};$$

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{100 \cdot 10^{-3}}{225 \cdot 10^{-4}} \text{ МПа} = 4{,}44 \text{ МПа}.$$

Оскільки $\sigma = 4{,}44 \text{ МПа} < 4{,}74 \text{ МПа}$, то стійкість колони забезпечено.

Проектувальний розрахунок. У розрахунковій формулі на стійкість

$$\sigma = \frac{P}{\varphi F_{бр}} \le [\sigma_-], \quad \text{або} \quad F_{бр} \ge \frac{P}{\varphi[\sigma_-]}, \qquad (19.42)$$

є дві невідомі величини — коефіцієнт φ та шукана площа брутто $F_{бр}$ поперечного перерізу. Тому при доборі перерізів слід користуватися методом послідовних наближень, варіюючи значення коефіцієнта φ. Як правило, в першій спробі беруть $\varphi_1 = 0{,}5 \ldots 0{,}6$. Вибираючи будь-яке з цих значень φ_1, визначають потрібну площу $F_{бр}$ та добирають переріз. Вибраний переріз перевіряють та визначають фактичне значення φ_1'. Якщо φ_1' значно відрізняється від φ_1, то й напруження відрізняється від допустимого. Тоді слід повторити розрахунок, тобто зробити другу спробу, взявши середнє за модулем значення між φ_1 та φ_1':

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2}. \qquad (19.43)$$

У результаті другої спроби визначають φ_2. Якщо потрібна третя спроба, то

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2'}{2}$$

і т. д. Як правило, при доборі перерізів потрібно не більше ніж дві-три спроби.

Приклад 76. *Доберемо за сортаментом двотавровий поперечний переріз стрижня завдовжки 5 м, що зазнає дії центрального стискального навантаження 320 кН. Обидва кінці стрижня затиснуті. Матеріал — Ст3. Основне допустиме напруження [σ₋] = 160 МПа.*

Визначимо розрахункову зведену довжину стрижня:

$$l_{зв} = \nu l = 0{,}5 \cdot 500 \text{ см} = 250 \text{ см}.$$

Добираємо поперечний переріз за методом послідовних наближень.

Перша спроба: вибираємо $\varphi_1 = 0{,}5$; потрібна площа поперечного перерізу

$$F = \frac{P}{\varphi[\sigma_-]} = \frac{320}{0{,}5 \cdot 1{,}6 \cdot 10^5} \text{ м}^2 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 40 \text{ см}^2.$$

За сортаментом вибираємо двотавр № 27 з площею $F = 40,2$ см^2 та мінімальним радіусом інерції $i_{min} = i_{ст} = 2,54$ см. Гнучкість стрижня

$$\lambda = \frac{l_{зв}}{i_{min}} = \frac{250}{2,54} = 98,5.$$

За табл. 20 при лінійній інтерполяції

$$\varphi_1' = 0,69 - \frac{0,69 - 0,60}{10} 8,5 = 0,614 \gg \varphi_1 = 0,5.$$

Перейдемо до другого наближення, взявши $\varphi_2 = \frac{0,5 + 0,614}{2} \approx 0,557$. Потрібна площа поперечного перерізу стрижня

$$F = \frac{320}{0,557 \cdot 1,6 \cdot 10^5} \text{ м}^2 = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 36 \text{ см}^2.$$

За сортаментом вибираємо двотавр № 24а з площею $F = 37,5$ см^2 та мінімальним радіусом інерції $i_{min} = i_{от} = 2,63$ см. Гнучкість стрижня

$$\lambda = \frac{l_{зв}}{i_{min}} = \frac{250}{2,63} = 95.$$

За табл. 20 знаходимо коефіцієнт φ_2':

$$\varphi_2' = 0,69 - \frac{0,69 - 0,60}{60} 5 = 0,645 \gg \varphi_2 = 0,557.$$

Переходимо до третього наближення, взявши

$$\varphi_3 = \frac{0,557 + 0,645}{2} \approx 0,60.$$

Обчислюємо потрібну площу:

$$F = \frac{320}{0,60 \cdot 1,6 \cdot 10^5} \text{ м}^2 = 3,33 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 33,3 \text{ см}^2.$$

За сортаментом вибираємо двотавр № 24 з площею $F = 34,8$ см^2 та мінімальним радіусом інерції $i_{min} = i_{ст} = 2,37$ см. Гнучкість стрижня

$$\lambda = \frac{l_{зв}}{i_{min}} = \frac{250}{2,37} = 105.$$

Для $\lambda = 105$ коефіцієнт

$$\varphi_2 = 0,60 - \frac{0,60 - 0,52}{10} 5 = 0,56.$$

Обчислимо напруження:

$$\sigma = \frac{P}{\varphi F} = \frac{320 \cdot 10^{-3}}{0,56 \cdot 34,8 \cdot 10^{-4}} \text{ МПа} = 164 \text{ МПа}.$$

Перенапруження становить

$$\frac{164 - 160}{160} 100\,\% \approx 2,5\,\%.$$

Остаточно вибираємо для стрижня двотавр № 24.

§ 121. Про добір матеріалу і раціональних форм поперечних перерізів для стиснутих стрижнів

Для стрижнів великої гнучкості $\left(\lambda \geq \lambda_{гр}\right)$, якщо критичні напруження не перевищують границі пропорційності матеріалу, модуль пружності E є єдиною механічною характеристикою, що визначає опірність стрижня втраті стійкості. У цьому разі недоцільно застосовувати сталь підвищеної міцності, оскільки модулі E для різних сталей практично однакові.

Для стрижнів малої гнучкості застосування спеціальних високосортних сталей доцільне, оскільки в цьому разі підвищення границі текучості сталі збільшує критичне напруження, а отже, і запас стійкості.

З погляду економічності раціональніша така форма поперечного перерізу стрижня, при якій найменший радіус інерції i_{min} при певній площі є найбільшим. Для зручності порівняння різних перерізів введемо безрозмірну характеристику

$$i_{min} / \sqrt{F} = \xi,$$

яку можна назвати питомим радіусом інерції. Нижче наведено значення ξ для деяких перерізів:

Переріз	ξ
Трубчастий ($\alpha^* = 0,95...0,8$)	2,25...1,64
>> ($\alpha = 0,7...0,8$)	1,2...1,00
Кутник	0,5...0,3
Двотавр	0,41...0,27
Швелер	0,41...0,29
Квадрат	0,289
Коло	0,293
Прямокутник ($h = 2b$)	0,204

$^*\alpha = d_в / d_з$.

Аналіз даних свідчить, що найраціональніші трубчасті тонкостінні перерізи. Так само раціональні й коробчасті тонкостінні перерізи. Однак слід зазначити, що при проектуванні тонкостінних трубчастих та коробчастих перерізів потрібно передбачати встановлення діафрагм (ребер жорсткості) на певних відстанях уздовж стрижня. Ці діафрагми перешкоджають появі місцевих деформацій (жолобленню стінок). Найменш раціональні суцільні прямокутні перерізи.

При розрахунку стиснутих стрижнів на стійкість слід прагнути до того, щоб вони були рівностійкими в усіх напрямах. Для цього проектувати перерізи треба так, щоб моменти інерції були по можливості однаковими. Трубчасті перерізи раціональні й з цієї точки зору. Цьому критерію відповідають також квадратні та круглі перерізи. Нераціонально застосовувати двотаврові перерізи та перерізи у формі прямокутника.

Однак якщо зведені довжини в головних площинах різні, то й головні моменти інерції також слід проектувати різними, з тим щоб гнучкості стрижнів в обох головних площинах були однаковими або хоча б близькими між собою. Якщо не вдається зробити гнучкості однаковими, то розраховувати слід за максимальною гнучкістю.

§ 122. Поздовжньо-поперечне згинання

Згинання прямого бруса зветься *поздовжньо-поперечним*, якщо в його поперечних перерізах виникають згинальні моменти як від поздовжніх, так і від поперечних навантажень (рис. 513). При розрахунку на поздовжньо-поперечне згинання згинальні моменти в поперечних перерізах обчислюють з урахуванням прогинів осі бруса:

$$|M_п| = |M| + |Sw_п|, \tag{19.44}$$

де $M_п$ — повний згинальний момент; M — момент від поперечного навантаження; $Sw_п$ — додатковий згинальний момент від дії осьової сили S.

Обчислення повного згинального моменту $M_п$ ускладнюється тим, що в цьому разі принцип незалежності дії сил застосувати не можна. Дійсно, повний прогин $w_п$ можна розглядати як такий, що складається з прогину w, спричиненого дією тільки одного поперечного навантаження, та додаткового прогину $w_п - w$, спричиненого силою S. Очевидно, що коли осьові сили стискальні, повний прогин більший за прогин від одного тільки поперечного навантаження.

Точний спосіб розрахунку. Визначення повного згинального моменту $M_п$ за цим способом проілюструємо на консольній балці (рис. 514). Нехай на балку діє стискальна сила S та поперечні навантаження: момент M_0 та сила P_0, прикладені на вільному кінці, який збігається з початком координат.

У цьому разі диференціальне рівняння (10.44) пружної лінії запишеться так:

$$\frac{d^2 w_п(x)}{dx^2} = \frac{M_п(x)}{EJ}, \tag{19.45}$$

де $M_п(x)$ — повний згинальний момент у довільному перерізі балки.

При складанні виразу $M_п(x)$, який підставляється в праву частину рівняння (19.45), для згинальних моментів, спричинених поперечним на-

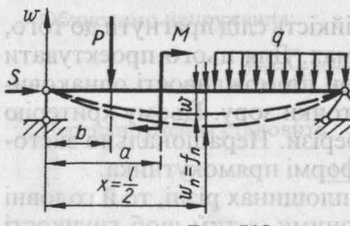


Рис. 513

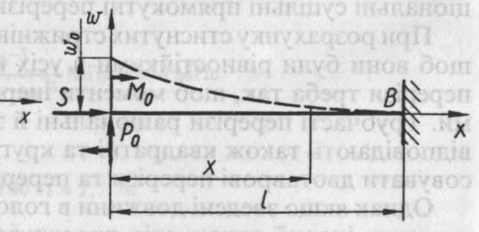


Рис. 514

вантаженням, зберігається звичайне правило знаків, а момент від стискальної сили S записується зі знаком «мінус», оскільки d^2w/dx^2 та w завжди мають протилежні знаки. Для нашого прикладу вираз (19.44) слід переписати так:

$$M_п(x) = M(x) - Sw_п = M_0 + P_0 x + S(w_0 - w_п). \tag{19.46}$$

Продиференціювавши вираз (19.46) по x двічі, матимемо

$$\frac{d^2 M_п(x)}{dx^2} = -S\frac{d^2 w_п(x)}{dx^2}. \tag{19.47}$$

Підставивши сюди вираз для $d^2w_п/dx^2$ із рівняння (19.45), запишемо

$$\frac{d^2 M_п(x)}{dx^2} = -S\frac{M_п(x)}{EJ}. \tag{19.48}$$

Ввівши позначення

$$\frac{S}{EJ} = k^2, \tag{19.49}$$

дістанемо диференціальне рівняння для згинальних моментів:

$$\frac{d^2 M_п(x)}{dx^2} + k^2 M_п(x) = 0. \tag{19.50}$$

Загальний інтеграл рівняння (19.50) буде такий:

$$M_п(x) = A\cos kx + B\sin kx. \tag{19.51}$$

Продиференціювавши рівняння (19.51) по x, дістанемо рівняння для поперечних сил:

$$Q_п(x) = -Ak\sin kx + Bk\cos kx. \tag{19.52}$$

Фізичний зміст сталих інтегрування визначимо, розглядаючи початкові умови:

при $x = 0$ $\qquad M_п(0) = A; \qquad (19.53)$

$\qquad\qquad\qquad Q_п(0) = Bk. \qquad (19.54)$

Ці початкові значення $M_п$ та $Q_п$ назвемо початковими параметрами і позначимо через $M_{поч}$ та $Q_{поч}$ відповідно. Тоді рівняння згинальних моментів при поздовжньо-поперечному згинанні набере вигляду

$$M_п(x) = M_{поч}\cos kx + \frac{Q_{поч}}{k}\sin kx. \tag{19.55}$$

Щоб здобути загальне рівняння для згинальних моментів при дії стискальної сили та різних зосереджених або розподілених зовнішніх навантажень, можна застосувати метод початкових параметрів. Дійсно, рівняння (19.55) складено з урахуванням одночасної дії поздовжньої сили та поперечних навантажень і, отже, тут можна застосувати принцип незалежності та додавання дії сил.

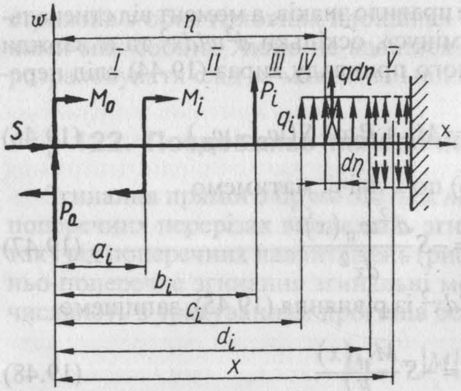


Рис. 515

Розглянемо балку, навантажену такими поперечними навантаженнями (рис. 515): силами P_0 та P_i, моментами M_0 та M_i, розподіленим навантаженням q_i. Прикладемо також стискальну осьову силу S.

Щоб знайти вираз для згинальних моментів $M_{\text{п}}(x)$ на крайній правій (тобто V) ділянці балки, міркуватимемо так. Спочатку припустимо, що ніяких навантажень (P_i, M_i та q_i), за винятком початкових, немає. Тоді момент $M_{\text{п}}(x)$ виражатиметься як функція від початкових параметрів $M_{\text{поч}}$, $Q_{\text{поч}}$ та абсциси x за формулою (19.55). Нехай тепер початкові параметри дорівнюють нулю, але діють зосереджені навантаження P_i та M_i. Виходячи з геометричного та статичного змісту цих силових факторів, приходимо до висновку, що їх можна вибрати за нові початкові параметри, якщо перемістити початок координат відповідно розміщенню цих силових факторів — у точки з абсцисами a_i чи b_i відповідно. Тоді аргументами тригонометричних функцій у формулі (19.55) будуть відрізки

$$(x-a_i);\ (x-b_i),$$

і рівняння для згинальних моментів набере вигляду

$$M_{\text{п}}(x)=M_i\cos k(x-a_i)+\frac{P_i}{k}\sin k(x-b_i). \tag{19.56}$$

Якщо сил та моментів на ділянці x кілька (m), то слід ввести суми. Тоді матимемо

$$M_{\text{п}}(x)=\sum_{i=1}^{m}M_i\cos k(x-a_i)+\sum_{i=1}^{m}\frac{P_i}{k}\sin k(x-b_i). \tag{19.57}$$

При дії розподіленого навантаження $q(x)$ друга складова перетворюється на інтеграл від елементарних силових факторів $qd\eta$ (рис. 515):

$$\int_c^d\frac{q}{k}\sin k(x-\eta)\,d\eta=\frac{q}{k^2}\left[\cos k(x-d)-\cos k(x-c)\right]. \tag{19.58}$$

Ураховуючи одночасну дію всіх зазначених силових факторів, у тому числі й початкових параметрів $M_{\text{поч}}$ та $Q_{\text{поч}}$, здобудемо універсальне рівняння для моментів при поздовжньо-поперечному згинанні:

$$\begin{aligned}M_{\text{п}}(x)&=M_{\text{поч}}\cos kx+\frac{Q_{\text{поч}}}{k}\sin kx+\sum M_i\cos k(x-a_i)+\\&+\sum\frac{P_i}{k}\sin k(x-b_i)+\sum\frac{q_i}{k^2}\left[\cos k(x-d_i)-\cos k(x-c_i)\right].\end{aligned} \tag{19.59}$$

Продиференціювавши це рівняння по x, дістанемо рівняння для поперечних сил:

$$\begin{aligned}Q_{\text{п}}(x)&=-M_{\text{поч}}k\sin kx+Q_{\text{поч}}\cos kx-\sum M_i\,k\sin k(x-a_i)+\\&+\sum P_i\cos k(x-b_i)-\sum\frac{q_i}{k}\left[\sin k(x-d_i)-\sin k(x-c_i)\right].\end{aligned} \tag{19.60}$$

Порядок застосування цих рівнянь для розв'язання задач принципово такий самий, що і в розглянутих раніше прикладах застосування початкових параметрів (див. розд. 10).

Початкові параметри визначаються з крайових умов балки. Загальний вигляд цих умов такий:

а) для шарнірно обпертої балки

$$M_{\text{п}}(0)=M_{\text{поч}}(0); \tag{19.61}$$

$$M_{\text{п}}(l)=M_{\text{поч}}(l) \tag{19.62}$$

за відсутності зовнішніх моментів на кінцях балки ($M(0)=M(l)=0$);

б) для консольної балки з лівим затиснутим кінцем

$$M_{\text{п}}(l)=M_{\text{поч}}(l); \tag{19.63}$$

$$Q_{\text{п}}(0)=Q_{\text{поч}}(0); \tag{19.64}$$

в) для консольної балки із затисненням праворуч

$$M_{\text{п}}(0)=M_{\text{поч}}(0); \tag{19.65}$$

$$Q_{\text{п}}(l)=Q_{\text{поч}}(l); \tag{19.66}$$

Нагадуємо, що тут $M(0)$, $M(l)$ та $Q(l)$ — моменти та поперечні сили в кінцевих перерізах балки тільки від поперечного навантаження.

Умови (19.64) та (19.66) випливають з того, що в місці затиснення поздовжня сила S не дає поперечної складової, оскільки дотична до осі балки ту горизонтальна.

Після того як знайдено початкові параметри $M_{\text{поч}}$ та $Q_{\text{поч}}$, легко визначити загальний (повний) згинальний момент $M_{\text{п}}$ у будь-якому перерізі балки. Знаючи згинальні моменти, можемо обчислити найбільше нормальне напруження:

$$\sigma_{\max}=\frac{S}{F}+\frac{M_{\text{п}\max}}{S}. \tag{19.67}$$

Для визначення прогинів скористаємося рівнянням (19.44), звідки знайдемо

$$w_{\text{п}}(x)=\frac{M_{\text{п}}(x)-M(x)}{S}. \tag{19.68}$$

Приклад 77. *Вибравши для балки (див. рис. 514) такі навантаження: $S=100P_0$; $M_0=2P_0l$; $P_0=2{,}5$ кН, визначимо найбільші нормальні напруження в перерізі B, якщо $l=200$ см. Поперечний переріз квадратний площею $F=10\times10$ см^2; $J=a^4/12=835$ см^4; $W=a^3/6=167$ см^3; $E=2\cdot10^5$ МПа.*

Складаємо рівняння моментів та поперечних сил:

$$M_{п}(x) = M_{поч}\cos kx + \frac{1}{k}Q_{поч}\sin kx;$$

$$Q_{п}(x) = -M_{поч}k\sin kx + Q_{поч}\cos kx.$$

Граничні умови розглядуваної балки такі:

$$M_{п}(0) = M_0 = 2P_0 l;\; Q_{п}(l) = Q(l) = P_0.$$

З першої граничної умови знаходимо

$$M_{п}(0) = M_{поч} = 2P_0 l.$$

Друга гранична умова дає

$$Q_{п}(l) = -2P_0 lk\sin kl + Q_{поч}\cos kl = P_0,$$

звідки

$$Q_{поч} = \frac{P_0 + 2P_0 lk\sin kl}{\cos kl}.$$

Тепер запишемо остаточний вираз для $M_{п}(x)$:

$$M_{п}(x) = 2P_0 l\cos kx + \frac{\frac{P_0}{k} + 2P_0 l\sin kl}{\cos kl}\sin kx.$$

Оскільки нам треба визначити згинальний момент $M_{п}$ у перерізі B, то при

$$k = \sqrt{\frac{S}{EJ}} = \sqrt{\frac{100\cdot 2{,}5\cdot 10^{-3}}{2\cdot 10^5\cdot 835\cdot 10^{-8}}}\ \text{м}^{-1} = 3{,}873\cdot 10^{-3}\ \text{см}^{-1};$$

$$\sin kl = \sin 200k = \sin 0{,}775 = 0{,}700;$$

$$\cos kl = \cos 200k = \cos 0{,}775 = 0{,}713;$$

$$\text{tg}\, kl = \text{tg}\, 200k = \text{tg}\, 0{,}775 = 0{,}983$$

знайдемо

$$M_{п}(l) = M_B = 2P_0 l\left[\cos kl + \left(\frac{1}{2kl} + \sin kl\right)\text{tg}\, kl\right] = 20{,}35\ \text{кН}\cdot\text{м}.$$

Найбільше напруження обчислюємо за формулою (19.67)

$$\sigma_{max} = 25 + 121{,}9\ \text{МПа} = 146{,}9\ \text{МПа}.$$

Наближений розрахунок. У практичних розрахунках поширені наближені способи розв'язання, які ґрунтуються на припущенні, що зігнута вісь балки при поперечному навантаженні набирає форми синусоїди, тобто

$$w(x) \approx f\sin\frac{\pi x}{l}. \tag{19.69}$$

За наявності поздовжньої сили також наближено вважають, що

$$w_{п}(x) \approx f_{п}\sin\frac{\pi x}{l}. \tag{19.70}$$

Це припущення дає змогу добути практично досить точні результати для шарнірно обпертих балок при дії поперечних навантажень, напрямлених в один бік, особливо якщо деформація балки виявляється симетричною відносно її середини, де $w_{п}(l/2) \approx f_{п}$.

Диференціальне рівняння пружної лінії

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ_{min}} \tag{19.71}$$

при поздовжньо-поперечному згинанні балки з урахуванням виразу (19.46) запишеться так:

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ} - \frac{Sw_{п}}{EJ}. \tag{19.72}$$

Виключивши із рівнянь (19.71) та (19.72) $M(x)$ та врахувавши припущення (19.69) та (19.70), знаходимо

$$(f_{п} - f)\frac{d^2}{dx^2}\sin\frac{\pi x}{l} = -\frac{S}{EJ}f_{п}\sin\frac{\pi x}{l}. \tag{19.73}$$

Тоді після диференціювання

$$\frac{\pi^2}{l^2}(f_{п} - f) = \frac{S}{EJ}f_{п}. \tag{19.74}$$

Введемо позначення

$$\frac{\pi^2 EJ}{l^2} = P_{е} \tag{19.75}$$

та назвемо $P_{е}$ ейлеровою силою. Ця сила чисельно дорівнює $P_{кр}$, яка визначається за формулою (19.14). Із рівняння (19.74) знайдемо вираз для прогину посередині прогону балки при спільній дії поздовжнього та поперечного навантажень:

$$f_{п} = \frac{f}{1 - S/P_{е}}. \tag{19.76}$$

Застосовуючи цю формулу, слід мати на увазі, що ейлерова сила $P_{е}$, введена виразом (19.75), суто формальна. Тому на відміну від критичної сили $P_{кр}$ сила $P_{е}$ має обчислюватися за формулою (19.14) при будь-якій гнучкості балки (навіть меншій за граничну). Визначаючи ейлерову силу, момент інерції слід брати відносно тієї з головних осей інерції перерізу, яка перпендикулярна до площини дії поперечного навантаження.

Вираз (19.76) застосовують й при інших типах опорних закріплень стиснуто-зігнутих балок. У цьому разі ейлерова сила має обчислюватися за формулою (19.20)

$$P_{е} = \frac{\pi^2 EJ}{(\nu l)^2}.$$

Вираз (19.76) дає задовільні результати, якщо стискальна сила S не перевищує $0{,}8P_{кр}$.

Припускаючи, що згинальні моменти пропорційні прогинам, дістанемо просту формулу для наближеного визначення найбільшого моменту при поздовжньо-поперечному згинанні:

$$M_{п\max} = \frac{M}{1 - S/P_{е}}. \tag{19.77}$$

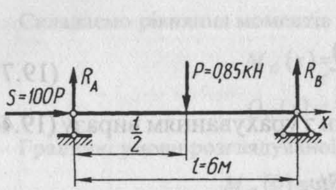


Рис. 516

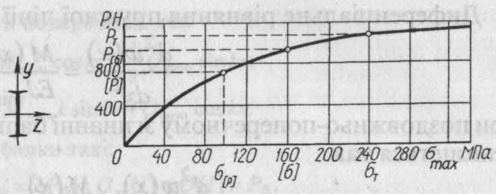


Рис. 517

Тоді для обчислення напружень, згідно з виразами (19.67) та (19.77), дістанемо формулу

$$\sigma_{\text{п max}} = \frac{S}{F} + \frac{M}{W\left(1 - S/P_{\text{е}}\right)}. \tag{19.78}$$

Приклад 78. *Визначимо максимальний момент та найбільше нормальне напруження в балці, яку зображено на рис. 516. Поперечний переріз балки — двотавр № 10; для нього $F = 12$ см^2; $W_z = 39{,}7$ см^3; $J_z = 198$ см^4.*

Обчислюємо $P_{\text{е}}$ за формулою (19.75)

$$P_{\text{е}} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} = \frac{3{,}14 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 198 \cdot 10^{-8}}{6^2} \text{ кН} = 108{,}46 \text{ кН}.$$

Визначимо момент посередині прогону для випадку поперечного згинання:

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Pl}{4} = \frac{0{,}85 \cdot 6}{4} \text{ кН} \cdot \text{м} = 1{,}28 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

а потім за формулою (19.77) знаходимо найбільший момент при поздовжньо-поперечному згинанні:

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{M}{1 - \frac{S}{P_{\text{е}}}} = \frac{1{,}28}{1 - \frac{100 \cdot 0{,}85}{108{,}46}} \text{ кН} \cdot \text{м} = \frac{1{,}28}{1 - 0{,}784} \text{ кН} \cdot \text{м} = 5{,}9 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Найбільше напруження визначаємо за формулою (19.67)

$$\sigma_{\max} = \frac{85 \cdot 10^{-3}}{12 \cdot 10^{-4}} + \frac{5{,}9 \cdot 10^{-3}}{39{,}7 \cdot 10^{-6}} \text{ МПа} = 219{,}4 \text{ МПа}.$$

Визначення допустимого навантаження при поздовжньо-поперечному згинанні. Розрахунок на поздовжньо-поперечне згинання має ту особливість, що напруження при збільшенні навантаження зростає значно швидше, ніж останнє (рис. 517). [Графік на рисунку побудовано за формулою (19.78) відповідно до даних прикладу 78.] Така сама нелінійна залежність напружень від навантажень має місце в будь-якій задачі поздовжньо-поперечного згинання.

Із графіка випливає: якщо для пластичного матеріалу напруження $\sigma_{\max}$ у стрижні дорівнюють допустимим напруженням $[\sigma]$, то забезпечено запас міцності за напруженнями:

$$n_{\sigma} = \sigma_{\text{т}} / [\sigma] = n. \tag{19.79}$$

Здавалося б, що при цьому міцність стиснуто-зігнутої балки забезпечено. Проте з графіка також випливає, що в цьому разі коефіцієнт запасу за навантаженнями значно менший ніж n, тобто

$$n_p = P_{\text{т}} / P_{[\sigma]} < n. \tag{19.80}$$

Це означає, що достатньо незначного збільшення навантаження (на величину $P_{\text{т}} - P_{[\sigma]}$), щоб напруження досягли границі текучості, а це практично відповідає руйнуванню балки. Звідси робимо висновок, що стиснуто-зігнуті балки слід розраховувати не за допустимим напруженням, а за допустимим навантаженням

$$[P] = P_{\text{т}} / n. \tag{19.81}$$

Зрозуміло, що при цьому напруження $\sigma_{\max}$ будуть значно менші за допустимі $[\sigma]$.

Отже, для визначення допустимого навантаження треба спочатку знайти небезпечне (руйнувальне) навантаження $P_{\text{т}}$. Це можна зробити, скориставшись формулою (19.67) або (19.78), якщо припустити, що границя пропорційності та границя текучості збігаються. При застосуванні формули (19.67) з обчисленням $M_{\text{п}}$ точним способом задача розв'язується методом послідовних наближень, при цьому доцільно скористатися побудовою графіка, подібного до зображеного на рис. 517. Застосовуючи формулу (19.78), результат можна здобути скоріше. Для цього достатньо розв'язати квадратне рівняння відносно $P_{\text{т}}$.

Розділ 20 ПРУЖНІ КОЛИВАННЯ

§ 123. Вступ. Класифікація механічних коливань

Вивчення коливальних процесів має дуже важливе значення для різних розділів механіки, фізики та техніки. Вібрація елементів машин та будівельних споруд, електромагнітні коливання в радіотехніці й оптиці, звукові та ультразвукові коливання — всі ці не схожі між собою процеси об'єднуються методами математичної фізики в одне загальне вчення про коливання.

Тут ми обмежимося розглядом тільки механічних коливань, з якими доводиться мати справу в машинобудуванні та інженерному будівництві. Вивчення механічних коливань важливе насамперед для розв'язання задач міцності при змінних напруженнях.

Для того щоб те чи інше тіло здатне було здійснювати коливання, воно повинно мати певні масу та пружність. Якщо пружне тіло (навантажена балка, скручений вал або деформована ресора) буде виведено з положення рівноваги якою-небудь сторонньою причиною (ударом, раптово прикладеною силою), то сила пружності цього тіла в новому положенні вже не зрівноважиться навантаженням, і виникнуть коливання.

Усі коливальні процеси в техніці можна класифікувати за зовнішніми ознаками, формою того закону, за яким певна величина, що бере участь у процесі, змінюється в часі. Таку класифікацію можна назвати *кінематичною*.

Розрізняють два класи коливальних процесів: періодичні та неперіодичні. В теорії коливань істотне значення має проміжний клас — майже періодичні коливання.

Періодичним називається такий процес, при якому коливна величина, взята в будь-який момент часу, через певний відрізок часу T (період) має те саме значення. Математичне означення періодичної функції таке: функція $f(t)$ називається періодичною з періодом T, якщо існує така стала величина T, для якої

$$f(t+T)=f(t)$$

при будь-якому значенні змінної t.

Неперіодичними функціями називаються решта функцій, які не задовольняють зазначену умову.

Майже періодична функція визначається умовою

$$|f_1(t+\tau)-f_1(t)|\le\varepsilon$$

при будь-якому t, де τ та ε — певні сталі величини. Величина τ, що є функцією ε, називається *майже періодом*. Очевидно, якщо ε дуже мале порівняно із середнім модулем функції $f_1(t)$ за час t, то майже періодична функція буде близькою до періодичної.

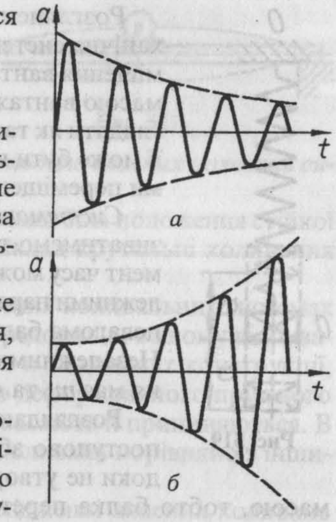


Рис. 518

Серед класу періодичних коливань дуже важливі *гармонічні*, або *синусоїдні*, коливання, при яких фізичні величини з часом змінюються за синусоїдою (або косинусоїдою).

Неперіодичні коливання набагато різноманітніші, ніж періодичні. Найчастіше з неперіодичних коливань мають місце *згасаючі* (або *наростаючі*) коливання. Коливання x, що відбуваються за законом згасаючої синусоїди, або, як іноді їх називають, *згасаючі гармонічні* коливання, зображено на рис. 518, *а*. Математично вони виражаються так:

$$x=A^{-\delta t}\cos(\omega t+\varphi),$$

де A, φ, δ та ω — сталі величини; t — час.

Наростаючі гармонічні коливання зображено на рис. 518, *б*. Математично вони описуються останнім виразом з тією різницею, що має бути змінений знак величини δ на протилежний. Про такі коливання слід було б сказати: згасаючі (або наростаючі) коливання близькі до гармонічних при досить малих значеннях δ. Тому назва «згасаючі синусоїди» або «згасаючі періодичні коливання» не зовсім логічна, оскільки гармонічні коливання не можуть згасати. Однак такий термін у літературі про коливання використовується, і ми теж будемо його застосовувати.

Наведених зовнішніх ознак коливальних процесів, звичайно, недостатньо для систематизації та аналізу можливих типів коливань. Тому їх доцільно класифікувати також за основними фізичними ознаками розглядуваних коливальних систем.

Взагалі пружна система може мати коливання різних типів. Наприклад, струна або балка під час коливань може набирати різних форм залежно від кількості точок перегину, що поділяють довжину розглядуваного стрижневого об'єкта. Досліджуючи коливальні рухи пружних систем, важливо знати, яка кількість незалежних параметрів визначає положення системи в кожний певний момент часу. Кількість таких параметрів називають *числом ступенів вільності.* У найпростіших випадках положення системи може визначатися тільки однією величиною. Такі системи називають *системами з одним ступенем вільності.*

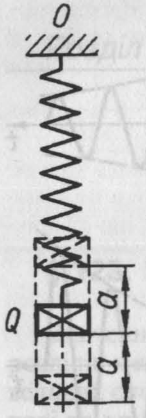


Рис. 519

Розглянемо найпростіший випадок (рис. 519). Якщо механічна система така, що можливі тільки вертикальні переміщення вантажу Q, і якщо маса пружини мала порівняно з масою вантажу Q, то таку коливальну систему можна розглядати як таку, що має один ступінь вільності. Положення її може бути визначене одним параметром — вертикальними переміщеннями вантажу Q, що висить на пружині.

Системою з двома або кількома ступенями вільності називатимемо таку систему, положення якої в довільний момент часу можна охарактеризувати двома або кількома незалежними параметрами. Два ступеня вільності має, наприклад, невагома балка, що несе дві зосереджені маси (рис. 520, *а*). Незалежними параметрами в цьому разі будуть переміщення мас m_1 та m_2 відносно положення рівноваги балки.

Розглядаючи поперечні коливання такої балки, можна поступово збільшувати кількість зосереджених мас доти, доки не утвориться балка з розподіленою по всій довжині масою, тобто балка перетвориться на вагому (рис. 520, *б*). У результаті матимемо *коливальну систему з нескінченним числом ступенів вільності.* При цьому прогин у будь-якому перерізі балки змінюється за певним законом. З одного боку, прогин балки при коливаннях є функцією абсциси x (збігається з віссю балки), а з іншого — неперервною функцією часу t.

Класифікуючи механічні коливання за іншими ознаками, розрізняють такі чотири типи можливих коливань: власні, змушені, параметричні та автоколивання.

Власними (вільними) називаються коливання, які виникають в ізольованій системі внаслідок зовнішнього збудження («поштовхів»), що спричинює в точок системи початкові відхилення від положення рівноваги або початкові швидкості, і тривають потім завдяки внутрішнім пружним силам, які відновлюють рівновагу.

Класичним прикладом власних коливань пружної системи є вертикальні коливання вантажу, підвішеного до кінця пружини (див. рис. 519), якщо верхній кінець її закріплений, а вантаж спочатку відтягнутий вниз, а потім відпущений.

При власних коливаннях характер коливального процесу в основному визначається тільки внутрішніми силами системи, які залежать від її фізичної будови. Потрібна енергія, що забезпечує процес коливань, надходить ззовні в початковий момент збудження коливань. Найбільше значення відхилень вантажу Q від його рівноваги в процесі коливань, тобто амплітуда власних коливань та їхня швидкість, визначаються з початкових умов. При

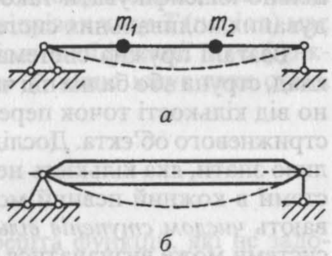


Рис. 520

цьому період коливань (час одного повного коливання) або частота коливань (кількість коливань за секунду), тобто величина, протилежна періоду, залежить від самої системи. Ця величина є певною для кожної системи і називається *частотою власних коливань системи.*

Рис. 521

Власні коливання можуть відбуватися не тільки біля положення стійкої рівноваги, а й відносно стійкого руху, наприклад крутильні коливання рівномірно обертового вала.

Унаслідок того що в усіх реальних механічних коливальних системах діють сили опору коливальному руху (опір середовища, в якому відбуваються коливання, тертя в підшипниках, тертя в з'єднаннях конструкції, сили внутрішнього тертя в матеріалі циклічно деформованого пружного елемента системи), власні коливання завжди згасають й припиняються. В цьому полягає важлива особливість власних коливань порівняно з іншими типами коливальних рухів.

Заради спрощення при теоретичному дослідженні власних коливань на початку розв'язання задачі силами опору, як правило, нехтують.

Змушеними називають коливання пружної системи, які відбуваються при дії на систему (протягом усього періоду коливань) заданих зовнішніх збурювальних сил, що періодично змінюються і діють неперервно незалежно від коливань у системі. Характер коливального процесу при цьому визначається не тільки властивостями системи, а й також істотно залежить від зовнішньої сили.

Прикладом змушених коливань механічної системи можуть бути поперечні коливання балки (рис. 521), що править за опору для електродвигуна, якщо в нього обертові маси не повністю зрівноважені. Період змушених коливань дорівнює періоду зміни збурювальної сили. Амплітуда змушених коливань від початкових умов не залежить.

На відміну від власних змушені коливання не згасають, хоча у механічній системі мають місце сили опору. Це пояснюється тим, що при змушених коливаннях у систему з боку збурювальної сили неперервно підводиться енергія, яка й витрачається на подолання існуючих у коливальній системі сил опору.

У певних умовах, коли частота збурювальних сил близька до частоти власних коливань розглядуваної системи або збігається з нею, змушені коливання супроводжуються значним (часто небезпечним) збільшенням амплітуди, що спричинює недопустимі для конструкції деформації (напруження). Це явище, як відомо, має назву *резонансу.*

Параметричними називають коливання пружної системи, в процесі яких періодично змінюються фізичні параметри системи, тобто величини, що характеризують масу системи або її жорсткість. Важливою особливістю параметричних коливань є те, що зовнішні сили впливають не безпосередньо на коливальний рух, а на фізичні параметри системи.

Отже, параметричні коливання відрізняються від змушених видом зовнішнього впливу. При змушених коливаннях ззовні задано силу або іншу величину, що спричинює коливання, а параметри при цьому залишаються сталими. Параметричні коливання спричинюються періодичною зміною ззовні певного фізичного параметра системи. Так, обертовий вал некруглого перерізу, який має відносно різних осей перерізу різні моменти інерції, що входять до характеристики жорсткості при згинанні, зазнає поперечних коливань у певній площині внаслідок згинної жорсткості вала, яка періодично змінюється за кожний оберт вала. Зміна фізичного параметра (згинної жорсткості) обумовлюється зовнішніми силами. У наведеному прикладі зовнішнім силовим фактором є двигун, що здійснює обертання вала. Параметричні коливання не згасають, коли є сили опору. Підтримуються параметричні коливання за рахунок підведення енергії зовнішніми силовими діями, які змінюють фізичні параметри системи.

Автоколиваннями, або самоколиваннями, пружної системи називають незгасаючі коливання, що підтримуються такими зовнішніми силами, характер дій яких визначається самими коливальними процесами механічної системи.

Автоколивання виникають у системі без зовнішньої періодичної дії. Характер цих коливань визначається виключно будовою системи. Джерело енергії, яке компенсує втрати її в системі при коливаннях (в основному на теплоту), як правило, є невід'ємною частиною системи.

Зі сказаного випливає, що *автоколивання відрізняються від власних коливань, оскільки останні є згасаючими, тоді як автоколивання не згасають.* Автоколивання відрізняються також від змушених та від параметричних коливань, оскільки ті й інші так чи інакше спричинюються зовнішніми силами, характер дії яких заданий. У цьому розумінні *автоколивання можуть бути названі також самозбудними, оскільки процес коливань тут керується самими коливаннями.* Джерело додаткової енергії, яка підтримує коливання системи, розміщується поза пружною системою. Наприклад, енергія повітряного потоку, який набігає на вібрувальні частини літака, спричинює особливий вид автоколивань, що називається *флатером.*

Крім того, коливання класифікують за характером деформації пружних елементів конструкцій. Зокрема, стосовно стрижневих систем розрізняють поздовжні, поперечні та крутильні коливання.

До *поздовжніх* коливань належать такі коливальні рухи системи, зокрема пружного стрижня, при яких переміщення всіх точок перерізу стрижня напрямлені вздовж осі стрижня; при цьому має місце деформація його подовження або укорочення. Нормальні напруження, що виникають при таких коливаннях, розподілені рівномірно по поперечному перерізу. Отже, поздовжні коливання інакше можна назвати коливаннями розтягання-стискання.

Поперечними коливаннями називають коливання згинання, при яких основні компоненти переміщень (у даному випадку прогини) напрямлені перпендикулярно до осі стрижня. Напружений стан при поперечних коливаннях, очевидно, буде такий самий, як і при статичному згинанні балки. Тому поперечні коливання інакше можна назвати коливаннями при згинанні.

Крутильними називають коливання стрижнів, які супроводжуються змінними деформаціями кручення. З цими коливаннями в машинобудуванні доводиться мати справу здебільшого при аналізі деформацій різного типу валів, які працюють переважно на кручення.

При розгляді тонкостінних конструкцій, зокрема елементів конструкції літаків, часто доводиться стикатися з коливаннями змішаного типу, при яких одночасно відбуваються деформації згинання та кручення, тобто так звані згинально-крутильні коливання.

§ 124. Власні гармонічні коливання пружної системи з одним ступенем вільності

Задача про гармонічні коливання системи з одним ступенем вільності розглядається в курсі теоретичної механіки. Тут як пружну систему розглянемо вантаж, підвішений до нижнього кінця вертикально розміщеної пружини (рис. 522).

Диференціальне рівняння коливань вантажу вагою Q (нехтуючи масою пружини) можна дістати, користуючись принципом Д'Аламбера. Прирівнюючи до нуля суму проекцій на вертикальну вісь усіх сил, що діють на вантаж, матимемо

$$Q + cx - \left(Q - \frac{Q}{g}\ddot{x}\right) = 0,$$

звідки

$$\frac{Q}{g}\ddot{x} + cx = 0,$$

або

$$\ddot{x} = \omega^2 x = 0. \tag{20.1}$$

Тут $\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$; t — час;

$$\omega^2 = \frac{cg}{Q} = \frac{g}{\delta_c}, \tag{20.2}$$

де c — жорсткість пружини (чисельно дорівнює силі, яка спричинює розтягання пружини, що дорівнює одиниці довжини); g — прискорення вільного падіння; δ_c — статичне подовження пружини під дією підвішеного вантажу вагою Q.

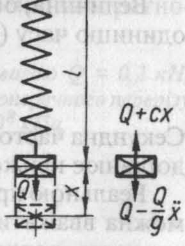


Рис. 522

Рівняння (20.1) має, очевидно, такий загальний розв'язок, який визначає залежність між вертикальним переміщенням x вантажу Q та часом t:

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t, \tag{20.3}$$

де ω — колова частота власних коливань; A та B — сталі інтегрування, що залежать від початкових умов.

За початок відліку переміщень вибирається положення вантажу, яке відповідає стану рівноваги.

Якщо задані початкова координата вантажу x_0 та початкова швидкість $\upsilon_0 = \dot{x}$ при $t = 0$, то з рівняння (20.3) визначаються сталі інтегрування:

$$A = x_0;\; B = \upsilon_0/\omega. \qquad (20.4)$$

Поклавши $x_0 = a\sin\alpha$ та $\upsilon_0/\omega = a\cos\alpha$, рівняння (20.3) можна переписати також у вигляді

$$x = a\sin(\omega t + \alpha);$$

при цьому амплітуда коливань

$$a = \sqrt{A^2 + B^2},$$

або

$$a = \sqrt{x_0^2 + \upsilon_0^2/\omega^2}.$$

Величина $\omega t + \alpha$ зветься *фазою коливань*, а величина α — *зсувом фази*. На підставі (20.4) α можна визначити з умови

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x_0\omega}{\upsilon_0}.$$

З рівняння (20.2) колова частота власних коливань

$$\omega = \sqrt{g/\delta_c}. \qquad (20.5)$$

Маючи на увазі, що Q/g є масою m підвішеного вантажу Q, колову частоту можна також визначити за формулою

$$\omega = \sqrt{c/m}.$$

Нагадаємо, що під коловою частотою розуміють кількість коливань, здійснюваних протягом 2π с.

Знаючи колову частоту коливань, можна знайти період коливань T (час одного повного коливання) за формулою

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\delta_c}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}. \qquad (20.6)$$

Величина, обернена періоду коливань, визначає кількість коливань за одиницю часу (секунду) і має назву *секундної частоти*:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Секундна частота коливань, як правило, виражається в герцах; число герц дорівнює кількості коливань за секунду.

Реальною пружною коливальною системою з одним ступенем вільності можна вважати механічну систему, що складається з пружного тонкого стрижня, верхній кінець якого жорстко закріплений, а до нижнього

підвішений вантаж. Очевидно, в цьому разі, коли маса стрижня значно менша за масу вантажу, така система не буде відрізнятися від раніше розглянутої (рис. 522). Тому, щоб знайти частоту, період та амплітуду власних коливань вантажу, підвішеного до пружного стрижня, можна скористатися виведеними вище формулами для вантажу, підвішеного на пружині. При цьому треба визначити жорсткість стрижня, еквівалентну жорсткості c пружини.

При розтяганні стрижня завдовжки l та площею поперечного перерізу F абсолютне подовження стрижня при статичному навантаженні Q, як відомо, визначається формулою

$$\delta_c = \frac{Ql}{EF}.$$

Зусилля, що відповідає статичній деформації δ_c, яка дорівнює одиниці, є шуканою жорсткістю:

$$c = \frac{EF}{l}. \qquad (20.7)$$

Тоді на підставі формули (20.5) частота власних коливань підвішеного вантажу

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\delta_c}} = \sqrt{\frac{EFg}{Ql}}. \qquad (20.8)$$

Маючи на увазі, що Q/g є масою вантажу, формулу (20.8) можна записати у вигляді

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{EF}{ml}}. \qquad (20.9)$$

З формул (20.8) та (20.9) випливає, що частота власних коливань розглядуваної системи зростає зі збільшенням жорсткості, або, що те саме, зі зменшенням статичної деформації, спричинюваної підвішеним вантажем. Легко переконатися, що вантаж, підвішений до пружного стрижня, має значно більшу частоту власних коливань, ніж той самий вантаж, підвішений до стрижня з більшою поздовжньою жорсткістю $\frac{EF}{l}$.

При цьому відношення частот власних коливань вантажу, прикріпленого до двох рівних стрижнів, обернено пропорційне кореню квадратному з відношення статичних подовжень стрижнів.

Приклад 79. *Визначимо частоту власних коливань вантажу вагою $Q = 0{,}2$ кН, підвішеного до кінця сталевого стрижня завдовжки 40 см і площею поперечного перерізу $F = 1$ см^2, при модулі пружності матеріалу $E = 2\cdot 10^5$ МПа $= 2\cdot 10^8$ кПа.*

Колова частота коливань, згідно з формулою (20.8),

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\delta_c}} = \sqrt{\frac{gEF}{Ql}} = \sqrt{\frac{9{,}81\cdot 2\cdot 10^8\cdot 10^{-4}}{0{,}2\cdot 0{,}4}}\ \text{с}^{-1} = 1570\ \text{с}^{-1}.$$

Отже, відповідна секундна частота власних коливань вантажу

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1570}{2\cdot 3{,}14}\text{ Гц}=250\text{ Гц}.$$

Приклад 80. *Визначимо, як зміниться частота власних коливань вантажу P, якщо від першого способу закріплення його перейти до другого, розрізавши пружину на дві однакові частини й закріпивши вантаж посередині (рис. 523).*

Частота власних коливань вантажу, підвішеного на кінці пружини,

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_c}};\quad \delta_c=\lambda=\frac{4PR^3n}{Gr^4}=\frac{P}{c},$$

де R — середній радіус витка пружини; n — кількість витків; G — модуль пружності при зсуві; r — радіус дроту пружини; c — жорсткість пружини.

Для першої схеми

$$c_1=\frac{Gr^4}{4R^3n}.$$

При другій схемі кожна пружина матиме більшу жорсткість

$$c_2=\frac{Gr^4\cdot 2}{4R^3n}=2c_1.$$

У першому випадку переміщення вантажу

$$\delta_1=P/c_1.$$

У другому випадку кожна пружина сприймає навантаження $P/2$. Тому

$$\delta_2=\frac{P}{2c_2}=\frac{P}{2\cdot 2c_1}=\frac{\delta_1}{4}.$$

Частота власних коливань вантажу, підвішеного за першою схемою,

$$f_1=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_1}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{gc_1}{P}}.$$

Частота власних коливань вантажу, підвішеного за другою схемою,

$$f_2=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_2}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g\cdot 4c_1}{P}}.$$

Співвідношення частот коливань при двох різних схемах підвішування вантажу

$$f_2/f_1=2,$$

тобто при заміні способу закріплення підвішеного вантажу частота власних коливань збільшується вдвічі.

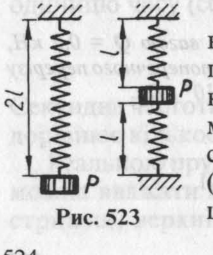


Рис. 523

Викладена вище теорія розрахунку поздовжніх коливань вантажу, підвішеного на пружному стрижні, може поширюватися також і на розрахунки поперечних та крутильних коливань. Наприклад, розглядаючи невагому балку із зосередженим вантажем (рис. 524) з одним ступенем вільності, дістанемо рівняння руху у вигляді (20.1). У цьому разі замість змінної x слід взяти переміщення вантажу Q у напрямі, перпендикулярному до осі,

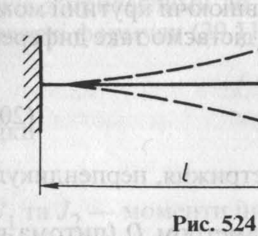


Рис. 524

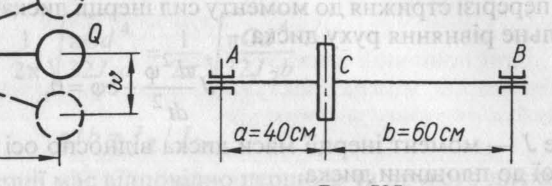


Рис. 525

тобто прогин w. Вирази для власної частоти та періоду коливань залишаються в тому самому вигляді (20.5) та (20.6). При цьому δ_c буде прогином під вантажем Q при статичному його прикладанні.

Для прикладу, наведеного на рис. 524,

$$\delta_c=w_c=\frac{Ql^3}{3EJ}.$$

Приклад 81. *Визначимо частоту власних поперечних коливань сталевого диска вагою Q = 1 кН (рис. 525), насадженого на сталевий вал діаметром d = 50 мм.*

Частота власних коливань такої системи з одним ступенем вільності визначиться за формулою (20.5)

$$\omega_в=\sqrt{g/\delta}$$

де δ_c — статичний прогин вала в місці насадження диска:

$$\delta_c=w_c=\frac{Qa^2b^2}{3EJl}=\frac{1\cdot 0{,}4^2\cdot 0{,}6^2\cdot 64}{3\cdot 2\cdot 10^8\cdot 3{,}14\cdot 0{,}05^4\cdot 1}\text{ м}=3{,}12\cdot 10^{-4}\text{ м}.$$

Тоді

$$\omega_в=\sqrt{\frac{g}{\delta_c}}=\sqrt{\frac{9{,}81}{3{,}12\cdot 10^{-4}}}\text{ с}^{-1}=177\text{ с}^{-1},$$

а секундна частота

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{177}{2\cdot 3{,}14}\cong 28\text{ Гц}.$$

Прикладом пружної системи, здатної здійснювати крутильні коливання, може бути диск, з'єднаний зі стрижнем за схемою рис. 526. Якщо до диска в його площині прикладена, а потім раптово знята пара сил, то виникнуть власні крутильні коливання диска разом з валом, при яких вал буде правити за пружину, а характер крутильних коливань такої системи з одним ступенем вільності визначатиметься кутом φ повороту диска.

Позначимо крутильну жорсткість стрижня (скручувальний момент, потрібний для закручування стрижня в місці закріплення диска на 1 рад) через $c = G\pi d^4/l\cdot 32$ (d — діаметр стрижня, l — його довжина), а повний кут закручування стрижня (поворот диска) — через φ. Крутний момент у циклічно закручуваному при коливаннях стрижні в довільний момент часу буде $c\varphi$. Нехтуючи силами інерції

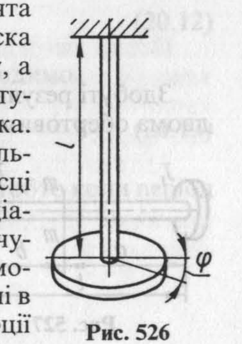


Рис. 526

маси стрижня порівняно з масою диска та прирівнюючи крутний момент у перерізі стрижня до моменту сил інерції диска, дістаємо таке диференціальне рівняння руху диска:

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2}+c\varphi=0, \tag{20.10}$$

де J — момент інерції маси диска відносно осі стрижня, перпендикулярної до площини диска.

Для круглого диска постійної товщини h діаметром D (питома вага матеріалу γ)

$$J=\frac{\pi D^4 h\gamma}{32g}=\frac{QD^2}{8g},$$

де Q — вага диска.

На випадок диска змінної товщини h (ρ)

$$J=\frac{2\pi}{g}\int_0^{D/2} h(\rho)\gamma\rho^3 d\rho.$$

Позначивши $\omega^2 = c/J$, рівняння (20.10) можна переписати у вигляді (20.1):

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\omega^2\varphi=0,$$

загальний розв'язок якого

$$\varphi = A\cos\omega t + B\sin\omega t.$$

Звідси бачимо, що період власних крутильних коливань диска на кінці стрижня

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{J}{c}}.$$

Для стрижня постійного перерізу діаметром d період та частота власних крутильних коливань диска відповідно

$$T=2\pi\sqrt{\frac{32lJ}{G\pi d^4}};\quad f=\frac{1}{T}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi G d^4}{32Jl}}. \tag{20.11}$$

Здобуті результати можна використовувати й при розгляді системи з двома обертовими дисками (рис. 527). Дійсно, якщо закрутити два диски один відносно одного, а потім моментально зняти прикладені зовнішні моменти, то диски почнуть здійснювати крутильні коливання назустріч один одному. При цьому деякий проміжний переріз вала залишиться нерухомим. Положення цього так званого вузлового перерізу m — m можна знайти з умов рівності частот коливань обох

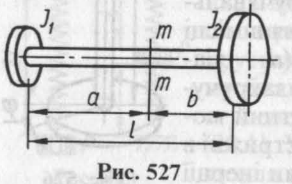


Рис. 527

дисків з прилеглими до них ділянками вала завдовжки a та b, для яких придатні формули (20.11):

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi G d^4}{32J_1 a}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi G d^4}{32J_2 b}},$$

звідки

$$a/b = J_2/J_1,$$

де J_1 та J_2 — моменти інерції мас відповідно першого та другого дисків.

Використовуючи останнє співвідношення, а також ураховуючи, що $a+b=l$, знайдемо

$$a=\frac{J_2 l}{J_1+J_2};\quad b=\frac{J_1 l}{J_1+J_2}.$$

Тоді період та частота власних крутильних коливань розглядуваної системи, згідно з формулами (20.11), в яких замість l слід підставити вирази для a (чи b), будуть визначатися так:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{32J_1J_2 l}{\pi G d^4(J_1+J_2)}};\quad f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi G d^4(J_1+J_2)}{32J_1J_2 l}}.$$

Зазначимо, що розглянута тут коливальна система має велике практичне значення, оскільки вона є прототипом коливальної системи, до якої можуть зводитися численні пружні системи, що зустрічаються в інженерній практиці, зокрема вали з двома обертовими масами.

§ 125. Змушені коливання пружних систем з одним ступенем вільності

Вважаючи, що крім постійної ваги вантажу Q (див. рис. 522) на нього діє періодична збурювальна сила P, то на відміну від розглянутих в останньому параграфі власних коливань матимемо змушені коливання. Рівняння цих коливань дістанемо з виразу (20.1), додавши до його правої частини силу P (t):

$$\frac{Q}{g}\ddot{x}+cx=P(t). \tag{20.12}$$

Поділивши всі члени останнього рівняння на Q/g, знаходимо

$$\ddot{x}+\omega^2 x=\frac{P(t)g}{Q}. \tag{20.13}$$

Розглянемо окремий випадок, коли $P(t) = P_1\cos pt$, тобто коли період сили $T_1 = 2\pi/p$, а частота $f_1 = p/2\pi$.

Позначивши

$$\frac{P(t)g}{Q}=\frac{g}{Q}P_1\cos pt = q\cos pt,$$

перепишемо рівняння (20.13) у вигляді

$$\ddot{x}+\omega^2 x = q\cos pt. \tag{20.14}$$

При повільній зміні зовнішньої сили $P(t)$, тобто при p, малому порівняно з ω, можна знехтувати інерційним членом $\ddot{x}$ і на підставі (20.14) знайти статичну деформацію

$$x_c = \frac{q\cos pt}{\omega^2} \tag{20.15}$$

з амплітудою q/ω^2.

Для визначення динамічної деформації треба розв'язати диференціальне рівняння (20.14). Цей розв'язок, як відомо, можна дістати, якщо до розв'язку однорідного рівняння (20.1)

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{20.16}$$

додати окремий розв'язок рівняння (21.14)

$$x = C\cos pt. \tag{20.17}$$

Підставляючи окремий розв'язок (20.17) у диференціальне рівняння (20.14) і враховуючи, що

$$\dot{x} = -pC\sin pt; \quad \ddot{x} = -p^2 C\cos pt,$$

знайдемо

$$-p^2 C\cos pt + \omega^2 C\cos pt = q\cos pt.$$

Звідси після скорочення на $\cos pt$

$$C\left(\omega^2 - p^2\right) = q,$$

тобто амплітуда

$$C = \frac{q}{\omega^2 - p^2}. \tag{20.18}$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (20.14) остаточно набере вигляду

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t + \frac{q}{\omega^2 - p^2}\cos pt. \tag{20.19}$$

Перші два доданки правої частини рівняння (20.19) характеризують власні коливання, що, як правило, швидко згасають; останній доданок характеризує змушені усталені коливання системи, які відбуваються з частотою зовнішньої збурювальної сили P.

Амплітуда C змушених коливань, як випливає з формули (20.18), залежить від частоти цих коливань p. Відношення амплітуди C до амплітуди статичної деформації (20.15) визначає так званий коефіцієнт наростання коливань β:

$$\beta = \frac{C}{x_c} = \frac{q}{\omega^2 - p^2} : \frac{q}{\omega^2} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - p^2} = \frac{1}{1 - p^2/\omega^2}, \tag{20.20}$$

або

$$\beta = \frac{1}{1 - T_1^2/T^2}, \tag{20.21}$$

де

$$T_1 = 2\pi/p; \qquad T = 2\pi/\omega.$$

З формули (20.20) випливає, що при малому відношенні p/ω коефіцієнт β близький до одиниці й амплітуда змушених коливань лише небагато відрізняється від статичної деформації. Якщо частота змушених коливань наближається до частоти власних коливань системи, амплітуда змушених коливань прямує до нескінченності, тобто при $p/\omega \to 1$ амплітуда $C \to \infty$. При $p = \omega$ має місце стан *резонансу*. Відповідна частота збурювальної сили називається *критичною*.

Розглядаючи залежність (20.20), графічне зображення якої наведено на рис. 528, бачимо, що при частоті збурювальної сили p, більшій за власну частоту ω коливальної системи, тобто $p > \omega$, амплітуда C динамічного переміщення зменшується і при $p \gg \omega$ робиться дуже малою порівняно зі статичним переміщенням. У цьому разі вантаж Q можна розглядати як нерухомий.

При $p < \omega$ змушені коливання і збурювальна сила перебувають в одній фазі, тобто зсув фаз $\alpha = 0$. Це означає, що в момент, коли коливний вантаж (див. рис. 522) досягає свого найбільшого відхилення, припустимо вниз, збурювальна сила набуває найвищого значення в цьому самому напрямі. При $p > \omega$ різниця фаз змушених коливань та збурювальної сили становить $\alpha = \pi$, тобто коливання відбуваються в протифазі зі збурювальною силою. Це означає, що в той час, коли збурювальна сила має максимальне значення в напрямі вниз, коливний вантаж досягає свого найбільшого відхилення вгору.

Таке явище можна добре зрозуміти на прикладі змушених коливань математичного маятника (рис. 529), збудження якого здійснюють горизонтальним зворотно-поступальним періодичним переміщенням точки підвісу з різною частотою. Положення маятника, що коливається в одній фазі зі збурювальним фактором, наведено на рис. 529, *а*; коливання маятника в протифазі зі збурювальною силою зображено на рис. 529, *б*.

Амплітуду власних (незалежних) коливань можна визначити із загального

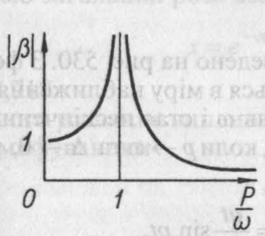


Рис. 528

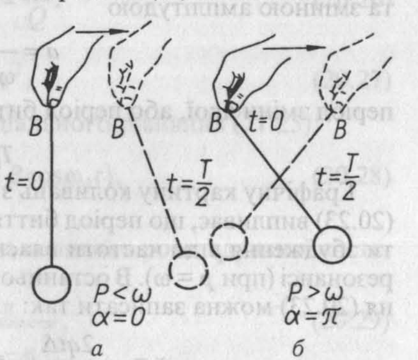


Рис. 529

розв'язку (20.19) при розгляді початкових умов. Так, поклавши, що в початковий момент (при $t = 0$) переміщення та швидкість дорівнює нулю, тобто $(x)_{t=0} = 0$ та $(\dot{x})_{t=0} = 0$, з рівняння (20.19) матимемо

$$B = 0; \quad A = -\frac{q}{\omega^2 - p^2}.$$

Підставляючи ці значення в рівняння (20.19), остаточно знаходимо

$$x = \frac{q}{\omega^2 - p^2}(\cos pt - \cos \omega t). \tag{20.22}$$

На початку дії збурювальної сили виникають змушені коливання та власні коливання однієї амплітуди.

Якщо частота збурювальної сили наближається до частоти власних коливань, має місце биття. Нехай

$$\omega - p = 2\Delta.$$

Тоді рівняння (20.22) при

$$\Delta = \frac{1}{2}(\omega - p)$$

з урахуванням відомого співвідношення

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

можна переписати так:

$$x = -\frac{2q}{\omega^2 - p^2}\sin\frac{(p+\omega)t}{2}\sin\frac{(p-\omega)t}{2} = -\frac{2q}{\omega^2 - p^2}\sin(-\Delta)\times$$

$$\times t\sin\frac{(p+\omega)t}{2} = \frac{2q\sin t\Delta}{\omega^2 - p^2}\sin\frac{(p+\omega)t}{2}, \tag{20.23}$$

тобто дістанемо рівняння синусоїдного коливального руху з періодом

$$T = 2\pi \cdot \frac{p+\omega}{2} = \frac{4\pi}{p+\omega}$$

та змінною амплітудою

$$a = \frac{2q}{\omega^2 - p^2}\sin t\Delta,$$

період зміни якої, або період биття, характеризується величиною

$$T_б = 2\pi/\Delta.$$

Графічну картину коливань з биттям наведено на рис. 530. З формули (20.23) випливає, що період биття збільшується в міру наближення частоти збудження p до частоти власних коливань ω і стає нескінченним при резонансі (при $p = \omega$). В останньому випадку, коли $p \to \omega$ та $\Delta \to 0$, рівняння (20.23) можна записати так:

$$x = \frac{2qt\Delta}{2\Delta(\omega + p)}\sin\frac{(p+\omega)t}{2} = \frac{qt}{2p}\sin pt, \tag{20.24}$$

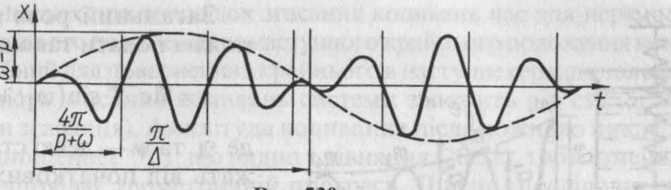


Рис. 530

тобто амплітуда коливань з часом зростає безмежно. Зазначимо, що останній висновок справедливий тільки тоді, коли в коливальній системі немає сил опору. Однак таких реальних коливальних систем не існує.

§ 126. Власні коливання з в'язким демпфуванням

Розглянемо коливання системи з одним ступенем вільності (рис. 531), коли сили опору при коливанні пропорційні швидкості руху. Для виведення диференціального рівняння коливань вантажу, підвішеного на пружині в будь-якому рідкому середовищі (рис. 531), скористаємося принципом Д'Аламбера (умову динамічної рівноваги вантажу розглядаємо при відхиленні його на відстань x від положення статичної рівноваги, враховуючи силу інерції маси вантажу Q):

$$Q - \frac{Q}{g}\ddot{x} - \alpha\dot{x} = Q + cx,$$

де α — коефіцієнт пропорційності; $\alpha\dot{x}$ — сила тертя, пропорційна швидкості $\frac{dx}{dt}$, що діє в напрямі, протилежному рухові.

Звідси диференціальне рівняння коливань системи з урахуванням розсіяння енергії можна записати у вигляді

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = 0, \tag{20.25}$$

де

$$2n = \frac{\alpha g}{Q}; \quad \omega^2 = \frac{cg}{Q}. \tag{20.26}$$

Позначивши

$$\omega_1^2 = \omega^2 - n^2 \tag{20.27}$$

дістанемо загальний розв'язок диференціального рівняння (21.25)

$$x = e^{-nt}(A\sin\omega_1 t + B\cos\omega_1 t), \tag{20.28}$$

де $e = 2{,}718$.

Із цього рівняння випливає, що період коливань розглядуваної системи з демпфуванням

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - n^2}}, \tag{20.29}$$

тобто він залежить від згасання, що характеризується коефіцієнтом n.

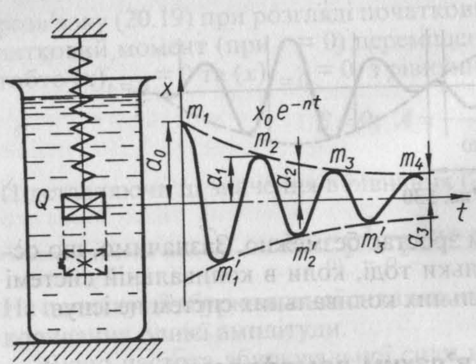


Рис. 531

Загальний розв'язок (20.28) можна подати також у вигляді

$$x = \mathfrak{A}e^{-nt}\sin(\omega_1 t + \psi), \qquad (20.30)$$

де $\mathfrak{A}$ та ψ — деякі сталі, що залежать від початкових умов і можуть бути знайдені так само, як і в § 124.

При $n \ll \omega$ різниця між коловою частотою ω_1 системи з демпфуванням та власною частотою ω, тобто $\varepsilon = \omega_1 - \omega$, є величиною другого порядку малості, тому період T буде мало відрізнятися від періоду власних коливань

$$T = 2\pi / \omega,$$

тобто можна вважати, що невелика сила опору не впливає на період (частоту) коливань системи.

Розглядаючи розв'язок (20.28), бачимо, що через множник e^{-nt} амплітуда коливань з часом зменшується. Сталі інтегрування A та B, які входять до розв'язку, визначимо з початкових умов. Так, поклавши в початковий момент (при $t = 0$) $x = x_0$ та $\dot{x} = \dot{x}_0$, з рівняння (20.28) знайдемо, що

$$B = x_0; \quad A = \frac{1}{\omega_1}(\dot{x}_0 + nx_0).$$

Підставивши ці дані в рівняння (20.28), матимемо

$$x = e^{-nt}\left[\frac{\dot{x}_0}{\omega_1}\sin\omega_1 t + x_0\left(\cos\omega_1 t + \frac{n}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right)\right].$$

В окремому випадку, коли $A = 0$, тобто якщо

$$\frac{\dot{x}_0}{\omega_1} + \frac{nx_0}{\omega_1} = 0,$$

останнє рівняння набирає вигляду

$$x = x_0e^{-nt}\cos\omega_1 t. \qquad (20.31)$$

Цю залежність на рис. 531 зображено у вигляді графіка. Рівняння верхньої та нижньої обвідних наведеної згасаючої віброграми відповідно

$$x = x_0e^{-nt} \quad \text{та} \quad x = -x_0e^{-nt}.$$

Точки $m_1, m_2, m_3, \ldots$ дотику обвідної до віброграми мають координати часу $t = 0$; $t = T$; $t = 2T$; …, а точки $m_1', m_2', m_3', \ldots$ дотику до нижньої обвідної кривої — координати $t = T/2$; $t = 3T/2$ і т. д. При цьому зазначені точки не збігаються з точками крайніх переміщень системи з положення рівноваги.

Легко переконатися, що внаслідок згасання коливань час для переміщення системи із середнього положення до наступного крайнього положення менший, ніж час, потрібний для повернення з крайнього в наступне середнє положення.

Інтенсивність згасання коливань системи залежить від сталої n (характеристики згасання). Амплітуда коливання після кожного циклу зменшується у відношенні e^{-nt}: 1, що видно з рівняння (20.31), тобто зменшення амплітуди відповідає геометричній прогресії. Дійсно, послідовні амплітуди при $t = 0$; $t = T$; $t = 2T$ і т. д. мають значення

$$a_0 = x_0; \quad a_1 = x_0e^{-nT}; \quad a_2 = x_0e^{-2nT}; \ldots;$$

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{x_0e^{-nT}}{x_0} = e^{-nT}; \quad \frac{a_2}{a_1} = \frac{x_0e^{-2nT}}{x_0e^{-nT}} = e^{-nT} \text{ і т. д.}$$

Відношення якої-небудь амплітуди коливань до амплітуди, що безпосередньо йде за нею через один період,

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \ldots = \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{x_0e^{-knT}}{x_0e^{-(k+1)nT}} = e^{nT},$$

звідки

$$\ln\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}\right) = \ln e^{nT} = nT = \delta. \qquad (20.32)$$

Величина δ називається логарифмічним декрементом згасання коливань і взагалі є основною характеристикою згасання коливань як наслідку демпфування їх, обумовленого наявністю в будь-якій реальній механічній системі сил опору механічним коливанням. У техніці, зокрема в машинобудуванні, значення декремента істотно відрізняється від одиниці й становить, наприклад, для таких коливальних систем, як турбінні лопатки, приблизно 0,03, тобто 3 %.

Крім сил опору, пропорційних швидкості руху, демпфування коливань у реальних конструкціях може обумовлюватися й іншими причинами, зокрема втратами енергії гістерезисного типу в самому матеріалі пружного елемента коливальної системи внаслідок його пружної недосконалості, значення яких залежить не від швидкості, а від амплітуди коливань (циклічних повторно-змінних напружень в «пружині»). Іншим поширеним джерелом втрат енергії в реальних коливальних системах є розсіяння енергії внаслідок сил тертя в з'єднаннях елементів конструкції, витоку енергії у фундамент тощо.

Тут ми не маємо змоги зупинятися на розрахунку коливань елементів конструкцій з урахуванням різних видів розсіяння енергії* й обмежимося лише випадком змушених коливань, коли розсіяння енергії пропорційне швидкості руху.

*Докладно це питання висвітлено в монографіях Г. С. Писаренка «Колебания упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале» (К.: Изд-во АН УССР, 1955) та «Обобщающая нелинейная модель учета рассеяния энергии при колебаниях» (К.: Наук. думка, 1985).

§ 127. Змушені коливання механічної системи з в'язким демпфуванням

Розглянемо змушені коливання системи з одним ступенем вільності, якщо є сили опору механічним коливанням, пропорційні швидкості. Диференціальне рівняння коливань для такої системи дістанемо, якщо додатково до сили опору $S = \alpha\dot{x}$ на вантаж Q у вертикальному напрямі (рис. 531) діятиме будь-яка періодична сила $P\sin pt$.

Позначивши

$$q = gP/Q,$$

дістанемо рівняння коливання для даного прикладу, додавши в праву частину рівняння власних коливань зі згасанням (20.25) член $q\sin pt$. При цьому

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = q\sin pt. \qquad (20.33)$$

Загальний розв'язок цього рівняння знайдемо, якщо до розв'язку однорідного диференціального рівняння (20.28) додамо окремий розв'язок

$$x = K\sin pt + L\cos pt. \qquad (20.34)$$

Тоді, маючи на увазі, що

$$\dot{x} = Kp\cos pt - Lp\sin pt; \quad \ddot{x} = -Kp^2\sin pt - Lp^2\cos pt,$$

і підставляючи вирази x, $\dot{x}$ та $\ddot{x}$ у диференціальне рівняння (20.33), а потім прирівнюючи коефіцієнти при $\sin pt$ та $\cos pt$ правої та лівої частин, матимемо

$$-Lp^2 + 2Kpn + L\omega^2 = 0; \quad -Kp^2 + 2Lpn + K\omega^2 = q.$$

Розв'язуючи разом здобуту систему двох рівнянь відносно невідомих сталих K та L, знайдемо

$$K = \frac{q(\omega^2 - p^2)}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2};$$

$$L = -\frac{2qpn}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2}. \qquad (20.35)$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (20.33) можна записати у вигляді

$$x = e^{-nt}(A\sin\omega_1 t + B\cos\omega_1 t) - \frac{2qpn}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2}\cos pt + \qquad (20.36)$$

$$+ \frac{q(\omega^2 - p^2)}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2}\sin pt.$$

Перші доданки, що мають множник e^{-nt}, з часом зменшуються (згасають), два інших доданки, пропорційні q, які характеризують змушені коливання, з часом не згасають. Період цих незгасаючих коливань

$$T_1 = 2\pi/p,$$

а їхня амплітуда пропорційна збурювальній силі. Ця амплітуда, як легко переконатися, залежить також від характеристики n демпфування, а також від співвідношення періодів змушених T_1 та власних $T = 2\pi/\omega$ коливань.

Якщо ввести таку заміну:

$$\frac{2qpn}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2} = \mathfrak{A}\sin\alpha; \qquad (20.37)$$

$$\frac{q(\omega^2 - p^2)}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2} = \mathfrak{A}\cos\alpha, \qquad (20.38)$$

то змушені коливання можна виразити дещо простіше:

$$x = \mathfrak{A}(\cos\alpha\sin pt - \sin\alpha\cos pt) = \mathfrak{A}\sin(pt - \alpha). \qquad (20.39)$$

Амплітуда $\mathfrak{A}$ змушених коливань на підставі формул (20.37) та (20.38) визначиться з виразів

$$\frac{4q^2p^2n^2}{\left[(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2\right]^2} = \mathfrak{A}^2\sin^2\alpha;$$

$$\frac{q^2(\omega^2 - p^2)^2}{\left[(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2\right]^2} = \mathfrak{A}^2\cos^2\alpha,$$

склавши які й розв'язуючи відносно $\mathfrak{A}$, знаходимо

$$\mathfrak{A} = \frac{\sqrt{4q^2p^2n^2 + q^2(\omega^2 - p^2)^2}}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2} = \frac{q}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2}}. \qquad (20.40)$$

Кут α зсуву фаз на підставі рівнянь (20.37) та (20.38) можна визначити, поділивши перше з них на друге:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2pn}{\omega^2 - p^2}. \qquad (20.41)$$

При $\omega > p$ кут α додатний і менший за $\pi/2$, тобто $0 < \alpha < \pi/2$. З рівняння (20.39) випливає, що при цьому змушені коливання відстають за фазою від збурювальної сили. Якщо $\omega < p$, $\pi/2 < \alpha < \pi$, тобто змушені коливання відстають більше ніж на $\alpha = \pi/2$. Якщо $\omega = p$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \infty$, тобто під час коливального руху система займає своє середнє положення в той момент, коли збурювальна сила досягає максимального значення.

Аналізуючи формулу (20.40), маючи при цьому на увазі, що

$$q = \frac{gP}{Q}; \quad \omega^2 = \frac{cg}{Q},$$

знаходимо

$$\frac{q}{\omega^2} = \frac{gPQ}{Qcg} = \frac{P}{c} = \delta_c, \tag{20.42}$$

де δ_c — переміщення, яке виникло б при статичному навантаженні пружини зусиллям, що дорівнює амплітудному значенню збурювальної сили P.

Ураховуючи формулу (20.42) і поділивши чисельник та знаменник виразу (20.40) на квадрат колової частоти власних коливань ω^2, знаходимо

$$\mathfrak{A} = \frac{\delta_c}{\sqrt{\left(1-\dfrac{p^2}{\omega^2}\right)^2 + \dfrac{4p^2n^2}{\omega^4}}} = \frac{\delta_c}{\sqrt{\left(1-\dfrac{T^2}{T_1^2}\right)^2 + \dfrac{T^2\gamma^2}{T_1^2}}}, \tag{20.43}$$

де $\gamma = 2n/\omega$ — коефіцієнт, який залежить від сили опору в коливальній системі.

При дуже великому періоді змушених коливань їхня амплітуда наближається до статичного переміщення ($\mathfrak{A} \to \delta_c$). При $T_1 \to T$ та малому згасанні $\mathfrak{A} \to \infty$.

Як зазначалося, при розрахунках амплітуд змушених коливань зручно користуватися *коефіцієнтом наростання амплітуди коливань* β, що становить відношення амплітуд $\mathfrak{A}$ змушених коливань до статичного переміщення δ_c:

$$\beta = \frac{\mathfrak{A}}{\delta_c} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\dfrac{p^2}{\omega^2}\right)^2 + \dfrac{4p^2n^2}{\omega^4}}}. \tag{20.44}$$

Побудувавши графіки залежності $\beta = f(p/\omega)$, дістанемо так звані *резонансні криві* при різних демпфувальних характеристиках системи, що визначаються коефіцієнтом γ (рис. 532).

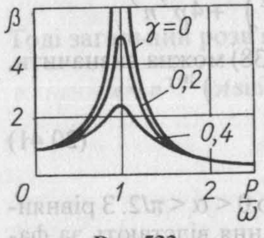


Рис. 532

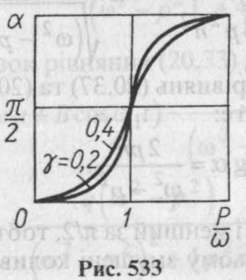


Рис. 533

Графічне зображення зсуву фаз $\alpha = f_1\,(p/\omega)$ при різних значеннях коефіцієнта γ наведено на рис. 533. З цих графіків видно, що в зоні збурення коливань з частотами, близькими до власних, має місце дуже різка зміна фази змушених коливань тоді, коли коефіцієнт γ малий.

Приклад 82. *Електродвигун вагою $Q = 4$ кН з частотою обертання ротора $n = 1000$ хв$^{-1}$ установлений на двох консольно закріплених в стіні швелерах. Доберемо переріз швелерів, якщо відстань від стіни до центра ваги двигуна $l = 1$ м, вертикальна складова відцентрової сили, що виникає внаслідок незрівноваженості двигуна, дорівнює $P \sin \omega t$, де амплітуда відцентрової сили P становить 25 % ваги двигуна.*

Переріз швелерів має бути такий, щоб частота власних коливань системи приблизно на 30 % була більша за частоту збурювальної сили, тобто

$$n_\text{в} = 1{,}3n = 1{,}3 \cdot 1000 = 1300 \text{ хв}^{-1},$$

або

$$\omega_\text{в} = \frac{\pi n_\text{в}}{30} = \frac{3{,}14 \cdot 1300}{30}\ \text{с}^{-1} = 136\ \text{с}^{-1},$$

а напруження, що виникає в швелерах, не перевищувало допустимого $[\sigma] = 100$ МПа.

Коливальну систему, що складається з електродвигуна на швелерах, з досить високим ступенем точності можна розглядати як систему з одним ступенем вільності, для якої власну частоту можна знайти за формулою (20.5)

$$\omega_\text{в} = \sqrt{g/\delta_c} = 136\ \text{с}^{-1},$$

звідки

$$\delta_c = \frac{g}{\omega_\text{в}^2} = \frac{981}{136^2}\ \text{см} = 0{,}053\ \text{см}.$$

Статичний прогин двох консольно закріплених швелерів

$$\delta_c = f = \frac{Ql^3}{3E \cdot 2J_z}.$$

Звідси визначимо момент інерції одного швелера:

$$J_z = \frac{Ql^3}{6E\delta_c} = \frac{4 \cdot 1^3}{6 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 5{,}3 \cdot 10^{-4}} = 6{,}29 \cdot 10^{-6}\ \text{м}^4 = 629\ \text{см}^4.$$

Згідно з таблицею сортаменту, найближчий за розмірами швелер № 16 з моментом інерції

$$J_z = 747\ \text{см}^4.$$

Для швелера № 16 частота власних коливань системи

$$\omega_\text{в} = \sqrt{\frac{g}{\delta_c}} = \sqrt{\frac{g \cdot 3E \cdot 2J_z}{Ql^3}} = \sqrt{\frac{9{,}81 \cdot 6 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 7{,}47 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 1^3}}\ \text{с}^{-1} = 147\ \text{с}^{-1},$$

або

$$n_\text{в} = \frac{30\omega_\text{в}}{\pi} = \frac{30 \cdot 147}{3{,}14} \approx 1400\ \text{хв}^{-1},$$

що більше за частоту збурювальної сили на

$$\frac{1400 - 1000}{1000}\,100\ \% = 40\ \%.$$

Перевіримо напруження, що виникають у небезпечному перерізі швелерів, з урахуванням вібраційного навантаження. Статичне напруження під дією ваги електродвигуна

$$\sigma_c = \frac{M_\text{max}}{W_z} = \frac{Ql}{2W_z} = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 9{,}34 \cdot 10^{-5}}\ \text{МПа} = 21{,}6\ \text{МПа}.$$

Коефіцієнт наростання амплітуди коливань, згідно з формулою (20.20),

$$\beta = \frac{1}{1-\left(\frac{p}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{1-\left(\frac{1000}{1400}\right)^2} = 2{,}04.$$

Тоді напруження з урахуванням динамічності

$$\sigma_a = \beta\frac{Pl}{2W_z} = 2{,}04\frac{1\cdot 10^{-3}\cdot 1}{2\cdot 9{,}34\cdot 10^{-5}}\ \text{МПа} = \pm 11\ \text{МПа},$$

а максимальне напруження в швелері

$$\sigma_{\max} = \sigma_c + \sigma_a = (21{,}6+11{,}0)\ \text{МПа} = 32{,}6\ \text{МПа} < [\sigma] = 100\ \text{МПа}.$$

§ 128. Критична швидкість обертання вала

З практики експлуатації машин відомо, що при деякій цілком певній для даної машини частоті обертання, при якій робота вала стає динамічно нестійкою, настає так званий резонанс. При цьому можуть виникати великі поперечні коливання вала. Частота обертання, при якій настає резонанс, називається *критичною*. Легко довести, що критична швидкість для вала відповідає частоті обертання вала за секунду, яка дорівнює частоті його поперечних коливань.

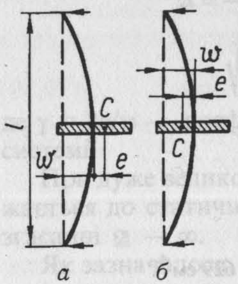


Рис. 534

Для доказу розглянемо обертання вертикально розміщеного вала з одним диском вагою Q посередині (рис. 534, *а*).

Припустимо, що центр ваги C диска розміщений на відстані e від його осі (при насадженні диска на вал уникнути ексцентриситету e практично не вдається). При обертанні такої системи на вал буде діяти відцентрова сила, що спричинює його згинання:

$$T = \frac{Q}{g}\omega^2(w+e),$$

де ω — кутова швидкість обертання вала; w — прогин вала в місці насадження диска.

Знайдемо реакцію на опорах вала від дії відцентрової сили:

$$P = cw,$$

де c — згинальна жорсткість вала, яка, наприклад, для вала постійного перерізу при розміщенні диска посередині між опорами

$$c = \frac{48EJ}{l^3}. \qquad (20.45)$$

З умови рівноваги очевидно, що $T = P$. Підставляючи замість T та P їхні вирази, дістанемо таке рівняння для визначення прогину w:

$$\frac{Q}{g}(w+e)\omega^2 = cw, \qquad (20.46)$$

звідки

$$w = \frac{e}{\frac{c}{\omega^2}\frac{g}{Q}-1}. \qquad (20.47)$$

Ураховуючи [див. формулу (20.26)], що

$$\frac{cg}{Q} = \omega_в^2$$

становить квадрат частоти власних поперечних коливань вала, рівняння (20.47) можна переписати так:

$$w = \frac{e}{\omega_в^2/\omega^2 - 1}. \qquad (20.48)$$

З цього рівняння видно, що прогин вала w швидко зростає в міру наближення кутової швидкості обертання вала ω до частоти $\omega_в$ власних поперечних коливань вала з диском. Критична швидкість обертання вала

$$\omega_{кр} = \omega_в = \sqrt{cg/Q}. \qquad (20.49)$$

При цьому знаменник у формулі (20.48) дорівнює нулю, а тому прогин теоретично дорівнює нескінченності, тобто має безмежно збільшуватись аж до руйнування. В реальних умовах унаслідок втрат енергії в системі, які в наведеному розрахунку не враховуються, на практиці при попаданні вала в резонанс прогини не завжди набувають значень, небезпечних для експлуатації.

Цікаво, що при швидкостях обертання вала, більших за критичні, амплітуда згинальних коливань істотно зменшується, коливання згасають. Досліди свідчать, що при $\omega > \omega_в$ центр ваги диска розміщується між лінією, що з'єднує опори, та викривленою віссю вала (рис. 534, *б*). У цьому разі рівняння для визначення прогину вала матиме вигляд

$$\frac{Q}{g}(w-e)w^2 = cw,$$

звідки

$$w = \frac{e}{1-\frac{cg}{\omega^2 Q}} = \frac{e}{1-\frac{\omega_в^2}{\omega^2}}. \qquad (20.50)$$

Отже, із зростанням швидкості обертання вала прогин w зменшується і наближається до ексцентриситету e, тобто при дуже великих швидкостях центр ваги диска досягає лінії, яка сполучає опори, і зігнутий вал обертається навколо центра ваги C диска.

Приклад 83. *Визначимо діаметр вала турбогенератора потужністю $N = 73{,}6$ кВт, що несе посередині прогону завдовжки $l = 100$ см диск вагою $Q = 1{,}5$ кН, у двох випадках: 1) для жорсткого вала з критичною частотою обертання, вищою ніж $n = 3000$ хв$^{-1}$ на 35 %; 2) для гнучкого вала з критичною частотою обертання, нижчою ніж робоча частота втричі. Масою вала порівняно з масою диска знехтуємо. Відомо, що ексцентриситет $e = 0{,}01$ см; $[\sigma] = 80$ МПа; $E = 2\cdot 10^5$ МПа.*

Для першого випадку визначимо частоту власних коливань системи (жорсткого вала з диском):

$$\omega_{ж} = \omega_{кр} = 1,35\frac{\pi n}{30} = 1,35\frac{3,14\cdot 3000}{30}\ \text{с}^{-1} = 424\ \text{с}^{-1}.$$

Діаметр жорсткого вала знайдемо з виразу

$$\omega_{ж} = \sqrt{\frac{g}{\delta_c}} = \sqrt{\frac{g\,48EJ}{Ql^3}} = \sqrt{\frac{48gE\pi d^4}{64Ql^3}},$$

звідки

$$d = \sqrt[4]{\frac{\omega_{ж}^2 4Ql^3}{3gE\pi}} = \sqrt[4]{\frac{424^2\cdot 4\cdot 1,5\cdot 10^{-3}\cdot 1^3}{3\cdot 9,81\cdot 2\cdot 10^5\cdot 3,14}}\ \text{м} = 8,75\cdot 10^{-2}\ \text{м} = 8,75\ \text{см}.$$

Максимальний прогин вала при коливаннях

$$f = \frac{e}{\left(\frac{\omega_{кр}}{\omega}\right)^2 - 1} = \frac{0,01\cdot 10^{-2}}{1,35^2 - 1}\ \text{м} = 1,22\cdot 10^{-4}\ \text{м} = 1,22\cdot 10^{-2}\text{см}.$$

Нормальні напруження від згинання

$$\sigma = \frac{6Edf}{l^2} = \frac{6\cdot 2\cdot 10^5\cdot 8,75\cdot 10^{-2}\cdot 1,22\cdot 10^{-4}}{1^2}\ \text{МПа} = 12,8\ \text{МПа}.$$

Дотичні напруження від скручування

$$\tau = \frac{M_{кр}}{W_p} = \frac{9549N}{\frac{\pi d^3}{16}n}\ \frac{9549\cdot 73,6\cdot 10^{-6}\cdot 16}{3,14\left(8,75\cdot 10^{-2}\right)^3 3000}\ \text{МПа} = 1,8\ \text{МПа}.$$

Еквівалентні напруження за III теорією міцності

$$\sigma_{екв\,III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{12,8^2 + 4\cdot 1,8^2}\ \text{МПа} = 13,3\ \text{МПа} < [\sigma] = 80\ \text{МПа}.$$

У другому випадку частота власних коливань системи з гнучким валом

$$\omega_{г} = \omega_{кр} = \frac{\omega}{3} = \frac{\pi n}{30\cdot 3} = \frac{3,14\cdot 3000}{3\cdot 30}\ \text{с}^{-1} = 105\ \text{с}^{-1}.$$

Діаметр гнучкого вала

$$d = \sqrt[4]{\frac{\omega_{г}^2 4Ql^3}{3gE\pi}} = \sqrt[4]{\frac{105^2\cdot 4\cdot 1,5\cdot 10^{-3}\cdot 1}{3\cdot 9,81\cdot 2\cdot 10^5\cdot 3,14}}\ \text{м} = 4,35\cdot 10^{-2}\ \text{м} = 4,35\ \text{см}.$$

Динамічний прогин

$$f = \frac{e}{1 - \left(\omega_{кр}/\omega\right)^2} = \frac{0,01\cdot 10^{-2}}{1 - (1/3)^2}\ \text{м} = 1,13\cdot 10^{-4}\ \text{м} = 1,13\cdot 10^{-2}\text{см}.$$

Нормальні напруження від згинання

$$\sigma = \frac{6Edf}{l^2} = \frac{6\cdot 2\cdot 10^5\cdot 4,35\cdot 10^{-2}\cdot 1,13\cdot 10^{-4}}{1}\ \text{МПа} = 5,9\ \text{МПа}.$$

Дотичні напруження від кручення

$$\tau = \frac{M_{кр}}{W_p} = \frac{9549N}{\frac{\pi d^3}{16}n} = \frac{9549\cdot 73,6\cdot 10^{-6}\cdot 16}{3,14\left(4,35\cdot 10^{-2}\right)^3 3000}\ \text{МПа} = 14,6\ \text{МПа}.$$

Еквівалентні напруження за III теорією міцності

$$\sigma_{екв\,III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{5,9^2 + 4\cdot 14,6^2}\ \text{МПа} = 29,8\ \text{МПа} < [\sigma] = 80\ \text{МПа}.$$

§ 129. Власні коливання системи з двома або кількома ступенями вільності

Системою з двома, трьома і т. д. ступенями вільності називають, як зазначалося вище, таку систему, положення якої в будь-який момент часу може визначатися відповідно двома, трьома і т. д. незалежними параметрами.

До коливальних систем такого типу, які часто застосовуються в машинобудуванні, належать вал з кількома дисками (рис. 535), що здійснює крутильні коливання, вал з кількома зосередженими масами (рис. 536), що здійснює поперечні коливання, тощо. У першому випадку рух описується кутом повороту навколо поздовжньої осі вала, а в другому — вертикальним переміщенням зосереджених мас у напрямі, перпендикулярному до осі вала. Прикладом коливальної системи, в якій рух маси визначається одночасно лінійним зміщенням та кутом повороту, може бути кузов автомобіля, схему якого наведено на рис. 537.

Розглядаючи коливання пружних систем з кількома ступенями вільності, диференціальні рівняння руху здебільшого можна дістати, як і у випадку систем з одним ступенем вільності, користуючись принципом Д'Аламбера. Розглянемо загальний підхід до складання рівняння руху маси в просторі.

Рух маси m у просторі розглянемо в координатній системі xyz. Складаючи рівняння рівноваги, до рівнодійних x, y та z усіх зовнішніх сил, які діють на масу m і напрямлені відповідно вздовж осей x, y та z, слід додати сили інерції. Складові сил інерції у напрямах x, y та z дорівнюють відповідно $-m\ddot{x}$, $-m\ddot{y}$, $-m\ddot{z}$. Тоді рівняння руху маси m у просторі

$$X - m\ddot{x} = 0;\ Y - m\ddot{y} = 0;\ Z - m\ddot{z} = 0. \qquad (20.51)$$

Якщо розглядається система з кількох мас, вільних у просторі, то рівняння (20.51) треба написати для кожної маси системи.

Тепер розглянемо застосування принципу Д'Аламбера для складання рівнянь руху коливальної системи (рис. 538, *а*) з кількома ступенями

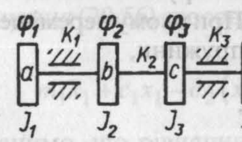


Рис. 535

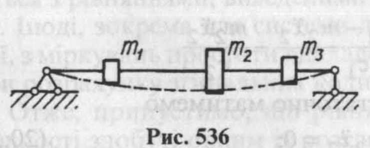


Рис. 536

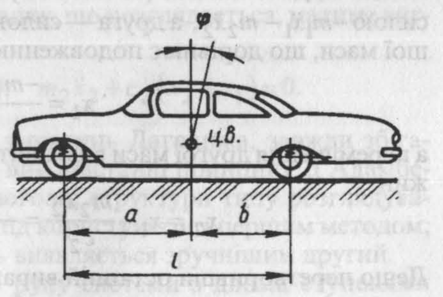


Рис. 537

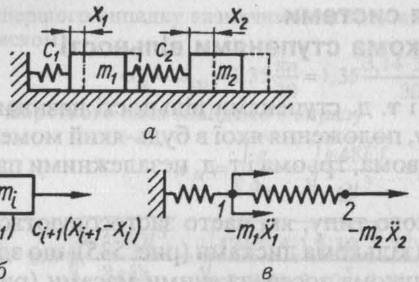


Рис. 538

вільності, яка складається з двох мас m_1 та m_2 та двох пружин із жорсткостями c_1 та c_2. Вважатимемо, що ці дві маси можуть переміщатися без тертя тільки в горизонтальному напрямі вздовж осі x. Переміщення першої маси m позначимо через x_1, а другої — через x_2.

У процесі коливань на масу m_1 як зовнішні сили діють сила c_1x_1 натягу першої пружини та сила $c_2\,(x_2-x_1)$ натягу другої пружини. Силами опору тертя нехтуємо. Тоді, користуючись принципом Д'Аламбера, рівняння руху першої маси

$$X = m_1\ddot{x} = 0$$

запишемо у вигляді

$$-c_1x_1 + c_2\,(x_2-x_1) - m_1\ddot{x}_1 = 0,$$

або

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1x_1 - c_2\,(x_2-x_1) = 0. \qquad (20.52)$$

На масу m_2 діє тільки сила натягу другої пружини $-c_2\,(x_2-x_1)$, а рівняння руху маси m_2 буде

$$m_2\ddot{x}_2 + c_2\,(x_2-x_1) = 0. \qquad (20.53)$$

Якщо б система мала не дві, а три чи більше послідовно з'єднаних мас, то рівняння руху для кожної з мас містило б три чи більше невідомих координат. Так, сили пружності пружини, що діють на i-у масу, цілком визначаються переміщеннями x_{i-1}, x_i та x_{i+1} (рис. 538, *б*).

Складаючи диференціальні рівняння руху розглядуваної системи, можна було б користуватися й іншим методом. Дійсно, при розгляді цієї системи можна було б вважати, що є дві зв'язані між собою пружини (рис. 538, *в*), які зазнають дії сил інерції $-m_1\ddot{x}_1$ та $-m_2\ddot{x}_2$, прикладених відповідно в місцях віддалених мас (точки *1* і *2*). Тоді перша пружина навантажується силою $-m_1\ddot{x}_1 - m_2\ddot{x}_2$, а друга — силою $-m_2\ddot{x}_2$. При цьому переміщення першої маси, що дорівнює подовженню першої пружини,

$$x_1 = \frac{-m_1\ddot{x} - m_2\ddot{x}_2}{c_1},$$

а переміщення другої маси визначиться сумарним подовженням обох пружин:

$$x_2 = x_1 - \frac{m_2\ddot{x}_2}{c_2} = \frac{-m_1\ddot{x}_1 - m_2\ddot{x}_2}{c_1} - \frac{m_2\ddot{x}_2}{c_2}.$$

Дещо перетворивши останній вираз, остаточно матимемо

$$x_1c_1 + m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = 0; \qquad (20.54)$$

$$x_2c_1c_2 + c_2\left(m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2\right) + c_1m_2x_2 = 0. \qquad (20.55)$$

Здобута система рівнянь руху (20.54) та (20.55) еквівалентна системі рівнянь (20.52) та (20.53), але відрізняється своєю структурою.

Зазначимо, що другий метод дещо громіздкий, оскільки зміщення, наприклад, кінцевої точки залежить від сил інерції всіх мас, а отже, виразиться через другі похідні від зміщень усіх точок.

Крім розглянутих двох способів складання диференціальних рівнянь коливань систем з багатьма ступенями вільності, існує третій найбільш загальний метод, що ґрунтується на використанні відомих з теоретичної механіки рівнянь Лагранжа другого роду, які за відсутності сил опору та зовнішніх збурювальних сил мають вигляд

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad (i = 1; 2; 3; \ldots; n), \qquad (20.56)$$

де T та U — відповідно кінетична та потенціальна енергія системи.

Застосовуючи рівняння Лагранжа для складання рівняння руху двомасової системи (рис. 538, *а*), насамперед запишемо вирази кінетичної та потенціальної енергії цієї системи:

$$T = \frac{m_1\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{x}_2^2}{2};$$

$$U = \frac{c_1x_1^2}{2} + \frac{c_2\,(x_2-x_1)^2}{2}.$$

Відповідні похідні, які входять до рівнянь (20.56),

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1\dot{x}_1; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m_2\dot{x}_2; \quad \frac{\partial T}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1\ddot{x}_1; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2\ddot{x}_2;$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = c_1x_1 - c_2\,(x_2-x_1); \quad \frac{\partial U}{\partial x_2} = c_2\,(x_2-x_1).$$

Тоді рівняння (20.56) стосовно до випадку, що розглядається, матиме вигляд

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1x_1 - c_2\,(x_2-x_1) = 0; \quad m_2\ddot{x}_2 + c_2\,(x_2-x_1) = 0.$$

Зазначимо, що рівняння, здобуті з рівнянь Лагранжа, завжди збігаються з рівняннями, виведеними при використанні принципу Д'Аламбера. Іноді, зокрема для системи ланцюгової структури типу розглядуваної, з міркувань простоти викладок слід користуватися першим методом; при розрахунку згинальних коливань виявляється зручнішим другий.

Отже, припустимо, що рівняння руху системи з двома ступенями вільності здобуті одним із розглянутих способів. Нехай ці рівняння мають вигляд (20.52) та (20.53). Розв'язання системи цих двох лінійних диференціальних рівнянь можна шукати в такій формі:

$$x_1 = \lambda_1 \sin(\omega t + \alpha); \quad x_2 = \lambda_2 \sin(\omega t + \alpha), \tag{20.57}$$

де λ_1, λ_2, ω та α — сталі, які треба вибрати такими, щоб задовольнити рівняння (20.52) та (20.53).

Підставляючи розв'язок (20.57) у ці рівняння, матимемо

$$-m_1\lambda_1\omega^2 + c_1\lambda_1 - c_2(\lambda_2 - \lambda_1) = 0; \quad -m_2\lambda_2\omega^2 + c_2(\lambda_2 - \lambda_1) = 0,$$

або

$$\lambda_1\left(c_1 + c_2 - m_1\omega^2\right) - \lambda_2 c_2 = 0; \quad -\lambda_2 c_2 + \lambda_2\left(c_2 - m_2\omega^2\right) = 0. \tag{20.58}$$

Рівняння (20.58) містить три невідомі: амплітуди λ_1, λ_2 та частоту ω. З цих двох рівнянь знайти зазначені три величини неможливо, проте з них можна визначити частоту. Дійсно, розглядаючи систему рівнянь (20.58), бачимо, що випадок коливального руху, коли $\lambda_1 \neq 0$ та $\lambda_2 \neq 0$, можливий тоді, коли дорівнює нулю визначник указаної системи двох однорідних рівнянь відносно λ_1 та λ_2, тобто коли

$$\begin{vmatrix} c_1 + c_2 - m_1\omega^2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 - m_2\omega^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{20.59}$$

Записавши цей визначник у розгорнутому вигляді, після деяких перетворень матимемо

$$\omega^4 - \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2}\right)\omega^2 + \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2} = 0.$$

Це рівняння є квадратним відносно ω^2, і легко показати, що воно має два дійсних додатних корені:

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2}\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2}\right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}};$$

$$\omega_2^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2}\right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}}.$$

Відповідно можна знайти і дві власні частоти:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2}\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2}\right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}}};$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2}\right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}}}. \tag{20.60}$$

Відповідно до рівнянь (20.60) двочастотний коливальний процес у загальному вигляді слід записати так:

$$x_1 = \lambda_{11}\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \lambda_{12}\sin(\omega_2 t + \alpha_2);$$
$$x_2 = \lambda_{21}\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \lambda_{22}\sin(\omega_2 t + \alpha_2). \tag{20.61}$$

Тут перший індекс біля амплітуди λ показує номер координати, а другий — номер доданка в рядку або номер частоти.

Амплітуди коливань пов'язані відношенням, яке визначається з першого або другого рівняння (20.58):

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{c_1 + c_2 - m_1\omega^2}{c_2}; \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{c_2}{c_2 - m_2\omega_2^2},$$

або відповідно до прийнятої індексації:

$$\varkappa_{21} = \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{11}} = \frac{c_1 + c_2 - m_1\omega_1^2}{c_2}; \quad \varkappa_{22} = \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{12}} = \frac{c_2}{c_2 - m_2\omega_2^2}.$$

Тоді рівняння (20.61) можна записати у вигляді

$$x_1 = \lambda_{11}\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \lambda_{12}\sin(\omega_2 t + \alpha_2);$$
$$x_2 = \varkappa_{21}\lambda_{11}\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \varkappa_{22}\lambda_{12}\sin(\omega_2 t + \alpha_2). \tag{20.62}$$

При цьому власні частоти ω_1 та ω_2, а також відношення амплітуд $\varkappa_{21}$ та $\varkappa_{22}$ залежать від параметрів коливальної системи.

Щодо значень амплітуд λ_{11} та λ_{21}, а також кутів зсуву фаз α_1 та α_2, то їх слід визначити з чотирьох початкових умов, що виражають значення зміщень та швидкостей обох мас у початковий момент часу.

Якщо рух системи спричинений ударом по масі m, що відповідає таким початковим умовам при $t = 0$:

$$x_1(0) = 0; \quad x_2(0) = 0;$$
$$\dot{x}_1(0) = 0; \quad \dot{x}_2(0) = v_0,$$

з рівнянь (20.62) матимемо

$$\lambda_{11}\sin\alpha_1 + \lambda_{12}\sin\alpha_2 = 0;$$
$$\varkappa_{21}\lambda_{11}\sin\alpha_1 + \varkappa_{22}\lambda_{12}\sin\alpha_2 = 0;$$
$$\lambda_{11}\omega_1\cos\alpha_1 + \lambda_{12}\omega_2\cos\alpha_2 = 0;$$
$$\varkappa_{21}\lambda_{11}\omega_1\cos\alpha_1 + \varkappa_{22}\lambda_{12}\omega_2\cos\alpha_2 = v_0.$$

Звідси, оскільки ω_1, ω_2, $\varkappa_{21}$ і $\varkappa_{22}$ відомі, знаходимо, що

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0; \quad \lambda_{11} = \frac{v_0}{\omega_1}\frac{1}{\varkappa_{21} - \varkappa_{22}}; \quad \lambda_{12} = \frac{v_0}{\omega_2}\frac{1}{\varkappa_{22} - \varkappa_{21}}.$$

Добираючи штучно початкові умови так, щоб амплітуда $\lambda_{12} = 0$, можна знайти одночастотні коливання, які описуються однією гармонікою:

$$x_{11}=\lambda_{11}\sin(\omega_1 t+\alpha_1);$$
$$x_{21}=\varkappa_{21}\lambda_{11}\sin(\omega_1 t+\alpha_1). \quad (20.63)$$

Коливання, що описуються однією гармонікою, називаються *першими нормальними коливаннями.* Оскільки відношення амплітуд $\varkappa_{21}$ не залежить від початкових умов, то одночасні коливання характеризуються досить певним співвідношенням амплітуд, яке залежить від параметрів системи. Отже, $\varkappa_{21}$ визначає першу нормальну форму коливань.

Друга форма коливань, очевидно, визначатиметься відношенням $\varkappa_{22}=\lambda_{22}/\lambda_{12}$ тоді, коли початкові умови вибрано такими, при яких $\lambda_{11}=0$, і здійснюються другі нормальні коливання, що описуються формулами

$$x_{12}=\lambda_{12}\sin(\omega_2 t+\alpha_2);$$
$$x_{22}=\varkappa_{22}\lambda_{12}\sin(\omega_2 t+\alpha_2). \quad (20.64)$$

Зазначимо, що кількість нормальних форм коливань та така сама кількість власних частот збігаються з числом ступенів вільності коливальної системи і що дві нормальні форми коливань ортогональні, тобто

$$m_1\lambda_{11}\lambda_{12}+m_2\lambda_{21}\lambda_{22}=0.$$

Виявивши загальні принципи визначення основних параметрів коливань пружних систем з кількома ступенями вільності, перейдемо до розгляду дуже важливих видів коливань, які часто мають місце в інженерній справі.

§ 130. Крутильні коливання валів і систем передач

Уявимо собі механічну систему, яка складається з пружного вала з насадженими на нього дисками (рис. 539, *а*) і здійснює крутильні коливання. Нехай $J_1, J_2, J_3, \ldots, J_n$ — моменти інерції маси дисків відносно осі вала; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$ — кути повороту дисків при коливаннях; $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ — жорсткості рівних ділянок вала між дисками при крученні:

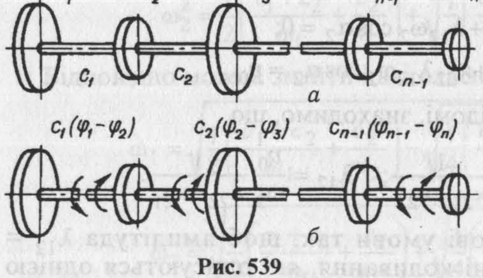


Рис. 539

$$c_i=\frac{GJ_p}{l_i},$$

де l_i — довжина відповідної ділянки.

Оскільки $c_1, c_2, c_3, \ldots$ є крутними моментами, які спричинюють закручування відповідних ділянок вала на 1 рад, то $c_1(\varphi_1-\varphi_2)$; $c_1(\varphi_2-\varphi_3)$; ... — крутні моменти, що виникають у перерізах вала при взаємному повороті першого та другого дисків на кут $\varphi_1-\varphi_2$, другого та третього — на кут $\varphi_2-\varphi_3$ і т. д. (рис. 539, *б*).

Нехтуючи моментом інерції маси обертового вала порівняно з моментами інерції $J_1, J_2, \ldots$ обертових мас дисків, кінетичну енергію коливної системи можна виразити як

$$T=\frac{1}{2}J_1\dot\varphi_1^2+\frac{1}{2}J_2\dot\varphi_2^2+\frac{1}{2}J_3\dot\varphi_3^2+\ldots \quad (20.65)$$

Потенціальна енергія розглядуваної системи з n ступенями вільності за рахунок пружної деформації вала

$$U=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{M_{\text{кр}i}\varphi_i}{2},$$

або

$$U=\frac{1}{2}c_1(\varphi_1-\varphi_2)^2+\frac{1}{2}c_2(\varphi_2-\varphi_3)^2+\frac{1}{2}c_3(\varphi_3-\varphi_4)^2+\ldots \quad (20.66)$$

Підставляючи вирази (20.65) та (20.66) у рівняння Лагранжа (20.56), дістанемо таку систему диференціальних рівнянь вільних крутильних коливань вала з насадженими на нього дисками:

$$J_1\ddot\varphi_1+c_1(\varphi_1-\varphi_2)=0;$$
$$J_2\ddot\varphi_2+c_2(\varphi_2-\varphi_3)-c_1(\varphi_1-\varphi_2)=0;$$
$$J_3\ddot\varphi_3+c_3(\varphi_3-\varphi_4)-c_2(\varphi_2-\varphi_3)=0;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20.67)$$
$$J_{n-1}\ddot\varphi_{n-1}+c_{n-1}(\varphi_{n-1}-\varphi_n)-c_{n-2}(\varphi_{n-2}-\varphi_{n-1})=0;$$
$$J_n\ddot\varphi_n-c_{n-1}(\varphi_{n-1}-\varphi_n)=0.$$

Складаючи ці рівняння, матимемо

$$J_1\ddot\varphi_1+J_2\ddot\varphi_2+\ldots+J_n\ddot\varphi_n=0,$$

звідки, інтегруючи один раз, знайдемо

$$J_1\dot\varphi_1+J_2\dot\varphi_2+J_3\dot\varphi_3+\ldots+J_n\dot\varphi_n=\text{const},$$

тобто момент кількості руху системи навколо осі вала при вільних коливаннях залишається сталим.

Надалі вважатимемо, що цей момент кількості руху дорівнює нулю. Цим самим виключаємо з розгляду будь-яке обертання вала як твердого тіла і розглядатимемо лише коливальні рухи, що спричинюються скручуванням вала.

Користуючись загальними методами розв'язання добутої системи диференціальних рівнянь (20.67), розв'язок шукаємо у вигляді

$$\varphi_1=\lambda_1\cos(\omega t+\Psi);\quad \varphi_2=\lambda_2\cos(\omega t+\Psi),\ldots \quad (20.68)$$

Підставляючи розв'язок (20.68) у рівняння (20.67), матимемо

$$
\begin{aligned}
&J_1\lambda_1\omega^2 - c_1(\lambda_1-\lambda_2)=0;\\
&J_2\lambda_2\omega^2 + c_1(\lambda_1-\lambda_2) - c_2(\lambda_2-\lambda_3)=0;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&J_n\lambda_n\omega^2 + c_{n-1}(\lambda_{n-1}-\lambda_n)=0.
\end{aligned}
\qquad (20.69)
$$

Виключивши з цих залежностей $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$, дістанемо рівняння для визначення частот.

Так, у випадку трьох дисків (рис. 540) система рівнянь (20.69) матиме вигляд

$$
\begin{aligned}
&J_1\lambda_1\omega^2 - c_1(\lambda_1-\lambda_2)=0;\\
&J_2\lambda_2\omega^2 + c_1(\lambda_1-\lambda_2) - c_2(\lambda_2-\lambda_3)=0;\\
&J_3\lambda_3\omega^2 + c_2(\lambda_2-\lambda_3)=0.
\end{aligned}
\qquad (20.70)
$$

Склавши ці рівняння, дістанемо

$$J_1\lambda_1 + J_2\lambda_2 + J_3\lambda_3 = 0. \qquad (20.71)$$

З першого та третього рівнянь системи (20.70) знайдемо

$$\lambda_1 = \frac{-c_1\lambda_2}{J_1\omega^2 - c_1};\quad \lambda_3 = -\frac{c_2\lambda_2}{J_3\omega^2 - c^2}. \qquad (20.72)$$

Підставляючи вираз (20.72) у формулу (20.71), матимемо

$$\frac{J_1J_2J_3}{c_1c_2}\omega^4 - \left(\frac{J_1J_2+J_1J_3}{c_1} + \frac{J_2J_3+J_1J_3}{c_2}\right)\omega^2 + (J_1+J_2+J_3) = 0. \qquad (20.73)$$

Розв'язуючи це рівняння відносно ω^2, можна знайти два корені ω_1^2 та ω_2^2, що відповідають двом головним видам коливань. Підставляючи здобуті при цьому значення ω_1^2 та ω_2^2 у рівняння (20.72), знайдемо відношення λ_1/λ_2 та λ_2/λ_3 для двох головних видів коливань і тим самим визначимо стан системи під час коливань. Зазначені два види коливань для тримасової системи зображено на діаграмах *I* та *II* (рис. 540) відповідно для одновузлової та двовузлової форм коливань.

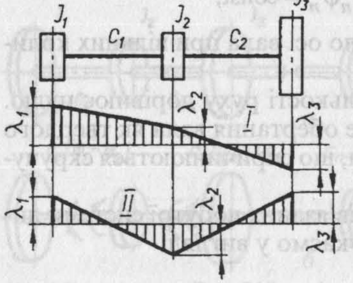


Рис. 540

У разі чотирьох обертових масивних дисків рівняння частоти дістанемо, прирівнюючи до нуля визначник рівнянь (20.67) при $n = 4$. Розв'язуючи його, знайдемо чотири корені рівняння, з яких один унаслідок вільного обертання вала як твердого тіла навколо його осі виявиться нульовим, а решта (відмінні від нуля) дадуть частоти трьох головних коливань розглядуваної системи.

§ 131. Поперечні коливання стрижнів із зосередженими масами

Поперечні коливання стрижнів досить часто мають місце в машинобудуванні, і зокрема в турбобудуванні, де застосовуються вали з прямолінійними осями, що несуть низку дисків. Оскільки такі вали мають значні прогони, то дуже важливо вміти визначати критичні швидкості обертання таких валів, що пов'язано з вивченням їхніх поперечних коливань.

Вивчення поперечних коливань валів із зосередженими масами розпочнемо з розгляду пружної балки на двох опорах, що несе довільну кількість зосереджених (точкових) мас $m_1, m_2, \dots, m_n$ (рис. 541).

Розв'язуючи поставлену задачу, скористаємося другим способом (див. § 129), згідно з яким до пружної системи, що не має маси, треба прикласти сили інерції $-m_1\ddot{w}_1; -m_2\ddot{w}_2; -\dots; m_n\ddot{w}_n$, де $w_1, w_2, \dots, w_n$ — відповідно поперечні переміщення (прогини) осі балки в місці прикладення мас $m_1, m_2, \dots, m_n$, а $\ddot{w}_1, \ddot{w}_2, \dots, \ddot{w}_n$ другі похідні цих переміщень по часу.

Вирази для зазначених переміщень можуть бути узагальнені й подані в канонічному вигляді:

$$
\begin{aligned}
&w_1 = -m_1\ddot{w}_1\delta_{11} - m_2\ddot{w}_2\delta_{12} \dots - m_n\ddot{w}_n\delta_{1n};\\
&w_2 = -m_1\ddot{w}_1\delta_{21} - m_2\ddot{w}_2\delta_{22} - \dots - m_n\ddot{w}_n\delta_{2n};\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&w_n = -m_1\ddot{w}_1\delta_{n1} - m_2\ddot{w}_2\delta_{n2} - \dots - m_n\ddot{w}_n\delta_{nn},
\end{aligned}
\qquad (20.74)
$$

де δ_{ik} — переміщення в напрямі *i*, спричинене одиничною силою, що діє в напрямі *k*.

Ці коефіцієнти при згинанні визначаються за методом Мора:

$$\delta_{ik} = \sum\int_0^l \frac{\overline{M}_i\overline{M}_k}{EJ}dx,$$

де $\overline{M}_i(x)$ та $\overline{M}_k(x)$ — згинальні моменти, спричинені відповідними одиничними силами

$$\overline{P}_i = -m_i\ddot{w} = 1;\quad \overline{P}_k = -m_k\ddot{w}_k = 1.$$

Ці коефіцієнти можна обчислити також за допомогою формули Верещагіна

$$\delta_{ik} = \sum\frac{\Omega_i\overline{M}_{ck}}{EJ},$$

де Ω_i — площа епюри $\overline{M}_i$ (або частини M_i); $\overline{M}_{ck}$ — ордината епюри $\overline{M}_i$, розміщена напроти центра ваги площі епюри Ω_i.

Нагадаємо також, що, згідно з теоремою про взаємність переміщень (теоремою Максвелла),

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}.$$

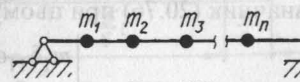


Рис. 541

Основна система рівнянь (20.74) у найпростішому випадку для коливальної системи з одним ступенем вільності приводить до одного рівняння з однією невідомою:

$$w_1 = -m_1 \ddot{w}_1 \delta_{11},$$

що еквівалентне відомому рівнянню

$$m\ddot{w} + c_1 w = 0,$$

оскільки

$$c = 1/\delta_{11}.$$

Для системи з двома ступенями вільності на підставі основних рівнянь (20.74) дістанемо систему двох рівнянь з двома невідомими функціями прогину w_1 та w_2:

$$w_1 = -m_1 \ddot{w}_1 \delta_{11} - m_2 \ddot{w}_2 \delta_{12};$$

$$w_2 = -m_1 \ddot{w}_1 \delta_{21} - m_2 \ddot{w}_2 \delta_{22}.$$

При розв'язанні системи рівнянь (20.74) функцію прогину можна взяти у вигляді

$$w_i = \lambda_i \sin(\omega t + \alpha).$$

Підставляючи ці вирази в основні рівняння (20.74), матимемо таку однорідну систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих амплітуд λ_i та частот ω_i:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1\left(m_1\delta_{11}\omega^2 - 1\right) + \lambda_2 m_2 \delta_{12}\omega^2 + \ldots + \lambda_n m_n \delta_{1n}\omega^2 = 0;\\
&\lambda_1 m_1 \delta_{21}\omega^2 + \lambda_2\left(m_2\delta_{22}\omega^2 - 1\right) + \ldots + \lambda_n m_n \delta_{2n}\omega^2 = 0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\lambda_1 m_1 \delta_{n1}\omega^2 + \lambda_2 m_2 \delta_{n2}\omega^2 + \ldots + \lambda_n\left(m_n\delta_{nn}\omega^2 - 1\right) = 0.
\end{aligned} \qquad (20.75)$$

За наявності коливань амплітуда λ_i не перетворюється на нуль, якщо визначник, складений з коефіцієнтів системи рівнянь (20.75), дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix}
m_1\delta_{11}\omega^2 - 1 & m_2\delta_{12}\omega^2 & \ldots & m_n\delta_{1n}\omega^2\\
m_1\delta_{21}\omega^2 & m_2\delta_{22}\omega^2 - 1 & \ldots & m_n\delta_{2n}\omega^2\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
m_1\delta_{n1}\omega^2 & m_2\delta_{n2}\omega^2 & \ldots & m_n\delta_{nn}\omega^2 - 1
\end{vmatrix} = 0. \qquad (20.76)$$

В окремому випадку системи з двома ступенями вільності рівняння (20.75) наберуть вигляду

$$\lambda_1\left(m_1\delta_{11}\omega^2 - 1\right) + \lambda_2 m_2 \delta_{12}\omega^2 = 0;$$

$$\lambda_1 m_1 \delta_{21}\omega^2 + \lambda_2\left(m_2\delta_{22}\omega^2 - 1\right) = 0.$$

Визначник (20.76) при цьому буде

$$\begin{vmatrix}
m_1\delta_{11}\omega^2 - 1 & m_2\delta_{12}\omega^2\\
m_1\delta_{21}\omega^2 & m_2\delta_{22}\omega^2 - 1
\end{vmatrix} = 0.$$

Записавши визначник у розгорнутому вигляді, знайдемо частотне рівняння

$$\omega^4\left(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2\right)m_1 m_2 - \omega^2\left(\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2\right) + 1 = 0, \qquad (20.77)$$

звідки перша та друга частоти коливань визначаються відповідно формулами

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{2\left(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2 m_2\right)}\left[\delta_{11} + \delta_{22}\frac{m_2}{m_1} + \sqrt{\left(\delta_{11} + \delta_{22}\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - 4\left(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2\right)\frac{m_2}{m_1}}\right]}; \qquad (20.78)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{2\left(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2\right)m_2}\left[\delta_{11} + \delta_{22}\frac{m_2}{m_1} - \sqrt{\left(\delta_{11} + \delta_{22}\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - 4\left(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2\right)\frac{m_2}{m_1}}\right]}. \qquad (20.79)$$

Приклад 84. *Визначимо частоту власних коливань балки (рис. 542), що несе три однакових зосереджених вантажі масою m кожний.*

Насамперед визначимо переміщення точок прикладення вантажів під дією одиничних сил $\bar{P}_1 = 1, \bar{P}_2 = 1$ і $\bar{P}_3 = 1$. Для цього побудуємо епюри згинальних моментів від зазначених одиничних сил (рис. 543). Користуючись формулою Верещагіна, знайдемо переміщення від одиничних навантажень:

$$\delta_{11} = \delta_{33} = 75k;\quad \delta_{22} = 243k;\quad \delta_{21} = \delta_{12} = \delta_{32} = \delta_{23} = 117k;\quad \delta_{13} = \delta_{31} = 51k,$$

де

$$k = \frac{l^3}{9 \cdot 1296 EJ}.$$

Маючи значення δ_{in}, складемо визначник, аналогічний виразу (20.76):

$$\begin{vmatrix}
75mk\omega^2 - 1 & 75mk\omega^2 & 51mk\omega^2\\
117mk\omega^2 & 243mk\omega^2 - 1 & 117mk\omega^2\\
51mk\omega^2 & 117mk\omega^2 & 75mk\omega^2 - 1
\end{vmatrix} = 0.$$

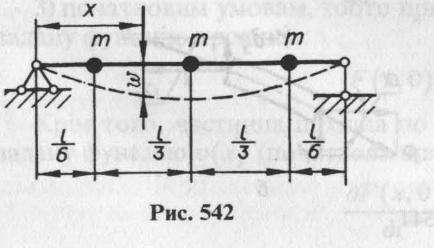


Рис. 542

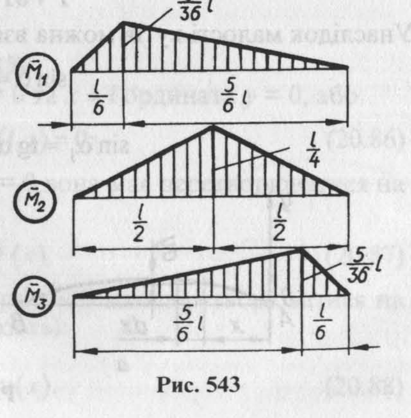


Рис. 543

Записавши здобутий визначник у розгорнутому вигляді, знайдемо рівняння частоти:

$$77\,760\left(mk\omega^2\right)^3 - 12\,096\left(mk\omega^2\right)^2 + 393mk\omega^2 - 1 = 0.$$

Це рівняння має такі три корені, що відповідають трьом значенням власних колових частот коливань розглядуваної пружної системи:

$$\omega_1 = \frac{5{,}692}{l}\sqrt{\frac{EJ}{ml}}; \qquad (20.80)$$

$$\omega_2 = \frac{22{,}05}{l}\sqrt{\frac{EJ}{ml}}; \qquad (20.81)$$

$$\omega_3 = \frac{36{,}00}{l}\sqrt{\frac{EJ}{ml}}. \qquad (20.82)$$

§ 132. Коливання пружних тіл з розподіленими масами

Поперечні коливання струни. Виведемо диференціальне рівняння поперечних коливань струни як найтиповішого об'єкта коливальної системи з розподіленими параметрами. Для цього розглянемо відхилення струни, закріпленої в точках A та B (рис. 544, *а*). Початковий натяг струни позначимо через P. Вважатимемо відхилення малим, а зміною зусилля натягу P при цьому знехтуємо, тобто $P = \text{const}$. Довжина струни l.

Припускаючи, що при відхиленні всі точки струни лежать у площині xy, розглянемо елемент струни масою dm, кінцеві точки його x та $x + dx$, тобто $dm = \rho F dx$, де ρ — густина, F — площа поперечного перерізу. Проведемо дотичні до елемента струни в його крайніх точках; кути нахилу дотичних до осі x відповідно α та α_1 (рис. 544, *б*). Вважатимемо їх також малими.

Складова натягу струни, паралельна осі Oy, в точці x

$$Y = -P\sin\alpha,$$

а в точці $x + dx$

$$Y + \partial Y = P\sin\alpha_1.$$

Унаслідок малості кутів можна взяти

$$\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial y}{dx};$$

$$\sin\alpha_1 \approx \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx.$$

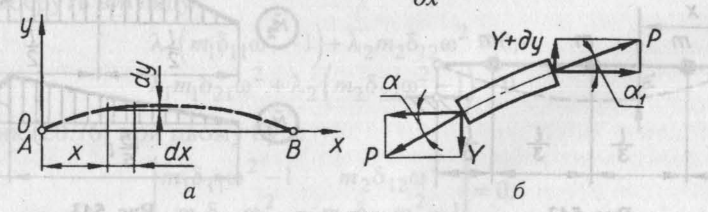


Рис. 544

Сума проекцій натягу на вісь y

$$dY = P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx.$$

Щоб знайти рівняння руху струни при коливанні, треба, користуючись принципом Д'Аламбера, цю силу прирівняти до сили інерції елемента струни, яка дорівнює $dm\,(\partial^2 y/\partial t^2)$, що дає

$$dm\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx. \qquad (20.83)$$

Позначивши через Q вагу всієї струни, знайдемо

$$dm = \frac{Q}{gl}dx,$$

де g — прискорення вільного падіння.

Тоді рівняння (20.83) набере вигляду

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{Pgl}{Q}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \qquad (20.84)$$

Позначаючи

$$\frac{Pgl}{Q} = a^2,$$

рівняння (20.84) запишемо так:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \qquad (20.85)$$

Це і є диференціальне рівняння плоских поперечних коливань натягнутої струни.

Виходячи з рівняння (20.85), треба знайти відхилення як функцію двох незалежних параметрів x та t, тобто

$$y = F(x, t).$$

Ця функція має відповідати:

1) диференціальному рівнянню (20.85);

2) граничним умовам, тобто при $x = 0$ та $x = l$ ордината $y = 0$, або

$$F(0, t) = 0; \quad F(l, t) = 0; \qquad (20.86)$$

3) початковим умовам, тобто при $t = 0$ вона має перетворюватися на задану функцію прогинів:

$$F(x, 0) = f(x). \qquad (20.87)$$

Крім того, частинна похідна по t при $t = 0$ має перетворюватися на задану функцію $\upsilon(x)$ (початкова швидкість):

$$\frac{\partial F(x, 0)}{\partial t} = \upsilon(x). \qquad (20.88)$$

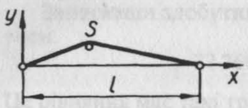


Рис. 545

Умова (20.87) означає, що в початковий момент, тобто при $t = 0$, струна має задану форму, наприклад таку, якої вона набере, якщо буде відтягнута штифтом S (рис. 545). У момент $t = 0$ штифт забирають, і струна розпочинає свої коливання.

Умова (20.88) означає, що в початковий момент усі точки струни мають задану швидкість, зокрема можуть перебувати в стані спокою, як це має місце у прикладі на рис. 545.

Розв'язок рівняння (20.85), застосовуючи метод Фур'є, шукаємо у вигляді

$$y = XT, \tag{20.89}$$

де X та T — відповідно функції x і t:

$$X = f_1(x); \quad T = f_2(t).$$

Продиференціювавши рівняння (20.89) по x і t, дістанемо

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = X\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = T\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}.$$

Після підстановки цих виразів у рівняння (20.89) останнє набере вигляду

$$X\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = a^2 T\frac{\partial^2 X}{\partial x^2},$$

або

$$\frac{1}{T}\frac{d^2 T}{dt^2} = \frac{a^2}{X}\frac{d^2 X}{dx^2}. \tag{20.90}$$

Прирівнявши праву та ліву частини останнього рівняння до однієї і тієї самої сталої величини $-k^2$, дістанемо два рівняння

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -k^2 T; \quad \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\frac{k^2}{a^2}X,$$

або

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + k^2 T = 0; \quad \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{k^2}{a^2}X = 0. \tag{20.91}$$

Окремі розв'язки цих двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку такі:

$$T_1 = \cos kt; \quad T_2 = \sin kt;$$

$$X_1 = \cos\frac{k}{a}x; \quad X_2 = \sin\frac{k}{a}x. \tag{20.92}$$

У цьому легко переконатися, підставивши їх у рівняння (20.91).

З функції (20.92) слід виключити $\cos(k/a)\,x$ як вираз, що не перетворюється на нуль при $x = 0$. Щоб $\sin(k/a)\,x$ дорівнював нулю при $x = l$, треба, щоб $kl = an\pi$, звідки $k = an\pi/l$, де n — ціле число. Рівність $kl = an\pi$ називається *рівнянням періодів* або *рівнянням частот*. Воно виводиться безпосередньо з граничних умов.

Тепер маємо два окремих розв'язки рівняння (20.85):

$$y_1 = \sin\frac{n\pi}{l}x\cos\frac{an\pi}{l}t; \quad y_2 = \sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{an\pi}{l}t. \tag{20.93}$$

Помноживши кожне з цих рівнянь на невизначені коефіцієнти A і B та склавши ці два розв'язки, дістанемо загальний розв'язок рівняння (20.85) у вигляді

$$y = \sin\frac{n\pi}{l}x\left(A_n\cos\frac{an\pi}{l}t + B_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right), \tag{20.94}$$

або, позначивши

$$A_n = C_n\cos\frac{an\pi}{l}\tau_n; \quad B_n = C_n\sin\frac{an\pi}{l}\tau_n,$$

де C_n та τ_n — сталі, рівняння (20.94) запишемо у вигляді

$$y = C_n\sin\frac{n\pi}{l}x\cos\frac{an\pi}{l}(t - \tau_n). \tag{20.95}$$

Здобуте рівняння характеризує рух як періодичний, тобто коливаний. Період коливань

$$T_n = \frac{2\pi}{\frac{an\pi}{l}} = \frac{2l}{an}, \tag{20.96}$$

а секундна частота коливань

$$f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{an}{2l}. \tag{20.97}$$

При $n = 1$ струна коливається в основному тоні (з однією півхвилею). При $n = 2$ струна коливається, утворюючи дві півхвилі, при $n = 3$ — з трьома півхвилями (рис. 546).

Взагалі характер коливань струни залежить від початкових умов. Наприклад, струна коливатиметься в основному тоні, якщо при $t = 0$ вона мала форму першої кривої ($n = 1$) і всі її точки були в спокої. Якщо початкова форма струни інша, то крім основного тону виникають обертони, оскільки коливання струни становлять сукупність окремих коливань, що накладаються одне на одне. Рівняння руху в цьому разі матиме вигляд

$$y = \sum_n\left(A_n\cos n\frac{\pi a}{l}t + B_n\sin n\frac{\pi a}{l}t\right)\sin n\frac{\pi x}{l}. \tag{20.98}$$

Для остаточного розв'язання задачі треба з початкових умов (20.87) та (20.88) визначити коефіцієнти A та B рівняння (20.98).

З умови (20.87)

$$(y)_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\sin\frac{n\pi x}{l} = f(x), \tag{20.99}$$

а з умови (20.88)

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x = v(x). \tag{20.100}$$

Тут $f(x)$ та $v(x)$ — функції, задані в інтервалі $0 < x < l$.

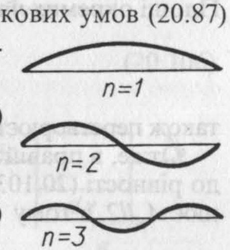


Рис. 546

Для визначення коефіцієнтів A_n і B_n, які входять до залежностей (20.99) та (20.100), треба розкласти функції $f(x)$ та $v(x)$ у ряди, члени яких є тригонометричними функціями кутів, кратних $\pi x/l$. Ця задача розв'язується методом Фур'є, який полягає в тому, що рівність (20.99) множать на $\sin m(\pi x/l)$ та інтегрують по всій довжині струни від 0 до l. У результаті такого інтегрування знаходять

$$\int_0^l f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^l A_n \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}dx. \qquad (20.101)$$

При цьому всі члени правої частини цього рівняння, крім одного, перетворюються на нуль, оскільки при $n \neq m$

$$\int_0^l \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}dx = 0, \qquad (20.102)$$

а при $n = m$

$$\int_0^l \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}dx = \frac{1}{2}. \qquad (20.103)$$

Для доказу рівностей (20.102) та (20.103) пригадаємо, що

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta).$$

Тоді

$$\int_0^l \sin n\frac{\pi x}{l}\,\sin m\frac{\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^l \cos\frac{(n-m)\pi x}{l}dx - \frac{1}{2}\int_0^l \cos\frac{(n+m)\pi x}{l}dx.$$

Розглядаючи другий інтеграл правої частини останнього рівняння, бачимо, що він становить площу, обмежену кривою

$$y = \cos(n+m)\frac{\pi x}{l}$$

та ординатами $x = 0$ і $x = l$. Якщо $n + m$ — парне число, то крива має вигляд, як на рис. 547, *а*, якщо $n + m$ — непарне число, то як на рис. 547, *б*. Площі окремих частин в обох випадках взаємно знищуються. Інтеграл

$$\int_0^l \cos(n-m)\frac{\pi x}{l}dx$$

також перетворюється на нуль для всіх значень $n \neq m$, а при $n = m$ дорівнює l.

Отже, в правій частині рівності (20.101) тільки один член, що входить до рівності (20.103), не перетворюється на нуль. Він, як доведено, дорівнює $A_n l/2$, а тому

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \qquad (20.104)$$

Аналогічно

$$B_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^l v(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \qquad (20.105)$$

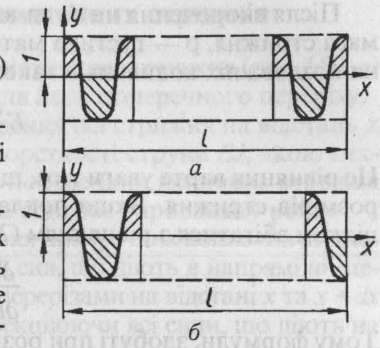


Рис. 547

За допомогою цих рівностей цілком можна визначити ряд (20.98), а разом з тим і рух струни.

Поздовжні коливання стрижня. Розглянемо поздовжні коливання призматичних стрижнів, що на відміну від струни мають значну поперечну жорсткість. Перш за все нагадаємо, що розрізняють три типи коливань: поздовжні, крутильні та поперечні.

При поздовжніх коливаннях усі частини стрижня рухаються паралельно його осі (рис. 548, *а*). Стискання та розтягання по черзі відбуваються одне за одним як у часі, так і в просторі.

Виведемо диференціальне рівняння поздовжніх коливань пружного стрижня. Для цього розглянемо умову динамічної рівноваги ділянки коливного стрижня, обмеженої перерізами *a* та *b* (рис. 548, *б*), завдовжки dx. Переміщення довільного перерізу стрижня *a* з координатою x позначимо через $u = f(x, t)$. Переміщення перерізу b буде $u + (\partial u/\partial x)\,dx$. Тоді відносні подовження в зазначених двох перерізах будуть такі: в перерізі a $\varepsilon = \partial u/\partial x$, а в перерізі $b - \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)dx$. Розглядаючи зусилля, що діють на елемент стрижня завдовжки dx, бачимо:

осьова сила в перерізі a

$$N_a = EF\frac{\partial u}{\partial x},$$

у перерізі b

$$N_b = N_a + \frac{\partial N_a}{\partial x}dx = EF\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx\right].$$

Для динамічної рівноваги рівнодійна цих зусиль має дорівнювати силі інерції маси розглядуваного елемента стрижня:

$$j = \frac{m}{l}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx.$$

Тоді рівняння динамічної рівноваги елемента стрижня буде

$$EF\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx = \frac{m}{l}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx. \qquad (20.106)$$

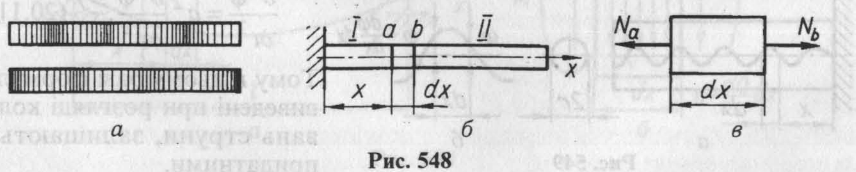


Рис. 548

Після скорочення на dx та введення нового позначення $m/lF = \rho$ (m — маса стрижня, ρ — густина матеріалу) дістанемо диференціальне рівняння поздовжніх коливань в такому остаточному вигляді:

$$E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \qquad (20.107)$$

Це рівняння варте уваги тим, що рух, який воно виражає, не залежить від розмірів стрижня. Якщо покласти $E/\rho = a^2$, то рівняння (20.107) буде цілком збігатися з рівнянням (20.85) руху струни:

$$\frac{\partial u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (20.108)$$

Тому формули, здобуті при розгляді коливань струни, можна автоматично використовувати при розрахунку поздовжніх коливань стрижня. При цьому тільки треба підставити відповідне значення для коефіцієнта a.

Крутильні коливання стрижнів. При коливаннях кручення якого-небудь, наприклад циліндричного, стрижня його циклічний рух найкраще характеризувати хвилястою лінією, креслячи її на розгорнутій поверхні стрижня (рис. 549, *а*).

Нехай переріз на відстані x закручується відносно нерухомого перерізу на кут φ, а переріз на відстані $x + dx$ — на кут $\varphi + (\partial\varphi/\partial x)\,dx$ (рис. 549, *б*). Тоді відносний кут закручування елемента завдовжки dx буде $\partial\varphi/\partial x$, і крутні моменти в кінцевих перерізах відповідно

$$GJ_p\frac{\partial\varphi}{\partial x} \text{ та } GJ_p\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}dx\right).$$

Прирівнюючи рівнодійну цих крутних моментів до моментів інерції обертання елемента завдовжки dx, що дорівнює

$$j = \rho J_p\left(\partial^2\varphi/\partial t^2\right)dx,$$

дістанемо рівняння руху

$$GJ_p\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}dx = \rho J_p dx\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},$$

яке після скорочення на J_p та dx матиме вигляд

$$G\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}. \qquad (20.109)$$

Позначивши G/ρ через a^2, знову дістанемо диференціальне рівняння у формі коливань струни:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}. \qquad (20.110)$$

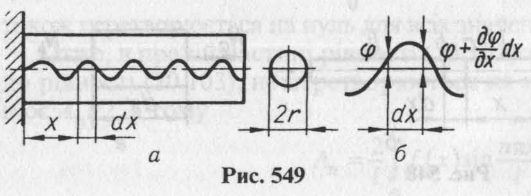


Рис. 549

Тому в цьому разі формули, виведені при розгляді коливань струни, залишаються придатними.

§ 133. Поперечні коливання призматичних стрижнів

Розглянемо поперечні коливання призматичного стрижня (рис. 550, *а*) в площині xw, яка є площиною симетрії для його поперечного перерізу.

Позначимо через w поперечне переміщення осі стрижня на відстань x від лівого кінця. На відміну від згинної жорсткості струни EJ, якою нехтували внаслідок її малості, при розгляді поперечних коливань стрижня цього робити не можна, оскільки тут вона відіграє вирішальну роль.

Для виведення диференціального рівняння поперечних коливань стрижня розглянемо умови динамічної рівноваги сил, що діють в напрямі w елемента стрижня завдовжки dx, обмеженого перерізами на відстані x та $x + dx$ від лівого кінця стрижня (рис. 550, *б*). Проекціюючи всі сили, що діють на елемент стрижня (враховуючи сили інерції), на вертикальну вісь w, матимемо

$$Q-\left(Q+\frac{\partial Q}{\partial x}dx\right)-\rho F dx\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0, \qquad (20.111)$$

де ρ — густина матеріалу; F — площа поперечного перерізу стрижня.

Ураховуючи зв'язок між поперечною силою Q та згинальним моментом M,

$$Q=\frac{\partial M}{\partial x},$$

рівняння (20.111) можна переписати у вигляді

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}=-\rho F\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \qquad (20.112)$$

Ураховуючи відомий з теорії згинання стрижнів зв'язок між згинальним моментом M та прогином нейтральної осі x балки w:

$$M=EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

рівняння (20.112) можна переписати у вигляді

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)=-\rho F\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \qquad (20.113)$$

Це і буде загальне диференціальне рівняння власних поперечних коливань стрижня.

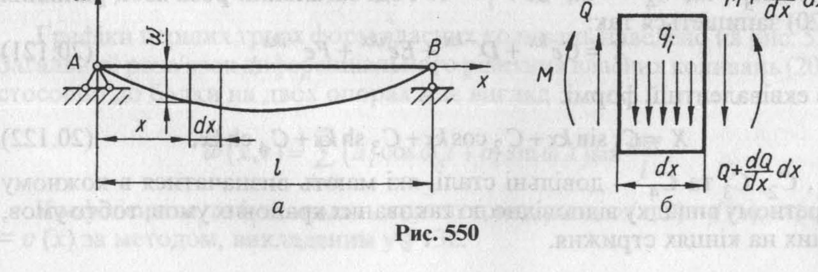


Рис. 550

В окремому випадку призматичного стрижня постійного перерізу, якщо жорсткість при згинанні від x залежати не буде ($EJ = \text{const}$), рівняння (20.113) матиме вигляд

$$EJ\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\rho F\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0, \qquad (20.114)$$

або

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+c^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=0, \qquad (20.115)$$

де

$$c=\sqrt{\frac{EJ}{\rho F}} \qquad (20.116)$$

— швидкість поширення хвилі деформації по стрижню.

Якщо стрижень коливається в поперечному напрямі за однією з форм власних коливань, його прогин у довільному перерізі змінюватиметься з часом за гармонічним законом:

$$w = X\,(A\cos\omega t + B\sin\omega t). \qquad (20.117)$$

Тут для зручності запису випущено індекс i, який позначає i-у форму коливань.

Підставляючи (20.117) в (20.114), після відповідних скорочень матимемо

$$\frac{d^4X}{dx^4}-\frac{\rho F\omega^2}{EJ}X=0, \qquad (20.118)$$

або

$$\frac{d^4X}{dx^4}-k^4X=0,$$

де

$$k^4=\frac{\rho F\omega^2}{EJ}. \qquad (20.119)$$

Поклавши в рівнянні (20.118)

$$X=e^{nx} \qquad (20.120)$$

дістанемо

$$e^{nx}\left(n^4-k^4\right)=0,$$

звідки випливає, що величина n може набирати таких значень: $n_1 = k$; $n_2 = -k$; $n_3 = ik$; $n_4 = -ik$, де $i^2 = -1$. Тоді загальний розв'язок рівняння (20.120) запишеться так:

$$X = Ce^{kx}+D^{-kx}+Ee^{ikx}+Fe^{-ikx}, \qquad (20.121)$$

або в еквівалентній формі:

$$X = C_1\sin kx + C_2\cos kx + C_3\,\text{sh}\,kx + C_4\,\text{ch}\,kx, \qquad (20.122)$$

де C_1, C_2, C_3 та C_4 — довільні сталі, які мають визначатися в кожному конкретному випадку відповідно до так званих крайових умов, тобто умов, заданих на кінцях стрижня.

Взагалі кількість крайових умов дорівнює кількості довільних сталих (по дві на кожний кінець). Всі вони виражаються рівністю нулю двох із таких чотирьох величин: X; X'; X''; X''', у тому числі: на вільному кінці $X'' = X''' = 0$; на вільній опорі $X = X'' = 0$; на жорстко закріпленому кінці $X = X' = 0$.

Для прикладу розглянемо поперечні коливання простої балки, вільно обпертої на дві опори (рис. 551, *а*). Умови на кінцях балки такі: при $x = 0$ $X = 0$, $X'' = 0$; при $x = l$ $X = 0$, $X'' = 0$.

Запишемо ці умови, виходячи з формули (20.122):

$$C_2 + C_4 = 0; \quad C_1\sin kl + C_3\,\text{sh}\,kl = 0;$$
$$-C_2 + C_4 = 0; \quad -C_1\sin kl + C_3\,\text{sh}\,kl = 0,$$

звідки

$$C_2 = C_3 = C_4 = 0;$$
$$C_1\sin kl = 0.$$

Оскільки для нетривіального розв'язку $B \neq 0$, то

$$\sin kl = 0. \qquad (20.123)$$

Залежність (20.123) і буде рівнянням частоти для розглядуваного прикладу коливань балки, шарнірно обпертої на дві опори. З рівняння (20.123) випливає, що

$$kl = i\pi \;(i = 1;\,2;\,3;\,\ldots),$$

але оскільки

$$k^4=\frac{m\omega^2}{EJ},$$

де $m = \rho F$, то колова частота коливань балки

$$\omega_i = k_i^2\sqrt{\frac{EJ}{m}}=\frac{i^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}, \qquad (20.124)$$

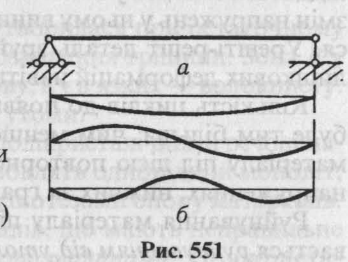


Рис. 551

а секундна частота коливань

$$f_i=\frac{\omega_i}{2\pi}=\frac{i^2\pi^2}{2l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}. \qquad (20.125)$$

Для власних коливань балки, згідно з формулою (20.122), рівняння прогинів матиме вигляд

$$X = C_1\sin\frac{i\pi x}{l}. \qquad (20.126)$$

Графіки перших трьох форм власних коливань наведено на рис. 551, *б*. Загальний розв'язок диференціального рівняння власних коливань (20.114) стосовно до балки на двох опорах має вигляд

$$w(x,t)=\sum_{i=0}^{\infty}\left(a_i\cos\omega_i t + b_i\sin\omega_i t\right)\sin\frac{i\pi x}{l}.$$

Коефіцієнти a_i та b_i знаходять з початкових умов $w(x, 0) = f(x)$; $w(x, 0) = \upsilon(x)$ за методом, викладеним у § 132.

Розділ 21 ОПІР МАТЕРІАЛІВ ДІЇ ПОВТОРНО-ЗМІННИХ НАПРУЖЕНЬ

§ 134. Явище утоми матеріалів

Опір матеріалів дії навантажень, що змінюються в часі за модулем або за модулем та знаком, суттєво відрізняється від опору дії статичного навантаження. При цьому під дією змінних навантажень елементи конструкцій руйнуються при значно менших напруженнях, ніж під дією статичних навантажень. Типовим прикладом деталі, що зазнає змінних навантажень, є шток поршневої машини, знак напружень в якому змінюється відповідно до змін напряму руху поршня.

Практикою встановлено: якщо елемент конструкції багаторазово піддавати змінному навантаженню певного рівня, то після деякої кількості змін напружень у ньому виникне тріщина, яка поступово буде розвиватися. Урешті-решт деталь зруйнується, не давши при цьому помітних залишкових деформацій навіть тоді, коли її матеріал високопластичний.

Кількість циклів до появи першої тріщини і до повного руйнування буде тим більша, чим менше напруження. Характерно, що руйнування матеріалу під дією повторно-змінних навантажень може відбутися при напруженнях, нижчих за границю текучості.

Руйнування матеріалу під дією повторно-змінних напружень називається *руйнуванням від утоми*.

Взагалі ж *утомою матеріалів* (зокрема, металів) називають явище руйнування внаслідок поступового накопичення в них пошкоджень, що призводять до виникнення тріщини при багаторазовому повторенні навантажень.

Здатність металів чинити опір руйнуванню при дії повторно-змінних напружень називається *опором утоми матеріалу*.

Вивчення питань утоми в опорі матеріалів має дуже велике значення. Такі важливі деталі, як осі залізничних вагонів, колінчасті вали, шатуни моторів, гребні гвинти, пружини клапанів, повітряні гвинти, поршневі пальці й багато інших деталей, виходять з ладу здебільшого внаслідок руйнувань утомного характеру.

Руйнування від утоми відбувається, якщо має місце одна з таких двох особливостей прикладання навантаження:

1) багаторазове прикладання навантаження одного знака, наприклад періодично змінюваного від нуля до максимуму (рис. 552, *а*);

2) багаторазове повторення навантаження, що періодично змінюється не тільки за модулем, а й за знаком (знакозмінні навантаження), коли на опір утоми матеріалу одночасно впливають як повторність, так і змінність навантажування. При цьому розрізняють зміну навантаження за симетричним циклом (рис. 552, *б*) та за несиметричним (рис. 552, *в*, *г*).

Для руйнування від утоми недостатньо змінності напружень. Потрібно також, щоб напруження мали певне значення.

Максимальне напруження, при якому матеріал здатний чинити опір не руйнуючись при будь-якій довільно великій кількості повторень змінних напружень, називається границею витривалості (границею утоми).

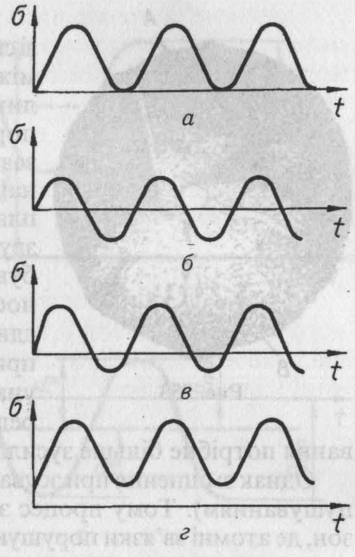


Рис. 552

Злом деталі від утоми має характерний вигляд (рис. 553). На ньому майже завжди є дві зони. Одна з них (*A*) гладка, притерта, утворена внаслідок поступового розвитку тріщини; друга (*B*) — крупнозерниста, що утворилася при остаточному зломі перерізу деталі, ослабленого під час розвивання тріщини. Зона *B* у крихких деталей має крупнокристалічну будову, а у в'язких — волокнисту.

Коротко зупинимося на механізмі явища утоми.

Усі метали, які застосовуються в техніці, є полікристалічними речовинами, що складаються з окремих зерен і не становлять однорідний моноліт, яким вважають матеріал згідно з основними гіпотезами опору матеріалів. Зерна технічних металів є сукупністю кристалів, що мають неправильне огранювання; їх, як правило, називають *кристалітами*. Полікристалічність матеріалу та неминуча його неоднорідність призводять до того, що під дією тих чи інших навантажень в окремих зернах виникають перенапруження і створюються умови для появи мікротріщин. При цьому в разі напружень, спричинених статичним навантаженням, подібні мікротріщини не небезпечні. Якщо напруження змінні у часі, то має місце тенденція розвитку мікротріщин, що призводить урешті-решт до злому деталі.

Крім зазначеної гіпотези, існує й дещо інший підхід до пояснення фізичної природи явища утоми. Зокрема, виникнення тріщин від утоми можна пояснити вичерпанням здатності кристалічних зерен чинити опір зсуву.

Зерна більшості металів складаються з низки елементарних кубиків з розмірами сторін (3…6) 10^{-8} см. Кубики, в свою чергу, складаються з системи атомів, що взаємодіють між собою, розташованих у цілком певному для даного матеріалу порядку, утворюючи так звані просторові атомні ґратки. Форма та розміри елементів останніх залежать від сил взаємодії атомів та визначають характерні властивості певної речовини.

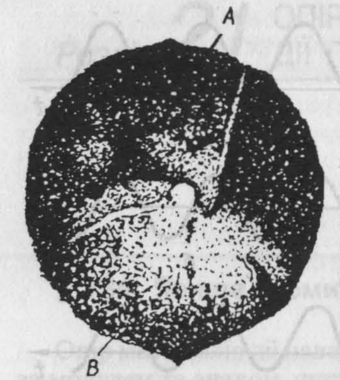


Рис. 553

Деформація матеріалу звичайно пов'язана зі спотворюванням кристалічних ґраток та зміною міжатомних відстаней. При цьому в разі невеликих напружень взаємодія між атомами не порушується, і при дальших розвантаженнях зазначені викривлення ґраток зникають. Якщо напруження великі, то в кристалічних зернах пластичних матеріалів по деяких площинах, що звуться площинами ковзання кристаліту, відбуваються необоротні зсуви. Зсунуті одна відносно одної групи атомів уже не утворюють єдиних атомних ґраток. Нове утворення, що при цьому виникло, виявляється більш міцним унаслідок посилення площини ковзання всередині окремих зерен. Тепер для його руйнування потрібне більше зусилля.

Однак зміцнення при зсувах супроводжується зниженням міцності (розпушуванням). Тому процес зсуву обов'язково супроводжується появою зон, де атомні зв'язки порушуються, а нові не утворюються. Це виявляється в тому, що утворюються дуже дрібні мікротріщини, кожна з яких у певних умовах (наприклад, при сусідстві кількох зерен, послаблених тріщиною) може стати осередком розвитку тріщини від утоми, яка в результаті призводить до руйнування від утоми.

Отже, зі сказаного випливає, що механізм утворення тріщин при повторно-змінних навантаженнях дуже складний і не може вважатися повністю вивченим.

Із безумовних положень теорії утоми можна зазначити такі:

1) процеси, що відбуваються в металі при повторно-змінних навантаженнях, носять різко виражений місцевий характер;

2) із двох видів напружень — нормальних та дотичних — вирішальний вплив на процеси утоми до утворення першої тріщини включно мають дотичні напруження, які спричинюють пластичні зсуви та руйнування.

Розвиток тріщини від утоми, безумовно, може прискорюватись, якщо є розтягальні напруження як у пластичних, так і, особливо, в малопластичних та крихких матеріалів типу чавуну, в яких поява тріщини відриву значно підвищує чутливість до розтягальних напружень.

Тріщини найчастіше утворюються в зернах, які лежать ближче до поверхні деталі. Пояснюється це тим, що поверхневі шари матеріалу певною мірою мають сліди пошкоджень різними технологічними операціями при обробці деталі (внутрішні напруження, сліди механічної обробки), не кажучи вже про ті випадки, коли зовнішні шари при повторно-змінних навантаженнях зазнають найбільших напружень (при згинанні та крученні).

Границю витривалості визначають експериментально. Вона залежить від цілої низки факторів, зокрема від форми та розмірів деталі, способу її обробки, стану поверхні деталі, виду напруженого стану (розтягання-стис-

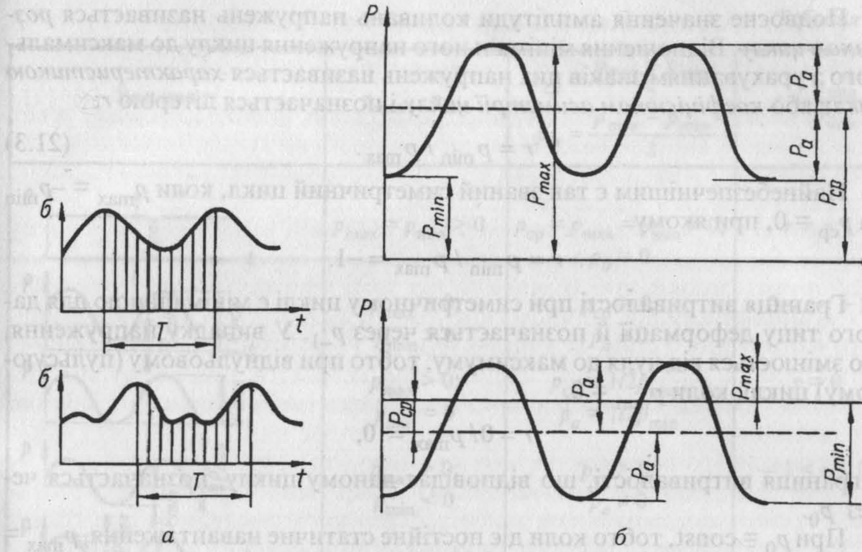


Рис. 554

кання, кручення, згинання тощо), закону зміни навантаження в часі при випробуваннях.

При розгляді опору матеріалів дії змінних напружень у більшості випадків інженерної практики припускається, що ці напруження є періодичними функціями часу $p = f(t)$ з періодом T*.

Сукупність усіх значень напружень за час одного періоду називають циклом напружень (рис. 554, *а*). На опір утоми в основному впливають максимальні $p_{\max}$ та мінімальні $p_{\min}$ напруження циклу. Крім них в опорі матеріалів вводять поняття *постійного*, або *середнього, напруження циклу* p (рис. 554, *б*):

$$p_{\text{ср}} = \frac{p_{\max} + p_{\min}}{2} \tag{21.1}$$

та поняття про амплітуду p_a циклу, що характеризує змінність напружень:

$$p_a = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{2}. \tag{21.2}$$

Середнє напруження може бути як додатним, так і від'ємним, амплітуда ж циклу — абсолютна величина (знак не враховується). Відповідно до виразів (21.1) та (21.2)

$$p_{\max} = p_{\text{ср}} + p_a; \quad p_{\min} = p_{\text{ср}} - p_a.$$

*У цьому підручнику не розглядаються розрахунки на опір утоми під дією випадкових змінних навантажень, що має місце в деяких випадках експлуатації конструкцій.

Подвоєне значення амплітуди коливань напружень називається *розмахом циклу*. Відношення мінімального напруження циклу до максимального з урахуванням знаків цих напружень називається *характеристикою циклу* або *коефіцієнтом асиметрії циклу* і позначається літерою r:

$$r = p_{\min} / p_{\max}. \tag{21.3}$$

Найнебезпечнішим є так званий симетричний цикл, коли $p_{\max} = -p_{\min}$ та $p_{ср} = 0$, при якому

$$r = p_{\min} / p_{\max} = -1.$$

Границя витривалості при симетричному циклі є мінімальною для даного типу деформації й позначається через p_{-1}. У випадку напруження, що змінюється від нуля до максимуму, тобто при віднульовому (пульсуючому) циклі, коли $p_{\min} = 0$,

$$r = 0 / p_{\max} = 0,$$

а границя витривалості, що відповідає даному циклу, позначається через p_0.

При $p_0 = \mathrm{const}$, тобто коли діє постійне статичне навантаження, $p_{\max} = p_{\min} = p$ і характеристика циклу

$$r = p_{\min} / p_{\max} = p / p = 1.$$

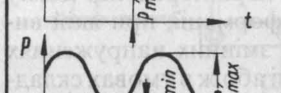
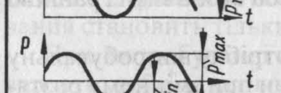
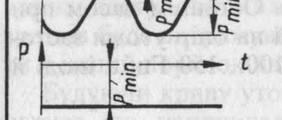
У самому загальному випадку границю витривалості, здобуту при характеристиці циклу r, позначають p_r, границю витривалості, визначену при будь-якому певному значенні r, наприклад при $r = -0{,}5$, позначають відповідно $p_{-0,5}$.

Цикли, що мають однакові характеристики r, називаються *подібними*. Характеристика циклу, або коефіцієнт асиметрії, може змінюватися від $-\infty$ до $+\infty$.

Значення коефіцієнтів асиметрії циклу для різних видів циклів наведено в табл. 21. Очевидно, для повного висновку про характер дії циклічного навантаження крім характеристики циклу r має бути відомим хоча б максимальне чи мінімальне напруження циклу.

Зазначимо, що в окремих випадках, коли мова йтиме про нормальні або дотичні напруження (у першому випадку при циклічному розтяганні-стисканні або при згинанні, у другому — при циклічному крученні), літера p у прийнятих вище позначеннях має бути замінена відповідно на σ або τ при збереженні відповідних індексів. Так, при циклічному розтяганні-стисканні або згинанні замість $p_{\max}$, $p_{\min}$, $p_{ср}$ та p_a мають відповідно фігурувати $\sigma_{\max}$, $\sigma_{\min}$, $\sigma_{ср}$ та σ_a, тоді границя витривалості при характеристиці циклу r позначатиметься σ_r, а, наприклад, при симетричному циклі, тобто при $r = -1$, — σ_{-1}. У разі кручення з циклічною зміною напружень характерні напруження циклу відповідно позначатимуться через $\tau_{\max}$, $\tau_{\min}$, $\tau_{ср}$, τ_a, а границя витривалості — через τ_r, τ_{-1}, τ_0 і т. д.

Таблиця 21

Вид циклу	$p_{\max}$, $p_{\min}$	$p_{ср} = \frac{p_{\max} + p_{\min}}{2}$, $p_a = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{2}$	$r = \frac{p_{\min}}{p_{\max}}$
	$p_{\max} = p_{\min} > 0$	$p_{ср} = p_{\max} = p_{\min} > 0$; $p_a = 0$	$r = +1$
	$p_{\max} > 0$; $p_{\min} > 0$	$p_{ср} > 0$; $p_a \neq 0$	$0 < r < +1$
	$p_{\max} > 0$; $p_{\min} = 0$	$p_{ср} = 1/2 p_{\max}$; $p_a = 1/2 p_{\min}$	$r = 0$
	$p_{\max} > 0$; $p_{\min} < 0$	$p_{ср} > 0$; $p_a \neq 0$	$-1 < r < 0$
	$p_{\max} = -p_{\min} > 0$; $p_{\min} < 0$	$p_{ср} = 0$; $p_a = p_{\max}$	$r = -1$
	$p_{\max} < 0$; $p_{\min} < 0$; $p_{\max} < \lvert p_{\min} \rvert$	$p_{ср} < 0$; $p_a \neq 0$	$-\infty < r < -1$
	$p_{\max} = 0$; $p_{\min} < 0$;	$p_{ср} = 1/2 p_{\min}$; $p_a = 1/2 \lvert p_{\min} \rvert$	$r = \pm\infty$
	$p_{\max} < 0$; $p_{\min} < 0$	$p_{ср} < 0$; $p_a \neq 0$	$+1 < r < +\infty$
	$p_{\max} = p_{\min} < 0$	$p_{ср} = p_{\max} = p_{\min} < 0$; $p_a = 0$	$r = +1$

§ 135. Методи визначення границі витривалості. Діаграма утоми

Для визначення границі витривалості того чи іншого матеріалу треба на відповідній випробувальній машині випробувати партію зразків з даного матеріалу в кількості 6—12 шт. Для цього найчастіше беруть гладкі циліндричні зразки діаметром 7…10 мм.

Границі витривалості матеріалу при вибраній характеристиці циклу r, зрозуміло, будуть рівними залежно від виду деформації, при якій випробовують зразки, тобто залежно від того, при змінних напруженнях розтягання-стискання, змінному крученні, згинанні або ж в умовах складного напруженого стану їх випробовують. Тому, ставлячи метою визначити границю витривалості, слід наперед зазначити, при якому виді деформації та характері зміни напружень за цикл треба визначити границю витривалості.

Відповідно до поставлених вимог вибирають потрібну випробувальну машину. Для випробування матеріалу на опір утоми при змінному розтяганні-стисканні можна взяти машину, схему якої наведено на рис. 555.

У лабораторних умовах симетричний цикл здійснити найбільш просто. Схему найпростішої установки для визначення границі витривалості при ротаційному згинанні у разі симетричного циклу зображено на рис. 556. При обертанні зразка його зовнішні волокна зазнаватимуть навперемінно то розтягання (коли вони знизу), то стискання (при повороті зразка на 180°).

Частота обертання найбільш поширених машин для визначення опору утоми, як правило, дорівнює 3000 хв$^{-1}$ (50 Гц). Тому випробування на опір утоми з метою знайти границю витривалості потребує багато часу, що становить тижні неперервної роботи машини. Останнім часом при дослідженні матеріалів та конструктивних деталей на опір утоми застосовують більш швидкохідні машини з частотою 100…150 Гц, а іноді й

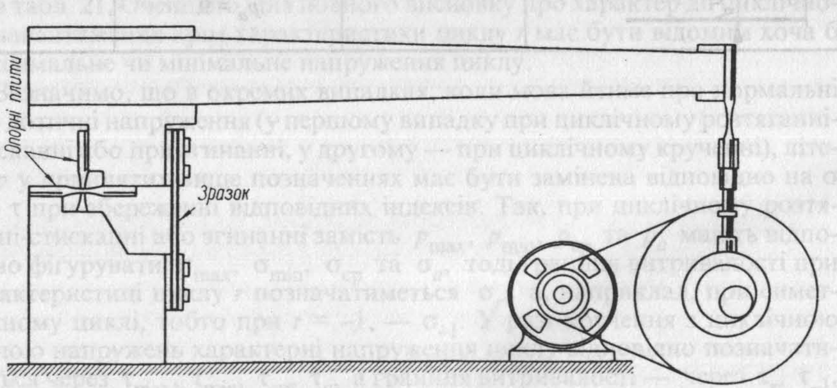


Рис. 555

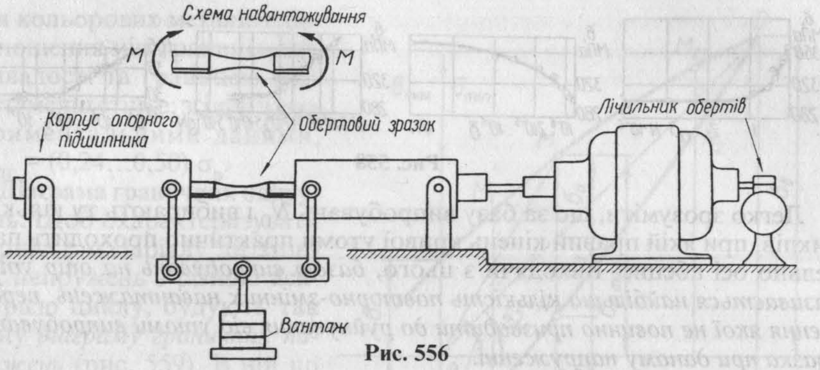


Рис. 556

20 000 Гц (ультразвукові частоти). В останньому випадку час випробування становить тільки десятки хвилин.

При випробуванні партії зразків з метою визначити границю витривалості треба давати такі навантаження на окремі зразки, щоб вони не руйнувалися, витримавши різну кількість циклів навантажування.

Обробка здобутих експериментальних даних, як правило, супроводжується побудовою *кривої утоми*, яку в літературі часто називають *кривою Веллера* (рис. 557). Криву утоми будують по точках у координатах кількості циклів N та напруження $p_{\max}$. Кожному зразку, що зруйнувався, на діаграмі відповідає одна точка з координатами N (кількість циклів до руйнування) та $p_{\max}$ (напруження), тобто крива утоми є функцією $p_{\max} = f(N)$.

Порядок прикладання навантажень на випробувані зразки здебільшого вибирають спадним, тобто на перший зразок дають навантаження, що значно перевищують границю витривалості, а навантаження на наступні зразки поступово знижують. Зрозуміло, що кожен з менш навантажених зразків буде витримувати дедалі більшу кількість циклів. Можна вибрати й інший порядок навантажування.

Будуючи криву утоми по точках зруйнованих зразків, легко переконатися, що, наприклад, при випробуванні сталі (рис. 557, крива *1*) при високому рівні напруження крива стрімко падає, а в міру зниження їх крутість зменшується, і крива асимптотично наближається до деякої горизонтальної прямої, що відсікає на осі ординат відрізок, величиною якого й визначається границя витривалості. Ордината точки на кривій, де остання практично починає збігатись із зазначеною асимптотою, відповідає такому напруженню, при якому зразок не зруйнується, пройшовши кількість циклів, що відповідає наперед заданій величині, так званій *базі випробувань* N_0.

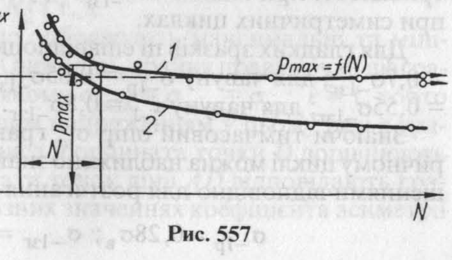


Рис. 557

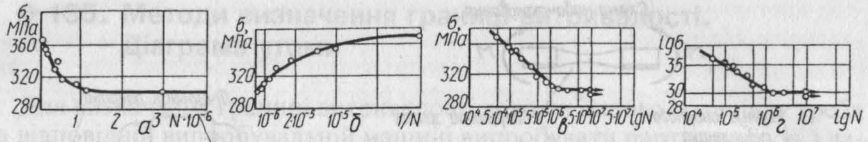


Рис. 558

Легко зрозуміти, що за базу випробувань N_0 і вибирають ту кількість циклів, при якій правий кінець кривої утоми практично проходить паралельно осі абсцис. Виходячи з цього, *базою випробувань на опір утоми називається найбільша кількість повторно-змінних навантажень, перевищення якої не повинно призводити до руйнування від утоми випробуваного зразка при даному напруженні.*

Для чорних металів (сталі, чавуну тощо) за базу випробувань беруть 10 млн циклів, а для кольорових (міді, алюмінію і т. п.) — число в 5...10 разів більше. Із розгляду характеру кривої утоми для кольорових металів (рис. 557, крива *2*) випливає, що на більшій ділянці вона спадає дуже поступово, тобто крива прямує до асимптоти повільно, тому й доводиться в цьому разі за базу випробувань брати більшу кількість циклів. Взагалі для таких металів можна казати тільки про деяку умовну границю витривалості. *Умовною границею витривалості називається максимальне напруження, за якого при здійсненні певної наперед заданої кількості циклів, що відповідає тій чи іншій базі випробувань, зразок не руйнується.*

У зв'язку з тим що за кривою утоми, побудованою в координатах $N \sim p$, або, що те саме, $N \sim \sigma$ (рис. 558, *а*), часто буває важко визначити границю витривалості, застосовують два інших способи побудови діаграм утоми.

Перший спосіб полягає в тому, що по осі абсцис відкладають величину, обернену кількості циклів (рис. 558, *б*). Границю витривалості тоді визначають як ординату в місці перетину кривої утоми з віссю напружень.

Другий спосіб ґрунтується на зображенні результатів випробувань у півлогарифмічних (рис. 558, *в*) або логарифмічних (рис. 558, *г*) координатах. Як видно з рисунків, критерієм для висновку про границю витривалості є перелом кривої.

Зазначимо, що, згідно з численними експериментальними даними, для деяких матеріалів можна помітити певні співвідношення між границями витривалості при різних видах деформації й, зокрема, між границями витривалості при згинанні $\sigma_{-1зг}$, крученні τ_{-1} та розтяганні-стисканні $\sigma_{-1р}$ при симетричних циклах.

Для гладких зразків ці співвідношення приблизно такі: для сталі $\sigma_{-1р} = 0{,}7\sigma_{-1зг}$; для чавуну $\sigma_{-1р} = 0{,}65\sigma_{-1зг}$; для сталей та легких сплавів $\tau_{-1} = 0{,}55\sigma_{-1зг}$; для чавуну $\tau_{-1} = 0{,}8\sigma_{-1зг}$.

Знаючи тимчасовий опір $\sigma_в$, границю витривалості сталі при симетричному циклі можна наближено знайти за такими емпіричними співвідношеннями відповідно для розтягання-стискання, згинання та кручення:

$$\sigma_{-1р} = 0{,}28\sigma_в;\ \sigma_{-1зг} = 0{,}40\sigma_в;\ \tau_{-1} = 0{,}22\sigma_в. \quad (21.4)$$

Для кольорових металів співвідношення між границею витривалості та границею міцності менш стійке; згідно з експериментальними даними, $\sigma_{-1зг} = (0{,}24...0{,}50)\,\sigma_в$.

Діаграма граничних напружень. Щоб охарактеризувати опірність матеріалу дії змінних напружень з різною асиметрією циклу, будують так звану *діаграму граничних напружень* (рис. 559). В ній по осі ординат відкладають найбільші σ_{max} та найменші σ_{min} напруження циклу, а по осі абсцис — середнє напруження циклу $\sigma_{ср}$ (діаграма Сміта). Їхні граничні значення $\sigma_{r\,max}$, $\sigma_{r\,min}$, $\sigma_{r\,ср}$ визначаються при даній характеристиці циклу дослідним шляхом у результаті побудови кривих утоми.

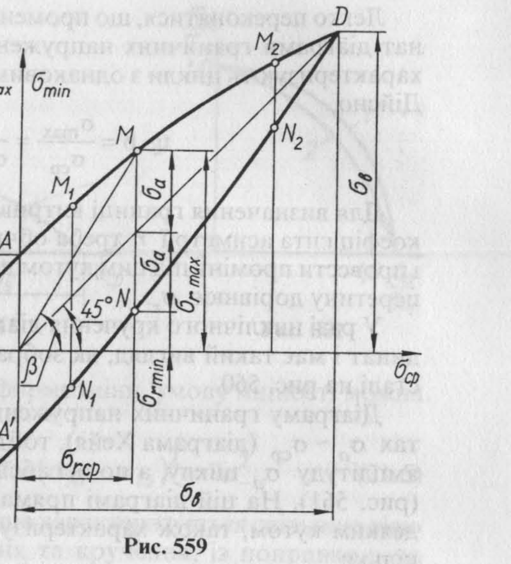


Рис. 559

Звичайно починають з симетричного циклу ($r = -1$). Граничним напруженням у цьому разі буде границя витривалості σ_{-1}. Отже,

$$\sigma_{-1max} = \sigma_{-1};\quad \sigma_{-1min} = -\sigma_{-1};\quad \sigma_{-1ср} = 0.$$

Цьому циклу на діаграмі відповідають точки *A* та *A'*, що лежать на осі ординат.

Випробувавши партію зразків з даного матеріалу при певному значенні характеристики циклу $r = \sigma_{min}/\sigma_{max}$, визначимо найбільше та найменше значення напружень, при яких матеріал працює на границі витривалості σ_r, тобто

$$\sigma_{r\,max} = \sigma_r;\quad \sigma_{r\,min} = r\,\sigma_r;\quad \sigma_{rср} = \frac{\sigma_{r\,max} + \sigma_{r\,min}}{2}.$$

Нанесемо на діаграму точки *M* та *N*, абсциси яких дорівнюють $\sigma_{r\,ср}$, а ординати — відповідно $\sigma_{r\,max}$ та $\sigma_{r\,min}$. Роблячи так само для інших значень *r*, дістанемо точки M_1, N_1, M_2, N_2 і т. д.

Сполучимо лініями всі точки, що зображують максимальні та мінімальні граничні напруження циклів. Очевидно, крайня права точка діаграми (точка *D*) відповідає циклу, при якому $\sigma_{max} = \sigma_{min} = \sigma_{ср}$; $r = 1$, тобто постійному навантаженню. Граничним напруженням у цьому разі є границя міцності матеріалу. Отже, абсциса й ордината точки *D* дорівнюють границі міцності матеріалу, а ординати точок лінії *AD* відповідають границям витривалості матеріалу при різних значеннях коефіцієнта асиметрії циклів.

Легко переконатися, що промені, які проходять крізь початок координат діаграми граничних напружень, є геометричним місцем точок, що характеризують цикли з однаковим коефіцієнтом асиметрії $r = \sigma_{min}/\sigma_{max}$. Дійсно,

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{ср}} = \frac{2\sigma_{max}}{\sigma_{max} + \sigma_{min}} = \frac{2}{1+r}.$$

Для визначення границі витривалості матеріалу при даному значенні коефіцієнта асиметрії r треба обчислити за наведеною формулою кут β і провести промінь під цим кутом до перетину з лінією A; ордината точки перетину дорівнює σ_r.

У разі циклічного кручення діаграма будується по один бік від осі ординат і має такий вигляд, як зображено, наприклад, для конструкційної сталі на рис. 560.

Діаграму граничних напружень можна будувати також у координатах $\sigma_a \sim \sigma_{ср}$ (діаграма Хейя), тобто по осі ординат відкладати граничну амплітуду σ_a циклу, а по осі абсцис — середнє напруження $\sigma_{ср}$ циклу (рис. 561). На цій діаграмі пряма, проведена з початку координат під деяким кутом, також характеризує цикли з однаковою асиметрією, оскільки

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sigma_a}{\sigma_{ср}} = \frac{\dfrac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}}{\dfrac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}} = \frac{1-r}{1+r}.$$

Отже, при сталому β сталим є і коефіцієнт асиметрії r.

При плоскому та об'ємному напружених станах опір утоми можна охарактеризувати, виходячи з відповідних гіпотез міцності, що узгоджуються з експериментальними даними.

Для дослідження дійсної поведінки матеріалу в умовах складного напруженого стану, наприклад при згинанні з крученням, використовують спеціальні випробувальні машини, що дають змогу одночасно навантажувати зразок змінним згинальним та крутним моментами.

За результатами випробувань, здобутими при різних комбінаціях змінних σ та τ, будують діаграми в координатах $\sigma_a \sim \tau_a$ або у відносних величинах σ_a/σ_{-1} та τ_a/τ_{-1}. Точки таких діаграм визначають напружені стани, що характеризуються величинами σ_a та τ_a при складному напруженому стані. Типову діаграму для конструкційних сталей, побудовану за експериментальними даними, наведено на рис. 562 (крива *1*). Вона відповідає дузі кола. Для високоміцних сталей та чавунів експериментальні дані розміщуються ближче до еліптичних дуг (рис. 562, крива *2*).

При симетричному циклі з додержанням синхронності та синфазності напружень умова міцності в амплітудах головних напружень відповідно до гіпотези найбільших дотичних напружень запишеться так:

$$\sigma_{1a} - \sigma_{3a} = \sigma_{-1}.$$

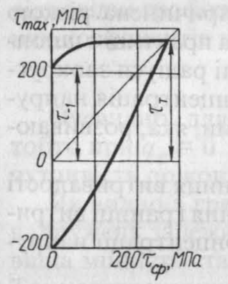


Рис. 560

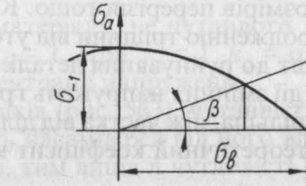


Рис. 561

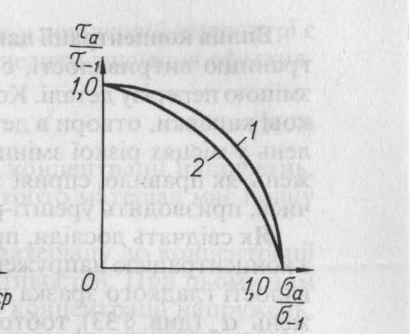


Рис. 562

Виходячи з теорії міцності енергії формозміни, умову міцності можна записати в такому вигляді:

$$(\sigma_{1a} - \sigma_{2a})^2 + (\sigma_{2a} - \sigma_{3a})^2 + (\sigma_{3a} - \sigma_{1a})^2 = 2\sigma_{-1}^2. \qquad (21.5)$$

Для складного напруженого стану, що характеризується спільною дією розтягання та кручення або згинання та кручення, із поправкою на співвідношення границь витривалості умова міцності виражається так:

$$\sqrt{\sigma_a^2 + \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right)^2 \tau_a^2} = \sigma_{-1}. \qquad (21.6)$$

Остання умова збігається з раніше наведеною експериментально здобутою залежністю, що характеризується в координатах σ_a/σ_{-1}; τ_a/τ_{-1} дугою кола.

§ 136. Вплив конструктивно-технологічних факторів на границю витривалості

На значення границі витривалості зразків або деталей, виготовлюваних з того чи іншого матеріалу, крім характеристики циклу впливає ціла низка різних факторів. До них належать форма зразка, розміри, стан поверхні, середовище, в якому відбуваються випробування, температура випробовувань, режим циклічного силового впливу (тренування, паузи, перевантаження, частота навантажування тощо), попередня внутрішня напруженість матеріалу та ін.

Для з'ясування впливу того чи іншого фактора як еталон беруть границю витривалості p_{-1}, здобуту випробовуванням на повітрі при симетричному циклі партії гладких полірованих зразків діаметром 7...10 мм. Тоді вплив різних факторів на опір утоми можна оцінити відхиленням границі витривалості p_{-1} партії розглянутих зразків від границі витривалості p_{-1} еталонних зразків.

Вплив концентрації напружень. Найважливішим фактором, що знижує границю витривалості, є концентрація напружень, спричинена різкою зміною перерізу деталі. Концентраторами напружень на практиці є шпонкові канавки, отвори в деталі, нарізки на поверхні, малі радіуси заокруглень у місцях різкої зміни розмірів перерізів тощо. Концентрація напружень, як правило, сприяє зародженню тріщини від утоми, яка, розвиваючись, призводить урешті-решт до руйнування деталі.

Як свідчать досліди, при дії змінних напружень границя витривалості з концентрацією напружень більша, ніж частка від ділення границі витривалості гладкого зразка на теоретичний коефіцієнт концентрації напружень α_σ (див. § 33), тобто

$$p_{-1\text{к}} \le p_{-1} / \alpha_\sigma .$$

Така розбіжність пояснюється тим, що теоретичний коефіцієнт концентрації α_σ відображує характер розподілу напружень лише для ідеально пружного матеріалу. У реальних матеріалах унаслідок пластичних деформацій у мікрозоні місця концентрації напружень дещо перерозподіляються й згладжуються. Враховуючи це, разом з теоретичним коефіцієнтом концентрації при розгляді питань опору утоми використовують поняття *ефективного*, або *дійсного*, *коефіцієнта концентрації*, який є відношенням границі витривалості гладкого зразка без концентрації напружень до границі витривалості зразка з концентрацією напружень, що має такі самі абсолютні розміри перерізів. Ці коефіцієнти надалі позначаються так: для нормальних напружень

$$k_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1\text{к}}};$$

для дотичних напружень

$$k_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1\text{к}}},$$

де σ_{-1} та τ_{-1} — границі витривалості для гладких зразків; $\sigma_{-1\text{к}}$ та $\tau_{-1\text{к}}$ — границі витривалості зразків з концентрацією напружень.

Далі міркуватимемо стосовно до нормальних напружень, маючи на увазі, що для дотичних напружень усе сказане залишається в силі, тільки індекс σ при коефіцієнтах слід замінити на τ.

Ефективні коефіцієнти концентрації напружень мають менші значення, ніж коефіцієнти концентрації α_σ, що визначаються теоретично в припущенні «пружного» розподілу напружень.

Кількісно оцінити зазначену різницю коефіцієнтів k_σ та α_σ можна введенням так званого коефіцієнта чутливості матеріалу до концентрації напружень:

$$q_\sigma = \frac{k_\sigma - 1}{\alpha_\sigma - 1}.$$

Знаючи коефіцієнти чутливості q_σ, для яких у довідковій літературі є відповідні графіки (рис. 563), можна за α_σ обчислити значення ефективних коефіцієнтів концентрації:

$$k_\sigma = 1 + q_\sigma(\alpha_\sigma - 1). \tag{21.7}$$

Очевидно, для матеріалу, не чутливого до концентрації напружень, тобто при $q_\sigma = 0$ $k_\sigma = 1$. При $q_\sigma = 1$ $k_\sigma = \alpha_\sigma$, тобто матеріал має повну чутливість до концентрації напружень.

Як видно з графіків (рис. 563), чутливість матеріалу до концентрації напружень залежить насамперед від його властивостей. При цьому чим вища міцність сталі, тим вища її чутливість до концентрації напружень. Тому застосування високоміцних сталей при змінних напруженнях не завжди виявляється доцільним.

Чутливість металу до концентрації напружень у крупнозернистих сталей менша, ніж у дрібнозернистих. Метали та сплави з неоднорідною структурою, наприклад сірий чавун, мають знижену чутливість до концентрації напружень внаслідок того, що структурна неоднорідність є внутрішнім джерелом концентрації напружень і знижує границю витривалості гладких зразків, тому зовнішні концентратори вже мало знижують границю витривалості.

Коефіцієнти чутливості до концентрації напружень, як свідчать експерименти, залежать не тільки від механічних властивостей, а й від конструктивної форми самої деталі, а також розподілу в ній напружень.

Вплив концентрації напружень у розрахунках деталей машин, що зазнають дії змінних напружень з асиметричним циклом, слід враховувати на основі експериментальних даних, оскільки теоретично це питання досі не вирішено.

Згідно з експериментальними даними, здобутими на лабораторних зразках невеликого перерізу, відношення граничних амплітуд гладких зразків та зразків з концентрацією, що відповідають одному і тому самому середньому напруженню, не залежить від амплітуди циклу. Цю обставину використовують для розрахунку деталей машин на опір утоми при асиметричних циклах.

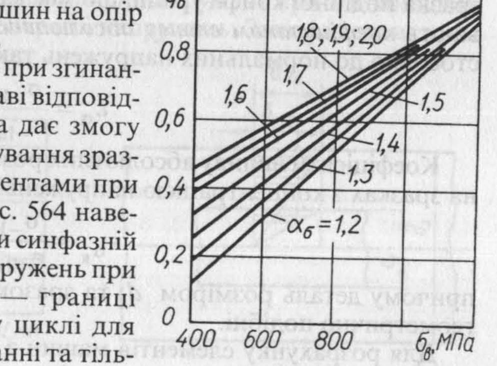


Рис. 563

Вплив концентрації напружень при згинанні з крученням оцінюють на підставі відповідних випробувань на машині, яка дає змогу створювати одночасно навантажування зразка крутними та згинальними моментами при різному співвідношенні їх. На рис. 564 наведено результати експериментів при синфазній зміні нормальних та дотичних напружень при симетричному циклі ($\sigma_{-1\text{к}}$, $\tau_{-1\text{к}}$ — границі витривалості при симетричному циклі для зразків з концентрацією при згинанні та тільки при крученні відповідно; $\sigma_{a\text{к}}$, $\tau_{a\text{к}}$ — granич-

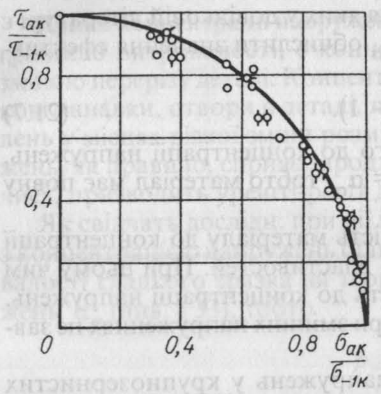


Рис. 564

ні амплітуди для зразків з концентрацією при одночасній дії згинання та кручення).

Розглядаючи рис. 564, бачимо, що більшість експериментальних даних цілком відповідає еліптичній залежності

$$\left(\frac{\sigma_{ак}}{\sigma_{-1к}}\right)^2+\left(\frac{\tau_{ак}}{\tau_{-1к}}\right)^2=1, \qquad (21.8)$$

тобто такій самій залежності, як і без концентрації напружень.

Вплив розмірів (масштабний фактор). Ефективність концентрації напружень пов'язана з абсолютними розмірами перерізу деталі, а саме: зі збільшенням розмірів деталі при збереженні її геометричної подібності значення ефективних коефіцієнтів концентрації напружень збільшуються.

Як свідчать результати експериментів, при збільшенні діаметра зразка більше 30…40 мм подальше зростання ефективних коефіцієнтів концентрації практично припиняється. Можна вважати, що при досягненні деякого розміру перерізу ефективний коефіцієнт не відрізняється від теоретичного, тобто $k_\sigma = \alpha_\sigma$. Для легованих сталей з границею міцності $\sigma_в \geq$ ≥ 1200 МПа рівність зазначених коефіцієнтів при середніх рівнях концентрації напружень $\alpha_\sigma = 2…3$ досягається вже при $d = 40…50$ мм. Щодо вуглецевих сталей, то в них граничний розмір, після якого $k_\sigma = \alpha_\sigma$, значно більший.

Абсолютні розміри перерізів деталі, впливаючи на ефективність концентрації напружень, істотно впливають також на границю витривалості зразків без концентрації напружень. При цьому зі збільшенням абсолютних розмірів перерізів границі витривалості знижуються. Відношення границі витривалості деталі розміром d до границі витривалості лабораторного зразка подібної конфігурації, що має малі розміри ($d_0 = 7…10$ мм), називають *коефіцієнтом впливу абсолютних розмірів перерізу* і позначають стосовно до нормальних напружень так:

$$\varepsilon_\sigma = \frac{\sigma_{-1d}}{\sigma_{-1d_0}}. \qquad (21.9)$$

Коефіцієнти впливу абсолютних розмірів перерізу можна визначити й на зразках з концентрацією напружень. У цьому разі

$$\varepsilon_{\sigma к} = \frac{\sigma_{-1кd}}{\sigma_{-1кd_0}}, \qquad (21.10)$$

причому деталь розміром d та зразок малого розміру d_0 мають бути геометрично подібні.

Для розрахунку елементів машин з урахуванням впливу розмірів деталі як за наявності концентраторів напружень, так і без них, існують спеціальні графіки типу наведених на рис. 565 (тут шкала d — логарифмічна), побудовані на основі експериментів. Тут крива *1* відповідає деталі з вуглецевої сталі без джерела концентрації напружень, а крива *2* — деталі з легованої сталі ($\sigma_в = 1000…1200$ МПа) при відсутності концентрації напружень та вуглецевої сталі за наявності помірної концентрації напружень. Крива *3* відповідає деталі з легованої сталі за наявності концентрації напружень, а крива *4* — будь-якій сталі при сильному концентраторі (типу нарізки).

Як свідчать експерименти, при збільшенні діаметра до 150…200 мм зниження границі витривалості зразків при ротаційному згинанні (див. рис. 556) може досягати 30…45 %. Дослідні дані свідчать про малий вплив абсолютних розмірів на опір утоми при однорідному напруженому стані — розтяганні-стисканні. При крученні, як і при згинанні, зниження границі витривалості зі збільшенням розмірів деталі виявляється значно більше. Це пояснюється впливом градієнта напружень.

Зниження границь витривалості зі збільшенням абсолютних розмірів деталі можна пояснити також впливом таких факторів:

1) зменшенням механічної міцності матеріалу зі збільшенням діаметра заготовок навіть за умови додержання належної термічної обробки їх;

2) зміною властивостей поверхневого шару після механічної обробки, оскільки ці зміни виявляються різними при різних розмірах деталі;

3) неоднорідністю механічних властивостей та напруженістю різних зерен у зв'язку з полікристалічною структурою металу і як наслідок — підвищенням імовірності більш раннього руйнування від утоми зі збільшенням розмірів деталі; цей фактор, мабуть, є основним.

Зниження міцності зі зростанням розмірів особливо сильно виявляється в неоднорідних металів, наприклад у сірого чавуну: зі збільшенням розміру з 5…10 до 50 мм зниження $\sigma_в$ та σ_{-1} для нього може досягати 60…70 %. Виходячи з імовірності руйнування від утоми, яку слід вважати пропорційною кількості небезпечних дефектів на одиницю об'єму найбільш напруженого шару металу, можна визначити вплив абсолютних розмірів перерізу на міцність. На рис. 566 наведено епюри напружень при згинанні для зразків різних діаметрів без концентрації напружень. Заштриховані зони

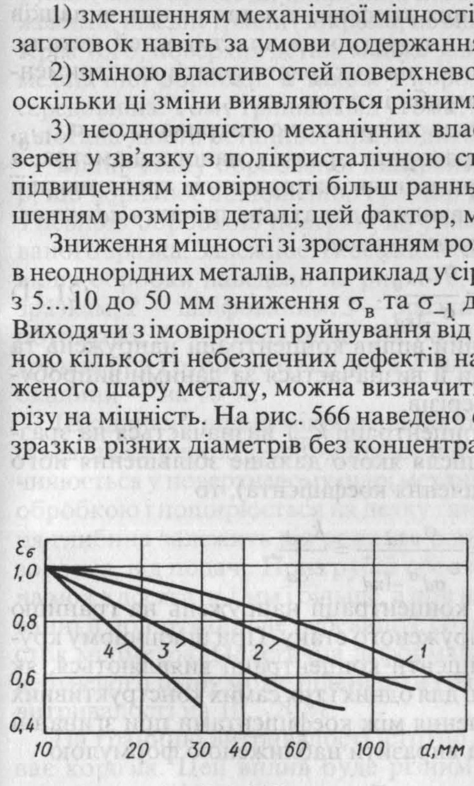


Рис. 565

Рис. 566

становлять шар, в якому напруження перевищують границю витривалості σ_{-1p} (яка має місце при однорідному розподілі напружень), визначену або при розтяганні-стисканні, або при згинанні на зразках досить великого розміру. З рис. 566 видно, що зі зростанням діаметра зразка збільшується об'єм небезпечно напруженого шару, а отже, і ймовірність руйнування від утоми, що призводить до зниження границі витривалості. При збільшенні діаметра зразків з 7 до 150 мм зниження границі витривалості для вуглецевої сталі досягає 45 %.

Пояснення залежності границь витривалості від розмірів перерізів, як і інших закономірностей та характеристик утоми, дають *статистичні теорії утоми*. Ці теорії висвітлюють питання зміни ефективних коефіцієнтів концентрації залежно від градієнтів напружень та абсолютних розмірів.

Гіпотези, що пояснюють ослаблення ефективності концентрації напружень порівняно з тим, яке має випливати з розподілу напружень у пружній зоні, та залежність коефіцієнтів k_σ, k_τ від низки факторів (розмірів, властивостей матеріалу тощо), висловлені різними авторами, поки що не дають змоги обчислювати значення цих коефіцієнтів для різних випадків розрахункової практики виходячи з початкових властивостей металу. Тому для розрахунку деталей машин слід використовувати експериментальні дані, застосовуючи у разі потреби інтерполяцію.

Опір утоми матеріалів оцінюється за границею витривалості σ_{-1d_0}, яка визначається на гладких лабораторних зразках малого діаметра, а для висновку про міцність деталі при змінних напруженнях треба знати її границю витривалості $\sigma_{-1\text{к}d}$. Тому вводять додаткове поняття *ефективного коефіцієнта концентрації напружень деталі*

$$k_{\sigma d} = \frac{\sigma_{-1d_0}}{\sigma_{-1\text{к}d}}. \tag{21.11}$$

Коефіцієнт $k_{\sigma d}$ враховує сумарний вплив концентрації напружень та абсолютних розмірів на опір утоми й визначається за даними випробувань зразків та моделей різних перерізів.

Якщо ефективний коефіцієнт концентрації $k_{\sigma d}$ визначається на зразках досить великого діаметра d (після якого дальше збільшення його розмірів небезпечно впливає на значення коефіцієнта), то

$$k_{\sigma d} = \frac{\sigma_{-1d_0}}{\sigma_{-1\text{к}d}} = \frac{\sigma_{-1d}}{\varepsilon_{\sigma d}\,\sigma_{-1\text{к}d}} = \frac{k_{\sigma d}}{\varepsilon_{\sigma d}}.$$

Зазначимо, що ступінь впливу концентрації напружень на границю витривалості залежить від виду напруженого стану. При циклічному крученні, наприклад, ефективні коефіцієнти концентрації виявляються, як правило, меншими, ніж при згинанні для одних і тих самих конструктивних форм (рис. 567 та 568). Співвідношення між коефіцієнтами при згинанні та крученні (рис. 567 та 568) можна виразити наближеною формулою

$$k_\tau = 1 + 0{,}6\left(k_\sigma - 1\right). \tag{21.12}$$

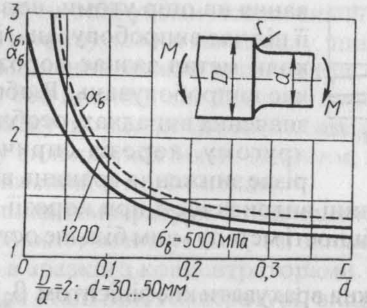


Рис. 567

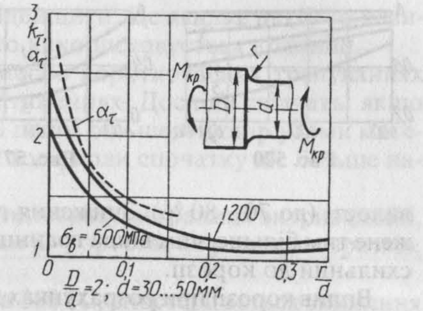


Рис. 568

Щодо ефективного коефіцієнта концентрації при розтяганні-стисканні, то він дорівнює коефіцієнтам концентрації при згинанні або перевищує їх (рис. 567 та 569).

Вплив стану поверхні. Здебільшого поверхневі шари елемента конструкції, який зазнає дії циклічних навантажень, виявляються більш напруженими, ніж внутрішні (зокрема, це відбувається при згинанні та крученні). Крім того, поверхня деталі майже завжди має дефекти, пов'язані з якістю механічної обробки, а також з корозією внаслідок впливу оточуючого середовища. Тому тріщини від утоми, як правило, починаються з поверхні, а погана якість останньої призводить до зниження опору утоми.

Вплив стану обробленої поверхні на утому оцінюється коефіцієнтом β, що дорівнює відношенню границі витривалості випробуваного зразка з певною обробкою поверхні до границі витривалості старанно полірованого зразка. Залежності коефіцієнтів β від границі міцності $\sigma_в$ для різних видів обробки наведено на рис. 570, де крива *1* відповідає полірованим зразкам; *2* — шліфованим; *3* — зразкам з тонкою обточкою; *4* — з грубою обточкою; *5* — з окалиною. Як бачимо, границя витривалості сталевих зразків при грубій обточці знижується на 40 %, а за наявності на поверхні окалини — на 70 %.

Шкідливий вплив мікронерівностей поверхні здебільшого пом'якшується пластичною деформацією, що спричинюється у поверхневому шарі механічною обробкою і поширюється на деяку глибину; ця глибина залежить від режимів різання і, зокрема, від подачі. При грубій обточці вона може досягати 1 мм і більше, а при шліфуванні й поліруванні не перевищує сотих часток міліметра. Пластична деформація поверхневого шару може підвищити границю витривалості на 10…20 %.

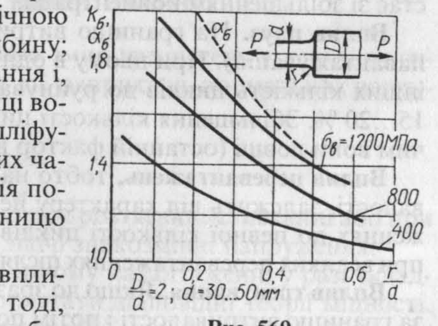


Рис. 569

На границю витривалості істотно впливає корозія. Цей вплив буде різним тоді, коли метал, що зазнав корозії до випробу-

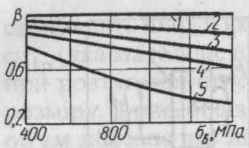


Рис. 570

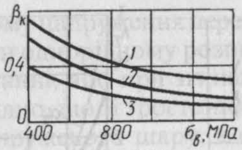


Рис. 571

вання на опір утоми, не зазнає її під час випробовувань, і тоді, коли метал зазнає корозії під час випробовувань. В обох зазначених випадках, особливо в другому, корозія спричинює різке зниження границь витривалості (до 70…80 %). Зниження границі витривалості при корозії виражене тим більше, чим вища границя міцності металу і чим більше останній схильний до корозії.

Вплив корозії при розрахунках можна врахувати коефіцієнтом $\beta_к$, який становить відношення границі витривалості $\sigma_{-1к}$ кородованого зразка до границі витривалості полірованого зразка, тобто $\beta_к = \sigma_{-1к}/\sigma_{-1}$. Вплив корозії в процесі випробування на границю витривалості сталевих зразків при ротаційному згинанні зображено на рис. 571, де крива *1* характеризує вплив корозії у прісній воді за наявності концентрації напружень; *2* — у прісній воді за відсутності концентрації або в морській воді за наявності концентрації; *3* — у морській воді за відсутності концентрації.

Причиною такого різкого зниження границі витривалості внаслідок корозії є корозійне пошкодження поверхні, яке спричинює значну концентрацію напружень, а також послаблення опору утвореню тріщин.

Зменшити вплив стану поверхні на границю витривалості можна відповідними технологічними методами обробки, які приводять до зміцнення поверхневих шарів. До таких методів належать: наклеп поверхневого шару накатуванням роликом, обдування дробом тощо; хіміко-термічні методи — азотування, цементація, ціанування; термічні — поверхневе гартування струмами високої частоти або газовим полум'ям. Зазначені методи обробки приводять до збільшення міцності поверхневого шару й утворення в ньому значних стискальних залишкових напружень, які стають на перешкоді утворенню тріщин від утоми, а тому підвищують границю витривалості.

За наявності концентрації напружень, крім глибини шару та його абсолютних розмірів, на ефект зміцнення істотно впливають рівень концентрації напружень і градієнт напружень біля поверхні. Ефект зміцнення зростає зі збільшенням концентрації.

Вплив пауз. На границю витривалості впливають паузи (перерви в навантажуванні). При цьому в одних випадках цей вплив невеликий, а в інших кількість циклів до руйнування збільшується за рахунок пауз на 15…20 %. Збільшення кількості циклів тим більше, чим частіше паузи й чим вони довші (останній фактор впливає менше).

Вплив перевантажень, тобто навантажень, вищих за границю витривалості, залежить від характеру перевантаження. При малих перевантаженнях до певної кількості циклів границя витривалості підвищується, при великих перевантаженнях після певної кількості циклів — знижується.

Вплив тренування. Якщо до зразка прикласти напруження дещо нижчі за границю витривалості і потім поступово підвищувати змінне навантаження, то опір утоми можна значно підвищити. Це явище, що його називають *тренуванням матеріалу,* широко використовується в техніці.

Зміцнення можна досягти при відносно короткочасних тренуваннях (≈ 50 000 циклів), але значних перевантаженнях. Досліди свідчать: якщо спочатку діє менше перевантаження, а потім більше, ти опір утоми матеріалу виявляється більш високим, ніж тоді, коли спочатку діє більше навантаження, а потім менше.

Вплив температури. З підвищенням температури границя витривалості, як правило, зменшується, а зі зниженням її — зростає як у гладких зразків, так і в зразків з концентраторами.

Для сталі при температурі, вищій за 300 °С, спостерігається зниження границі витривалості приблизно на 15…20 % на кожні 100 °С підвищення температури. Правда, у деяких сталей при підвищенні температури від 20 до 300 °С границя витривалості підвищується. Однак це підвищення, ймовірно, пов'язане з фізико-хімічними процесами, що відбуваються при одночасному впливі нагрівання та змінних напружень.

При підвищених температурах навіть при дуже великій кількості циклів крива утоми не має горизонтальної ділянки. Так, для гладких зразків навіть при 100 млн циклів горизонтальна ділянка не спостерігається. Вплив концентрації напружень з підвищенням температури взагалі зменшується, однак для деяких сталей, мабуть, знову-таки внаслідок фізико-хімічних процесів чутливість сплаву до надрізу збільшується. При температурах порядку 500…600 °С у сталі починаються процеси повзучості, які виникають також при змінних навантаженнях навіть при симетричному циклі.

При зниженні температури з 20 до –190 °С границя витривалості в деяких сталей зростає більше ніж удвічі, хоч їхня ударна в'язкість при цьому знижується.

Це ще раз свідчить про принципову різницю між руйнуванням від утоми та руйнуванням від відриву при статичному та ударному навантаженнях.

§ 137. Розрахунок на міцність при повторно-змінних навантаженнях

У разі простих видів деформації при зміні напружень у деталі за симетричним циклом запас міцності при дії, наприклад, нормальних напружень можна обчислити за формулою

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1кd}}{\sigma_a},$$

де $\sigma_{-1кd}$ — границя витривалості деталі при розтяганні-стисканні або при згинанні; σ_a — номінальні фактично діючі знакозмінні напруження.

Для розрахунку на міцність при змінному навантаженні у разі складного напруженого стану можна використати відповідні теорії міцності. При цьому для матеріалів у пластичному стані, як відомо, застосовують

III та IV теорії міцності. У розглядуваному випадку ці теорії мають бути записані у такому вигляді:

$$\sigma_{-1} = \sqrt{\sigma_a^2 + 4\tau_a^2}\,; \tag{21.13}$$

$$\sigma_{-1} = \sqrt{\sigma_a^2 + 3\tau_a^2}\,. \tag{21.14}$$

Відповідно до експериментальних даних умова міцності у формі еліптичної залежності (див. рис. 562) при згинанні й крученні виражається формулою (21.6), а стосовно до деталі досить великих розмірів з концентрацією напружень — формулою

$$\sigma_{-1kd} = \sqrt{\sigma_a^2 + \left(\frac{\sigma_{-1kd}}{\tau_{-1kd}}\right)^2 \tau_a^2}\,, \tag{21.15}$$

або

$$\frac{\sigma_a^2}{\sigma_{-1kd}^2} + \frac{\tau_a^2}{\tau_{-1kd}^2} = 1. \tag{21.16}$$

Тоді, маючи на увазі, що $n_\sigma = \sigma_{-1kd}/\sigma_a$ — коефіцієнт, який характеризує запас міцності тільки за нормальними напруженнями, та $n_\tau = \tau_{-1kd}/\tau_a$ — коефіцієнт, що характеризує міцність тільки за дотичними напруженнями, на підставі співвідношення (21.16) матимемо

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_\sigma^2} + \frac{1}{n_\tau^2},$$

звідки запас міцності n при складному напруженому стані, наприклад при спільній дії згинання та кручення, визначиться формулою

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 n_\tau^2}}. \tag{21.17}$$

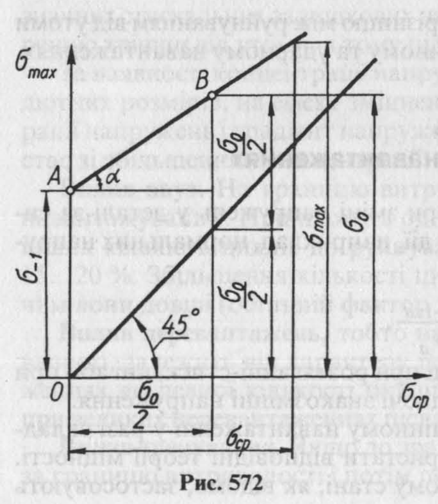


Рис. 572

Визначаючи запаси міцності при асиметричних циклах для будь-якого виду циклічного навантажування (згинання, розтягання-стискання, кручення), виходять зі схематизованої діаграми графічних напружень для зразків без концентрації напружень (рис. 572).

Аналітично криву граничних напружень у координатах $\sigma_{max} \sim \sigma_{cp}$ можна виразити рівнянням прямої, що проходить через дві точки A та B з координатами $(0;\ \sigma_{-1})$ та $(\sigma_0/2;\ \sigma_0)$:

$$\sigma_{max} = \sigma_{-1} + \sigma_{cp}\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

де, згідно з рис. 572,

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sigma_0 - \sigma_{-1}}{\sigma_0/2}.$$

Тоді

$$\sigma_{max} = \sigma_{-1} + \frac{\sigma_0 - \sigma_{-1}}{\sigma_0/2}\sigma_{cp} = \sigma_{-1} + \left(1 - \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}\right)\sigma_{cp}.$$

Позначивши

$$\Psi_\sigma = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}, \tag{21.18}$$

запишемо рівняння кривої граничних напружень для зразка без концентрації напружень:

$$\sigma_{max} = \sigma_{-1} + \left(1 - \Psi_\sigma\right)\sigma_{cp}. \tag{21.19}$$

При дії дотичних напружень відповідне рівняння має аналогічний вигляд:

$$\tau_{max} = \tau_{-1} + \left(1 - \Psi_\tau\right)\tau_{cp}. \tag{21.20}$$

Значення Ψ_σ та Ψ_τ для деяких сталей при різних видах деформації залежно від границі міцності наведено в табл. 22.

Ураховуючи вплив на границю витривалості при асиметричному циклі різних факторів, у тому числі концентрації напружень, абсолютних розмірів перерізу, стану поверхні тощо, виходять з експериментально встановлених закономірностей, які полягають у тому, що відношення граничних амплітуд напружень гладкого зразка та розглядуваної деталі залишається сталим незалежно від середнього напруження циклу. На підставі цього можна побудувати схематизовану діаграму граничних напружень для деталі (рис. 573).

Таблиця 22

$\sigma_в$, МПа	Ψ_σ	Ψ_τ
350...550	0	0
520...750	0,05	0
700...1000	0,10	0,05
1000...1200	0,20	0,10
1200...1400	0,25	0,15

Цю побудову можна дістати також, виходячи з таких аналітичних уявлень. Відповідно до виразу (21.19) гранична амплітуда напружень зразка виражається формулою

$$\sigma_a = \sigma_{max} - \sigma_{cp} = \left[\sigma_{-1} + \left(1 - \Psi_\sigma\sigma_{cp}\right)\right] - \sigma_{cp} = \sigma_{-1} - \Psi_\sigma\sigma_{cp},$$

а гранична амплітуда напружень для деталі σ_{akd} на підставі зазначеної вище закономірності щодо впливу різних факторів тільки на змінну складову напружень буде в $k_{\sigma d}$ разів менша, тобто

$$\sigma_{akd} = \frac{\sigma_a}{k_{\sigma d}} = \frac{\sigma_{-1} - \Psi_\sigma\sigma_{cp}}{k_{\sigma d}}. \tag{21.21}$$

Тоді рівняння кривої граничних напружень для деталі можна записати в такому вигляді:

$$\sigma_{max\,d} + \sigma_{cp} = \sigma_{cp} + \frac{\sigma_{-1} - \Psi_\sigma\sigma_{cp}}{k_{\sigma d}} = \frac{\sigma_{-1}}{k_{\sigma d}} + \left(1 - \frac{\Psi_\sigma}{k_{\sigma d}}\right)\sigma_{cp}. \tag{21.22}$$

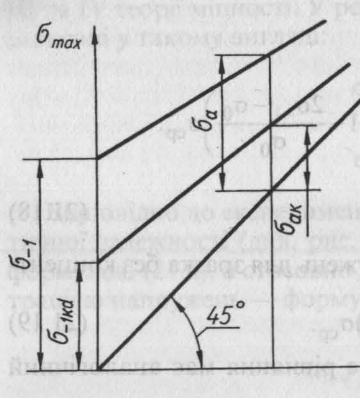


Рис. 573

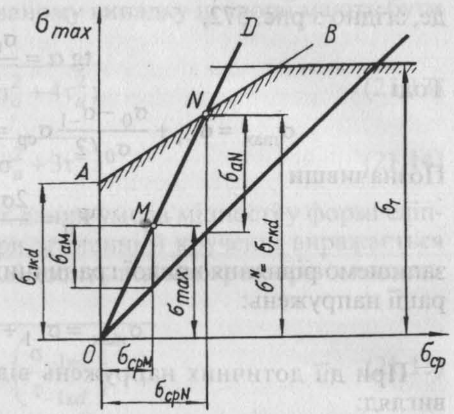


Рис. 574

Припустимо, що деталь у небезпечній точці зазнає дії змінних напружень з коефіцієнтом асиметрії r, причому відомі відповідно σ_{max} та $\sigma_{ср}$ циклу. Як зазначалося вище, всі цикли, що відповідають $r = \text{const}$, лежать на одній прямій. За наведеними даними на діаграмі рис. 574 заданий напружений стан характеризується точкою M. Отже, всі точки, що лежать на промені, проведеному з початку координат крізь дану точку M, мають коефіцієнт асиметрії, який дорівнює r. Точка перетину цього променя з кривою утоми має ординату, що дорівнює границі витривалості σ_{rkd}. Отже, коефіцієнт запасу

$$n_\sigma = \frac{\sigma_N}{\sigma_M} = \frac{\sigma_{rkd}}{\sigma_{max}} = \frac{\sigma_{ср\,N}}{\sigma_{ср\,M}} = \frac{\sigma_{aN}}{\sigma_{aM}}, \tag{21.23}$$

де σ_{rkd} — границя витривалості деталі при асиметричному циклі; $\sigma_{max} = \sigma_M$ — максимальне напруження деталі.

При перетині променя OD з прямою AB граничних напружень у точці N максимальне напруження σ_{max} збігається з максимальним граничним напруженням $\sigma_N = \sigma_{rkd}$, тобто

$$\sigma'_{max} = \sigma_N.$$

З іншого боку, на підставі рівняння (21.23),

$$\sigma'_{max} = \frac{\sigma_M}{\sigma_{ср\,M}} \sigma_{ср\,N}; \tag{21.24}$$

$$\frac{\sigma_M}{\sigma_{ср\,M}} \sigma_{ср\,M} = \frac{\sigma_{-1}}{k_{\sigma d}} + \left(1 - \frac{\Psi_\sigma}{k_{\sigma d}}\right) \sigma_{ср\,N}.$$

Звідси знаходимо абсцису точки N:

$$\sigma_{ср\,N} = \frac{\sigma_{-1}}{k_{\sigma d}\left(\frac{\sigma_M}{\sigma_{ср\,M}} - 1 + \frac{\Psi_\sigma}{k_{\sigma d}}\right)} = \frac{\sigma_{-1}\sigma_{ср\,M}}{k_{\sigma d}\left(\sigma_M - \sigma_{ср\,N}\right) + \Psi_\sigma \sigma_{ср\,M}}.$$

Оскільки $\sigma_M - \sigma_{ср\,M} = \sigma_{aM}$, остання формула перетворюється на таку:

$$\sigma_{ср\,N} = \frac{\sigma_{-1}\sigma_{ср\,M}}{k_{\sigma d}\sigma_a + \Psi_\sigma \sigma_{ср\,M}}.$$

Підставляючи здобутий вираз $\sigma_{ср\,N}$ у формулу (21.24), знайдемо вираз максимального граничного напруження для деталі (ординату точки N):

$$\sigma'_{max} = \sigma_N = \sigma_{rkd} = \frac{\sigma_{-1}\sigma_M}{k_{\sigma d}\sigma_a + \Psi_\sigma \sigma_{ср\,M}}.$$

Тоді остаточний вираз для запасу міцності буде такий:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_N}{\sigma_M} = \frac{\sigma_{-1}}{k_{\sigma d}\sigma_a + \Psi_\sigma \sigma_{ср\,M}}. \tag{21.25}$$

Аналогічно при крученні

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{k_{\tau d}\tau_a + \Psi_\tau \tau_{ср\,M}}. \tag{21.26}$$

Якщо асиметрія циклу дуже велика, то роль змінних напружень при оцінці міцності може виявитися несуттєвою, і розраховувати слід за граничним станом, як при статичному навантаженні. У зв'язку з цим поряд із запасом міцності за утомою [формули (21.25), (21.26)] слід визначати запас міцності й за несівною здатністю при статичному навантажуванні.

Аналогічно розраховують і при складному напруженому стані. При асиметричному циклі коефіцієнт запасу при змінних навантаженнях визначається за формулою (21.17), у якій n_σ та n_τ обчислюється відповідно за формулами (21.25) та (21.26). Запас міцності за статичною несівною здатністю визначається за методикою, викладеною в розд. 18. При цьому міцність оцінюється за найменшим із запасів за утомою і за статичною несівною здатністю.

Запаси міцності при розрахунку на опір утоми залежать від точності визначення зусиль та напружень, від однорідності матеріалів, якості технології виготовлення деталі та інших факторів. При підвищеній точності розрахунку (з широким використанням експериментальних даних щодо визначення зусиль, напружень та характеристик міцності), при достатній однорідності матеріалу та високій якості технологічних процесів береться запас міцності $n = 1{,}3\ldots1{,}4$. Для звичайної точності розрахунку (без належної експериментальної перевірки зусиль та напружень) при помірній однорідності матеріалу $n = 1{,}4\ldots1{,}7$. При зниженій точності розрахунку (якщо немає експериментальної перевірки зусиль та напружень) і зниженій однорідності матеріалу, особливо для литва та деталей великих розмірів, $n = 1{,}7\ldots3{,}0$.

Найвірогідніші дані про потрібні запаси міцності деталі можна здобути на підставі результатів натурних випробувань деталей або досвіду експлуатації машин з деталями цього типу.

Приклад 85. *Шатун поршневого двигуна, що є стрижнем круглого перерізу, вздовж осі зазнає повторно-змінних навантажень, що змінюються без ударів від $P_{max} = +200$ кН до $P_{min} = +50$ кН. Стрижень має радіальний отвір ∅ 3 мм; матеріал стрижня — сталь*

12ХН3А з такими характеристиками міцності: $\sigma_в = 950$ МПа, $\sigma_т = 720$ МПа, $\sigma_{-1} = 430$ МПа та $\psi = 0,1$. Поверхня шатуна грубо шліфована. Визначимо його діаметр з розрахунку на опір утоми та здобуті розміри порівняємо з визначеними із розрахунку на статичне навантаження, що дорівнює максимальному навантаженню в циклі.

У цьому прикладі треба виконати так званий проектувальний розрахунок, тобто за відомими зусиллями, що діють на деталь, визначити її розміри.

Визначаємо небезпечний переріз вала. Таким слід вважати переріз у місці радіального отвору.

Оскільки співвідношення розмірів шатуна та радіального отвору не відоме, то не відома й величина α_σ. Тому, маючи на увазі, що цей коефіцієнт при малих отворах та крупних деталях машин близький до двох, задаємося значенням теоретичного коефіцієнта концентрації $\alpha_\sigma = 2$.

Користуючись графіком рис. 563, знаходимо коефіцієнт чутливості до концентрації напружень: при $\alpha_\sigma = 2$ та $\sigma_в = 920$ МПа коефіцієнт $q_\sigma = 0,77$.

Скориставшись формулою (21.7), визначимо ефективний коефіцієнт концентрації:

$$k_\sigma = 1 + q_\sigma(\alpha_\sigma - 1) = 1 + 0,77(2-1) = 1,77.$$

Із графіка рис. 570 за кривою *3* знаходимо коефіцієнт, що враховує якість обробки поверхні: $\beta = 0,82$.

Задаємося коефіцієнтом, що враховує розміри стрижня: $\varepsilon = 0,8$.

Ефективний коефіцієнт концентрації деталі з урахуванням розмірів та стану поверхні

$$k_{\sigma d} = \frac{k_\sigma}{\varepsilon\beta} = \frac{1,77}{0,8 \cdot 0,82} = 2,70.$$

Виберемо запас міцності $n = 2,1$.

Визначимо переріз шатуна за формулою (21.25)

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{k_{\sigma d}\sigma_a + \Psi_\sigma \sigma_{ср}} = \frac{\sigma_{-1}F}{k_{\sigma d}\dfrac{P_{max} - P_{min}}{2} + \Psi_\sigma \dfrac{P_{max} + P_{min}}{2}},$$

звідки

$$F = \frac{n_\sigma}{\sigma_{-1}}\left(k_{\sigma d}\frac{P_{max} - P_{min}}{2} + \Psi_\sigma \frac{P_{max} + P_{min}}{2}\right) =$$

$$= \frac{2,1}{430}\left(2,70\frac{0,2 - 0,05}{2} + 0,1\frac{0,2 + 0,05}{2}\right) м^2 = 10,5 \cdot 10^{-4}\ м^2.$$

Визначимо діаметр стрижня з формули $F = \pi d^2/4$:

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10,5 \cdot 10^{-4}}{3,14}}\ м \approx 3,7 \cdot 10^{-2}\ м = 37\ мм.$$

Перевіримо значення раніше вибраного коефіцієнта, який враховує абсолютні розміри. Для цього скористаємося графіком рис. 565, згідно з яким при $d = 37$ мм $\varepsilon = 0,81$, тобто величина ε наближається до прийнятого значення $\varepsilon = 0,8$.

Знаходимо діаметр шатуна зі статичного розрахунку, тобто з умови $\sigma_{max} = P_{max}/F \le |\sigma_{+1}|$:

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{P_{max}}{[\sigma_{+1}]} = \frac{0,2}{480}\ м^2 = 4,17 \cdot 10^{-4}\ м^2;$$

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = \sqrt{\frac{4,17 \cdot 10^{-4}}{3,14}}\ м = 2,31 \cdot 10^{-2}\ м = 23,1\ мм.$$

Візьмемо $d = 24$ мм, тобто діаметр виявився у 37/24 = 1,54 раза меншим, ніж при розрахунку з урахуванням змінності навантаження.

Приклад 86. *Східчастий сталевий шток водяного насоса (рис. 575) зазнає повторно-змінного розтягання-стискання динамічними зусиллями з характеристикою циклу $r = -0,5$. Матеріал штока — маловуглецева сталь з тимчасовим опором $\sigma_в = 400$ МПа, границею текучості $\sigma_т = 330$ МПа і границею витривалості при симетричному циклі $\sigma_{-1} = 204$ МПа. Поверхня стрижня оброблена різцем. Визначимо допустимі зусилля, що діють на шток.*

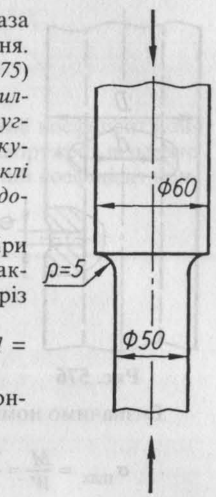


Рис. 575

У цьому прикладі виконуємо перевірний розрахунок. Є розміри деталі, треба визначити допустиме навантаження при заданій характеристиці циклу. Як розрахунковий слід взяти небезпечний переріз у місці спряження двох діаметрів.

Визначимо теоретичний коефіцієнт концентрації: при $\rho/d = 5/50 = 0,1$ можна взяти $\alpha_\sigma = 1,6$ (див. § 32).

За графіком рис. 563 знаходимо коефіцієнт чутливості до концентрації напружень: $q_\sigma = 0,39$.

Визначаємо дійсний коефіцієнт концентрації:

$$k_\sigma = 1 + q_\sigma(\alpha_\sigma - 1) = 1 + 0,39(1,6 - 1) = 1,234.$$

За графіком рис. 565 знаходимо коефіцієнт впливу абсолютних розмірів: $\varepsilon = 0,75$.

Коефіцієнт, що враховує якість обробки поверхні, визначимо за графіком рис. 570: $\beta = 0,875$.

Вибираємо коефіцієнт запасу міцності з урахуванням динамічності (див. розд. 23): $n_\sigma = 3$.

Знаходимо ефективний коефіцієнт концентрації напружень для деталі:

$$k_{\sigma d} = \frac{k_\sigma}{\beta\varepsilon} = \frac{1,234}{0,875 \cdot 0,75} = 1,88.$$

Визначаючи амплітуду напружень з формули

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{k_{\sigma d}\sigma_a + \Psi_\sigma \sigma_{ср}},$$

дістанемо

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{-1}}{n_\sigma}\frac{1}{k_{\sigma d} + \Psi_\sigma \dfrac{\sigma_{ср}}{\sigma_a}}.$$

Маючи на увазі, що для даного матеріалу ($\sigma_в = 400$ МПа), згідно з табл. 22, коефіцієнт $\Psi_\sigma = 0$, за останньою формулою знайдемо

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{-1}}{n_\sigma k_{\sigma d}} = \frac{204}{3 \cdot 1,88}\ МПа \approx 40\ МПа.$$

Визначаємо допустимі зусилля, що діють на шток:

амплітудне значення зусилля

$$P_a = F\sigma_a = \frac{\pi d^2}{4}\sigma_a = \frac{3,14\left(5 \cdot 10^{-2}\right)^2}{4} 40\ МН = 78,6\ кН;$$

середнє значення зусилля

$$P_{ср} = P_a\frac{1+r}{1-r} = 78,6\frac{1-0,5}{1+0,5}\ кН = 26,2\ кН;$$

мінімальне зусилля

$$P_{\min} = P_{\max} r = -0{,}5\cdot 104{,}8\ \text{кН} = -52{,}4\ \text{кН};$$

максимальне зусилля

$$P_{\max} = P_a + P_{\text{ср}} = (78{,}6 + 26{,}2)\ \text{кН} = 104{,}8\ \text{кН}.$$

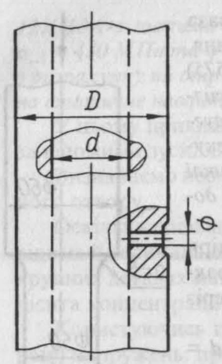


Рис. 576

Приклад 87. *Обертовий круглий порожнистий вал (рис. 576) у небезпечному перерізі, ослабленому отвором для мащення (∅ 3 мм), зазнає змінного згинання з моментом $M = 1{,}5$ кН · м. Одночасно вал зазнає змінного кручення з коефіцієнтом асиметрії $r = -0{,}25$ та $M_{\text{кр max}} = 1{,}8$ кН · м. Діаметри вала: зовнішній $D = 70$ мм, внутрішній $d = 35$ мм. Матеріал — сталь 45 ($\sigma_{\text{в}} = 700$ МПа; $\sigma_{\text{т}} = 320$ МПа; $\sigma_{-1} = 300$ МПа; $\tau_{-1} = 180$ МПа). Поверхня вала шліфована. Визначимо запас міцності вала.*

Визначимо номінальні напруження у валу від згинання та кручення:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{32M}{\pi D\left[1-(d/D)^4\right]} = \frac{32\cdot 1{,}5\cdot 10^{-3}}{3{,}14\left(70\cdot 10^{-3}\right)^3\left(1-0{,}5^4\right)}\ \text{МПа} = 47{,}3\ \text{МПа};$$

$$\sigma_a = \sigma_{\max} = 47{,}3\ \text{МПа};\quad \sigma_{\text{ср}} = 0;$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр max}}}{W_p} = \frac{16M_{\text{кр max}}}{\pi D^3\left[1-(d/D)^4\right]} =$$

$$= \frac{16\cdot 1{,}8\cdot 10^{-3}}{3{,}14\left(70\cdot 10^{-3}\right)^3\left(1-0{,}5^4\right)}\ \text{МПа} = 28{,}3\ \text{МПа};$$

$$\tau_{\min} = r\tau_{\max} = -0{,}25\cdot 28{,}3\ \text{МПа} = -7{,}1\ \text{МПа};$$

$$\tau_a = \frac{\tau_{\max}-\tau_{\min}}{2} = \frac{28{,}3+7{,}1}{2}\ \text{МПа} = 17{,}7\ \text{МПа};$$

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{\tau_{\max}+\tau_{\min}}{2} = \frac{28{,}3-7{,}1}{2}\ \text{МПа} = 10{,}6\ \text{МПа}.$$

Визначимо коефіцієнт концентрації при згинанні. При ∅/D = 3/70 = 0,04 коефіцієнт (див. § 65, рис. 273) $\alpha_\sigma = 2{,}5$. Згідно з графіками рис. 563, коефіцієнт чутливості до концентрації напружень $q_\sigma = 0{,}65$. Ефективний коефіцієнт концентрації при згинанні

$$k_\sigma = 1 + q_\sigma(\alpha_\sigma - 1) = 1 + 0{,}65(2{,}5-1) = 1{,}975.$$

Коефіцієнт, який враховує абсолютні розміри, згідно з графіками (див. рис. 565), можна взяти таким, що дорівнює $\varepsilon = 0{,}70$; коефіцієнт, що враховує стан поверхні вала (див. рис. 570, крива *2*), $\beta = 0{,}92$. Тоді ефективний коефіцієнт концентрації вала

$$k_{\sigma d} = \frac{k_\sigma}{\varepsilon\beta} = \frac{1{,}975}{0{,}70\cdot 0{,}92} = 3{,}1.$$

Обчислимо запас міцності на згинання:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{\sigma d}\sigma_a + \Psi_\sigma\sigma_{\text{ср}}} = \frac{300}{3{,}1\cdot 47{,}3+0} = 2{,}05.$$

Визначимо коефіцієнти концентрації при крученні. Теоретичний коефіцієнт концентрації візьмемо $\alpha_\tau = 3$; коефіцієнт чутливості до концентрації напружень візьмемо такий самий, як і при згинанні, тобто $q_\tau = q_\sigma = 0{,}65$. Тоді ефективний коефіцієнт концентрації при крученні

$$k_\tau = 1 + q_\sigma(\alpha_\tau - 1) = 1 + 0{,}65(3-1) = 2{,}3.$$

Взявши, як і при згинанні, $\varepsilon = 0{,}70$ та $\beta = 0{,}92$, знайдемо

$$k_{\tau d} = \frac{k_\tau}{\varepsilon\beta} = \frac{2{,}3}{0{,}70\cdot 0{,}92} = 3{,}60.$$

Визначимо запас міцності при крученні:

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{k_{\tau d}\tau_a + \Psi_\tau\tau_{\text{ср}}} = \frac{180}{3{,}60\cdot 17{,}7 + 0{,}05\cdot 10{,}6} = 2{,}77.$$

Обчислимо загальний запас міцності при спільній дії змінного згинання та кручення:

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} = \frac{2{,}05\cdot 2{,}77}{\sqrt{2{,}05^2 + 2{,}77^2}} = 1{,}65.$$

Отже, загальний коефіцієнт запасу міцності виявився значно меншим, ніж запаси міцності окремо на згинання та кручення.

Розділ **22** РОЗРАХУНКИ ПРИ УДАРНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

§ 138. Розрахунок при осьовій дії ударного навантаження

Явище удару має місце тоді, коли швидкість розглядуваного елемента конструкції або стичних з ним частин протягом дуже малого проміжку часу змінюється на скінченну величину. Великі прискорення (сповільнення), що виникають при цьому, приводять до появи значних сил інерції, які діють у напрямі, протилежному напряму прискорень, тобто в напрямі руху тіла. У випадку падаючого вантажу силу удару (динамічну силу $P_д$) можна обчислити за формулою

$$P_д(t) = \frac{Q}{g} j(t), \qquad (22.1)$$

де Q — вага падаючого вантажу; g — прискорення вільного падіння; $j(t)$ — прискорення падаючого вантажу після зіткнення його з перешкодою.

Проте визначення сили удару $P_д(t)$ за формулою (22.1) пов'язане з великими труднощами, оскільки не відомий час співударяння, тобто час, протягом якого швидкість рухомого тіла зменшується від свого максимального значення в момент зіткнення з тілом, що ударяється (початок удару), до нуля після деформації останнього (кінець удару).

У зв'язку із зазначеними труднощами, що виникають при визначенні динамічних напружень та деформацій, в інженерній практиці виходять з так званої технічної теорії удару, яка ґрунтується на таких припущеннях.

1. При співударянні тіло, що ударяє, рухається разом з тілом, що зазнає удару, до розвитку найбільших деформацій. При цьому немає пружних хвиль у тілах і пов'язаних з ними відскоків тіла, що ударяє (такий удар називають *непружним*).

2. За проміжок часу співударяння деформації поширюються по всьому об'єму тіла, що зазнає удару, а залежність між силами та деформаціями, що виникають, відповідає закону Гука.

3. При співударянні рухомих тіл зменшення кінетичної енергії системи дорівнює збільшенню потенціальної енергії деформації тіл. При цьому нехтують втратами енергії на місцеві пластичні деформації, а також інерцією маси тіла, що зазнає удару.

4. Вважають, що система тіл при співударянні має один степінь вільності, тобто положення системи визначається однією координатою.

Формули для визначення динамічних напружень та деформацій при осьовому ударі виводитимемо на прикладі системи (рис. 577), що складається з вертикально розміщеного пружного призматичного стрижня з жорсткістю при розтяганні (стисканні) $c = EF/l$, на торець якого з висоти H вільно падає вантаж Q.

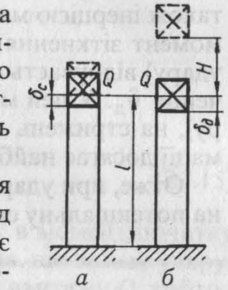


Рис. 577

Припустимо, що вантаж прикладається до стрижня статично, тобто навантаження повільно наростає від нуля до максимального значення (рис. 577, *а*) і стискає стрижень на величину $\delta_с$. При падінні вантажу з висоти H унаслідок удару на стрижень діятиме динамічна сила $P_д$, більша ніж сила Q, і укорочення стрижня $\delta_д$ буде більше за $\delta_с$ (рис. 577, *б*).

Зміна переміщень та деформацій при ударній дії навантаження Q порівняно з переміщеннями (деформаціями) при статичній дії того самого навантаження характеризується *коефіцієнтом динамічності*

$$k_д = \delta_д / \delta_с, \qquad (22.2)$$

звідки динамічну деформацію через статичну можна виразити формулою

$$\delta_д = k_д \delta_с. \qquad (22.3)$$

Ураховуючи лінійний зв'язок між напруженнями та деформаціями, а також припускаючи, що модулі пружності при статичній і ударній дії навантаження однакові, що з достатньою точністю підтверджується експериментом, можна за аналогією з формулою (22.3) встановити зв'язок між статичним та динамічним напруженнями:

$$\sigma_д = k_д \sigma_с, \qquad (22.4)$$

де

$$\sigma_с = Q / F \qquad (22.5)$$

— напруження, яке виникає в стрижні при стисканні силою, що дорівнює вазі падаючого вантажу.

Щоб використати формули (22.3), (22.4), треба визначити коефіцієнт динамічності $k_д$. Розраховуватимемо на підставі технічної теорії удару, маючи на увазі, що залежність між силами та деформаціями має один і той самий вигляд як при статичних, так і при динамічних навантаженнях, тобто

$$\delta_с = P_с / c; \qquad (22.6)$$

$$\delta_д = P_д / c, \qquad (22.7)$$

де $P_с$ — статичне навантаження, що дорівнює вазі падаючого вантажу (у цьому разі $P_с = Q$); $P_д$ — динамічне навантаження, що є силою інерції тіла, яке ударяє, в перший момент його зіткнення зі стрижнем.

Виходимо із закону збереження енергії, нехтуючи, як зазначалося вище, втратами енергії на місцеві пластичні деформації при співударянні тіл, а також інерцією маси тіла, що зазнає удару. Падаюче на стрижень тіло в момент зіткнення має найбільшу швидкість. Після зіткнення (початок удару) відбувається динамічне укорочення стрижня до найбільшого значення $\delta_д$. У цей момент швидкість вантажу дорівнює нулю (кінець удару), на стрижень діє стискальна сила $P_д$, і потенціальна енергія деформації досягає найбільшого значення.

Отже, при ударі кінетична енергія T падаючого тіла перетворюється на потенціальну енергію деформації $U_д$ тіла, що зазнає удару:

$$T = U_д.$$

Утрачена кінетична енергія чисельно дорівнює роботі вантажу при його падінні й деформуванні стрижня:

$$T = Q\left(H + \delta_д\right), \tag{22.8}$$

а потенціальну енергію деформації пружного тіла при ударі, враховуючи, що динамічна сила за проміжок часу удару зростає від 0 до $P_д$, можна записати у вигляді [див. формули (13.10) та (22.7)]

$$U_д = \frac{1}{2} P_д \delta_д = \frac{1}{2} c \delta_д^2. \tag{22.9}$$

Отже,

$$\frac{1}{2} c \delta_д^2 = Q\left(H + \delta_д\right). \tag{22.10}$$

Оскільки $\delta_c = Q/c$, рівняння (22.10) можна записати так:

$$\delta_д^2 - 2\delta_c \delta_д - 2\delta_c H = 0.$$

Звідси визначаємо динамічну деформацію:

$$\delta_д = \delta_c \pm \sqrt{\delta_c^2 + 2\delta_c H}. \tag{22.11}$$

Знак «мінус» перед радикалом треба відкинути, бо знак динамічної деформації не може бути протилежним знаку статичної.

Записавши формулу (22.11) у вигляді

$$\delta_д = \delta_c\left(1 + \sqrt{1 + 2H/\delta_c}\right) \tag{22.12}$$

і зіставивши її з формулою (22.3), знаходимо вираз для коефіцієнта динамічності:

$$k_д = 1 + \sqrt{1 + 2H/\delta_c}. \tag{22.13}$$

Маючи на увазі, що $H = v^2/2g$ (v — швидкість падаючого вантажу в момент початку удару), коефіцієнт динамічності можна записати у вигляді

$$k_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\delta_c}}. \tag{22.14}$$

Ураховуючи, що

$$\frac{2H}{\delta_c} = \frac{QH}{\frac{1}{2}Q\delta_c} = \frac{T_0}{U_c},$$

коефіцієнт динамічності можна виразити так:

$$k_д = 1 + \sqrt{1 + T_0/U_c}, \tag{22.15}$$

де $T_0 = QH$ — кінетична енергія падаючого вантажу в момент початку удару; U_c — потенціальна енергія деформації стрижня, що зазнає удару, при статичній дії сили, яка дорівнює вазі ударяючого вантажу Q, тобто

$$U_c = \frac{1}{2} Q\delta_c = \frac{Q^2}{2c} = \frac{Q^2 l}{2EF}. \tag{22.16}$$

Якщо $H = 0$, тобто коли вантаж не падає на стрижень, а прикладається раптово, то, згідно з формулою (22.13), коефіцієнт динамічності $k_д = 2$. Оскільки висота падіння вантажу H завжди більша за δ_c, то здебільшого при визначенні коефіцієнта динамічності у виразах під коренем одиницею порівняно з другим доданком нехтують. Тоді на підставі виразу (22.13) матимемо

$$k_д = 1 + \sqrt{2H/\delta_c}, \tag{22.17}$$

або, згідно з формулою (22.15),

$$k_д = 1 + \sqrt{T_0/U_c}. \tag{22.18}$$

Тепер, виходячи із залежності (22.4), запишемо вираз для напружень при ударі:

$$\sigma_д = k_д \sigma_c = \sigma_c\left(1 + \sqrt{1 + 2H/\delta_c}\right), \tag{22.19}$$

або

$$\sigma_д = \sigma_c\left(1 + \sqrt{\frac{2H}{\delta_c}}\right) = \frac{Q}{F} + \sqrt{\frac{2QHE}{lF}}. \tag{22.20}$$

Аналогічно визначаємо зусилля при ударі:

$$P_д = \sigma_д F = P_c\left(1 + \sqrt{1 + 2H/\delta_c}\right). \tag{22.21}$$

Розглянута наближена теорія удару має певні межі застосування. Вони обумовлені швидкістю падаючого вантажу до моменту удару і жорсткістю конструкції, що виражається у формулі (22.13) або (22.15) відношенням $2H/\delta_c$ або T_0/U_c. Так, якщо

$$\frac{2H}{\delta_c} = \frac{T_0}{U_c} \le 100,$$

то похибка розрахунку не більша ніж 10 %. Урахування маси конструкції, що зазнає удару, розширює межі застосування наближеної теорії.

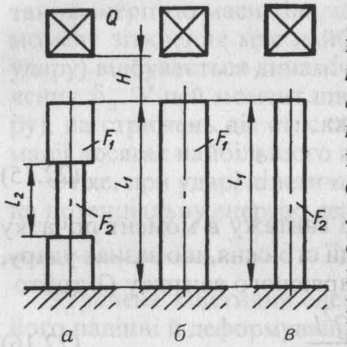


Рис. 578

З аналізу формул (22.19) і (22.20) випливає, що *при рівномірно розподілених напруженнях, однакових в усіх поперечних перерізах стрижня, динамічні напруження залежать не тільки від площі F поперечного перерізу*, як це має місце при дії статичного навантаження в статично визначуваних системах, *а й від довжини l і модуля пружності E матеріалу стрижня.* Отже, можна сказати, що динамічні напруження в стрижні при ударі залежать як від об'єму, так і від якості матеріалу стрижнів. При цьому чим більший об'єм пружного стрижня, що зазнає удару (чим більша «енергоємність» стрижня), тим менші динамічні напруження, а чим більший модуль пружності матеріалу стрижня, тим динамічні напруження більші.

Сказане справедливе для призматичних стрижнів (стрижнів однакового поперечного перерізу).

Інша картина — при ударі стрижнів, окремі ділянки яких мають різні площі поперечного перерізу. У цьому разі (рис. 578, *а*) найбільше номінальне напруження у стрижні (без урахування концентрації) буде в перерізах з найменшою площею (у місці виточки). При ударі воно залежить від деформативності всього стрижня, а не тільки його ослабленої частини. Зменшити динамічні напруження в цьому разі можна двома способами: збільшенням поперечного перерізу в місці виточки або зменшенням площі поперечного перерізу стовщеної частини стрижня і, отже, підвищенням піддатливості всього стрижня в цілому, що приводить до зниження максимальних динамічних напружень у місці виточки. Якщо виготовити весь стрижень однакового діаметра, що дорівнює діаметру виточки d_2, то при цьому збільшиться деформативність стрижня, а отже, зменшиться динамічне напруження $\sigma_д$.

Проілюструємо сказане на прикладі визначення максимальних динамічних напружень, що виникають у трьох типах стрижнів при поздовжньому ударі вантажем Q, який падає з однакової висоти H (рис. 578).

Нехай співвідношення між окремими розмірами стрижнів такі:

$$F_2/F_1 = \alpha; \quad l_2/l_1 = \beta.$$

Динамічні напруження в кожному стрижні визначаємо за загальною формулою

$$\sigma_{д\,max} = k_д \sigma_{c\,max} = k_д \frac{Q}{F_{min}},$$

де

$$k_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}}; \quad \delta_c = \sum_1^z \frac{Q l_n}{E_n F_n};$$

z — кількість східців.

Для східчастого стрижня (рис. 578, *а*)

$$\delta_{c(a)} = \frac{Q}{E}\left(\frac{l_1 - l_2}{F_1} + \frac{l_2}{F_2}\right) = \frac{Q l_1}{E F_1}\left(1 - \beta + \frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Для стрижня постійного перерізу з розмірами стовщеної частини східчастого стрижня (рис. 578, *б*)

$$\delta_{c(б)} = \frac{Q l_1}{E F_1}.$$

Для стрижня постійного перерізу, що дорівнює мінімальному перерізу східчастого стрижня (рис. 578, *в*),

$$\delta_{c(в)} = \frac{Q l_1}{E F_2} = \frac{Q l_1}{E F_1 \alpha}.$$

Тоді співвідношення між деформаціями трьох стрижнів будуть такі:

$$\delta_{c(a)} : \delta_{c(б)} : \delta_{c(в)} = (1 - \beta + \beta/\alpha) : 1 : 1/\alpha. \tag{22.22}$$

Нехтуючи у виразі (22.17) одиницею порівняно з коренем, що при великій висоті падіння H і малій статичній деформації δ_c можна допустити, вираз для коефіцієнта динамічності запишемо у вигляді

$$k_д \approx \sqrt{2H/\delta_c}.$$

Виходячи з цього і враховуючи вираз (22.22), дістанемо співвідношення між коефіцієнтами динамічності для розглядуваних випадків:

$$k_{д(a)} : k_{д(б)} : k_{д(в)} = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha(1-\beta)+\beta}} : 1 : \sqrt{\alpha}. \tag{22.23}$$

Виходячи з виразів

$$\sigma_{д(a)} = k_{д(a)} \sigma_{c(a)} = k_{д(a)} \frac{Q}{F_2} = k_{д(a)} \frac{Q}{\alpha F_1};$$

$$\sigma_{д(б)} = k_{д(б)} \sigma_{c(б)} = k_{д(б)} \frac{Q}{F_1};$$

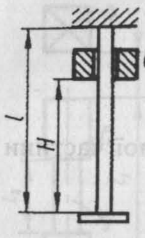
$$\sigma_{д(в)} = k_{д(в)} \sigma_{c(в)} = k_{д(в)} \frac{Q}{F_2} = k_{д(в)} \frac{Q}{\alpha F_1}$$

і враховуючи співвідношення (22.23), матимемо

$$\sigma_{д(a)} : \sigma_{д(б)} : \sigma_{д(в)} = \sqrt{\frac{1}{\alpha^2(1-\beta)+\alpha\beta}} : 1 : \sqrt{\frac{1}{\alpha}}. \tag{22.24}$$

Припустимо, наприклад, що коефіцієнти α та β дорівнюють:

$$\alpha = F_2/F_1 = 0{,}5; \quad \beta = l_2/l_1 = 0{,}4.$$



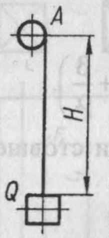


Рис. 579 Рис. 580

Тоді за формулою (22.24) знаходимо таке співвідношення:

$$\sigma_{д(a)} : \sigma_{д(б)} : \sigma_{д(в)} = 1{,}7 : 1 : 1{,}41.$$

Отже, максимальні напруження виникають у стрижні з виточкою (рис. 578, *а*), а мінімальні — в стрижні постійного перерізу найбільшої площі (рис. 578, *б*). У стрижні постійного найменшого перерізу (рис. 578, *в*) напруження мають деяке проміжне значення.

Проведений аналіз свідчить, що характер опору стрижнів удару якісно відрізняється від опору їх статичному навантаженню. При статичному стисканні (або розтяганні) стовщення однієї частини стрижня не спричинює змін напружень у перерізах іншої частини; при ударі воно підвищує їх. Місцеве зменшення площі поперечного перерізу на невеликій довжині стрижня різко підвищує напруження.

Для зменшення напружень треба намагатися в основному збільшити піддатливість стрижня через збільшення його довжини, встановлення буферної пружини, заміни матеріалу на інший, з меншим модулем пружності, вирівнювання площ поперечних перерізів з метою дістати всі ділянки стрижня з однаковою мінімальною площею перерізу. Ось чому, конструюючи стрижні, що працюють на удар, треба добиватися постійної площі перерізу по всій довжині. Місцеві стовщення допустимі лише на невеликих ділянках довжини; місцеві виточки малої довжини небажані.

Умова міцності при ударі має вигляд

$$\sigma_{д\max} \le \left[\sigma_д\right] = \sigma_т / n_т.$$

Коефіцієнт запасу міцності $n_т$ можна вибрати таким, як і при статичному навантаженні (1,4...1,6), оскільки динамічність вже відображена у розрахункових формулах коефіцієнтом $k_д$. Однак, враховуючи наближеність розглянутого методу розрахунку, цей коефіцієнт беруть дещо більшим $(n_т = 2)$.

Ми розглянули розрахунок динамічних напружень і деформацій при ударному стисканні. Однак усі наведені формули також справедливі й для ударного розтягання, зокрема для прикладу на рис. 579.

Приклад 88. *Вантаж Q вагою 50 Н, прикріплений до сталевого дроту діаметром 3 мм (рис. 580), вільно падає від точки A з прискоренням g. Знайдемо напруження в дроті, якщо його верхній кінець раптово зупинено. Масою дроту знехтуємо.*

Напруження в точці *A* після раптової зупинки дроту визначимо за формулою (22.20) при довжині дроту $l = H$:

$$\sigma_д = \frac{Q}{F} + \sqrt{\frac{2QHE}{Fl}} = \frac{4\cdot 0{,}05\cdot 10^{-3}}{\pi\left(0{,}3\cdot 10^{-2}\right)^2} +$$

$$+\sqrt{\frac{4\cdot 2\cdot 0{,}05\cdot 10^{-3}\cdot 2{,}1\cdot 10^5}{\pi\left(0{,}3\cdot 10^{-2}\right)^2}} = (7{,}08 + 1720)\ \text{МПа} \approx 1727\ \text{МПа}.$$

Оскільки в розглядуваному прикладі кінетична енергія падаючого тіла збільшується в тій самій пропорції, що і об'єм дроту, то напруження не залежить від висоти падіння вантажу *Q*.

Приклад 89. *Визначимо динамічні напруження, що виникають у стрижнях підвіски (рис. 581), при падінні вантажу Q = 0,25 кН з висоти H = 1 см. Площа поперечного перерізу мідних похилих стрижнів AC і BC $F_м$ = 0,2 см², площа поперечного перерізу сталевого стрижня $F_{ст}$ = 0,25 см², довжина сталевого стрижня $l_{ст}$ = 2,4 м; довжина похилих стрижнів $l_м$ = 2 м.*

Динамічні напруження в сталевому стрижні визначимо за формулою

$$\sigma_д = k_д \sigma_с.$$

Напруження в стрижнях при статичній дії навантаження

$$\sigma_{с.ст} = \frac{Q}{F_{ст}} = \frac{0{,}25\cdot 10^{-3}}{0{,}25\cdot 10^{-4}}\ \text{МПа} = 10\ \text{МПа};$$

$$\sigma_{с.м} = \frac{Q}{2F_м \cos 30^\circ} = \frac{0{,}25\cdot 10^{-3}}{2\cdot 0{,}2\cdot 10^{-4}\cdot 0{,}866}\ \text{МПа} = 7{,}2\ \text{МПа}.$$

Переміщення перерізу *D* при статичній дії навантаження

$$\delta_с = \delta_{с.ст} + \frac{\delta_{с.м}}{\cos 30^\circ} = \frac{Ql_{ст}}{E_{ст}F_{ст}} + \frac{Ql_м/2}{E_м F_м \cos^2 30^\circ} =$$

$$= \left(\frac{0{,}25\cdot 10^{-3}\cdot 2{,}4}{2\cdot 10^5\cdot 0{,}25\cdot 10^{-4}} + \frac{0{,}125\cdot 10^{-3}\cdot 2}{1\cdot 10^5\cdot 0{,}2\cdot 10^{-4}\cdot 0{,}75}\right)\text{м} = 28{,}7\cdot 10^{-3}\ \text{см}.$$

Динамічний коефіцієнт

$$k_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_с}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2\cdot 1}{28{,}7\cdot 10^{-3}}} = 9{,}4.$$

Отже,

$$\sigma_{д.ст} = k_д \sigma_{с.ст} = 9{,}4\cdot 10\ \text{МПа} = 94\ \text{МПа}.$$

$$\sigma_{д.м} = k_д \sigma_{с.м} = 9{,}4\cdot 7{,}2\ \text{МПа} = 67{,}7\ \text{МПа}.$$

На практиці буває, що за здобутими вище формулами динамічні напруження визначити неможливо. До таких задач належить, наприклад, визначення динамічних напружень у сталевому тросі, що піднімає вантаж *Q* зі швидкістю *υ*, при раптовому гальмуванні підйомника (рис. 582).

Позначимо вільну довжину троса в момент зупинки через *l*, а площу його поперечного перерізу — через *F*.

Нехтуючи масою троса та вважаючи, що кінетична енергія рухомого вантажу цілком перетворюється на додаткову потенціальну енергію деформації троса, дістанемо таке рівняння для визначення найбільшого подовження δ троса:

$$\frac{EF\delta^2}{2l} - \frac{EF\delta_с^2}{2l} = \frac{Qv^2}{2g} + Q\left(\delta - \delta_с\right),$$

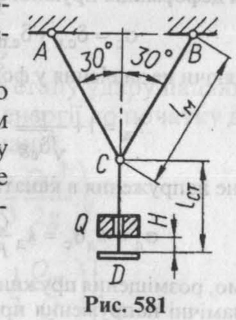


Рис. 581

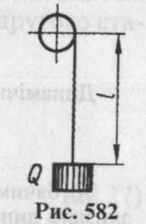


Рис. 582

звідки, враховуючи, що

$$Q = EF\frac{\delta_c}{l},$$

матимемо

$$\frac{EF}{2l}(\delta-\delta_c)^2 = \frac{Qv^2}{2g}.$$

Звідси

$$\delta = \delta_c + \sqrt{\frac{Qv^2 l}{EFg}}.$$

Отже, розтягальні напруження в тросі при раптовому гальмуванні зростають у відношенні

$$\frac{\delta}{\delta_c} = 1+\frac{v}{\delta_c}\sqrt{\frac{Ql}{EFg}} = 1+\frac{v}{\sqrt{\delta_c g}}, \qquad (22.25)$$

тобто

$$k_д = 1+\frac{v}{\sqrt{\delta_c g}}.$$

Приклад 90. *Визначимо напруження в сталевому канаті, що опускає вантаж вагою $Q = 45$ кН зі швидкістю $v = 1$ м/с, при раптовому гальмуванні в момент, коли вантаж опуститься на 18 м. Переріз каната $F = 16$ см², модуль пружності $E = 1{,}05 \cdot 10^5$ МПа.*

Обчислимо статичну деформацію каната:

$$\delta_c = \frac{Ql}{EF} = \frac{45\cdot10^{-3}\cdot18}{1{,}05\cdot10^5\cdot16\cdot10^{-4}}\ м = 0{,}482\cdot10^{-2}\ м = 0{,}482\ см.$$

Згідно з формулою (22.25), коефіцієнт динамічності

$$k_д = 1+\frac{v}{\sqrt{\delta_c g}} = 1+\frac{1}{\sqrt{0{,}482\cdot10^{-2}\cdot9{,}81}} = 5{,}6$$

і динамічні напруження

$$\sigma_д = k_д\sigma_c = k_д\frac{Q}{F} = 5{,}6\ \frac{45\cdot10^{-3}}{16\cdot10^{-4}}\ МПа = 157{,}5\ МПа.$$

Здобуті високі напруження при раптовому гальмуванні можуть призвести до руйнування підйомного каната.

Приклад 91. *Розв'яжемо попередню задачу за умови, що між тросом і вантажем розміщено пружину, яка під дією вантажу 45 кН дає статичне подовження 12 см.*

Статична деформація пружного елемента (каната $\delta_{c.к}$ і пружини $\delta_{c.п}$)

$$\sigma_c = \delta_{c.к}+\delta_{c.п} = (0{,}482+12)см = 12{,}482\ см.$$

Підставляючи це значення у формулу (22.25), знайдемо, що

$$k_д = 1+\frac{v}{\sqrt{\delta_c g}} = 1+\frac{1}{\sqrt{12{,}482\cdot10^{-2}\cdot9{,}81}} = 1{,}92.$$

Динамічне напруження в канаті

$$\sigma_д = k_д\sigma_c = k_д\frac{Q}{F} = 1{,}92\ \frac{45\cdot10^{-3}}{16\cdot10^{-4}}\ МПа = 54\ МПа.$$

Як бачимо, розміщення пружини між канатом і вантажем істотно (майже в 3 рази) знизило динамічні напруження при раптовому гальмуванні вантажу. У цьому разі

пружина стала тим амортизатором, який часто застосовують у техніці для пом'якшення поштовхів, а отже, і зменшення динамічних напружень, що виникають при поштовхах.

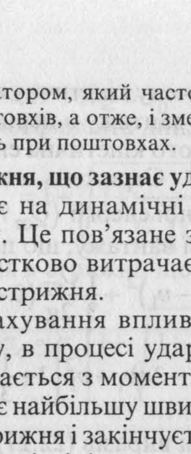


Рис. 583

Урахування маси стрижня, що зазнає удару. Іноді маса стрижня істотно впливає на динамічні напруження в стрижні, що зазнає удару. Це пов'язане з тим, що кінетична енергія вантажу частково витрачається на надання певної швидкості масі стрижня.

Для наближеного врахування впливу інерції маси стрижня, що зазнає удару, в процесі удару розрізняють два етапи. Перший починається з моменту зіткнення падаючого вантажу, який має найбільшу швидкість v, з верхнім кінцем нерухомого стрижня і закінчується, коли внаслідок зминання матеріалу в місці зіткнення швидкість вантажу знизиться до v_1, а верхній кінець стрижня набере за цей час такої самої швидкості v_1. Другий етап починається з моменту спільного руху вантажу і кінця стрижня, що зазнає удару. Деформація стискання поширюється по всій довжині стрижня з певною швидкістю від найбільшої v_1 на верхньому кінці до нуля в нижньому перерізі, тобто в місці закріплення.

Припустимо, що швидкість руху довільного перерізу стрижня змінюється по його довжині l за лінійним законом (рис. 583). Отже, швидкість перерізу на відстані x від нижнього закріпленого кінця

$$v(x) = v_1\frac{x}{l}.$$

Кінетична енергія маси елемента завдовжки dx

$$dT_{ст} = \frac{\gamma F dx}{2g}\left(v_1\frac{x}{l}\right)^2.$$

Повна кінетична енергія стрижня визначається так:

$$T_{ст} = \frac{\gamma F}{2g}\frac{v_1^2}{l^2}\int_0^l x^2dx = \frac{\gamma Fl}{3}\frac{v_1^2}{2g}.$$

Позначимо власну вагу стрижня через $Q_{ст}$. Тоді формулу для визначення кінетичної енергії стрижня в момент початку другого етапу можна записати у вигляді

$$T_{ст} = \frac{Q_{ст}}{3}\frac{v_1^2}{2g}. \qquad (22.26)$$

Отже, якщо в момент початку першого етапу удару падаючий вантаж мав кінетичну енергію $Qv^2/2g$, то втрата енергії до початку другого етапу внаслідок місцевих пластичних деформацій

$$\Delta T = \frac{Qv^2}{2g} - \left(\frac{Qv_1^2}{2g}+\frac{1}{3}\frac{Qv_1^2}{2g}\right),$$

або

$$\Delta T = \frac{Q}{2g}\left[v^2 - v_1^2\left(1+\frac{1}{3}\frac{Q_{ст}}{Q}\right)\right]. \qquad (22.27)$$

З іншого боку, цю саму втрачену кінетичну енергію можна обчислити, виходячи з того, що швидкість вантажу в перший етап удару змінюється на величину $v - v_1$, внаслідок чого кінетична енергія вантажу зменшується на величину $(Q/2g)(v-v_1)^2$. Стрижень, що зазнає удару, за перший етап удару дістає запас кінетичної енергії $(Q_{\text{ст}}/3)\left[(0-v_1)^2/2g\right]$. Тоді сумарна втрата кінетичної енергії вантажу, що падає,

$$\Delta T = \frac{Q}{2g}(v-v_1)^2 + \frac{1}{3}\frac{Q_{\text{ст}}}{2g}(0-v_1)^2,$$

або

$$\Delta T = \frac{Q}{2g}\left[v^2 - 2vv_1 + v_1^2\left(1+\frac{1}{3}\frac{Q_{\text{ст}}}{Q}\right)\right]. \tag{22.28}$$

Прирівнюючи праві частини виразів (22.27) та (22.28), матимемо

$$\frac{Q}{2g}\left[v^2 - v_1^2\left(1+\frac{1}{3}\frac{Q_{\text{ст}}}{Q}\right)\right] = \frac{Q}{2g}\left[v^2 - 2vv_1 + v_1^2\left(1+\frac{1}{3}\frac{Q_{\text{ст}}}{Q}\right)\right].$$

Звідси визначаємо швидкість вантажу в момент початку другого етапу удару:

$$v_1 = \frac{v}{1+\frac{1}{3}\frac{Q_{\text{ст}}}{Q}}. \tag{22.29}$$

Зазначимо, що цей вираз можна дістати також, використовуючи закон збереження кількості руху.

Отже, кінетична енергія системи в момент початку другого етапу удару визначається за формулою

$$T = \frac{Qv_1^2}{2g} + \frac{1}{3}\frac{Q_{\text{ст}}v_1^2}{2g} = \frac{Q}{2g}\left(1+\frac{1}{3}\frac{Q_{\text{ст}}}{Q}\right)v_1^2 = \frac{Q}{2g}\left(1+\frac{1}{3}\frac{Q_{\text{ст}}}{Q}\right)\left(\frac{v}{1+\frac{1}{3}\frac{Q_{\text{ст}}}{Q}}\right)^2,$$

або остаточно

$$T = \frac{Qv^2}{2g\left(1+\frac{1}{3}\frac{Q_{\text{ст}}}{Q}\right)}. \tag{22.30}$$

Ця енергія, згідно із законом збереження енергії, трансформується в потенціальну енергію деформації пружного стрижня. Тому вираз (22.30) треба підставити замість T_0 у формулу (22.15) для визначення коефіцієнта динамічності, тобто

$$k_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + T/U_{\text{с}}},$$

або

$$k_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{Qv^2}{2g\left(1+\frac{1}{3}\frac{Q_{\text{ст}}}{Q}\right)U_{\text{с}}}}.$$

Ураховуючи, що $v^2/2g = H$ і $HQ = T_0$, а також позначаючи $Q_{\text{ст}}/Q = \beta$, формулу для визначення коефіцієнта динамічності запишемо у вигляді

$$k_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{T_0}{U_{\text{с}}\left(1+\frac{1}{3}\beta\right)}}, \tag{22.31}$$

а максимальне напруження в стрижні, що зазнає удару,

$$\sigma_{\text{д}} = k_{\text{д}}\sigma_{\text{с}} = \sigma_{\text{с}}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{T_0}{U_{\text{с}}\left(1+\frac{1}{3}\beta\right)}}\right],$$

або

$$\sigma_{\text{д}} = \sigma_{\text{с}}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2EFH}{Ql\left(1+\frac{1}{3}\frac{F\gamma l}{Q}\right)}}\right].$$

З останніх формул випливає, що коли відношення ваги стрижня до ваги падаючого тіла (коефіцієнт β) порівняно з одиницею не мале, то врахування маси стрижня помітно знижує напруження при ударі.

Удар стрижня по жорсткій плиті. Іноді виникає потреба визначити напруження в тілі, що ударяє, зокрема розраховуючи шток кувального молота. При цьому найбільш небезпечним для міцності штока є момент закінчення кування, коли виріб майже не деформується і вся енергія удару поглинається штоком. Схематично такий приклад наведено на рис. 584, де призматичний стрижень завдовжки l поперечного перерізу F і вагою Q падає з висоти H на жорстку плиту A. Оскільки плита не деформується, то весь запас кінетичної енергії $T_0 = QH$ падаючого стрижня до моменту удару по плиті цілком трансформується в потенціальну енергію деформації стрижня, що падає.

У момент удару, коли швидкість стрижня раптово зменшується до нуля, частинки стрижня дістають значних прискорень, напрямлених угору. Припустимо, що їхня інтенсивність однакова в об'ємі стрижня. Отже, на частинки стрижня діють розподілені сили інерції однакової інтенсивності, напрям яких протилежний напряму прискорень (рис. 585), і задача зводиться до визначення динамічних напружень від такого навантаження. Ця задача подібна до задачі про визначення напружень у перерізах призматичного стрижня від дії власної ваги (див. розд. 5, § 36). При такому навантаженні нормальні напруження по довжині стрижня змінюються за лінійним законом. Вважаємо, що і при дії динамічних навантажень постійної інтенсивності залежність напружень по довжині стрижня має той самий вигляд.

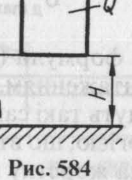


Рис. 584

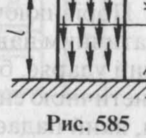


Рис. 585

Отже, в довільному перерізі з абсцисою x (рис. 585) динамічне напруження можна виразити через максимальне напруження в нижньому перерізі:

$$\sigma_д(x) = \sigma_{д\max}\frac{x}{l}.$$

Потенціальна енергія деформації в елементі стрижня завдовжки dx

$$dU_д = \frac{\sigma_д^2(x)}{2E}Fdx = \frac{\sigma_{д\max}^2}{2E}F\frac{x^2}{l^2}dx.$$

Потенціальна енергія деформації всього стрижня

$$U_д = \int_0^l \frac{F\sigma_{д\max}^2}{2Fl^2}x^2dx = \frac{\sigma_{д\max}^2}{6E}El. \qquad (22.32)$$

Знаючи запас кінетичної енергії T_0 падаючого стрижня і нехтуючи втратами енергії на місцеві пластичні деформації, деформації плити тощо, вважаємо, що

$$T_0 = U_д,$$

звідки на підставі формули (22.32)

$$\frac{\sigma_{д\max}^2}{6E}lF = T_0.$$

Максимальне напруження при ударі

$$\sigma_{д\max} = \sqrt{\frac{6ET}{Fl}}. \qquad (22.33)$$

Ураховуючи, що $T_0 = \gamma FlH$, дістанемо

$$\sigma_{д\max} = \sqrt{6E\gamma H}. \qquad (22.34)$$

Підставляючи у формулу (22.34) вираз $H = \upsilon^2/2g$, де υ — швидкість у момент удару, знаходимо

$$\sigma_{д\max} = \upsilon\sqrt{\frac{3E\gamma}{g}}.$$

Формулу (22.33) можна записати у вигляді

$$\sigma_{д\max} = \sqrt{\frac{6ET_0}{Fl}} = \sqrt{\frac{3\cdot 2EQH}{Fl}}. \qquad (22.35)$$

Порівнюючи формули (22.35) і (22.20), нехтуючи в останній формулі статичним навантаженням, бачимо, що динамічні напруження в стрижні, який ударяє, будуть такі самі, як би він зазнав удару від іншого стрижня з кінетичною енергією, що втричі більша за енергію розглядуваного стрижня, який падає на жорстку плиту.

§ 139. Напруження при скручувальному ударі

При ударному крученні (рис. 586) можна, виходячи з енергетичного балансу ($U = T$), дістати формулу для визначення максимальних дотичних напружень, аналогічну тій, що була здобута при поздовжньому ударі:

$$\tau_{д\max} = k_д\tau_с. \qquad (22.36)$$

Тут, як і раніше,

$$k_д = 1 + \sqrt{1 + 2H/\delta_с},$$

де $\delta_с$ — переміщення точки співудару в напрямі удару під дією статично прикладеної сили Q.

Нехтуючи деформацією кривошипа і вважаючи, що внаслідок малості переміщення точки співудару його проекція на вертикаль дорівнює довжині дуги, маємо

$$\delta_с = \varphi R = \frac{M_{кр}l}{GJ_p}R = \frac{GRl}{GJ_p}R,$$

тобто

$$\delta_с = \frac{QR^2l}{GJ_p}, \qquad (22.37)$$

де Q — вага падаючого вантажу; R — радіус кривошипа; l — довжина вала.

Якщо вантаж раптово прикладається до кривошипа ($H = 0$), то коефіцієнт динамічності $k_д = 2$.

У машинобудуванні ударне кручення найчастіше спричинюється не падінням тих чи інших вантажів, а силами інерції мас, що обертаються з великими прискореннями. Це має місце в основному при гальмуванні швидкообертових валів, що несуть маховики.

Для виведення розрахункових формул розглянемо вал із закріпленим маховиком, що обертається зі сталою кутовою швидкістю ω. Подібну систему, наприклад, зображено на рис. 587. Раптово загальмуємо вал на відстані l від маховика, приклавши деякий момент $M_д$, який треба визначити. При цьому маховик завдяки запасу кінетичної енергії продовжує рух, скручуючи вал. Отже, ділянка вала завдовжки l скручується моментом $M_д$ (момент гальмування і момент сил інерції маховика).

Динамічні скручувальні моменти, напруження $\tau_д$ і кути закручування $\varphi_д$ визначимо, виходячи із закону збереження енергії $T_0 = U_д$.

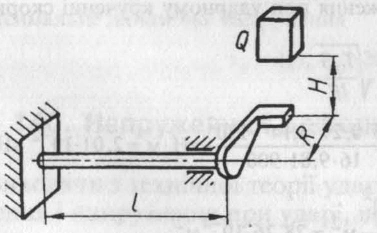


Рис. 586

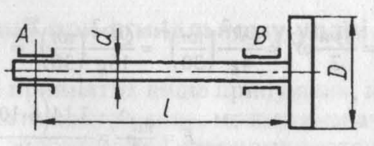


Рис. 587

Кінетична енергія маховика при обертальному русі

$$T_0 = \frac{J_{рм}}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{J_{рм}}{2}\omega^2;\quad J_{рм} = \frac{QD^2}{8g},$$

де $J_{рм}$ — полярний момент інерції маси маховика; Q — вага маховика; D — його діаметр.

Потенціальна енергія деформації кручення

$$U_д = \frac{1}{2} M_д \varphi_д = \frac{M_д^2 l}{2GJ_p},$$

де $J_p = \pi d^4/32$ — полярний момент інерції круглого перерізу вала діаметром d.

Підставляючи значення $U_д$ і T_0 в умову збереження енергії, знайдемо динамічний момент:

$$\frac{J_{рм}}{2}\omega^2 = \frac{M_д^2 l}{2GJ_p},$$

тобто

$$M_д = \sqrt{\frac{2GJ_pT_0}{l}} = \omega\sqrt{\frac{J_{рм}GJ_p}{l}}.$$

Тепер можна визначити максимальне дотичне напруження та динамічний кут закручування:

$$\tau_{д\max} = \frac{M_д}{W_p};\quad \varphi_д = \frac{M_д l}{GJ_p},$$

де $W_p = \frac{J_p}{d/2} = \frac{\pi d^3}{16}$ — полярний момент опору круглого перерізу.

Ураховуючи вираз для $M_д$, формулу для максимальних дотичних напружень можна записати у вигляді

$$\tau_{д\max} = 2\sqrt{\frac{T_0G}{lF}}, \tag{22.38}$$

де F — площа поперечного перерізу вала.

Приклад 92. *Диск діаметром $D = 20$ см і вагою $Q = 0,5$ кН, жорстко насаджений на вал AB завдовжки $l = 1$ м і діаметром $d = 6$ см (рис. 587), обертається зі сталою кутовою швидкістю, що відповідає $n = 120$ хв$^{-1}$. Визначимо найбільші дотичні напруження у валу при раптовій зупинці кінця A. Масою вала нехтуємо. Модуль зсуву $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.*

Для визначення максимального напруження при ударному крученні скористаємося формулою (22.38)

$$\tau_{max} = 2\sqrt{\frac{T_0G}{lF}},$$

де

$$T_0 = \frac{J_{рм}}{2}\omega^2 = \frac{QR^2}{4g}\left(\frac{\pi n}{30}\right)^2 = \frac{QD^2}{16g}\left(\frac{\pi n}{30}\right)^2 = \frac{0,5\cdot 0,2^2\cdot 3,14^2\cdot 120^2}{16\cdot 9,81\cdot 900}\ кН\cdot м = 2,01\cdot 10^{-2}\ кН\cdot м;$$

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14\left(6\cdot 10^{-2}\right)^2}{4}\ м^2 = 28,26\cdot 10^{-4}\ м^2.$$

Отже,

$$\tau_{max} = 2\sqrt{\frac{T_0G}{lF}} = 2\sqrt{\frac{2,01\cdot 10^{-5}\cdot 8\cdot 10^4}{1\cdot 28,26\cdot 10^{-4}}}\ МПа = 47,6\ МПа.$$

Приклад 93. *Гвинтова пружина, що працює на стискання, виготовлена із сталевого дроту квадратного перерізу $b = 6$ мм. Середній діаметр витка пружини $D = 12$ см, кількість витків $n = 18$. Знайдемо статичне навантаження, яке стисне пружину на $\lambda = 2,5$ см. Припускаючи, що той самий вантаж падає на ненавантажену пружину з висоти $H = 10$ см, визначимо осадку пружин і найбільше дотичне напруження при ударі $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.*

Вагу вантажу визначимо з виразу для статичної осадки пружини

$$\lambda = \frac{M_{кр}}{GJ_к}R,$$

де

$$M_{кр} = RQ;\quad l = 2\pi Rn;\quad J_к = \beta hb^3$$

Тоді

$$\lambda = \frac{QR^2 2\pi n}{G\beta hb^3},$$

звідки

$$Q = \frac{\lambda G\beta hb^3}{2\pi R^3 n} = \frac{2,5\cdot 10^{-2}\cdot 8\cdot 10^4\cdot 0,141\left(6\cdot 10^{-3}\right)^4}{2\cdot 3,14\left(6\cdot 10^{-2}\right)^3\cdot 18}\ МН = 15\ Н.$$

Згідно з табл. 13, при $h/b = 1$ ($h = b$) коефіцієнт $\beta = 0,141$.

Визначимо осадку пружини при падінні вантажу $Q = 15$ Н з висоти $H = 10$ см:

$$\lambda_д = k_д\delta_с, \tag{22.39}$$

де

$$\delta_с = \lambda = 2,5\ см;\quad k_д = 1+\sqrt{1+\frac{2H}{\delta_с}} = 1+\sqrt{1+\frac{2\cdot 10}{2,5}} = 4.$$

Підставляючи значення $k_д$ і $\delta_с$ у вираз (22.39), знайдемо

$$\lambda_д = 4\cdot 2,5\ см = 10\ см.$$

Максимальні дотичні напруження у витку пружини

$$\tau_д = k_д\tau_с,$$

де

$$\tau_с = \tau_{max} = M_{кр}/W_к;\quad W_к = \alpha hb^2 = \alpha b^3.$$

Для квадратного перерізу, згідно з табл. 13, коефіцієнт $\alpha = 0,208$. Тоді

$$\tau_с = \frac{QR}{\alpha b^3} = \frac{15\cdot 10^{-6}\cdot 6\cdot 10^{-2}}{0,208\left(6\cdot 10^{-3}\right)^3}\ МПа = 20\ МПа,$$

а максимальне динамічне напруження

$$\tau_д = k_д\tau_с = 4\cdot 20\ МПа = 80\ МПа.$$

§ 140. Напруження і деформації при згинальному ударі

Виходячи з технічної теорії удару і прийнятих вище припущень, переміщення і напруження при ударі, що згинає стрижень, можна визначити за формулами, аналогічними виразам, здобутим при ударному розтяганні або стисканні:

$$w_д = k w_с; \quad f_д = k_д f_с; \tag{22.40}$$

$$\sigma_д = k_д \sigma_с; \tag{22.41}$$

$$k_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{f_с}}. \tag{22.42}$$

Тут $w_д$, $w_с$ — відповідно динамічний і статичний прогини в довільному перерізі балки; $f_д$, $f_с$ — те саме в перерізі зіткнення вантажу з балкою.

Динамічний коефіцієнт можна визначити також за формулами (22.14), (22.15), (22.17), (22.18), в яких $\delta_с$ треба замінити на $f_с$.

Так, для шарнірно обпертої балки з прогоном l, яка зазнає посередині прогону удару від падаючого з висоти H вантажу Q (рис. 588),

$$f_с = \frac{Ql^3}{3EJ}; \quad \sigma_{с\,max} = \frac{Ql}{2W}.$$

Для консолі, що зазнає удару від вантажу Q, який падає на її вільний кінець,

$$f_с = \frac{Ql^3}{48EJ}; \quad \sigma_{с\,max} = \frac{Ql}{W}.$$

Підставляючи значення $f_с$ у формулу (22.42), знаходимо коефіцієнт динамічності $k_д$, а далі з формул (22.41) і (22.40) — динамічні напруження та деформації.

Так, для балки на двох опорах (рис. 588) найбільші динамічні напруження

$$\sigma_{д\,max} = k_д \sigma_{с\,max} = \frac{Ql}{4W}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{96HEJ}{Ql^3}}\right)$$

або

$$\sigma_{д\,max} = \frac{Ql}{4W}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{96T_0E}{Q^2l^3}}\right), \tag{22.43}$$

де $T_0 = QH$ — енергія падаючого тіла в момент зіткнення.

Умова міцності в цьому разі має вигляд

$$\sigma_{д\,max} = \frac{Ql}{4W}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{96T_0EJ}{Q^2l^3}}\right) \le |\sigma_д| = \frac{\sigma_т}{n_д},$$

де $n_д$ — запас міцності з урахуванням динамічності навантаження.

Опір балки ударним навантаженням залежить як від осьового моменту опору поперечного перерізу, так і від її згинальної жорсткості. Чим більша піддатливість балки, тим більшу кінетичну енергію удару вона може витримати при таких самих допустимих напруженнях. Найбільшу піддатливість мають балки однакового опору згинанню (див. § 69), в яких σ_{max} однакові в усіх перерізах. Тому ресори і виготовляють у формі балок однакового опору.

Обчислюючи напруження в балках при згинальному ударі, ми не враховували вплив маси самої балки, який іноді може бути великим. Інерцію маси балки враховуватимемо, як і при поздовжньому ударі, наближено, замінивши розподілену масу зосередженою в місці зіткнення при ударі. Позначимо останню через m_1, назвемо її зведеною і визначимо з умови, що кінетичні енергії розподіленої і зосередженої мас однакові.

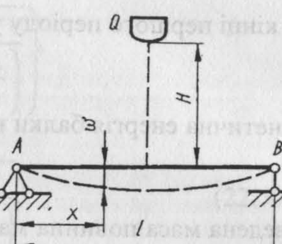


Рис. 588

Нехай у момент удару вантаж Q має швидкість v, а швидкість маси m_1 внаслідок інерції дорівнює нулю, тобто балка нерухома. Швидкість вантажу зменшується внаслідок місцевих непружних деформацій. Цей період закінчується, коли швидкість вантажу і стрижня в місці зіткнення (тобто маси m_1) стають однаковими і дорівнюють v_1, і починається другий період — згинання балки під дією вантажу Q, що рухається зі швидкістю v_1, разом з перерізом балки в місці зіткнення.

У цій фазі удару, коли згинається вже вся балка, кінетична енергія вантажу і балки перетворюється на потенціальну енергію деформації згинання. Отже, спочатку знайдемо зведену масу балки. Для певності розглянемо балку, зображену на рис. 588. Рівняння пружної лінії зігнутої балки на двох опорах, статично навантаженої посередині прогону, має вигляд

$$w = f / l^3 \left(3l^2x - 4x^3\right), \; (0 \le x \le l/2),$$

де $f = Ql^3 / 48EJ$ — прогин посередині прогону.

Припустимо, що при ударі балка згинається по кривій такої самої форми. Отже, якщо w_{max} — прогин при ударі посередині прогону, то

$$w(x) = \frac{w_{max}}{l^3}\left(3l^2x - 4x^3\right), \; (0 \le x \le l/2),$$

і швидкість руху цього перерізу

$$v(x) = \frac{dw(x)}{dt} = \frac{dw_{max}}{dt}\frac{1}{l^3}\left(3l^2x - 4x^3\right).$$

Тоді кінетична енергія елемента балки завдовжки dx

$$dT_б = \frac{v^2 \gamma F dx}{2g} = \frac{\gamma F dx}{2g}\left[\frac{dw_{max}}{dt}\frac{1}{l^3}\left(3l^2x - 4x^3\right)\right]^2,$$

а кінетична енергія всієї балки

$$T_б = 2\int_0^{l/2} \frac{\gamma F}{2g}\left(\frac{dw_{max}}{dt}\right)^2 \frac{1}{l^6}\left(3l^2x - 4x^3\right)^2 dx = \frac{17}{35}\frac{\gamma Fl}{2g}\left(\frac{dw_{max}}{dt}\right)^2;$$

$$T_б = \frac{17}{35}\frac{\gamma Fl}{2g}\left(\frac{dw_{max}}{dt}\right)^2. \tag{22.44}$$

У кінці першого періоду удару, коли

$$\frac{dw_{\max}}{dt} = v_1,$$

кінетична енергія балки визначається формулою

$$T_б = \frac{17}{35}\frac{\gamma Fl}{2g}v_1^2.$$

Зведена маса повинна мати таку саму кінетичну енергію

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{17}{35}\frac{\gamma Fl}{2g}v_1^2. \tag{22.45}$$

Звідси

$$m_1 = \frac{17}{35}\frac{\gamma Fl}{g} = \frac{17}{35}\frac{Q_б}{g}, \tag{22.46}$$

де $Q_б$ — вага балки.

Швидкість v_1 системи вантаж — балка знайдемо, використовуючи закон збереження кількості руху для цієї системи.

До моменту зіткнення вантаж Q мав швидкість v, а швидкість зведеної маси дорівнювала нулю. В кінці першого етапу удару вантаж і зведена маса мають швидкість v_1. Отже,

$$\frac{Q}{g}v = \frac{Q}{g}v_1 + m_1 v_1,$$

звідки

$$v_1 = \frac{v}{1+\frac{gm_1}{Q}} = \frac{v}{1+\frac{17}{35}\frac{\gamma Fl}{Q}}. \tag{22.47}$$

Тепер визначимо кінетичну енергію системи (вантаж — балка), яка перетворюється при ударі на потенціальну енергію деформації балки:

$$T^* = \frac{Qv_1^2}{2g} + \frac{17}{35}\frac{\gamma Fl}{2g}v_1^2 = \frac{v_1^2}{2g}\left(Q + \frac{17}{35}\gamma Fl\right).$$

Підставляючи в цю формулу вираз (22.47) для v_1, знайдемо

$$T^* = \frac{Qv^2}{2g}\cdot\frac{1}{1+\frac{17}{35}\frac{\gamma Fl}{Q}} = \frac{T_0}{1+\frac{17}{35}\frac{Q_б}{Q}}, \tag{22.48}$$

де

$$T_0 = \frac{Qv^2}{2g} = QH. \tag{22.49}$$

Отже, для визначення динамічних напружень у балці при ударі з урахуванням маси балки у формулу (22.43) замість T_0 треба підставити T^* з формули (22.48):

$$\sigma_{д\max} = \frac{Ql}{4W}\left(1+\sqrt{1+\frac{96T^* EJ}{Q^2 l^3}}\right) =$$

$$= \frac{Ql}{4W}\left(1+\sqrt{1+\frac{96T_0 EJ}{Q^2 l^3\left(1+\frac{17}{35}\frac{Q_б}{Q}\right)}}\right),$$

тобто в цьому разі коефіцієнт динамічності

$$k_д = 1+\sqrt{1+\frac{96T_0 EJ}{Q^2 l^3\left(1+\frac{17}{35}\frac{Q_б}{Q}\right)}}. \tag{22.50}$$

Розглядаючи вирази (22.48) і (22.50), бачимо, що, коли відношення $(Q_б / Q) = \gamma Fl / Q$ не мале порівняно з одиницею, то енергія удару T^* може бути значно меншою, ніж $T_0 = Qv^2/2g$, тобто врахування маси балки знижує розрахункові напруження при ударі. З формули (22.50) також випливає, що при даному запасі кінетичної енергії тіла, що ударяє, максимальні напруження зменшуються при збільшенні маси балки.

Зазначимо, що для інших схем закріплення і навантажування балок вираз для коефіцієнта динамічності можна записати у вигляді

$$k_д = 1+\sqrt{1+\frac{2H}{f_с\left(1+\varkappa\frac{Q_б}{Q}\right)}},$$

де $\varkappa$ — коефіцієнт зведення маси балки до точки співудару; для розглянутого випадку $\varkappa = 17/35$.

Приклад 94. *Визначимо напруження й осадку ресори автомобіля, якщо його колесо з невеликою швидкістю попадає в канаву завглибшки H = 200 мм. Навантаження на ресору P = 7 кН. Ресора становить балку однакового опору згинанню. Складається ресора з n = 11 листів, її довжина l = 1020 мм. Ширина листа b = 65 мм, висота h = 6 мм. Модуль пружності матеріалу ресори E = 2,1 · 10*[5] *МПа.*

Визначимо статичну деформацію ресори:

$$f_с = \frac{\beta Pl^3}{48EJ_0} = \frac{\beta Pl^3 12}{48Enbh^3} = \frac{\beta Pl^3}{4Enbh^3},$$

де β — деякий коефіцієнт (β = 1,20...1,40), що враховує ступінь наближення практично виконаної ресори до балки однакового опору.

Підставляючи в останню формулу відомі величини і взявши β = 1,35, знаходимо

$$f_с = \frac{\beta Pl^3}{4Enbh^3} = \frac{1{,}35\cdot 7\cdot 10^{-3}\cdot 1{,}02^3}{4\cdot 2{,}1\cdot 10^5\cdot 11\cdot 65\cdot 10^{-3}\left(6\cdot 10^{-3}\right)^3}\ \text{м} \approx 7{,}7\cdot 10^{-2}\ \text{м} = 7{,}7\ \text{см}.$$

Статичне напруження

$$\sigma_с = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{Pl\cdot 6}{4nbh^2} = \frac{3Pl}{2nbh^2} = \frac{3\cdot 7\cdot 10^{-3}\cdot 1{,}02}{2\cdot 11\cdot 65\cdot 10^{-3}\left(6\cdot 10^{-3}\right)^2}\ \text{МПа} = 417\ \text{МПа}.$$

Визначимо коефіцієнт динамічності:

$$k_д = 1+\sqrt{1+\frac{2H}{f_с}} = 1+\sqrt{1+\frac{2\cdot 20}{7{,}7}} \approx 3{,}5.$$

Осадка ресори при попаданні колеса в канаву

$$f_д = k_д f_с = 3{,}5 \cdot 7{,}7 \text{ см} = 27 \text{ см}.$$

Динамічне напруження в ресорі

$$\sigma_д = k_д \sigma_с = 3{,}5 \cdot 417 \text{ МПа} = 1460 \text{ МПа}.$$

Приклад 95. *Визначимо динамічні нормальні напруження в сталевому стрижні при його падінні з висоти $H = 10$ см так, що, залишаючись горизонтальним, він ударяє кінцями об жорсткі опори. Довжина стрижня $l = 100$ см, діаметр $d = 1$ см, питома вага матеріалу $\gamma = 7{,}8 \cdot 10^4$ Н/м^3.*

Розв'язати цю задачу, виходячи з наведеної формули для $k_д$ при згинанні балки, неможливо. В момент удару стрижень, що падає, навантажений силами інерції своєї маси інтенсивністю q_i, які невідомі, оскільки невідомі прискорення елементів стрижня при ударі. Припустимо, що сили інерції розподілені по довжині стрижня рівномірно. Для визначення їх скористаємося законом збереження енергії, вважаючи, що вся кінетична енергія T падаючого стрижня повністю перетворюється на потенціальну енергію його деформації U при ударі об жорсткі опори (втратами енергії на місцеві деформації, тертя тощо нехтуємо), тобто

$$T = U.$$

Потенціальну енергію стрижня на двох опорах, навантаженого рівномірно розподіленими силами, обчислимо за формулою

$$U = \int_0^l \frac{M^2(x)\,dx}{2EJ},$$

де

$$M(x) = \frac{q_i l}{2} x - \frac{q_i x^2}{2}.$$

Отже,

$$U = \int_0^l \frac{M^2(x)\,dx}{2EJ} = \frac{1}{2EJ}\int_0^l \frac{q_i^2 l^2}{4}\left(x^2 - 2\frac{x^3}{l} + \frac{x^4}{l^2}\right)dx = \frac{q_i^2 l^5}{240EJ} =$$

$$= \frac{q_i^2 \cdot 1^5 \cdot 64}{240 \cdot 2 \cdot 10^{11}\,\pi\left(1\cdot 10^{-2}\right)^4} = 4{,}25 \cdot 10^{-5} q_i^2.$$

Кінетична енергія стрижня

$$T = QH = Fl\gamma H = \frac{\pi\left(1\cdot 10^{-2}\right)^2}{4} \cdot 1 \cdot 7{,}8 \cdot 10^4 \cdot 0{,}1 \text{ Дж} = 0{,}612 \text{ Дж}.$$

Тоді

$$0{,}612 = 4{,}25 \cdot 10^{-5} q_i^2;$$

$$q_i = \sqrt{\frac{0{,}612}{4{,}25 \cdot 10^{-5}}} \text{ Н/м} = 120 \text{ Н/м}.$$

Максимальний згинальний момент

$$M_{max} = \frac{q_i l^2}{8} = \frac{120 \cdot 1^2}{8} \text{ Н} \cdot \text{м} = 15 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Визначимо максимальне динамічне напруження в стрижні:

$$\sigma_{д\,max} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{15 \cdot 32}{\pi\left(1\cdot 10^{-2}\right)^3} \text{ Па} = 153 \text{ МПа}.$$

§ 141. Механічні властивості матеріалів при ударі

Для перевірки здатності матеріалу чинити опір ударним навантаженням застосовують особливий вид випробувань ударним згинанням — визначення ударної в'язкості надрізаних зразків. Ці випробування здійснюють на маятникових копрах (рис. 589) на зразках матеріалу стандартної форми з надрізом з одного боку. На рис. 590 наведено схему такого зразка і напрям удару бійка маятника. Різниця висот положення маятника до і після удару дає змогу обчислити роботу A, затрачену на руйнування зразка.

Ударною в'язкістю матеріалу КС називають роботу, затрачену на руйнування зразка, віднесену до площі його поперечного перерізу в місці надрізу:

$$KC = \frac{A}{F} = \frac{G(h_1 - h_2)}{F}. \tag{22.51}$$

Хоч дані про ударну в'язкість матеріалу не можна використати при розрахунках на міцність, але вони дають змогу оцінити особливу властивість металу — його схильність до крихкого руйнування при динамічних навантаженнях в умовах складного напруженого стану в зоні надрізу і прийняти рішення про застосування того чи іншого матеріалу для даних умов роботи. Саме в таких умовах працюють багато деталей машин, що мають отвори, канавки для шпонок, різні вхідні кути тощо.

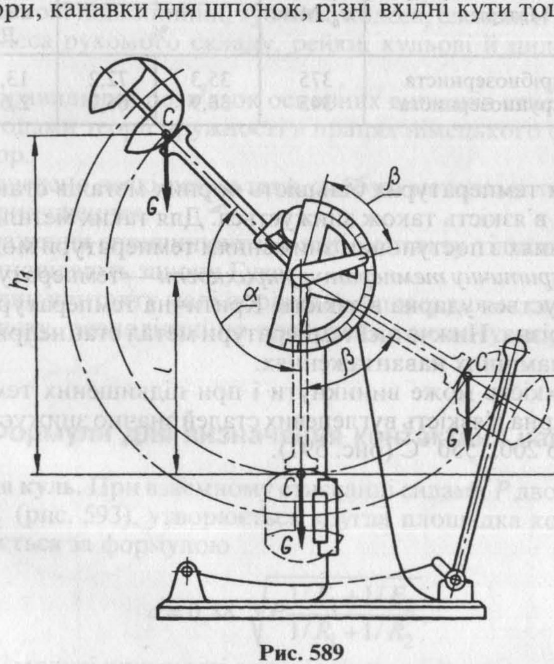


Рис. 589

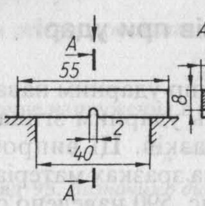


Рис. 590

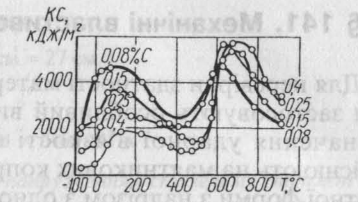


Рис. 591

Низька ударна в'язкість є підставою для бракування матеріалу. Наприклад, сталі, що застосовуються для виготовлення деталей, які працюють при динамічних навантаженнях, повинні мати ударну в'язкість не меншу ніж $8 \cdot 10^5 ... 8 \cdot 10^6$ Дж/м².

Ударна в'язкість однієї і тієї самої сталі залежить від її структури, причому цю залежність при статичних випробуваннях виявити неможливо. У табл. 23 наведено результати визначення ударної в'язкості для дрібнозернистої та крупнозернистої сталей марки Ст2 (0,15 % вуглецю). Ці сталі мають майже однакові пластичні властивості при статичних випробуваннях, але дуже різняться ударною в'язкістю.

Таблиця 23

Матеріал	$\sigma_в$, МПа	δ, %	ψ, %	Ударна в'язкість, Дж/м²
Сталь дрібнозерниста	375	35,3	72,2	$13{,}1 \cdot 10^5$
Сталь крупнозерниста	345	36,9	66,7	$2{,}6 \cdot 10^5$

При низьких температурах більшість чорних металів стають крихкими, їхня ударна в'язкість також знижується. Для таких металів при ударних випробуваннях з поступовим зниженням температури можна встановити так звану *критичну температуру крихкості* — температуру, при якій раптово зменшується ударна в'язкість. Критична температура крихкості різних металів різна. Нижче цієї температури метал стає непридатним для роботи при динамічних навантаженнях.

Ударна крихкість може виникнути і при підвищених температурах. Наприклад, ударна в'язкість вуглецевих сталей значно знижується в інтервалі температур 200...550 °C (рис. 591).

Розділ 23 КОНТАКТНІ НАПРУЖЕННЯ

§ 142. Основні поняття

Деформації і напруження, що виникають при взаємному натисканні двох стичних тіл, обмежених криволінійними поверхнями, називають контактними. Внаслідок деформацій у місцях зіткнення елементів конструкцій передача тиску відбувається по дуже малих площадках. Матеріал поблизу такої площадки, не маючи змоги вільно деформуватися, зазнає об'ємного напруженого стану (рис. 592). Як показують розрахунки, контактні напруження мають явно місцевий характер і дуже швидко зменшуються в міру віддаляння від місця контакту. Незважаючи на це, досліджувати контактні напруження і деформації потрібно для вирішення питань міцності багатьох важливих деталей. До таких деталей належать, наприклад, шарикові й роликові підшипники, зубчасті колеса, елементи кулачкових механізмів, колеса рухомого складу, рейки, кульові й циліндричні катки тощо.

Уперше правильний розв'язок основних випадків стискання пружних тіл дано методами теорії пружності в працях німецького фізика Г. Герца 1881—1882 рр.

Нижче наведено деякі результати, здобуті методами теорії пружності при таких припущеннях:

1) навантаження спричинюють в зоні контакту тільки пружні деформації, що відповідають закону Гука;

2) площадки контакту малі порівняно з поверхнями стичних тіл;

3) сили тиску, розподілені по поверхнях контакту, нормальні до цих поверхонь.

§ 143. Формули для визначення контактних напружень

Стискання куль. При взаємному стисканні силами P двох куль, радіуси яких R_1 і R_2 (рис. 593), утворюється кругла площадка контакту, радіус якої визначається за формулою

$$a = 0{,}88\sqrt[3]{P\frac{1/E_1 + 1/E_2}{1/R_1 + 1/R_2}}, \qquad (23.1)$$

де E_1 і E_2 — модулі пружності матеріалів куль.

Нормальні (стискальні) напруження на площадці контакту розподілені по півсфері. Найбільше напруження діє в центрі площадки контакту:

$$\sigma_3 = -|\sigma_{max}| = -1{,}5\frac{P}{\pi a^2} = -0{,}388\sqrt[3]{4P\frac{E_1^2E_2^2}{(E_1+E_2)^2}\frac{(R_1+R_2)^2}{R_1^2R_2^2}}; \qquad (23.2)$$

два інших головних напруження в центрі площадки

$$\sigma_1 = \sigma_2 \approx -0{,}8\,|\sigma_{max}|.$$

Отже, в найбільш напруженій точці площадки контакту матеріал зазнає напруженого стану, близького до рівномірного стискання. Завдяки цьому в зоні контакту матеріал може витримати без появи залишкових деформацій вельми великий тиск (див. § 49).

Обчислимо, наприклад, напруження в центрі площадки контакту, при якому вперше виникають залишкові деформації. Скористаємося для цього IV теорією міцності:

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]} = \sigma_т.$$

Підставивши значення головних напружень, знайдемо

$$0{,}2\sigma_{max} = \sigma_т, \quad \text{або} \quad \sigma_{max} = 5\sigma_т.$$

Для загартованої хромистої сталі, з якої виготовляють шарикові підшипники, замість границі текучості візьмемо границю пропорційності $\sigma_{пц}$ = 1000 МПа. Отже, σ_{max} = 5000 МПа.

Найбільш небезпечна точка лежить на осі z на глибині, що приблизно дорівнює половині радіуса площадки контакту. Головні напруження в цій точці

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -0{,}18\sigma_{max}; \quad \sigma_3 = -0{,}8\sigma_{max}, \qquad (23.3)$$

де σ_{max} — найбільше напруження в центрі площадки контакту, що визначається за формулою (23.2).

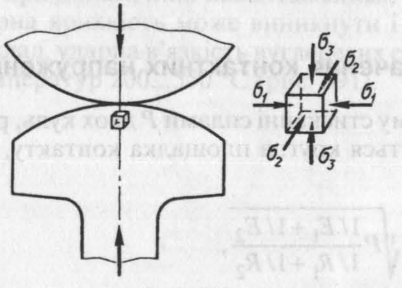


Рис. 592

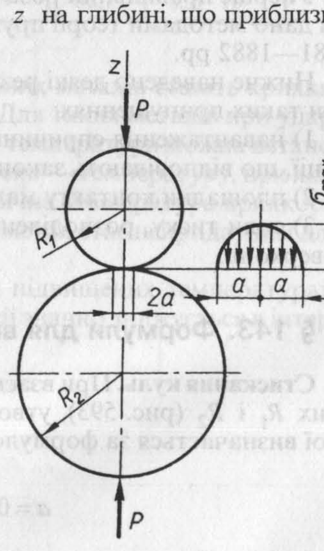


Рис. 593

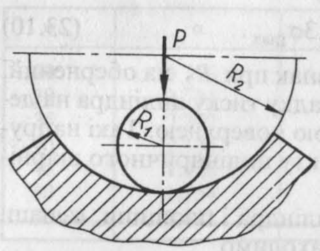


Рис. 594

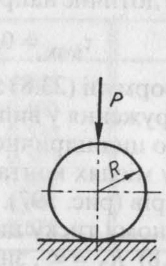


Рис. 595

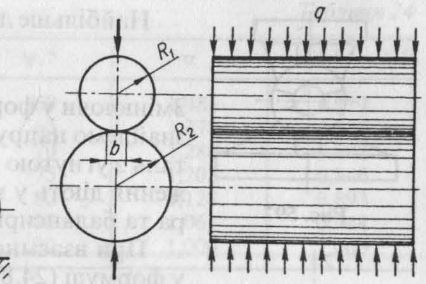


Рис. 596

Найбільше дотичне напруження в небезпечній точці

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2} = 0{,}31\sigma_{max}. \qquad (23.4)$$

Змінивши у формулі (23.2) знак при R_2 на обернений, дістанемо значення σ_{max} у випадку тиску кулі на угнуту сферичну поверхню (рис. 594):

$$\sigma_{max} = 0{,}388\sqrt[3]{4P\frac{E_1^2E_2^2}{(E_1+E_2)^2}\frac{(R_1-R_2)^2}{R_1^2R_2^2}}. \qquad (23.5)$$

При взаємному натисканні кулі й площини (рис. 595), взявши $R_2 = \infty$, знаходимо

$$\sigma_{max} = 0{,}388\sqrt[3]{4P\frac{E_1^2E_2^2}{(E_1+E_2)^2}\frac{1}{R^2}}. \qquad (23.6)$$

Стискання циліндрів. При взаємному натисканні двох циліндрів з паралельними твірними рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю q, Н/м (рис. 596), площадка контакту має вигляд вузького прямокутника, ширина якого визначається за формулою

$$b = 2{,}15\sqrt{q\frac{1/E_1+1/E_2}{1/R_1+1/R_2}}. \qquad (23.7)$$

Найбільше напруження стискання, що діє в точках осі площадки контакту,

$$\sigma_{max} = 1{,}27\frac{q}{b} = 0{,}418\sqrt{2q\frac{E_1E_2}{E_1+E_2}\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}}. \qquad (23.8)$$

Аналіз напруженого стану свідчить, що небезпечна точка лежить на осі z на глибині, що дорівнює 0,4 ширини площадки контакту. Головні напруження в цій точці мають такі значення:

$$\sigma_1 = -0{,}180\sigma_{max}; \quad \sigma_2 = -0{,}288\sigma_{max}; \quad \sigma_3 = -0{,}780\sigma_{max}. \qquad (23.9)$$

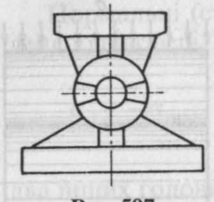


Рис. 597

Найбільше дотичне напруження в небезпечній точці

$$\tau_{\max} = 0{,}3\sigma_{\max}. \tag{23.10}$$

Змінюючи у формулі (23.8) знак при R_2 на обернений, знайдемо напруження у випадку тиску циліндра на деталь з угнутою циліндричною поверхнею. Такі напруження діють у місцях контакту циліндричного шарніра та балансирів (рис. 597).

При взаємному тиску циліндра і площини, взявши у формулі (24.8) $R_2 = \infty$, знаходимо

$$\sigma_{\max} = 0{,}418\sqrt{\frac{2q}{R}\,\frac{E_1E_2}{E_1+E_2}}. \tag{23.11}$$

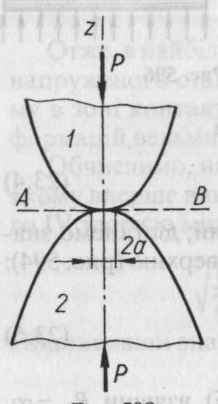


Рис. 598

Наведені вище формули здобуті при $\mu = 0{,}3$. Однак для практичних розрахунків ними можна користуватись і при інших значеннях коефіцієнта Пуассона.

Загальний випадок контакту двох тіл. Наведемо формули для загального випадку контакту двох тіл з однакового матеріалу.

Припускається, що обидва тіла в точці дотику мають загальну дотичну площину AB і загальну нормаль z, уздовж якої напрямлені сили P (рис. 598). Позначимо радіуси кривини в точці дотику першого тіла ρ_1 і ρ_1', другого тіла — ρ_2 і ρ_2', причому $\rho_1 < \rho_1'$, $\rho_2 < \rho_2'$. Нагадаємо, що головними кривинами називають найбільшу і найменшу кривини, розміщені в двох взаємно перпендикулярних площинах, що проходять через центр кривини. Радіуси кривини вважаються додатними, якщо центри кривини розміщені усередині тіла. Позначимо через φ кут між головними площинами кривини тіл, в яких лежать менші радіуси ρ_1 і ρ_2.

У загальному випадку площадка контакту становить еліпс з півосями:

$$a = \alpha\sqrt[3]{\frac{3P\left(1-\mu^2\right)}{E\left(\dfrac{1}{\rho_1}+\dfrac{1}{\rho_1'}+\dfrac{1}{\rho_2}+\dfrac{1}{\rho_2'}\right)}}; \tag{23.12}$$

$$b = \beta\sqrt[3]{\frac{3P\left(1-\mu^2\right)}{E\left(\dfrac{1}{\rho_1}+\dfrac{1}{\rho_1'}+\dfrac{1}{\rho_2}+\dfrac{1}{\rho_2'}\right)}}, \tag{23.13}$$

де μ — коефіцієнт Пуассона.

Значення коефіцієнтів α і β наведено в табл. 24 як функції допоміжного кута ψ, що визначається за формулою

Таблиця 24

ψ, °	α	β	ψ, °	α	β
20	3,778	0,408	60	1,486	0,717
30	2,731	0,493	65	1,378	0,759
35	2,397	0,530	70	1,284	0,802
40	2,136	0,567	75	1,202	0,846
45	1,926	0,604	80	1,128	0,893
50	1,754	0,641	85	1,061	0,944
55	1,611	0,678	90	1,000	1,000

$$\cos\Psi = \frac{\pm\sqrt{\left(\dfrac{1}{\rho_1}-\dfrac{1}{\rho_1'}\right)^2+\left(\dfrac{1}{\rho_2}-\dfrac{1}{\rho_2'}\right)^2+2\left(\dfrac{1}{\rho_1}-\dfrac{1}{\rho_1'}\right)\left(\dfrac{1}{\rho_2}-\dfrac{1}{\rho_2'}\right)\cos 2\varphi}}{\dfrac{1}{\rho_1}+\dfrac{1}{\rho_1'}+\dfrac{1}{\rho_2}+\dfrac{1}{\rho_2'}}. \tag{23.14}$$

При цьому знак чисельника у формулі (23.14) вибирають так, щоб $\cos\Psi$ був додатним.

Найбільше напруження стискання в центрі площадки контакту

$$\sigma_{\max} = 1{,}5\frac{P}{\pi ab}. \tag{23.15}$$

Найбільш небезпечна точка лежить на осі z на деякій глибині, яка залежить від відношення (b/a) півосей еліптичної площадки контакту. Однак найбільше дотичне напруження в небезпечній точці майже не залежить від зазначеного відношення розмірів площадки, і можна взяти

$$\tau_{\max} \approx 0{,}32\sigma_{\max}. \tag{23.16}$$

З наведених формул випливає, що контактні напруження залежать від пружних властивостей матеріалів і не є нелінійною функцією навантаження. Зі збільшенням навантаження швидкість наростання напружень зменшується. Це обумовлено тим, що зі збільшенням навантаження збільшуються і розміри площадки контакту.

§ 144. Перевірка міцності при контактних напруженнях

Враховуючи «м'якість» напруженого стану в небезпечних точках (всі три головні напруження стискальні), перевіряти міцність при контактних напруженнях слід за III або IV теорією міцності [формули (7.10), (7.19)]:

$$\sigma_{\text{екв III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \le [\sigma];$$

$$\sigma_{\text{екв IV}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]} \le [\sigma].$$

Таблиця 25

$\dfrac{b}{a}$	$m=\dfrac{\sigma_{\text{екв III}}}{\sigma_{\max}}$	$m=\dfrac{\sigma_{\text{екв IV}}}{\sigma_{\max}}$
1(коло)	0,620	0,620
0,75	0,625	0,617
0,50	0,649	0,611
0,25	0,646	0,587
0(смуга)	0,600	0,557

Підставляючи в ці формули значення головних напружень у небезпечній точці, виражені через найбільше напруження $\sigma_{\max}$ у центрі площадки контакту, умови міцності можна записати в такому вигляді:

$$\sigma_{\text{екв}} = m\sigma_{\max} \le [\sigma], \tag{23.17}$$

звідки

$$\sigma_{\max} \le \frac{1}{m}[\sigma] = [\sigma_{\text{конт}}]. \tag{23.18}$$

Тут $[\sigma_{\text{конт}}] = [\sigma]/m$ — допустиме значення найбільшого напруження в місці контакту.

Значення коефіцієнта m залежно від відношення півосей еліптичної площадки контакту і вибраної теорії міцності наведено в табл. 25.

Можна запропонувати таку послідовність розрахунку на міцність елементів конструкції в місці контакту.

1. Визначити головні радіуси кривини контактуючих тіл $(\rho_1,\ \rho_1',\ \rho_2,\ \rho_2')$ і кут φ між головними площинами кривини одного та іншого тіла.
2. Обчислити за формулами (23.12) і (23.13), враховуючи формулу (23.14), розміри півосей еліптичної площадки контакту.
3. Визначити за формулою (23.15) найбільше напруження стискання $\sigma_{\max}$ у центрі площадки контакту. У випадку круглої та прямокутної площадок контакту $\sigma_{\max}$ визначають безпосередньо з формули (23.2) або (23.8), не обчислюючи розмірів площадки.
4. Розраховують на міцність за формулою (23.18). Значення коефіцієнта m беруть з табл. 25. При цьому рекомендується виходити з IV теорії міцності.

Допустимі максимальні напруження в місці контакту $[\sigma_{\text{конт}}]$ для роликових і шарикових підшипників з хромистої сталі вибирають до 3500...5000 МПа, для рейкової сталі — до 800...1000 МПа.

У табл. 26 наведено значення допустимих максимальних тисків на площадці контакту при первісному контакті по лінії ($m = 0{,}557$) і статичній дії навантаження. У випадку первісного контакту в точці значення $[\sigma_{\text{конт}}]$ треба збільшити в 1,3...1,4 раза.

Приклад 96. *Упорний шариковий підшипник з плоскими кільцями без жолобів (рис. 599) статично стиснутий силами Q = 6,4 кН. Визначимо розміри площадки контакту між шариком і кільцем та найбільше напруження на цій площадці; перевіримо міцність. Діаметр шарика d = 15 мм; кількість шариків i = 20; коефіцієнт нерівномірності розподілу навантаження між окремими шариками підшипника — 0,8. Матеріал шариків і кілець — хромиста сталь; допустиме найбільше напруження в місці контакту $[\sigma_{\text{конт}}] = 3500$ МПа; модуль пружності $E = 2{,}12\cdot10^5$ МПа.*

Ураховуючи нерівномірність розподілу навантаження між окремими шариками, визначаємо найбільше зусилля, що стискає шарик:

$$P = \frac{Q}{0{,}8i} = \frac{64}{0{,}8\cdot20}\ \text{кН} = 0{,}4\ \text{кН}.$$

Таблиця 26

Марка металу	Тимчасовий опір $\sigma_\text{в}$, МПа	Твердість за Брінеллем НВ	Допустимий найбільший тиск на площадці контакту $[\sigma_{\text{конт}}]$, МПа
Сталь:			
30	480...600	180	850...1050
40	570...700	200	1000...1350
50	630...800	230	1050...1400
50Г	650...850	240	1100...1450
15Х	620...750	240	1050...1600
20Х	700...850	240	1200...1450
15ХФ	1600...1800	240	1350...1600
ШХ15			3800
Чавун:			
СЧ21	960	180...207	800...900
СЧ24	1000	187...217	900...1000
СЧ28	1100	170...241	1000...1100
СЧ32	1200	170...241	1100...1200
СЧ35	1300	197...255	1200...1300
СЧ38	1400	197...255	1300...1400

У місцях зіткнення кілець і шариків (рис. 599, точки *K*) утворюється кругла площадка, радіус якої, згідно з формулою (23. 1),

$$a = 0{,}88\sqrt[3]{\frac{2PR}{E}} = 0{,}88\sqrt[3]{\frac{0{,}4\cdot10^{-3}\cdot1{,}5\cdot10^{-2}}{2{,}12\cdot10^{5}}}\ \text{м} = 0{,}0268\ \text{см}.$$

При цьому $R_1 = d/2 = 0{,}75$ см; $R_2 = \infty$; $E_1 = E_2 = E$. Найбільше напруження на цій площадці на підставі формули (23. 2)

$$\sigma_{\max} = 1{,}5\frac{P}{\pi a^2} = \frac{1{,}5\cdot0{,}4\cdot10^{-3}}{3{,}14\left(0{,}0268\cdot10^{-2}\right)^2}\ \text{МПа} = 2657\ \text{МПа}.$$

Отже,

$$\sigma_{\max} < [\sigma_{\text{конт}}].$$

Приклад 97. *Циліндричне ходове колесо крана передає на рейку тиск P = 70 кН (рис. 600). Діаметр зовнішнього обода колеса D = 700 мм. Радіус поперечного перерізу головки рейки r = 300 мм. Визначимо розміри площадки контакту і найбільше напруження на цій площадці. Модуль пружності $E = 2\cdot10^5$ МПа, коефіцієнт Пуассона μ = 0,3.*

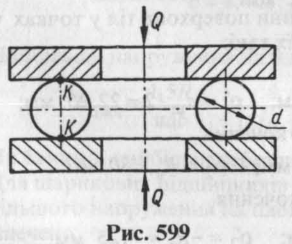


Рис. 599

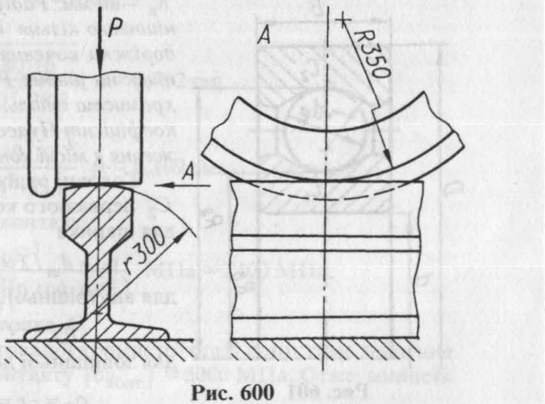


Рис. 600

Відповідно до зазначеної вище послідовності розрахунку випишемо головні радіуси кривини:

— для колеса $\rho_1 = 350$ мм, $\rho_1' = \infty$;

— для рейки $\rho_2 = 300$ мм, $\rho_2' = \infty$.

Кут між головними площадками, в яких містяться ρ_1 і ρ_2, як видно з рисунка, $\varphi = \pi/2$. Тоді з формули (23.14) знаходимо

$$\cos\Psi = \pm\frac{\dfrac{1}{\rho_1}-\dfrac{1}{\rho_2}}{\dfrac{1}{\rho_1}+\dfrac{1}{\rho_2}} = -\frac{\dfrac{1}{35}-\dfrac{1}{30}}{\dfrac{1}{35}+\dfrac{1}{30}} = 0{,}077.$$

Отже, допоміжний кут $\Psi = 85{,}5°$.

За табл. 24, виконавши лінійну інтерполяцію, знаходимо значення коефіцієнтів α, β:

$$\alpha = 1{,}055; \quad \beta = 0{,}950.$$

За формулами (23.12) і (23.13) визначаємо розміри півосей еліптичної площадки контакту:

$$a = 1{,}055\sqrt[3]{\frac{3\cdot 0{,}91\cdot 70\cdot 10^{-3}}{2\cdot 10^5\,(1/0{,}35+1/0{,}30)}}\ \text{м} = 0{,}566\ \text{см};$$

$$b = 0{,}950\sqrt[3]{\frac{3\cdot 0{,}91\cdot 70\cdot 10^{-3}}{2\cdot 10^5\,(1/0{,}35+1/0{,}30)}}\ \text{м} = 0{,}510\ \text{см}.$$

Найбільше напруження на площадці контакту

$$\sigma_{\max} = 1{,}5\frac{P}{\pi ab} = \frac{1{,}5\cdot 70\cdot 10^{-3}}{3{,}14\left(0{,}566\cdot 10^{-2}\right)\left(0{,}51\cdot 10^{-2}\right)}\ \text{МПа} = 1160\ \text{МПа}.$$

Приклад 98. *При статичній дії навантаження для радіального однорядного підшипника (рис. 601) визначимо розміри еліптичної площадки контакту найбільш навантаженого шарика з доріжками кочення внутрішнього і зовнішнього кілець та найбільше напруження на площадці контакту. Розміри підшипника: внутрішній діаметр d = 130 мм, зовнішній діаметр D = 280 мм, ширина B = 58 мм, діаметр шарика $d_ш$ = 44,5 мм. Радіус найменшого кола доріжки кочення внутрішнього кільця $R_в$ = 80 мм. Радіус найбільшого кола доріжки кочення зовнішнього кільця $R_з$ = 125 мм. Радіус поперечного профілю доріжки кочення r =23,4 см. Найбільший розрахунковий тиск на шарик P = 40 кН. Матеріал шариків і кілець — хромиста сталь. Модуль пружності $E = 2{,}12\cdot 10^5$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\mu = 0{,}3$. Допустиме найбільше напруження в місці контакту $[\sigma_{конт}]$ = 5000 МПа.*

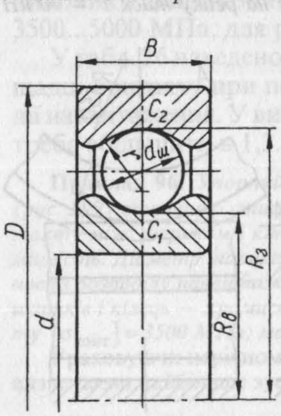


Рис. 601

Головні радіуси кривини поверхонь тіл у точках C_1 і C_2 первісного контакту їх такі:

для шарика

$$\rho_1 = d_ш/2 = 22{,}25\ \text{мм}; \quad \rho_1' = d_ш/2 = 22{,}25\ \text{мм};$$

для внутрішньої доріжки кочення

$$\rho_2 = -r = -23{,}4\ \text{мм}; \quad \rho_2' = R_в = 80\ \text{мм};$$

для зовнішньої доріжки кочення

$$\rho_2 = -r = 23{,}4\ \text{мм}; \quad \rho_2' = -R_з = -125\ \text{мм}.$$

Спочатку розглянемо зіткнення шарика з внутрішньою доріжкою кочення. Формула (23. 14) при $\rho_1 = \rho_1'$ набирає вигляду

$$\cos\Psi = \pm\frac{\dfrac{1}{\rho_2}-\dfrac{1}{\rho_2'}}{\dfrac{1}{\rho_1}+\dfrac{1}{\rho_1'}+\dfrac{1}{\rho_2}+\dfrac{1}{\rho_2'}}. \tag{23. 19}$$

Підставимо значення кривини. Тоді

$$\cos\Psi = \pm\frac{-0{,}0427-0{,}0125}{0{,}0895-0{,}0427+0{,}0125} = 0{,}931$$

і $\Psi = 21°\ 25'$.

За табл. 24, виконуючи лінійну інтерполяцію, знаходимо, що $\alpha = 3{,}629$; $\beta = 0{,}420$.

З виразів (23.12) і (23.13) визначаємо розміри площадки дотику:

$$a = \alpha\sqrt[3]{\frac{3P\left(1-\mu^2\right)}{E\left(\dfrac{1}{\rho_1}+\dfrac{1}{\rho_1'}+\dfrac{1}{\rho_2}+\dfrac{1}{\rho_2'}\right)}} = 3{,}629\sqrt[3]{\frac{3\cdot 0{,}91\cdot 40\cdot 10^{-3}}{59{,}3\cdot 2{,}12\cdot 10^5}}\ \text{м} = 0{,}740\ \text{см};$$

$$b = \beta\sqrt[3]{\frac{3P\left(1-\mu^2\right)}{E\left(\dfrac{1}{\rho_1}+\dfrac{1}{\rho_1'}+\dfrac{1}{\rho_2}+\dfrac{1}{\rho_2'}\right)}} = 0{,}420\cdot 0{,}206\cdot 10^{-2}\ \text{м} = 0{,}087\ \text{см}.$$

Максимальне напруження на площадці контакту

$$\sigma_{\max} = 1{,}5\frac{P}{\pi ab} = \frac{1{,}5\cdot 40\cdot 10^{-3}}{3{,}14\left(0{,}740\cdot 10^{-2}\right)\left(0{,}087\cdot 10^{-2}\right)}\ \text{МПа} = 2970\ \text{МПа}.$$

Аналогічно в місці контакту шарика із зовнішньою доріжкою кочення маємо

$$\cos\Psi = \pm\frac{-0{,}0427+0{,}0080}{0{,}0895-0{,}0427-0{,}0080} = 0{,}895.$$

Звідси $\Psi = 26°\ 30'$.

З табл. 24 знаходимо

$$\alpha = 3{,}097; \quad \beta = 0{,}463.$$

Тоді

$$a = 3{,}097\sqrt[3]{\frac{3\cdot 0{,}91\cdot 40\cdot 10^{-3}}{2{,}12\cdot 10^5\cdot 38{,}8}}\ \text{м} = 0{,}732\ \text{см};$$

$$b = 0{,}463\sqrt[3]{\frac{3\cdot 0{,}91\cdot 40\cdot 10^{-3}}{2{,}12\cdot 10^5\cdot 38{,}8}}\ \text{м} = 0{,}109\ \text{см}.$$

Найбільше напруження на площадці контакту

$$\sigma_{\max} = \frac{1{,}5P}{\pi ab} = \frac{1{,}5\cdot 40\cdot 10^{-3}}{3{,}14\left(0{,}732\cdot 10^{-2}\right)\left(0{,}109\cdot 10^{-2}\right)}\ \text{МПа} = 2400\ \text{МПа}.$$

Як бачимо, найбільш небезпечною є точка C_1.

Для шарикових підшипників із загартованої хромистої сталі допустиме значення найбільшого напруження на площадці контакту $[\sigma_{конт}]$ = 5000 МПа. Отже, міцність забезпечено.

Розділ 24 ОСНОВИ МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ

§ 145. Загальні поняття

Механіка руйнування, або теорія тріщин, як складова частина науки про міцність твердого тіла виникла порівняно недавно (приблизно в останні 60 років) і займається вона визначенням законів розділення твердих тіл на частини під дією зовнішніх силових факторів та інших причин.

Руйнування може бути частковим і повним. Часткове руйнування тіла характеризується пошкодженням матеріалу внаслідок виникнення в ньому окремих тріщин або розподілених по об'єму дефектів, що знижують його міцнісні властивості. При *повному руйнуванні* відбувається розділення тіла на частини. Отже, руйнування є найбільш характерним показником порушення міцності твердого тіла.

Розрізняють два типи руйнування — пластичне та крихке. Пластичне руйнування відбувається після істотної пластичної деформації по всьому об'єму тіла або його значній частині і є результатом вичерпання здатності матеріалу чинити опір пластичній деформації. *Крихким* називається руйнування, що відбувається без пластичної деформації. Розрізняють також *квазікрихке руйнування*, при якому має місце деяка пластична зона перед краєм тріщини. Квазікрихке руйнування відбувається в найбільш ослабленому перерізі при напруженні, вищому за границю текучості, але нижчому, ніж границя міцності. При крихкому руйнуванні швидкість поширення тріщини становить 0,2...0,5 швидкості звуку, тобто досить велика, а злом має кристалічний вигляд. При пластичному руйнуванні швидкість поширення тріщини мала і становить не більше ніж 0,05 швидкості звуку, а злом має волокнистий вигляд.

Важливе місце в теорії руйнування займає руйнування від утоми, яке відбувається внаслідок поступового розвитку тріщини при повторно-змінному циклічному навантаженні. Руйнування від утоми, як про це вже було сказано (див. розд. 21), виникає внаслідок накопичення в матеріалі необоротного пошкодження під дією багаторазового прикладання повторно-змінного навантаження. При цьому тріщини в матеріалі починають розвиватися задовго до повного руйнування незалежно від того, пластичне це буде руйнування чи крихке.

Особливо велике практичне значення в інженерній справі має вивчення крихкого руйнування конструкцій, що відбувається від швидкого поширення тріщини при середніх напруженнях, нижчих за границю текучості,

які здаються безпечними. Останнє свідчить про те, що розглянутих до цього класичних методів розрахунку на міцність за пружним і пластичним станами недостатньо. Ось чому класичні методи потрібно доповнити новими методами розрахунку на міцність, враховуючи закони зародження та розвитку тріщин, а також внести нові характеристики матеріалів, за якими можна було б оцінювати його тріщиностійкість.

Зазначимо, що для побудови теорії руйнування методів опору матеріалів недостатньо. Треба застосовувати методи теорії пружності та пластичності, тобто більш точні методи.

§ 146. Крихке руйнування. Теорія Гріффітса

Практика експлуатації інженерних конструкцій свідчить, що окремі їхні елементи з часом можуть руйнуватися внаслідок концентрації напружень, дефектів технології обробки та складання, впливу середовища, що призводить до виникнення та поступового розвитку тріщини. Іноді процес розвитку тріщини від початку виникнення її до остаточного руйнування може становити до 90 % часу «життя» деталі. Тобто деталь може працювати майже протягом всього часу експлуатації і за наявності тріщини. Отже, практично важлива не так наявність тріщини, як швидкість її поширення в тих чи інших умовах. У зв'язку з цим одними з основних задач механіки руйнування є вивчення міцності тіл з тріщинами з урахуванням геометрії тріщин та впливу на розвиток тріщини різних факторів (характер навантажування, напружений стан, середовище, температура тощо), а також розробка критеріїв несівної здатності елементів конструкцій з тріщинами.

Розрізняють три найпростіші типи розвитку тріщин з погляду зміщення їхніх берегів один відносно одного відповідно до дії різних зовнішніх навантажень (рис. 602). При деформації розтягання (схема *I*) виникає тріщина відриву, коли її поверхні зміщуються в напрямах, перпендикулярних до поверхні тріщини; при деформації поперечного зсуву (схема *II*) поверхні берегів тріщини зміщуються поперек її передньої кромки; при навантаженні за схемою *III* утворюються тріщини поздовжнього зсуву,

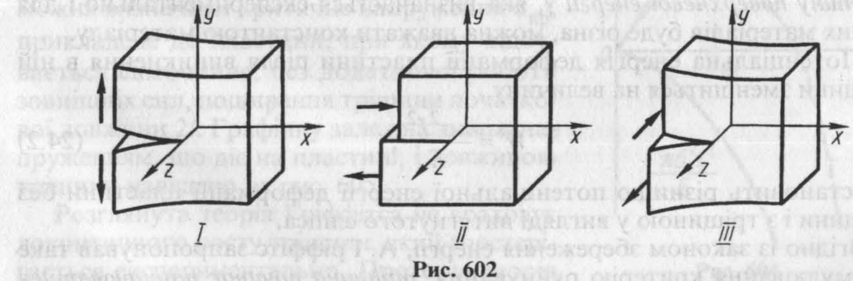


Рис. 602

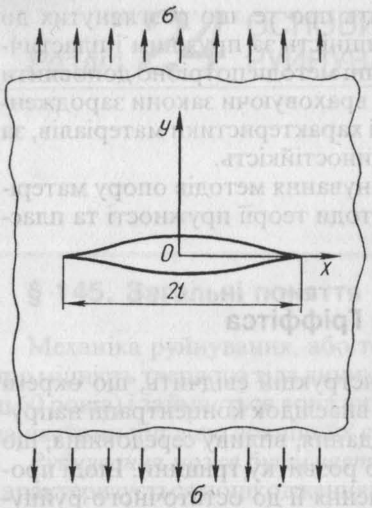


Рис. 603

при якому точки поверхні тріщини зміщуються вздовж її передньої кромки. Очевидно, якщо на тіло з тріщиною діє довільне навантаження в межах застосування закону Гука, на підставі принципу суперпозиції будь-яке зміщення берегів тріщини, що розвивається, можна подати у вигляді суми зведених трьох типів зміщень.

Отже, крихке руйнування пов'язане з виникненням у матеріалі тріщин, спричинених дефектами в структурі матеріалу, станом поверхні деталі внаслідок обробки чи корозії, дією повторно-змінних навантажень. Тріщини, що виникли, спочатку розвиваються в часі повільно, а потім — швидко. Розвиток тріщин з часом може відбуватись і при постійному навантаженні.

Перші основоположні дослідження щодо розвитку тріщин при крихкому руйнуванні пов'язують з ім'ям англійського вченого А. Гріффітса, який розглянув умови розвитку одиничної тріщини в пластині при її розтяганні (рис. 603). При цьому треба було визначити, при якому значенні розтягального зовнішнього напруження $\sigma = \sigma_{кр}$, прикладеного на нескінченності, тріщина з початковою довжиною $2l$ стане нестійкою, тобто почне швидко поширюватися при постійному зовнішньому напруженні, яке називають критичним. (Довжину тріщини, при якій починається нестійкий розвиток її, називають критичною $l_{кр}$).

Для здобуття відповідних розрахункових формул у теорії тріщин виходять з того, що для розширення тріщини треба затратити певну роботу на подолання сил взаємодії сусідніх шарів матеріалу. Позначимо через γ густину поверхневої енергії, тобто роботу, потрібну для утворення одиниці нової поверхні. Тоді поверхнева енергія розглядуваної пластини, обумовлена утворенням тріщини,

$$\Gamma = 4\gamma l. \tag{24.1}$$

Густину поверхневої енергії γ, яка визначається експериментально і для різних матеріалів буде різна, можна вважати константою матеріалу.

Потенціальна енергія деформації пластини після виникнення в ній тріщини зменшиться на величину

$$W = \frac{\pi\sigma^2 l^2}{E}, \tag{24.2}$$

що становить різницю потенціальної енергії деформації пластини без тріщини і з тріщиною у вигляді витягнутого еліпса.

Згідно із законом збереження енергії, А. Гріффітс запропонував таке формулювання критерію руйнування: *тріщина починає поширюватися тоді, коли при варіації її довжини* $\delta l > 0$ *приріст поверхневої енергії компенсується відповідною кількістю потенціальної енергії деформації (припускають, що інших видів енергії немає)*:

$$\delta(\Gamma + W) = 0, \tag{24.3}$$

де з урахуванням формул (24.1) та (24.2)

$$\delta\Gamma = \frac{\partial}{\partial l}(4\gamma l)\ \delta l = 4\gamma\delta l;$$

$$\delta W = \frac{\partial}{\partial l}\left(-\frac{\pi\sigma^2 l^2}{E}\right)\delta l = -\frac{2\pi l\sigma^2}{E}\delta l. \tag{24.4}$$

Приріст поверхневої енергії $\delta\Gamma$ — величина додатна: вона характеризує збільшення внутрішньої енергії тіла, тоді як приріст потенціальної енергії деформації δW — величина від'ємна, оскільки ця частина енергії виділяється тілом (завдяки релаксації напружень у зв'язку з виникненням нових, вільних від навантажень поверхонь тіла). Підставивши формулу (24.4) у вираз (24.3), дістанемо

$$2\gamma - \frac{\pi\sigma^2 l}{E} = 0. \tag{24.5}$$

Звідси для плоского напруженого стану знайдемо

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi l}}. \tag{24.6}$$

При плоскій деформації (якщо $\varepsilon_z = 0$) в останній формулі замість модуля пружності E слід підставити $E/(1 - \mu^2)$, тобто формула (24.6) матиме вигляд

$$\sigma = \frac{2E\gamma}{\sqrt{\pi l\left(1-\mu^2\right)}}. \tag{24.7}$$

Зміну співвідношення енергій, що входять у доданки рівняння (24.3), при збільшенні довжини тріщини можна подати у вигляді графіків $\Gamma = f_1(l)$ та $W = f_2(l)$ (рис. 604). Максимальному значенню повної енергії відповідає критична довжина тріщини $l_{кр}$.

Користуючись формулами (24.6) та (24.7), можна визначити критичне напруження $\sigma_{кр}$, прикладене до пластини, при якому відбувається самочинне, без додаткової роботи зовнішніх сил, поширення тріщини початкової довжини $2l$. Графічну залежність між напруженням, що діє на пластині, і довжиною тріщини наведено на рис. 605.

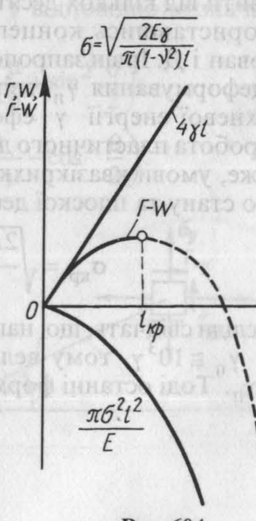


Рис. 604

Розглянута теорія Гріффітса не враховує докритичного росту тріщини, який спостерігається експериментально. Проте ця теорія

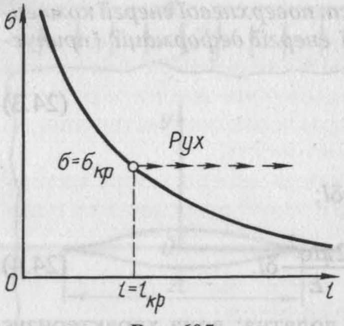


Рис. 605

заслуговує особливої уваги, оскільки вона дає змогу виразити крихку міцність через фізичні та механічні властивості матеріалу і свідчить, що максимальне руйнувальне навантаження відбувається не при виникненні тріщини, а після досягнення нею певного критичного розміру. Останнє свідчить про те, що існують безпечні тріщини, які не розвиваються, але можуть перетворитися на небезпечні внаслідок підвищення крихкості матеріалу, зниження температури, дії динамічного навантаження, старіння матеріалу та ін.

Отже, з теорії Гриффітса випливає, що наявність у тій чи іншій деталі тріщини ще не є свідченням негайного виходу її з ладу. В принципі можливо за критичним значенням довжини тріщини і характером зовнішнього навантаження, вводячи відповідний запас на наявність тріщини, визначати допуск на розмір тріщини, з якою деталь може працювати заданий час. Оскільки не кожна тріщина небезпечна, механіка руйнування може розвиватись як наука, що створює надійні методи захисту конструкцій від крихкого руйнування.

Теорію Гриффітса можна застосовувати також для матеріалів, що мають деяку пластичність. При цьому слід враховувати енергію, яка витрачається на пластичне деформування в кінці тріщини. Як свідчать досліди, пластична деформація розвивається поблизу вершини тріщини порівняно у тонкому шарі, що оточує її. Товщина шару пластично деформованого металу залежить від умов навантажування, властивостей матеріалу і може становити від кількох десятків мікрометрів до десятих часток міліметра.

Скориставшись концепцією енергетичного балансу А. Гриффітса, Е. Орован і Д. Ірвін запропонували додатково врахувати енергію пластичного деформування $\gamma_п$, ввівши у формулу (24.6) замість дійсної питомої поверхневої енергії γ ефективну поверхневу енергію $\gamma_{еф} = \gamma + \gamma_п$, де $\gamma_п$ — робота пластичного деформування при утворенні одиниці поверхні.

Отже, умови квазікрихкого руйнування металів для плоского напруженого стану та плоскої деформації відповідно можна записати так:

$$\sigma_{кр} = \sqrt{\frac{2E\ \gamma_{еф}}{\pi l}}; \quad \sigma_{кр} = \sqrt{\frac{2E\ \gamma_{еф}}{\pi l\left(1-\mu^2\right)}}.$$

Досліди свідчать, що, наприклад, для сталі $\gamma = 0{,}1$ Дж/м^2, $\gamma_п = 200$ Дж/м^2, тобто $\gamma_п \cong 10^3\,\gamma$, тому величиною γ можна знехтувати і вважати, що $\gamma_{еф} = \gamma_п$. Тоді останні формули наберуть вигляду

$$\sigma_{кр} = \sqrt{\frac{2E\ \gamma_п}{\pi l}}; \tag{24.8}$$

$$\sigma_{кр} = \sqrt{\frac{2E\ \gamma_п}{\pi l\left(1-\mu^2\right)}}. \tag{24.9}$$

§ 147. Силові критерії руйнування

Руйнування матеріалу внаслідок розвитку тріщини зосереджене в малому околі вершини тріщини, де дуже висока концентрація напружень, обумовлена малим радіусом заокруглення. Напружений стан у цій зоні при різних схемах навантажування, користуючись методами теорії пружності, можна в загальному вигляді виразити формулою

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}}\, f_{ij}(\theta), \tag{24.10}$$

де $i, j = x, y$.

Коефіцієнт K, який залежить від виду навантажування, значення навантаження, а також форми тріщини, називається *коефіцієнтом інтенсивності напружень* (одиниця K — сила/довжина$^{3/2}$). Залежно від виду навантаження (див. рис. 602) коефіцієнти інтенсивності напружень позначають відповідно індексами I, II чи III, тобто K_I; K_{II}; K_{III}; r та θ — полярні координати з полюсом у вершині тріщини (рис. 606); f_{ij} — деяка функція кута θ.

Зокрема, при плоскому напруженому стані для навантажування за схемою I формули (24.10) мають вигляд

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right);\\
\sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right);\\
\tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}.
\end{aligned} \tag{24.11}$$

Переміщення u та υ у напрямі осей x та y відповідно визначаться за формулами

$$\begin{aligned}
u &= \frac{2K_I\,(1+\mu)}{E}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}\left(\frac{1-\mu}{1+\mu}+\sin^2\frac{\theta}{2}\right);\\
\upsilon &= \frac{2K_I\,(1+\mu)}{E}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}\left(\frac{2}{1+\mu}-\cos^2\frac{\theta}{2}\right).
\end{aligned} \tag{24.12}$$

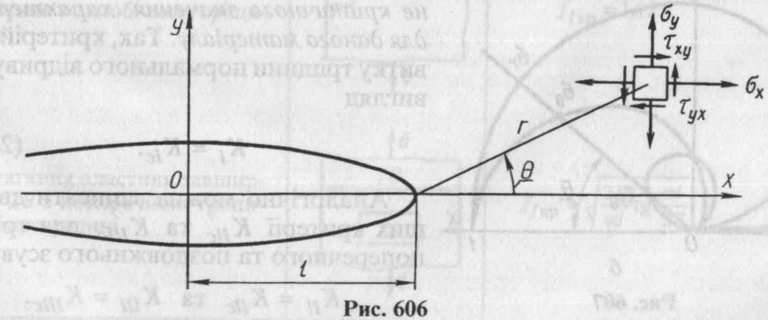


Рис. 606

У випадку плоскої деформації, якщо $\varepsilon_z = 0$, у формулах (24.12) слід замінити $(1-\mu)/(1+\mu)$ та $1/(1+\mu)$ на $1-2\mu$ та $1-\mu$ відповідно.

Епюри напружень біля вершини тріщини відриву ($0 \le \theta \le \pi$) у декартових і полярних координатах зображено на рис. 607, *а*, *б*. За означенням коефіцієнт інтенсивності напруження біля вершини тріщини при плоскій деформації

$$K_I = \lim_{\substack{\theta \to 0 \\ r \to 0}} \sqrt{2\pi r}\, \sigma_y(r, \theta), \tag{24.13}$$

що випливає з аналізу напруженого стану біля вершини тріщини. Так, при розтяганні пластини з тріщиною завдовжки $2l$ за схемою рис. 606 цей аналіз дає змогу записати вираз для нормального напруження в перерізі пластини в околі тріщини:

$$\sigma_y = \sigma \frac{x}{\sqrt{x^2 - l^2}} = \sigma \frac{l + r}{\sqrt{2lr + r^2}}, \tag{24.14}$$

де x —координата, що відлічується від середини тріщини; $r = x - l$.

Біля вершини тріщини, при $x \to l$, $r \to 0$, напруження необмежено зростає за модулем. Підставляючи ці значення у вираз (24.13) і обчислюючи границю, знаходимо

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi l}\,.$$

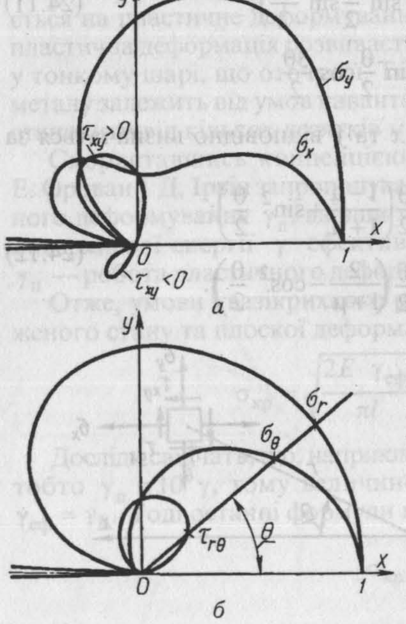


Рис. 607

Аналогічно можна здобути формули для коефіцієнтів інтенсивності напружень K_{II} та K_{III} відповідно до схем навантажування *II* та *III* на рис. 602. Отже,

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi l}; \quad K_{II} = \tau\sqrt{\pi l}; \quad K_{III} = \tau\sqrt{\pi l}. \tag{24.15}$$

У лінійній механіці руйнування виходять з припущення Д. Ірвіна, що *тріщина буде поширюватися тоді, коли коефіцієнт інтенсивності напружень досягне критичного значення, характерного для даного матеріалу*. Так, критерій розвитку тріщини нормального відриву має вигляд

$$K_I = K_{Ic}. \tag{24.16}$$

Аналогічно можна записати два інших критерії K_{IIc} та K_{IIIc} для тріщин поперечного та поздовжнього зсуву:

$$K_{II} = K_{IIc} \text{ та } K_{III} = K_{IIIc}.$$

Критичні значення коефіцієнтів інтенсивності напружень K_{Ic}, K_{IIc} та K_{IIIc} визначають експериментально, користуючись певною методикою, регламентованою відповідними стандартами. Критерій руйнування Ірвіна (24.16) у літературі називають силовим, оскільки він ґрунтується на аналізі напруженого стану біля вершини тріщини.

Для пластин обмежених розмірів при різних видах навантажування і розташування тріщин критичні значення коефіцієнтів інтенсивності напружень визначаються за формулами

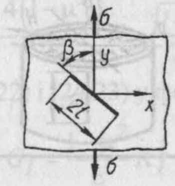
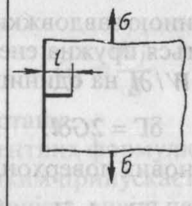
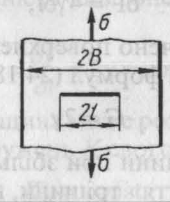
$$K_{Ic} = f_{I\,\text{кр}} \sigma_{\text{кр}} \sqrt{\pi l_{\text{кр}}}; \quad K_{II\,c} = f_{II\,\text{кр}} \tau_{\text{кр}} \sqrt{\pi l_{\text{кр}}};$$

$$K_{III\,c} = f_{III\,\text{кр}} \tau_{\text{кр}} \sqrt{\pi l_{\text{кр}}}, \tag{24.17}$$

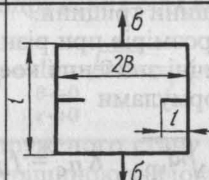
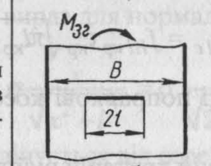
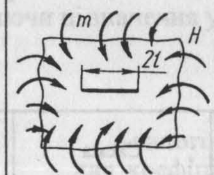
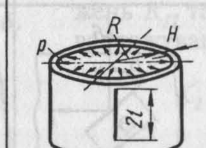
де $f_{I\,\text{кр}}$, $f_{II\,\text{кр}}$, $f_{III\,\text{кр}}$ — деякі поправкові коефіцієнти. Вирази для $f_{I\,\text{кр}}$ наведено в табл. 27.

Можна довести, що силовий критерій руйнування еквівалентний критерію Гріффітса.

Таблиця 27

Вид навантажування і розташування тріщини	Схема	Поправкова функція
Розтягання необмеженої пластини з похилою тріщиною в середині		$f_{I\,\text{кр}} = \sin^2\beta$
Розтягання півнескінченної пластини з однобічною тріщиною		$f_{I\,\text{кр}} = 1{,}12$
Розтягання пластини завширшки $2B$ з поперечною тріщиною посередині		$f_{I\,\text{кр}} = \sqrt{\frac{2B}{\pi l}\,\text{tg}\,\frac{\pi l}{2B}}$

Продовження табл. 27

Вид навантажування і розташування тріщини	Схема	Поправкова функція
Розтягання пластини завширшки $2B$ з двома боковими тріщинами		$f_{I\,\text{кр}} = \dfrac{0,2B}{\pi l}\sin\dfrac{\pi l}{B}\sqrt{\dfrac{2B}{\pi l}\operatorname{tg}\dfrac{\pi l}{2B}}$
Згинання в площині пластини завширшки B і завтовшки H з поперечною тріщиною посередині		$f_{I\,\text{кр}} = \dfrac{8}{3\sqrt{6}}\dfrac{Hl}{B^2}\left(1-\mu^2\right)$
Чисте згинання тієї самої пластини розподіленим моментом m		$f_{I\,\text{кр}} = 1;\ \left(\sigma = \dfrac{6m}{H^2}\right)$
Дія внутрішнього тиску p на циліндричну трубу діаметром $2R$ завдовжки H при поздовжній наскрізній тріщині		$f_{I\,\text{кр}} = \sqrt{1+1,61\dfrac{l^2}{RH}}$

У тілі з симетричною тріщиною завдовжки $2l$ при її розвитку в кожний бік на величину δl вивільняється пружна енергія — $2(\partial W/\partial l)\delta l$. Позначивши вивільнену енергію $-\partial W/\partial l$ на одиницю площі через G, дістанемо

$$\delta\Gamma = 2G\delta l. \tag{24.18}$$

З іншого боку, на утворення нових поверхонь потрібна енергія

$$\delta\Gamma = 4\gamma\delta l, \tag{24.19}$$

де, як і раніше, через γ позначено поверхневу енергію, віднесену до одиниці площі. Отже, на підставі формул (24.18) та (24.19) матимемо

$$G = 2\gamma. \tag{24.20}$$

Потік енергії у вершину тріщини при збільшенні її можна визначити як роботу, потрібну для «закриття» тріщини, виходячи з таких міркувань.

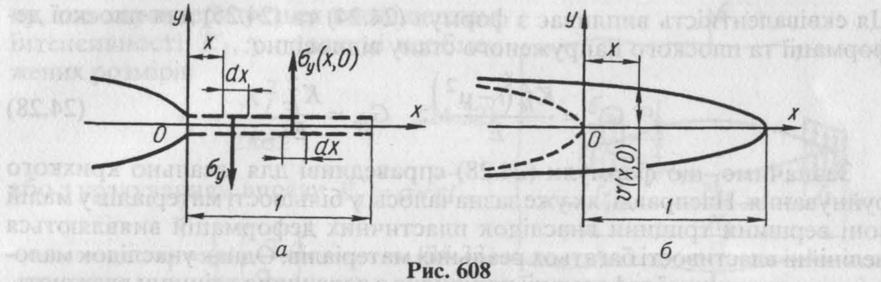


Рис. 608

Уявимо собі, що вздовж тріщини (рис. 608) є розріз, на поверхні якого діють напруження, що виникають у зоні концентрації напружень від дії зовнішнього навантаження. Тоді шуканий потік енергії при просуванні тріщини на одиницю довжини уявного розрізу, згідно із схемою рис. 608, визначиться як

$$G_I = -\int_0^1 \sigma_y 2v\,dx, \tag{24.21}$$

де нормальне напруження σ_y та переміщення v при плоскій деформації беруться з формул (24.11) та (24.12) відповідно при $\theta = 0$ та $\theta = \pi$. При цьому

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}}; \tag{24.22}$$

$$v = \frac{4\left(1-\mu^2\right)}{E}K_I\sqrt{\frac{l-x}{2\pi}}. \tag{24.23}$$

Підставляючи вирази (24.22) і (24.23) у формулу (24.21) та інтегруючи, знайдемо

$$G_I = \frac{1-\mu^2}{E}K_I^2 \tag{24.24}$$

для плоскої деформації

$$G_I = \frac{K_I^2}{E} \tag{24.25}$$

для плоского напруженого стану.

Отже, маємо два еквівалентних формулювання критерію руйнування:

1) енергетичне, згідно з яким припускається, що тріщина може поширюватися тоді, коли інтенсивність вивільненої енергії G досягає критичного значення

$$G_{Ic} = \frac{\partial\Gamma}{\partial l} = 2\gamma = \text{const}; \tag{24.26}$$

2) силове, згідно з яким тріщина може розвиватися при досягненні коефіцієнтом інтенсивності напружень K свого критичного значення

$$K_c = \text{const}. \tag{24.27}$$

Ця еквівалентність випливає з формул (24.24) та (24.25) для плоскої деформації та плоского напруженого стану відповідно:

$$G_{Ic} = \frac{K_{Ic}^2\left(1-\mu^2\right)}{E}; \quad G_{Ic} = \frac{K_{Ic}^2}{E}. \tag{24.28}$$

Зазначимо, що формули (24.28) справедливі для ідеально крихкого руйнування. Насправді, як уже зазначалось, у більшості матеріалів у малій зоні вершини тріщини внаслідок пластичних деформацій виявляються нелінійні властивості багатьох реальних матеріалів. Однак унаслідок малості зони пластичної деформації порівняно з довжиною тріщини вважають, що розміри цієї зони і ступінь пластичної деформації, що відбувається в ній, контролюються коефіцієнтом інтенсивності напружень K та границею текучості $\sigma_т$. Тому для квазікрихкого руйнування залишають у силі обидва критерії руйнування K_c і G_c, вважаючи, що вони залежать від характеру опору матеріалу пластичній деформації.

Отже, співвідношення (24.26) та (24.27) у лінійній механіці руйнування є основними. За допомогою їх можна розраховувати граничний стан елементів конструкцій з тріщиною, а також оцінювати механічні властивості матеріалу і його здатність гальмувати розвиток тріщин.

У загальному випадку навантажувань, якщо можливі зміщення берегів тріщин відносно один одного одночасно за трьома розглянутими схемами (див. рис. 602), знаходимо:
для плоскої деформації

$$G = \frac{1-\mu^2}{E}K_I^2 + \frac{1-\mu^2}{E}K_{II}^2 + \frac{1-\mu^2}{E}K_{III}^2 = G_I + G_{II} + G_{III}; \tag{24.29}$$

для плоского напруженого стану

$$G = \frac{1}{E}\left(K_I^2 + K_{II}^2 + K_{III}^2\right) = G_I + G_{II} + G_{III}. \tag{24.30}$$

§ 148. Оцінювання розмірів пластичної зони вздовж тріщини

Енергетичний критерій для нестабільного розвитку тріщини, виражений умовою (24.26), з урахуванням (24.15) можна записати у вигляді

$$G_{Ic} = \frac{K_{Ic}^2}{E} = 2\gamma_c = \frac{\sigma_{кр}^2 \pi l}{E}, \tag{24.31}$$

де γ_c — критична енергія деформації, потрібна для утворення вільної поверхні тріщини за наявності пластичних деформацій.

Наведений раніше вираз (24.13) для коефіцієнта інтенсивності напружень з урахуванням (24.14) дає змогу наближено визначити довжину пластичної зони $r_т$ уздовж тріщини. Так, при $\sigma_y = \sigma_т$ для напруженого стану, що характеризується коефіцієнтом інтенсивності K_I, у пластині необмежених розмірів

$$r_т = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_т^2}, \tag{24.32}$$

або з урахуванням виразу $K_I = \sigma\sqrt{\pi l}$

$$r_т = \frac{1}{2}l\left(\frac{\sigma}{\sigma_т}\right)^2. \tag{24.33}$$

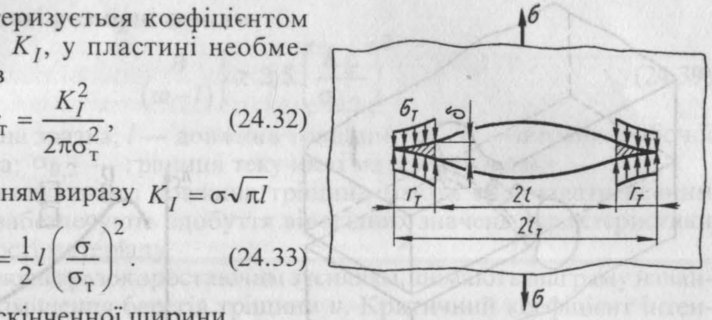


Рис. 609

Для пластини скінченної ширини

$$r_т = \frac{1}{2}l\left(\frac{\sigma}{\sigma_т}\right)^2 f_{I\,кр}. \tag{24.34}$$

Тоді половина довжини тріщини з урахуванням пластичної зони

$$l_т = l + r_т = l\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\sigma_т}\right)^2\right]. \tag{24.35}$$

Користуючись величиною $l_т$, за наведеними вище формулами можна визначити K_{Ic}, а потім і переміщення v біля вершини тріщини. Так, для плоского напруженого стану при $r = r_т$, $\theta = \pi$

$$v = \frac{K_I(1+\mu)}{E}\sqrt{\frac{r_т}{2\pi}}\left(\frac{3-\mu}{1+\mu} - 1\right). \tag{24.36}$$

Подвоєна величина v дорівнює розкриттю тріщини δ (рис. 609):

$$\delta = 2v_{r=r_т} = 2(1-\mu)\frac{\sigma^2}{E\sigma_т}l\sqrt{1+\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\sigma_т}\right)^2}. \tag{24.37}$$

У випадку крихкого руйнування при $\sigma < \sigma_т$ розкриття тріщини наближено можна знайти за формулою

$$\delta = \frac{\sigma^2}{E\sigma_т}\pi l. \tag{24.38}$$

Результати обчислення розкриття тріщини δ за формулою (24.38) при $\sigma \le$ $\le 0{,}8\sigma_т$ підтверджуються експериментально.

При плоскому деформованому стані внаслідок того, що r і δ менші, довжина пластичної зони зменшується в кілька разів порівняно з такою при плоскому напруженому стані.

Слід мати на увазі, що розміри пластичної зони біля вершини тріщини для одного і того самого матеріалу залежать від ступеня деформації вздовж переднього краю тріщини. Тим часом ступінь стиснення деформації залежить від товщини зразка, зі збільшенням якої напружений стан змінюється від плоского, при якому $\sigma_z = 0$, до об'ємного при плоскій деформації,

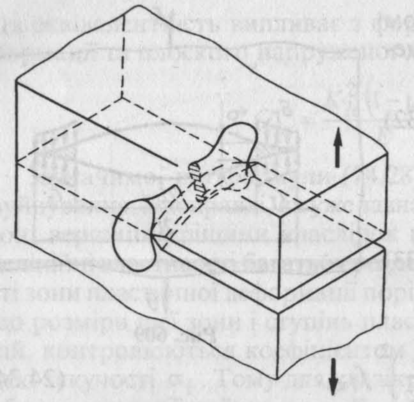


Рис. 610

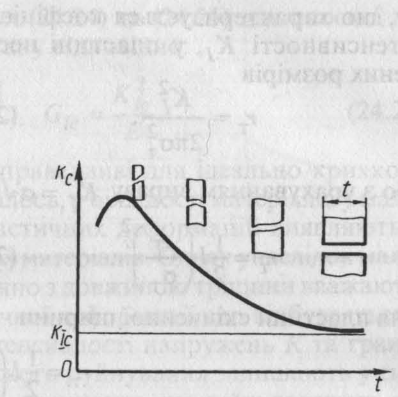


Рис. 611

коли $\sigma_z = \mu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)$. При цьому на боковій поверхні плоского зразка за умови відсутності тут зовнішнього тиску завжди має місце плоский напружений стан, а тому розміри пластичної зони біля вільної поверхні зразка завжди більші, ніж у середній частині. Пластична зона спереду вершини тріщини в досить товстому плоскому зразку приблизно має форму котушки (рис. 610).

Оскільки в середній частині зразка має місце об'ємний напружений стан, а отже, більш жорсткий, ніж у зоні тріщин, які примикають до бокових поверхонь, то опір руйнуванню в цій зоні буде менший, а тому і фронт просування тріщин видаватиметься вперед, маючи язикоподібний вигляд. Для зразків різної товщини співвідношення пластичних зон спереду тріщини різне. У зв'язку з цим змінюється значення енергії, затраченої на руйнування, а отже, існує залежність від товщини зразка характеристик тріщиностійкості — коефіцієнта інтенсивності напружень K_c (рис. 611) та інтенсивності звільнюваної енергії G_c. Як видно, зі збільшенням товщини зразка значення K_c (а отже, G_c) зменшується і прямує до свого граничного, асимптотичного значення K_c при об'ємному напруженому стані в умовах плоскої деформації.

§ 149. Методика експериментального визначення тріщиностійкості конструкційних матеріалів

Як міру тріщиностійкості матеріалу стосовно до найбільш небезпечних і поширених тріщин нормального відриву найчастіше використовують критичне значення коефіцієнта інтенсивності напружень K_{Ic}, що відповідає моменту старту тріщини при виконанні в її вершині умов плоскої деформації.

Для експериментального визначення характеристики K_{Ic} конкретного матеріалу використовують спеціальні компактні зразки СТ (рис. 612) із заздалегідь вирощеною циклічними навантаженнями тріщиною, що задовольняють такі розмірні вимоги:

$$\left.\begin{matrix} B \\ (w-l) \end{matrix}\right\} \geq 2{,}5\left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_{0,2}}\right)^2, \tag{24.39}$$

де B — товщина зразка; l — довжина тріщини; $(w-l)$ — ширина робочої частини зразка; $\sigma_{0,2}$ — границя текучості матеріалу зразка.

Режим вирощування і довжина тріщини мають відповідати певним вимогам, що забезпечують здобуття вірогідних значень характеристики тріщиностійкості матеріалу.

Навантажуючи зразок зростаючим зусиллям, знімають діаграму навантаження P — зміщення берегів тріщини v. Критичний коефіцієнт інтенсивності напружень K_{Ic} випробуваного матеріалу розраховують за навантаженням P, що відповідає на діаграмі P — v старту тріщини, з використанням деякої, залежної від конфігурації зразка функції його розмірів та довжини тріщини:

$$K_{Ic} = \frac{P}{B\sqrt{w}} Y\left(\frac{l}{w}\right), \tag{24.40}$$

де

$$Y\left(\frac{l}{w}\right) = 29{,}6\left(\frac{l}{w}\right)^{0,5} - 185{,}5\left(\frac{l}{w}\right)^{1,5} + 665{,}7\left(\frac{l}{w}\right)^{2,5} - $$
$$-1017\left(\frac{l}{w}\right)^{3,5} + 638{,}9\left(\frac{l}{w}\right)^{4,5}. \tag{24.41}$$

Якщо обчислене за формулою (24.40) значення K_{Ic} задовольняє розмірні вимоги (24.39), то воно вважається шуканим. А якщо ні, то треба повторити випробування на зразках збільшених розмірів.

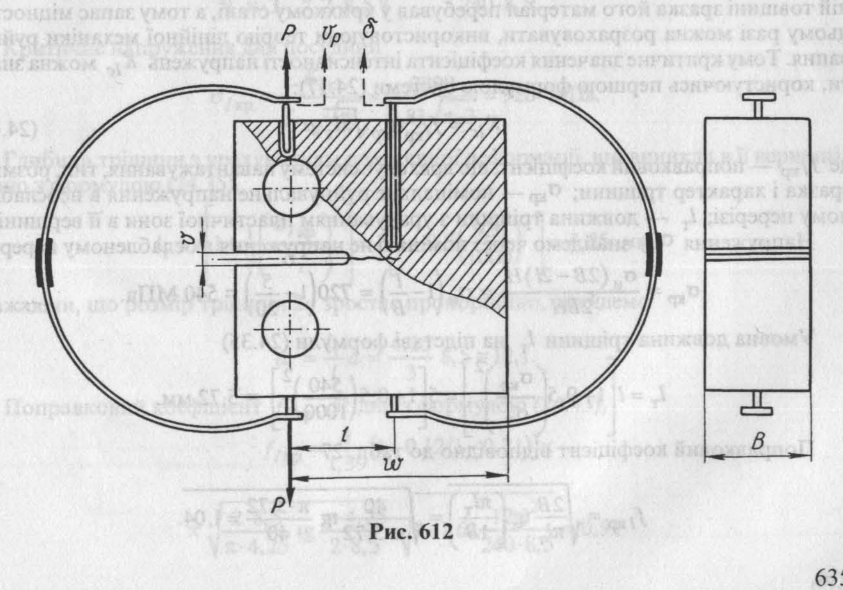
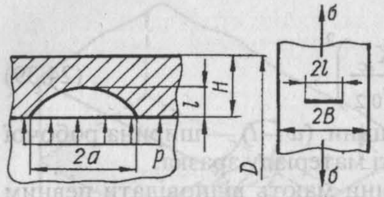


Рис. 612



а *б*

Рис. 613

Зауважимо, що оскільки значення навантаження на діаграмі $P - v$ не залежить від місця вимірювання зміщень, то останні доцільно вимірювати поблизу точок дії навантаження або поблизу середньої точки лінії фронту тріщини. За діаграмами $P - v_р$, що реєструються синхронно, можна додатково до силової характеристики K_{Ic} визначати і деформаційну характеристику тріщиностійкості δ_{Ic}.

Такий підхід дає змогу комплексно, з єдиних методичних позицій, оцінювати тріщиностійкість матеріалу як у крихкому, так і у пластичному станах. Зазначимо однак, що наведена методика визначення характеристики K_{Ic} точно обґрунтована тільки при випробуванні крихких матеріалів, що руйнуються в лінійно-пружній зоні.

Приклад 99. *Визначимо запас міцності циліндричної посудини діаметром $D = 480$ мм і товщиною стінки $H = 8,5$ мм, що працює в умовах кімнатної температури під внутрішнім тиском $p = 28$ МПа і в якій при обстеженні було виявлено з внутрішнього боку півеліптичну тріщину завглибшки $l = 3$ мм та завдовжки вздовж твірної $2a = 8,5$ мм (рис. 613, а). Матеріал посудини — сталь (границя текучості $\sigma_т = 1000$ МПа; границя міцності $\sigma_в = 1200$ МПа).*

Для визначення характеристики тріщиностійкості сталі було проведено випробовування відповідних зразків в умовах кімнатної температури при статичному навантажуванні за схемою рис. 613, *б*. Зразки завширшки $2B$ та товщиною, що дорівнювала товщині стінки посудини (8,5 мм), мали центрально розташовані тріщини завдовжки $2l = 10$ мм. Номінальне напруження, при якому зразки руйнувалися по мінімальному перерізу, дорівнювало $\sigma_н = 720$ МПа. Наслідки випробувань свідчать, що про вибраній товщині зразка його матеріал перебував у крихкому стані, а тому запас міцності в цьому разі можна розраховувати, використовуючи теорію лінійної механіки руйнування. Тому критичне значення коефіцієнта інтенсивності напружень K_{Ic} можна знайти, користуючись першою формулою системи (24.17):

$$K_{Ic} = f_{I\,кр}\sigma_{кр}\sqrt{\pi l_т}, \qquad (24.42)$$

де $f_{I\,кр}$ — поправковий коефіцієнт, що враховує систему навантажування, тип, розміри зразка і характер тріщини; $\sigma_{кр}$ — номінальне руйнувальне напруження в неослабленому перерізі; $l_т$ — довжина тріщини з урахуванням пластичної зони в її вершині.

Напруження $\sigma_{кр}$ знайдемо через номінальне напруження в ослабленому перерізі:

$$\sigma_{кр} = \frac{\sigma_н(2B-2l)H}{2BH} = \sigma_н\left(1-\frac{l}{B}\right) = 720\left(1-\frac{5}{20}\right) = 540 \text{ МПа}.$$

Умовна довжина тріщини $l_т$ на підставі формули (24.35)

$$l_т = l\left[1+0,5\left(\frac{\sigma_{кр}}{\sigma_т}\right)^2\right] = 5\left[1+0,5\left(\frac{540}{1000}\right)^2\right] = 5,72 \text{ мм}.$$

Поправковий коефіцієнт відповідно до табл. 27

$$f_{I\,кр} = \sqrt{\frac{2B}{\pi l_т}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi l_т}{2B}\right)} = \sqrt{\frac{40}{\pi\cdot 5,72}\operatorname{tg}\frac{\pi\cdot 5,72}{40}} = 1,04.$$

Тоді, згідно з формулою (24.42),

$$K_{Ic} = f_{I\,кр}\sigma_{кр}\sqrt{\pi l_т} = 1,04\cdot 540\sqrt{\pi\cdot 5,72} = 2290 \text{ МПа } \sqrt{\text{м}}.$$

Цей коефіцієнт використовують для обчислення номінального руйнувального напруження в посудині із зазначеною вище тріщиною. Номінальне головне напруження в стінці посудини (вважаємо її тонкостінною), яке намагається зруйнувати посудину по твірній, згідно з формулою Лапласа,

$$\sigma_{Iн} = \frac{pD}{2H} = \frac{28\cdot 480}{2\cdot 8,5} \cong 791 \text{ МПа}.$$

Коефіцієнт інтенсивності напруження K_{Ic} для розглядуваної тріщини, згідно з формулою (24.17), без урахування пластичної деформації

$$K_{Ic} = f_{I\,кр}\sigma_{I\,кр}\sqrt{\pi l_т},$$

де $\sigma_{I\,кр}$ — критичне руйнувальне напруження для посудини; l — глибина тріщини.

Поправковий коефіцієнт для ненаскрізної півеліптичної поверхневої тріщини завглибшки l (мала піввісь) і завдовжки на поверхні $2a$ (a — велика піввісь) у пластині завтовшки H

$$f_{I\,кр} = \frac{1}{\Phi_0}\left[1+0,12\left(1-\frac{l}{a}\right)\right]\sqrt{\frac{2H}{\pi l}\operatorname{tg}\frac{\pi l}{2H}}\sqrt{1+1,61\frac{a^2}{RH}}, \qquad (24.43)$$

де Φ_0 — величина, що залежить від співвідношення l/a (при збільшенні l/a від 0,1 до 1 Φ_0 рівномірно збільшується від 1 до $\pi/2$).

Отже, при $l/a = 3/4,25 = 0,71$ співвідношення становить 1,39. Тоді, підставляючи в формулу (24.43) відомі величини, знайдемо

$$f_{I\,кр} = \frac{1}{1,39}[1+0,12(1-0,71)]\times$$

$$\times\sqrt{\frac{2\cdot 8,5}{\pi\cdot 3}\operatorname{tg}\frac{\pi\cdot 3}{2\cdot 8,5}}\sqrt{1+1,61\frac{8,5^2}{240\cdot 8,5}} = 0,81.$$

Критичне напруження для посудини

$$\sigma_{I\,кр} = \frac{K_{Ic}}{f_{I\,кр}\sqrt{\pi l}} = \frac{2290}{0,81\sqrt{\pi\cdot 3}} = 920 \text{ МПа}.$$

Глибина тріщини з урахуванням пластичної деформації, що виникла в її вершині, згідно з формулою (24.35),

$$l_т = l\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_{I\,кр}}{\sigma_т}\right)^2\right] = 3\left[1+0,5\left(\frac{920}{1000}\right)^2\right] = 4,25 \text{ мм}.$$

Вважаючи, що розмір тріщини $2a$ зростає пропорційно, знайдемо

$$a_т = \frac{l_т}{l}a = \frac{4,25}{3}\,8,5 \cong 12,1.$$

Поправковий коефіцієнт $f_{I\,кр}$, згідно з формулою (24.43),

$$f_{I\,кр} = \frac{1}{1,39}[1+0,12(1-0,71)]\times$$

$$\times\sqrt{\frac{2\cdot 8,5}{\pi\cdot 4,25}\operatorname{tg}\frac{\pi\cdot 4,25}{2\cdot 8,5}}\sqrt{1+1,61\frac{12,1^2}{240\cdot 8,5}} = 0,91.$$

Тоді значення уточненого руйнувального напруження з урахуванням пластичної деформації $l_т = 4,25$ та $f_{I\,кр} = 0,91$

$$\sigma_{I\,кр} = \frac{K_{Ic}}{f_{I\,кр}\sqrt{\pi l}} = \frac{2290}{0,91\sqrt{\pi\cdot 4,25}} = 695 \text{ МПа}.$$

Для визначення руйнувального напруження $\sigma_{I\,кр}$ у другому наближенні слід у формулі (24.43) другого наближення урахувати скориговані розміри тріщини:

$$l_т = 3\left[1 + 0,5(695/1000)^2\right] = 3,74 \text{ мм};$$

$$a_т = (l_т / l)a = (3,74/3)\ 8,5 = 10,6 \text{ мм}.$$

Тоді поправковий коефіцієнт

$$f_{I\,кр} = \frac{1}{1,39}[1 + 0,12(1-0,71)]\times$$

$$\times\sqrt{\frac{2\cdot 8,5}{\pi\cdot 3,74}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi\cdot 3,74}{2\cdot 8,5}}\sqrt{1 + 1,61\frac{10,6^2}{240\cdot 8,5}} = 0,89.$$

Руйнувальне напруження в другому наближенні

$$\sigma_{I\,кр} = \frac{2290}{0,89\sqrt{\pi\cdot 3,74}} = 750 \text{ МПа}.$$

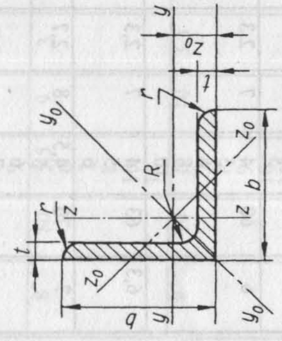
Дальше наближення не дає істотного уточнення.

Отже, здобуте критичне напруження $\sigma_{I\,кр}$ порівняно з номінальним напруженням у стінці $\sigma_{I\,н}$ дає змогу визначити запас міцності стінки посудини з тріщиною:

$$n = \frac{\sigma_{I\,кр}}{\sigma_{I\,н}} = \frac{750}{791} = 0,948.$$

Оскільки $n < 1$, то експлуатація посудини із зазначеним дефектом недопустима.

ДОДАТКИ



Додаток 1

Сортамент прокатної сталі

Кутники рівнобічні

Позначення:
b — ширина полиці; t — товщина полиці; R — радіус внутрішнього заокруглення; r — радіус заокруглення полиць; J — момент інерції; i — радіус інерції; z_0 — відстань від центра ваги до зовнішньої грані полиці; J_{yz} — відцентровий момент інерції; W — момент опору

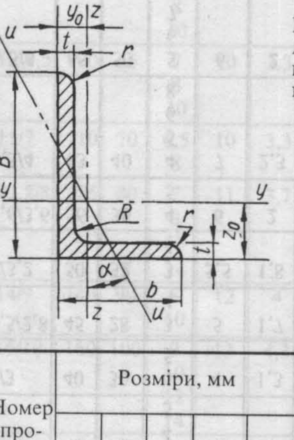
Номер профілю	Розміри, мм				Площа поперечного перерізу, см^2	Довідкові значення для осей									J_{yz}, см^4	z_0, см	Маса, кг
						$y - y$			$y_0 - y_0$		$z_0 - z_0$						
	b	t	R	r		J_y, см^4	W_y, см^3	i_y, см	J_{y_0} max, см^4	i_{y_0} max, см	J_{z_0} min, см^4	W_{z_0}, см^3	i_{z_0} min, см^4				
2	20	3 4	3,5	1,2	1,13 1,46	0,40 0,50	0,28 0,37	0,59 0,58	0,63 0,78	0,75 0,73	0,17 0,22	0,20 0,24	0,39 0,38		0,23 0,28	0,60 0,64	0,89 1,15
2,5	25	3 4 5	3,5	1,2	1,43 1,86 2,27	0,81 1,03 1,22	0,46 0,59 0,72	0,75 0,74 0,73	1,29 1,62 1,91	0,95 0,93 0,92	0,34 0,44 0,53	0,33 0,41 0,47	0,49 0,48 0,48		0,47 0,59 0,69	0,73 0,76 0,80	1,12 1,46 1,78
2,8	28	3	4	1,3	1,62	1,16	0,58	0,85	1,84	1,07	0,48	0,42	0,55		0,68	0,80	1,27
3	30	3 4 5	4	1,3	1,74 2,27 2,78	1,45 1,84 2,20	0,67 0,87 1,06	0,91 0,90 0,89	2,30 2,92 3,47	1,15 1,13 1,12	0,60 0,77 0,94	0,53 0,61 0,71	0,59 0,58 0,58		0,85 1,08 1,27	0,85 0,89 0,93	1,36 1,78 2,18
3,2	32	3 4	4,5	1,5	1,86 2,43	1,77 2,26	0,77 1	0,97 0,96	2,80 3,58	1,23 1,21	0,74 0,94	0,59 0,71	0,63 0,62		1,03 1,32	0,89 0,94	1,46 1,91
3,5	35	3 4 5	4,5	1,5	2,04 2,67 3,28	2,35 3,01 3,61	0,93 1,21 1,47	1,07 1,06 1,05	3,72 4,76 5,71	1,35 1,33 1,32	0,97 1,25 1,52	0,71 0,88 1,02	0,69 0,68 0,68		1,37 1,75 2,10	0,97 1,01 1,05	1,60 2,10 2,58

Продовження дод. 1

Номер профілю	Розміри, мм				Площа поперечного перерізу, см^2	Довідкові значення для осей										
						$y-y$			y_0-y_0		z_0-z_0					
	b	t	R	r		J_y, см^4	W_y, см^3	i_y, см	$J_{y_0\,max}$, см^4	$i_{y_0\,max}$, см	$J_{z_0\,min}$, см^4	W_{z_0}, см^3	$i_{z_0\,min}$, см^4	J_{yz}, см^4	z_0, см	Маса, кг
4	40	3	5	1,7	2,35	3,55	1,22	1,23	5,63	1,55	1,47	0,95	0,79	2,08	1,09	1,85
		4			3,08	4,58	1,60	1,22	7,26	1,53	1,90	1,19	0,78	2,68	1,13	2,42
		5			3,79	5,53	1,95	1,21	8,75	1,52	2,30	1,39	0,78	3,22	1,17	2,98
		6			4,48	6,41	2,30	1,20	10,13	1,50	2,70	1,58	0,78	3,72	1,21	3,52
4,5	45	3	5	1,7	2,65	5,13	1,56	1,39	8,13	1,75	2,12	1,24	0,89	3	1,21	2,08
		4			3,48	6,63	2,04	1,38	10,52	1,74	2,74	1,54	0,89	3,89	1,26	2,73
		5			4,29	8,03	2,51	1,37	12,74	1,72	3,33	1,81	0,88	4,71	1,30	3,37
		6			5,08	9,35	2,95	1,36	14,80	1,71	3,90	2,96	0,88	5,45	1,34	3,99
5	50	3	5,5	1,8	2,96	7,11	1,94	1,55	11,27	1,95	2,95	1,57	1	4,16	1,33	2,32
		4			3,89	9,21	2,54	1,54	14,63	1,94	3,80	1,95	0,99	5,42	1,38	3,05
		5			4,80	11,20	3,13	1,53	17,77	1,92	4,63	2,30	0,98	6,57	1,42	3,77
		6			5,69	13,07	3,69	1,52	20,72	1,91	5,43	2,63	0,98	7,65	1,46	4,47
		7			6,56	14,84	4,23	1,50	23,47	1,89	6,21	2,93	0,97	8,63	1,50	5,15
		8			7,41	16,51	4,76	1,49	26,03	1,87	6,98	3,22	0,97	9,52	1,53	5,82
5,6	56	4	6	2	4,38	13,10	3,21	1,73	20,79	2,18	5,41	2,52	1,11	7,69	1,52	3,44
		5			5,41	15,97	3,96	1,72	25,36	2,16	6,59	2,97	1,10	9,41	1,57	4,25
6	60	4	7	2,3	4,72	16,21	3,70	1,85	25,69	2,33	6,72	2,93	1,19	9,48	1,62	3,71
		5			5,89	19,79	4,56	1,84	31,40	2,32	8,18	3,49	1,18	11,61	1,66	4,58
		6			6,92	23,21	5,40	1,83	36,81	2,31	9,60	3,99	1,18	13,60	1,70	5,43
		8			9,04	29,55	7	1,81	46,77	2,27	12,34	4,90	1,17	17,22	1,78	7,10
		10			11,08	35,32	8,52	1,79	55,64	2,24	15	5,70	1,16	20,32	1,85	8,70
6,3	63	4	7	2,3	4,96	18,86	4,09	1,95	29,90	2,45	7,81	3,26	1,25	11	1,69	3,90
		5			6,13	23,10	5,05	1,94	36,80	2,44	9,52	3,87	1,25	13,70	1,74	4,81
		6			7,28	27,06	5,98	1,93	42,91	2,43	11,18	4,44	1,24	15,90	1,78	5,72
7	70	4,5	8	2,7	6,20	29,04	5,67	2,16	46,03	2,72	12,04	4,53	1,39	17	1,88	4,87
		5			6,86	31,94	6,27	2,16	50,67	2,72	13,22	4,92	1,39	18,70	1,90	5,38
		6			8,15	37,58	7,42	2,15	59,64	2,71	15,52	5,66	1,38	22,10	1,94	6,39
		7			9,42	42,98	8,57	2,14	68,19	2,69	17,77	6,31	1,37	25,20	1,99	7,39
		8			10,67	48,16	9,68	2,12	76,35	2,68	19,97	6,99	1,37	28,20	2,02	8,37
		10			13,11	57,90	11,82	2,10	91,52	2,64	24,27	8,17	1,36	33,60	2,10	10,29
7,5	75	5	9	3	7,39	39,53	7,21	2,31	62,65	2,91	16,41	5,74	1,49	23,10	2,02	5,80
		6			8,78	46,57	8,57	2,30	73,87	2,90	19,28	6,62	1,48	27,30	2,06	6,89
		7			10,15	53,34	9,89	2,29	84,61	2,89	22,07	7,43	1,47	31,20	2,10	7,96
		8			11,50	59,84	11,18	2,28	94,89	2,87	24,80	8,16	1,47	35	2,15	9,02
		9			12,83	66,10	12,43	2,27	104,72	2,86	27,48	8,91	1,46	38,60	2,18	10,07
8	80	5,5	9	3	8,63	52,68	9,03	2,47	83,56	3,11	21,80	7,10	1,59	30,90	2,17	6,78
		6			9,38	56,97	9,80	2,47	90,40	3,11	23,54	7,60	1,58	33,40	2,19	7,36
		7			10,85	65,31	11,32	2,45	103,66	3,09	26,97	8,55	1,58	38,30	2,23	8,51
		8			12,30	73,36	12,80	2,44	116,39	3,08	30,32	9,44	1,57	43	2,27	9,65
		10			15,14	88,58	15,67	2,42	140,31	3,04	36,85	11,09	1,56	56,70	2,35	11,88
		12			17,90	102,74	18,42	2,40	162,27	3,01	43,21	12,62	1,55	59,50	2,42	14,05
9	90	6	10	3,3	10,61	82,10	12,49	2,78	130	3,50	33,97	9,88	1,79	48,10	2,43	8,33
		7			12,28	94,30	14,45	2,77	149,67	3,49	38,94	11,15	1,78	55,40	2,47	9,64
		8			13,92	106,11	16,36	2,76	168,42	3,48	43,80	12,34	1,77	62,30	2,51	10,93
		9			15,60	118	18,29	2,75	186	3,46	48,60	13,48	1,77	68,00	2,55	12,20
		10			17,17	128,60	20,07	2,74	203,93	3,45	53,27	14,54	1,76	75,30	2,59	13,48
		12			20,33	149,67	23,85	2,71	235,88	3,41	62,40	16,53	1,75	86,20	2,67	15,96
10	100	6,5	12	4	12,82	122,10	16,69	3,09	193,46	3,89	50,73	13,38	1,99	71,40	2,68	10,06
		7			13,75	130,59	17,90	3,08	207,01	3,88	54,16	14,13	1,98	76,40	2,71	10,79
		8			15,60	147,19	20,30	3,07	233,46	3,87	60,92	15,66	1,98	86,30	2,75	12,25
		10			19,24	178,95	24,97	3,05	283,83	3,84	74,08	18,51	1,96	110	2,83	15,10
		12			22,80	208,90	29,47	3,03	330,95	3,81	86,84	21,10	1,95	122	2,91	17,90
		14			26,28	237,15	33,83	3	374,98	3,78	99,32	23,49	1,94	138	2,99	20,63
		15			27,99	250,68	35,95	2,99	395,87	3,76	105,48	24,62	1,94	145	3,03	21,97
		16			29,68	263,82	38,04	2,98	416,04	3,74	111,61	25,79	1,94	152	3,06	23,30
11	110	7	12	4	15,15	175,61	21,83	3,40	278,54	4,29	72,68	17,36	2,19	106	2,96	11,89
		8			17,20	198,17	24,77	3,39	314,51	4,28	81,83	19,29	2,18	116	3	13,50
12	120	8			18,80	259,75	29,68	3,72	412,45	4,68	107,04	23,29	2,39	153	3,25	14,76
		10			23,24	317,16	36,59	3,69	503,79	4,66	130,54	27,72	2,37	187	3,33	18,24
		12			27,60	371,80	43,30	3,67	590,28	4,62	153,33	31,79	2,36	218	3,41	21,67
		15			33,99	448,90	52,96	3,63	711,32	4,57	186,48	37,35	2,34	262	3,53	26,68
12,5	125	8	14	4,6	19,69	294,36	32,20	3,87	466,76	4,87	121,96	25,67	2,49	172	3,36	15,46
		9			22	327,48	36	3,86	520	4,86	135,88	28,26	2,48	192	3,40	17,30
		10			24,33	359,82	39,74	3,85	571,04	4,84	148,59	30,45	2,47	211	3,45	19,10
		12			28,89	422,23	47,06	3,82	670,02	4,82	174,43	34,94	2,46	248	3,52	22,68
		14			33,37	481,76	54,17	3,80	763,90	4,78	199,62	39,10	2,45	282	3,61	26,20
		16			37,77	538,56	61,09	3,78	852,84	4,75	224,22	43,10	2,44	315	3,68	29,65
14	140	9	14	4,6	24,72	465,72	45,55	4,34	739,42	5,47	192,03	35,92	2,79	274	3,78	19,41

Номер профілю	Розміри, мм				Площа поперечного перерізу, см²	Довідкові значення для осей										
						$y - y$			$y_0 - y_0$		$z_0 - z_0$			J_{yz}, см⁴	z_0, см	Маса, кг
	b	t	R	r		J_y, см⁴	W_y, см³	i_y, см	$J_{y_0 \max}$, см⁴	$i_{y_0 \max}$, см	$J_{z_0 \min}$, см⁴	W_{z_0}, см³	$i_{z_0 \min}$, см⁴			
14		10			27,33	512,29	50,32	4,33	813,62	5,46	210,96	39,05	2,78	301	3,82	21,45
		12			32,49	602,49	59,66	4,31	956,98	5,43	248,01	44,97	2,76	354	3,90	29,50
15	150	10	14	4,6	29,33	634,76	58,07	4,65	1008,56	5,86	260,97	45,34	2,98	374	4,07	23,02
		12			34,89	747,48	68,90	4,63	1187,86	5,83	307,09	52,32	2,97	440	4,15	27,39
		15			43,08	908,38	84,66	4,59	1442,60	5,79	374,17	61,96	2,95	534	4,27	33,82
		18			51,09	1060,08	99,86	4,56	1680,92	5,74	439,24	70,91	2,93	621	4,38	40,11
16	160	10	16	5,3	31,43	774,24	66,19	4,96	1229,10	6,25	319,38	52,52	3,19	455	4,30	24,67
		11			34,42	844,21	72,44	4,95	1340,66	6,24	347,77	56,52	3,18	496	4,35	27,02
		12			37,39	912,89	78,62	4,94	1450	6,23	375,78	60,53	3,17	537	4,39	29,35
		14			43,57	1046,47	90,77	4,92	1662,13	6,20	430,81	68,15	3,16	615	4,47	33,97
		16			49,07	1175,19	102,64	4,89	1865,73	6,17	484,64	75,92	3,14	690	4,55	38,52
		18			54,79	1290,24	114,24	4,87	2061,03	6,13	537,46	82,08	3,13	671	4,63	43,01
		20			60,40	1418,85	125,00	4,85	2248,26	6,10	589,43	90,02	3,12	830	4,70	47,44
18	180	11	16	5,3	38,80	1216,44	92,47	5,60	1933,10	7,06	499,78	72,86	3,59	716	4,85	30,47
		12			42,19	1316,62	100,41	5,59	2092,78	7,04	540,45	78,15	3,58	776	4,89	33,12
		15			52,18	1607,36	123,74	5,55	2554,99	7	659,73	93,11	3,56	948	5,01	40,96
		18			61,99	1884,07	146,36	5,51	2992,69	6,95	775,44	106,88	3,54	1108	5,13	48,66
		20			68,43	2061,11	161,07	5,49	3271,31	6,91	850,92	115,71	3,53	1210	5,20	53,72
20	200	12	18	6	47,10	1822,78	124,61	6,22	2896,16	7,84	749,40	98,68	3,99	1073	5,37	36,97
		13			50,85	1960,77	134,44	6,21	3116,18	7,83	805,35	105,07	3,98	1156	5,42	39,92
		14			54,60	2097	144,17	6,20	3333	7,81	861	111,50	3,97	1236	5,46	42,80
		16			61,98	2362,57	163,37	6,17	3755,39	7,78	969,74	123,77	3,96	1393	5,54	48,65
		18			69,30	2620,64	182,22	6,15	4164,54	7,75	1076,74	135,48	3,94	1544	5,62	54,40
		20			76,54	2871,47	200,73	6,12	4560,42	7,72	1181,92	146,62	3,93	1689	5,70	60,08
		24			90,78	3350,66	236,77	6,08	5313,59	7,65	1387,73	167,74	3,91	1963	5,85	71,26
		25			94,29	3466,21	245,59	6,06	5494,04	7,63	1438,38	172,68	3,91	2028	5,89	74,02
		30			111,54	4019,60	288,57	6	6351,05	7,55	1698,16	193,06	3,89	2332	6,07	87,56
22	220	14	21	7	60,38	2814,36	175,18	6,83	4470,15	8,60	1158,56	138,62	4,38	1655	5,91	47,40
		16			68,50	3175,44	198,71	6,80	5045,37	8,58	1305,52	153,34	4,36	1862	6,02	53,83
25	250	16	24	8	78,40	4717,10	258,43	7,76	7492,10	9,78	1942,09	203,45	4,98	2775	6,75	61,55
		18			87,72	5247,24	288,82	7,73	8336,69	9,75	2157,78	233,39	4,96	3089	6,83	68,86
		20			96,96	5764,87	318,76	7,71	9159,73	9,72	2370,01	242,52	4,94	3395	6,91	76,11
		22			106,12	6270,32	348,26	7,69	9961,60	9,69	2579,04	260,52	4,93	3691	7	83,21
		25			119,71	7006,39	391,72	7,65	11125,52	9,64	2887,26	287,14	4,91	4119	7,11	93,97
		28			133,12	7716,86	434,86	7,61	12243,84	9,59	3189,89	311,98	4,90	4527	7,23	104,50
		30			141,96	8176,51	462,11	7,59	12964,66	9,56	3388,98	327,82	4,89	4788	7,31	111,44

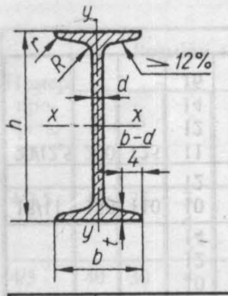
Кутники нерівнобічні



Позначення:
B — ширина більшої полиці; b — ширина меншої полиці; t — товщини полиці; R — радіус внутрішнього заокруглення; r — радіус заокруглення полиць; J — момент інерції; i — радіус інерції; y_0, z_0 — відстань від центра ваги до зовнішніх граней полиць; J_{yz} — відцентровий момент інерції

Номер профілю	Розміри, мм					Площа поперечного перерізу, см²	Довідкові значення для осей													Кут нахилу осі tg α	Маса 1 м, кг
							$y - y$			$z - z$			$u - u$								
	B	b	t	R	r		J_y, см⁴	W_y, см³	i_y, см	J_z, см⁴	W_z, см³	i_z, см	$J_{u \min}$, см⁴	W_u, см³	$i_{u \min}$, см	y_0, см	z_0, см	J_{yz}, см⁴			
2,5/1,6	25	16	3	3,5	1,2	1,16	0,70	0,43	0,78	0,22	0,19	0,44	0,13	0,16	0,34	0,42	0,86	0,22		0,392	0,91
3/2	30	20	3	3,5	1,2	1,43	1,27	0,62	0,94	0,45	0,30	0,56	0,26	0,25	0,43	0,51	1,00	0,43		0,427	1,12
			4			1,86	1,61	0,82	0,93	0,56	0,39	0,55	0,34	0,32	0,43	0,54	1,04	0,54		0,421	1,46
3,2/2	32	20	3	3,5	1,2	1,49	1,52	0,72	1,01	0,46	0,30	0,55	0,28	0,25	0,43	0,49	1,08	0,47		0,382	1,17
			4			1,94	1,93	0,93	1	0,57	0,39	0,54	0,35	0,33	0,43	0,53	1,12	0,59		0,374	1,52

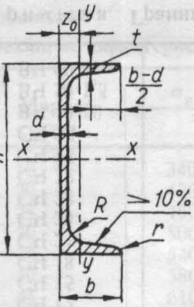
Номер профілю	Розміри, мм					Площа поперечного перерізу, см²	Довідкові значення для осей									y_0, см	z_0, см	J_{yz}, см⁴	Кут нахилу осі tg α	Маса 1 м, кг
							$y - y$			$z - z$			$u - u$							
	B	b	t	R	r		J_y, см⁴	W_y, см³	i_y, см	J_z, см⁴	W_z, см³	i_z, см	$J_{u\,min}$, см⁴	W_u, см³	$i_{u\,min}$, см					
4/2,5	40	25	3	4	1,3	1,89	3,06	1,14	1,27	0,93	0,49	0,70	0,56	0,41	0,54	0,59	1,32	0,96	0,385	1,48
			4			2,47	3,93	1,49	1,26	1,18	0,63	0,69	0,71	0,52	0,54	0,63	1,37	1,22	0,381	1,94
			5			3,03	4,73	1,82	1,25	1,41	0,77	0,68	0,86	0,64	0,53	0,66	1,41	1,44	0,374	2,38
4/3	40	30	4	4	1,3	2,67	4,18	1,54	1,25	2,01	0,91	0,87	1,09	0,75	0,64	0,78	1,28	1,68	0,544	2,09
			5			3,28	5,04	1,88	1,24	2,41	1,11	0,86	1,33	0,91	0,64	0,82	1,32	2	0,539	2,57
4,5/2,8	45	28	3	5	1,7	2,14	4,41	1,45	1,43	1,32	0,61	0,79	0,79	0,52	0,61	0,64	1,47	1,38	0,382	1,68
			4			2,80	5,68	1,90	1,42	1,60	0,80	0,78	1,02	0,67	0,60	0,68	1,51	1,77	0,379	2,20
5/3,2	50	32	3	5,5	1,8	2,42	6,18	1,82	1,60	1,99	0,81	0,91	1,18	0,68	0,70	0,72	1,60	2,01	0,403	1,90
			4			3,17	7,98	2,38	1,59	2,56	1,05	0,90	1,52	0,88	0,69	0,76	1,65	2,59	0,401	2,49
5,6/3,6	56	36	4	6	2	3,58	11,37	3,01	1,78	3,70	1,34	1,02	2,19	1,13	0,78	0,84	1,82	3,74	0,406	2,81
			5			4,41	13,82	3,70	1,77	4,48	1,65	1,01	2,65	1,37	0,78	0,88	1,87	4,50	0,404	3,46
6,3/4	63	40	4	7	2,3	4,04	16,33	3,83	2,01	5,16	1,67	1,13	3,07	1,41	0,87	0,91	2,03	5,25	0,397	3,17
			5			4,98	19,91	4,72	2	6,26	2,05	1,12	3,73	1,72	0,86	0,95	2,08	6,41	0,396	3,91
			6			5,90	23,31	5,58	1,99	7,29	2,42	1,11	4,36	2,02	0,86	0,99	2,12	7,44	0,393	4,63
			8			7,68	29,60	7,22	1,96	9,15	3,12	1,09	5,58	2,60	0,85	1,07	2,20	9,27	0,387	6,03
6,5/5	65	50	5	6	2	5,56	23,41	5,20	2,05	12,08	3,23	1,47	6,41	2,68	1,07	1,26	2	9,77	0,576	4,36
			6			6,60	27,46	6,16	2,04	14,12	3,82	1,46	7,52	3,15	1,07	1,30	2,04	11,46	0,575	5,18
			7			7,62	31,32	7,08	2,03	16,05	4,38	1,45	8,60	3,59	1,06	1,34	2,08	12,94	0,571	5,98
			8			8,62	35	7,99	2,02	18,88	4,93	1,44	9,65	4,02	1,06	1,37	2,12	13,61	0,570	6,77
7/4,5	70	45	5	7,5	2,5	5,59	27,76	5,88	2,23	9,05	2,62	1,27	5,34	2,20	0,98	1,05	2,28	9,12	0,406	4,39
7,5/5	75	50	5	8	2,7	6,11	34,81	6,81	2,39	12,47	3,25	1,43	7,24	2,73	1,09	1,17	2,39	12	0,436	4,79
			6			7,25	40,92	8,08	2,38	14,60	3,85	1,42	8,48	3,21	1,08	1,21	2,44	14,10	0,435	5,69
			7			8,37	46,77	9,31	2,36	16,61	4,43	1,41	9,69	3,69	1,08	1,25	2,48	16,18	0,435	6,57
			8			9,47	52,38	10,52	2,35	18,52	4,88	1,40	10,87	4,14	1,07	1,29	2,62	17,80	0,430	7,43
8/5	80	50	5	8	2,7	6,36	41,64	7,71	2,56	12,68	3,28	1,41	7,57	2,75	1,09	1,13	2,60	13,20	0,387	4,99
			6			7,55	48,98	9,15	2,55	14,85	3,88	1,40	8,88	3,24	1,08	1,17	2,65	15,50	0,386	5,92
8/6	80	60	6	8	2,7	8,15	52,06	9,42	2,53	25,18	5,58	1,76	13,61	4,66	1,29	1,49	2,47	20,98	0,547	6,39
			7			9,42	59,61	10,87	2,52	28,74	6,43	1,75	15,58	5,34	1,29	1,53	2,52	24,01	0,546	7,39
			8			10,67	66,88	12,38	2,50	32,15	7,26	1,74	17,49	5,99	1,28	1,57	2,56	26,83	0,544	8,37
9/5,6	90	56	5,5	9	3	7,86	65,28	10,74	2,88	19,67	4,53	1,58	11,77	3,81	1,22	1,26	2,92	20,54	0,384	6,17
			6			8,54	70,58	11,66	2,88	21,22	4,91	1,58	12,70	4,12	1,22	1,28	2,95	22,23	0,384	6,70
			8			11,18	90,87	15,24	2,85	27,08	6,39	1,39	1,56	16,29	5,32	1,21	1,36	3,04	0,380	8,77
10/6,3	100	63	6	10	3,3	9,58	98,29	14,52	3,20	30,58	6,27	1,79	18,20	5,27	1,38	1,42	3,23	31,50	0,393	7,53
			7			11,09	112,86	16,78	3,19	34,99	7,23	1,78	20,83	6,06	1,37	1,46	3,28	36,10	0,392	8,70
			8			12,57	126,96	19,01	3,18	39,21	8,17	1,77	23,38	6,82	1,36	1,50	3,32	40,50	0,391	9,87
			10			15,47	153,83	23,32	3,15	47,18	9,99	1,75	28,34	8,31	1,35	1,58	3,40	48,60	0,387	12,14
10/6,5	100	65	7	10	3,3	11,23	114,05	16,87	3,19	38,32	7,70	1,85	22,77	6,43	1,41	1,52	3,24	38	0,415	8,81
			8			12,73	138,31	19,11	3,18	42,96	8,70	1,84	25,24	7,26	1,41	1,56	3,28	42,54	0,414	9,99
			10			15,67	155,52	23,45	3,15	51,68	10,64	1,82	30,60	8,83	1,40	1,64	3,37	51,18	0,410	12,30
11/7	110	70	6,5	10	3,3	11,45	142,42	19,11	3,53	45,61	8,42	2	26,94	7,05	1,53	1,58	3,55	46,80	0,402	8,98
			8			13,93	171,54	23,22	3,51	54,64	10,20	1,98	32,31	8,50	1,52	1,64	3,61	55,90	0,400	10,93
12,5/8	125	80	7	11	3,7	14,06	226,53	26,67	4,01	73,73	11,89	2,29	43,40	9,96	1,76	1,80	4,01	74,70	0,407	11,04
			8			15,98	255,62	30,27	4	80,95	13,47	2,28	48,82	11,25	1,75	1,84	4,04	84,10	0,406	12,54
			10			19,70	311,61	37,27	3,98	100,47	16,52	2,26	59,33	13,74	1,74	1,92	4,14	102	0,404	15,47
			12			23,36	364,79	44,03	3,95	116,84	19,46	2,24	69,47	16,11	1,72	2,00	4,22	118	0,400	18,34
14/9	140	90	8	12	4	18	363,68	38,25	4,49	119,79	17,19	2,58	70,27	14,39	1,98	2,03	4,49	121	0,411	14,13
			10			22,24	444,45	47,19	4,47	145,54	21,14	2,56	85,51	17,58	1,96	2,12	4,58	147	0,409	17,46
16/10	160	100	9	13	4,3	22,87	605,97	56,04	5,15	186,03	23,96	2,85	110,40	20,01	2,20	2,24	5,19	194	0,391	17,96
			10			25,28	666,59	61,91	5,13	204,09	26,42	2,84	121,16	22	2,19	2,28	5,23	213	0,390	19,85
			12			30,04	784,22	73,42	5,11	238,75	31,23	2,82	142,14	25,93	2,18	2,36	5,32	249	0,388	23,58
			14			34,72	897,19	84,65	5,08	271,60	35,89	2,80	162,49	29,75	2,16	2,43	5,40	282	0,385	27,26
18/11	180	110	10	14	4,7	28,33	952,28	78,59	5,80	276,37	32,27	3,12	165,44	26,96	2,42	2,44	5,88	295	0,376	22,24
			12			33,69	1122,56	93,33	5,77	324,09	38,20	3,10	194,28	31,83	2,40	2,52	5,97	348	0,374	26,45
20/12,5	200	125	11	14	4,7	34,87	1449,02	107,31	6,45	446,36	45,98	3,58	263,84	38,27	2,75	2,79	6,50	465	0,392	27,37
			12			37,89	1568,19	116,51	6,43	481,93	49,85	3,57	285,04	41,45	2,74	2,83	6,54	503	0,392	29,74
			14			43,87	1800,83	134,64	6,41	550,77	57,43	3,54	326,54	47,57	2,73	2,91	6,62	575	0,390	34,43
			16			49,77	2026,08	152,41	6,38	616,66	64,83	3,52	366,99	53,56	2,72	2,99	6,71	643	0,388	39,07



Балки двотаврові

Позначення:
h — висота балки; b — ширина полиці; d — товщина стінки; t — середня товщина полиці; J — момент інерції; W — момент опору; i — радіус інерції; S — статичний момент півперерізу

Номер профілю	Розміри, мм h	b	d	t	Площа перерізу F, см^2	J_x, см^4	W_x, см^3	i_x, см	S_x, см^3	J_y, см^4	W_y, см^3	i_y, см	Маса 1 м, кг
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22	9,46
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	11,5
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55	13,7
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70	15,9
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88	18,4
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12	19,9
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07	21,0
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32	22,7
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27	24,0
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50	25,8
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37	27,3
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63	29,4
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54	31,5
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80	33,9
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69	36,5
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95	39,2
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79	42,2
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89	48,6
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03	57,0
45	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09	66,5
50	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23	78,5
55	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39	92,6
60	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54	108



Швелери з нахилом внутрішніх граней полиць

Позначення:
h — висота швелера; b — ширина полиці; d — товщина стінки; t — середня товщина полиці; J — момент інерції; W — момент опору; i — радіус інерції; S — статичний момент півперерізу; z_0 — відстань від осі y до зовнішньої грані стінки

Номер профілю	Розміри, мм h	b	d	t	Площа перерізу F, см^2	J_x, см^4	W_x, см^3	i_x, см	S_x, см^3	J_y, см^4	W_y, см^3	i_y, см	z_0, см	Маса 1 м, кг
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16	4,84
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,0	8,7	3,68	1,08	1,24	5,90
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31	7,05
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44	8,59
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54	10,4
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67	12,3
14a	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87	13,3
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,6	13,8	1,87	1,80	14,2
16a	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00	15,3
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17,0	2,04	1,94	16,3
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13	17,4
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07	18,4
20a	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28	19,8
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21	21,0
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46	22,6
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42	24,0
24a	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67	25,8
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47	27,7
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52	31,8
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59	36,5
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68	41,9
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75	48,3

Додаток 2

Границі міцності $\sigma_в$, МПа, деяких матеріалів

Матеріал	Розтягання	Стискання	Матеріал	Розтягання	Стискання
Чавун сірий:			ялина вздовж волокон	65	35
звичайний	140...180	600..1000	» поперек »	—	4
дрібнозернистий	210...250	до 1400	дуб вздовж волокон	95	50
Пластмаса:			» поперек »	—	15
бакеліт	20...30	80...100	Камінь:		
целулоїд	50...70	—	граніт	3	120...260
текстоліт	85...100	130...250	пісковик	2	40...150
гетинакс	150...170	150...180	вапняк	—	50...150
бакелізована фанера	130	115	цегла	—	7,4...30
Деревина (при вологості 15 %):			бетон	—	5...35
сосна вздовж волокон	80	40	кам'яна кладка на розчині	0,2...0,5	2,5...9
» поперек »	—	5			

Додаток 3

Механічні характеристики чавуну

Марка чавуну	Границя міцності, МПа, при				Твердість за Брінеллем HB	Границя витривалості, МПа, при	
	розтяганні $\sigma_в$	стисканні $\sigma_в$	згинанні $\sigma_в$	крученні $\tau_в$		згинанні $\sigma_{-1зг}$	крученні τ_{-1}
СЧ 12	120	500	280	—	143...229	—	—
СЧ 15	150	650	320	240	163..229	70	50
СЧ 18	180	700	360	—	170..229	—	—
СЧ 21	210	750	400	280	171...241	100	80
СЧ 24	240	850	440	300	187...217	120	100
СЧ 28	280	1000	480	350	170...241	140	110
СЧ 32	320	1100	520	390	187...255	140	110
СЧ 35	350	1200	560	400	197...269	150	115
СЧ 38	380	1400	600	460	207...269	150	115
ВЧ 40-10	400	1600...1700	—	480...510	156...197	150...170	198
ВЧ 50-1,5	500	1860...2000	—	740...790	187...255	230...270	170...210
ВЧ 60-2	600	2040...2290	—	660...810	197...269	170...230	150...160

П р и м і т к а. Границя текучості $\sigma_т$ для ВЧ 40-10 становить 300, для ВЧ 50-1,5 — 380 та для ВЧ 60-2 — 420 МПа.

Додаток 4

Механічні характеристики, МПа, вуглецевих конструкційних сталей

Марка сталі	$\sigma_в$	$\sigma_т$	$\tau_т$	Відносне подовження δ, %, при $l = 10d$	Ударна в'язкість KC, кДж/м^2	$\sigma_{-1зг}$	$\sigma_{-1р}$	$\tau_{-1кр}$
	не менше							
10	340	210	140	31	2400	160...220	120...150	80...120
20	420	250	160	25	—	170..220	120...160	100...130
25	460	280	—	23	900	190...250	—	—
30	500	300	170	21	800	200...270	170...210	110...140
35	540	320	190	20	700	220...300	170...220	130...180
40	580	340		19	600	230...320	180...240	140...190
45	610	360	220	16	500	250...340	190...250	150...200
50	640	380	—	14	400	270...350	200...260	160...210
55	660	390	—	13	—	—	—	—
60	690	410	—	12	—	310...380	220...280	180...220
20Г	460	280	—	24	—	—	—	—
30Г	550	320	—	20	800	220...320	—	—
50Г	660	400	—	13	400	290...360	—	—
20Х	800	650	—	11	600	380	—	170...230
40Х	1000	800	—	10	600	350...380	250	225
45Х	1050	850	—	9	500	400...500	—	—
30ХМ	950	750	—	11	800	310...410	370	230
35ХМ	1000	850	—	12	800	470...510	—	—
40ХН	1000	800	390	11	700	400	290	240
50ХН	1100	900	—	9	500	550	—	—
40ХФА	900	750	—	10	900	380...490	—	—
38ХМЮА	1000	850	—	14	900	420...550	—	—
12ХН3А	950	700	400	11	900	390...470	270...320	220...260
20ХН3А	950	750	—	12	1000	430...450	300...320	245...255
30ХН3А	1000	800	—	10	800	520...700	—	320...400
40ХНМА	1000	950	—	12	1000	500...700	—	270...380
30ХГСА	1100	850	—	10	500	510...540	500...535	220..245

П р и м і т к и: 1. Границі витривалості добуто на полірованих зразках. 2. При використанні сталей слід урахувати приблизну відповідність марок:

Ст3 відповідає сталі 20;
Ст4 » сталі 25;
Ст5 » сталі 35;
Ст6 » сталі 45.

Додаток 5

Механічні характеристики жароміцних сплавів

Сплави	Марка сплаву	$\sigma_в$	$\sigma_{0,2}$	σ_{-1}	E	δ	ψ	KC, кДж/м^2
		МПа				%		
Аустенітні сталі	ЭИ734	1000	600	—	172 000	20	25	300
	ЭИ589	918...1020	795	—	211 000	15	15...25	300
	ЭИ590	765...856	336...408	—	—	31...44	40...49	1000
Сталі на нікелевій основі при 20 °С	ХН77ТЮ	1000	600	367	194 000	25	28	800
	ЭИ826	1050	720	388	204 000	10	12	200
	ВЖ98	750	388	310	—	40	—	—
Сталі на залізонікелевій основі при 20 °С	ХН35ВТЮ	1350	940	—	223 000	14	15...29	350...700
	ЭП105	950	700	—	190 000	10	13	250
	ХН35ВТР	800	450	—	214 000	20	35	1000
Титанові у відпаленому стані	ВТ5	770	720	459	107 000	8,5	40	400
	ОТ4	800	680	388...438	110 000	13	25...50	400
Ніобієві	ВН-2 при T = 20 °С	650...750	530...700	480	112 000	25...30	60...70	2700
	» » T = 1200 °С	180...200	110...120	—	109 000	30...35	100	—
	» » T = 1600 °С	40...50	20	—	107 000	50...60	100	—
Молібденові	ВМ-1 при T = 20 °С	760	500	500	328 000	25	55	20
	» » T = 1200 °С	250	200	—	259 000	22	90	
	» » T = 1600 °С	60	400	—	212 000	55	100	
Танталові	Та + 10 % W при T = 20 °С	600	480...500	—	184 000	36,0	96	—
	Те саме при T = 1250 °С	185	100	—	155 000	45,0	94	—
	» при T = 1500 °С	150	85	—	147 000	50...53	95	—
Вольфрамові	ВВ-2 при T = 1000 °С	200...240	—	—	360 000	45...48	80...90	—
	» » T = 1500 °С	140...150	—	—	340 000	48...58	90...95	—
	» » T = 2000 °С	80...85	—	—	280 000	60...70	95...96	—

Додаток 6

Механічні характеристики, МПа, пружинних сталей

Сталь	Розтягання				Стискання			Границя витривалості τ_0 пружини при віднульовому циклі
	$\sigma_в$	$\sigma_т$	$\sigma_{пц}$	$E \cdot 10^{-5}$	$\tau_в$	$\tau_т$	$G \cdot 10^{-4}$	
Середньовуглецева	1500...1600	1000...1200	750...900	2,1	850...1100	600...800	8,1	500...650
Високовуглецева	1450...1700	950...1350	800...1000	2,0...2,2	1100...1400	650...900	7,6...8,3	500...700
Хромованадієва	1600...1750	1500...1600	900...1000	2,01	1700...1300	950...1000	8,0	550...600
Кремнемарганцева	1600...1700	1400...1500	900...950	2,05	1350	950...1000	7,6	500...550
Кремневанадієва	1400...1500	950...1050	600...650	2,3	1200...1250	900	8,3	450...500

Примітка. Границя витривалості пружини дається при симетричному циклі τ_{-1}; діаграма граничних напружень для пружин характеризується коефіцієнтом $\Psi_\tau \approx 0,2$.

Додаток 7

Механічні характеристики деяких кольорових сплавів

Сплави	Матеріал	Марка	$\sigma_т$, МПа	$\sigma_в$, МПа	δ, %	HB	Галузь застосування
Мідні	Латунь	Л68	91; 520	320; 660	55; 30	55; 150	Труби, дріт, листи
	Латунь алюмінієва	ЛА77-2	140; —	400; 650	55; 12	60; 170	Труби, трубки конденсаторні
	Латунь марганцева	ЛМц58-2	156; —	400; 700	40; 10	85; 175	Прутки, листи
	Бронза олов'яна	БрО10	—	250; —	11; —	80; —	Арматура
		БрОФ10-1	140; —	200; 300	—; 3	80; 100	Шестерні, підшипники
	Бронза алюмінієва	БрА5	160; 500	380; 400	65; 4	60; 200	Стрічки, штаби
	Бронза кремнієва	БрК3	—	250; —	10...20	—	Литво
Алюмінієві	Дуралюмін нормальний	Д1	110; 240	210; 420	18; 15	45; 113	Труби, пресовані профілі
	Дуралюмін підвищеної міцності	Д6	50; 380	180; 500	8; 20	50; 125	Труби, профілі
	Алюмінієво-магнієвий сплав	АМг	100; 210	180; 250	6; 23	45; 60	Труби, листи

Примітка. Перші цифри дано для м'якого стану матеріалу, другі — для твердого.

Додаток 8

Механічні характеристики основних видів пластмас

Матеріали	Характеристика	Густина, кг/м^3	Границя міцності $\sigma_в$ при розтяганні	стисканні	згинанні	E	G	$\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{в.р}}$
			МПа					
Склопласти	На основі тканини, ниток, орієнтованих у двох взаємно перпендикулярних напрямах	1400...1850	260...400	100...300	130...150	18 000...22 000	3500...4000	0,22..0,25
		1700...1900	300...500	—	230...460	24 000...35 000	—	0,25...0,28
Текстоліти	На основі бавовняних тканин	1300...1400	60...110	130...150	90...160	6000...10 000	2500	0,25...0,30
Деревні пластики	На основі деревини	1200...1400	140...220	120...155	165...220	12 000...34 000	800...2500	0,25...0,30
Гетинакс	На основі паперу, просоченого фенолформальдегідною смолою	1300...1400	70...100	—	80...140	10 000...18 000	800...2500	0,20...0,30
Фібра	На основі спецсортів паперу	1100...1250	65...100	80...140	60...95	7000	—	0,20...0,30
Волокніт	Наповнювачі: бавовняні, пачоси, азбоволокно, скловолокно	1350...1900	30...130	110...130	40...100	5000...8500	—	0,25...0,30
Прес-порошки термореактивні	Наповнювачі: деревне, кварцове борошно, слюда	1400...1900	35...60	150...180	50...80	—	—	0,3...0,4
Скло органічне	На основі полімерів метакрилової кислоти	1180	71...92	—	99...153	2900...4100	—	0,1...0,16
Термопласти	Лінійні полімери	920...2100	12...80	—	12...100	150...700	—	0,15...0,2
Пінопласти	Неармовані	60...220	0,4...4,2	0,17...4,5	0,7...5,0	37...200	15...19	—
Фторопласт-4	—	2100...2300	14...25	20	11...14	470...850	—	—
Капрон	Литво	1140	35...70	60...80	45...70	1400...2000	450...480	—
»	Полікапролактам	1140	60...80	70...80	90	700...1050	—	—
Поліамід-68	—	1130	45...50	45...50	70...90	1200		—
Вініпласт	—	1380...1400	40...60	80...160	90	3000...4000		—
Поліетилен НД	—	1380...1400	25...35	28...40	30	550...880		—
Полістирол блоковий	—	1050...1070	35	100	95...100	1200...3200	—	—

Додаток 9

Модулі пружності і коефіцієнти Пуассона для деяких матеріалів

Матеріал	Модуль пружності, МПа		Коефіцієнт Пуассона μ
	E	G	
Чавун білий, сірий	$(1{,}15...1{,}60)\,10^5$	$4{,}5 \cdot 10^4$	0,23...0,27
» ковкий	$1{,}55 \cdot 10^5$	—	—
Сталь вуглецева	$(2{,}0...2{,}1)\,10^5$	$(8{,}0...8{,}1)\,10^4$	0,24...0,28
» легована	$(2{,}1...2{,}2)\,10^5$	$(8{,}0...8{,}1)\,10^4$	0,25...0,30
Мідь прокатана	$1{,}1 \cdot 10^5$	$4{,}0 \cdot 10^4$	0,31...0,34
» холоднотягнута	$1{,}3 \cdot 10^5$	$4{,}9 \cdot 10^4$	—
» лита	$0{,}84 \cdot 10^5$	—	—
Бронза фосфориста катана	$1{,}15 \cdot 10^5$	$4{,}2 \cdot 10^4$	0,32...0,35
Бронза марганцевиста катана	$1{,}1 \cdot 10^5$	$4{,}0 \cdot 10^4$	0,35
Бронза алюмінієва лита	$1{,}05 \cdot 10^5$	$4{,}2 \cdot 10^4$	—
Латунь холоднотягнута	$(0{,}91...0{,}99)\,10^3$	$(3{,}5...3{,}7)\,10^4$	0,32...0,42
Латунь корабельна катана	$1{,}0 \cdot 10^5$	—	0,36
Алюміній катаний	$0{,}69 \cdot 10^5$	$(2{,}6...2{,}7)\,10^4$	0,32...0,36
Дріт алюмінієвий тягнутий	$0{,}7 \cdot 10^5$	—	—
Дуралюмін катаний	$0{,}71 \cdot 10^5$	$2{,}7 \cdot 10^4$	—
Цинк катаний	$0{,}84 \cdot 10^5$	$3{,}2 \cdot 10^4$	0,27
Свинець	$0{,}17 \cdot 10^5$	$0{,}70 \cdot 10^4$	0,42
Лід	$0{,}1 \cdot 10^5$	$(0{,}28...0{,}3)\,10^4$	—
Скло	$0{,}56 \cdot 10^5$	$2{,}2 \cdot 10^4$	0,25
Граніт	$0{,}49 \cdot 10^5$	—	—
Вапняк	$0{,}42 \cdot 10^5$	—	—
Мармур	$0{,}56 \cdot 10^5$	—	—
Пісковик	$0{,}18 \cdot 10^5$	—	—
Кам'яна кладка з граніту	$(0{,}09...0{,}1)\,10^5$	—	—
» » з вапняку	$0{,}06 \cdot 10^5$	—	—
» » з цегли	$(0{,}027...0{,}030)\,10^5$	—	—
Бетон при границі міцності, МПа,			
10	$(0{,}146...0{,}196)\,10^5$	—	0,16...0,18
15	$(0{,}164...0{,}214)\,10^5$	—	0,16...0,18
20	$(0{,}182...0{,}232)\,10^5$	—	0,16...0,18
Деревина вздовж волокон	$(0{,}1...0{,}12)\,10^5$	$0{,}055 \cdot 10^4$	—
» поперек волокон	$(0{,}005...0{,}01)\,10^5$	—	—
Каучук	$0{,}00008 \cdot 10^5$	—	0,47
Текстоліт	$(0{,}06...0{,}1)\,10^5$	—	—
Гетинакс	$(0{,}1...0{,}17)\,10^5$	—	—
Бакеліт	$(2...3)\,10^3$	—	0,36
Віхомліт (ИМ-44)	$(40...42)\,10^2$	—	0,37
Целулоїд	$(14{,}3...27{,}5)\,10^2$	—	0,33...0,38

Додаток 10

Орієнтовні значення основних допустимих напружень на розтяг і стиск

Матеріал	Допустиме напруження, МПа, на розтяг	стиск
Чавун сірий у відливках	28...80	120...150
Сталь Ст2	140	
» Ст3	160	
» Ст3 у мостах	140	
Сталь машинобудівна (конструкційна) вуглецева	60...250	

<table>
<tr><th rowspan="2">Матеріал</th><th colspan="2">Допустиме напруження, МПа, на</th></tr>
<tr><th>розтяг</th><th>стиск</th></tr>
<tr><td>Сталь машинобудівна (конструкційна)
легована</td><td colspan="2">100...400 і вище</td></tr>
<tr><td>Мідь</td><td colspan="2">30...120</td></tr>
<tr><td>Латунь</td><td colspan="2">70...140</td></tr>
<tr><td>Бронза</td><td colspan="2">60...120</td></tr>
<tr><td>Алюміній</td><td colspan="2">30...80</td></tr>
<tr><td>Бронза алюмінієва</td><td colspan="2">80...120</td></tr>
<tr><td>Дуралюмін</td><td colspan="2">80...150</td></tr>
<tr><td>Текстоліт</td><td colspan="2">30...40</td></tr>
<tr><td>Гетинакс</td><td colspan="2">50...70</td></tr>
<tr><td>Фанера бакелізована</td><td colspan="2">40...50</td></tr>
<tr><td>Сосна вздовж волокон</td><td>7...10</td><td>10...12</td></tr>
<tr><td>» поперек волокон</td><td>—</td><td>1,5...2</td></tr>
<tr><td>Дуб уздовж волокон</td><td>9...13</td><td>13...15</td></tr>
<tr><td>» поперек волокон</td><td>—</td><td>2...3,5</td></tr>
<tr><td>Кам’яна кладка</td><td>до 0,3</td><td>0,5...4</td></tr>
<tr><td>Цегляна кладка</td><td>до 0,2</td><td>0,6...2,5</td></tr>
<tr><td>Бетон</td><td>0,1...0,7</td><td>1,0...9</td></tr>
</table>

Додаток 11

Допустимі напруження на зріз для заклепочних і зварних з’єднань

Тип з’єднання	Напруження на зріз, МПа
Заклепочне:	
основні елементи із сталі 20	100
заклепка в розсвердлених отворах (клас В)	140
заклепка в продавлених отворах (клас С)	100
Зварне:	
зварювання ручне, електроди з тонкою обмазкою	80
те саме, електроди з товстою обмазкою	110
зварювання автоматичне	110

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Биргер И. А., Мавлютов Р. Р.* Сопротивление материалов. — М. : Наука, 1986. — 560 с.
2. *Писаренко Г. С., Можаровский Н. С.* Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. — К. : Наук. думка, 1981. — 496 с.
3. *Прочность* материалов и элементов конструкций в экстремальных условиях: В 2 т. / Под ред. Г. С. Писаренко. — К. : Наук. думка, 1980. — Т. 1—2.
4. *Феодосьев В. И.* Сопротивление материалов. — М. : Наука, 1986. — 512 с.
5. *Сопротивление* материалов / Г. С. Писаренко, В. А. Агарев, А. Л. Квитка и др.; Под ред. акад. АН УССР Г. С. Писаренко. — К. : Вища шк., 1986. — 775 с.
6. *Писаренко Г. С., Яковлев А. П, Матвеев В. В.* Справочник по сопротивлению материалов. — К. : Наук. думка, 1988. — 736 с.
7. *Пособие* к решению задач по сопротивлению материалов / И. Н. Миролюбов, С. А. Енгалычев, Н. О. Сергиевский и др. — М. : Высш. шк., 1985. — 398 с.
8. *Сборник* задач по сопротивлению материалов / Н. М. Беляев, Л. А. Белявский, Я. И. Кипнис и др; Под ред. В. К. Качурина. — М. : Наука, 1970. — 431 с.
9. *Опір* матеріалів з основами теорії пружності й пластичності: У 2 ч., 5 кн. / За ред. В. Г. Піскунова. — К. : Вища шк., 1994—1995.
10. *Барданов Ю. М.* Курс сопротивления материалов в структурно-логических схемах. — К. : Вища шк. / Головное изд-во, 1988. — 215 с.
11. *Цурпал И. А.* Краткий курс сопротивления материалов. — К. : Вища шк. Головное изд-во, 1989. — 311 с.
12. *Писаренко Г. С, Лебедев А. А.* Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. — К. : Наук. думка, 1976. — 416 с.
13. *Прочность*, устойчивость, колебания: Справ.: В 3 т. / Под ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко. — М.: Машиностроение, 1968. — Т. 1. — 831 с.