Міністерство освіти і науки України
Національний технічний Університет України
«Київський політехнічний інститут»

Прикладна механіка

Методичні вказівки
до практичних занять для студентів усіх форм навчання
технічних факультетів

Затверджено на засіданні кафедри
Динаміки і міцності машин та опору матеріалів
Протокол № 5 від 18.06.2009

Київ-2009

Методичні вказівки до практичних занять для студентів усіх форм навчання технічних факультетів. / Укл. В. О. Петрик, О. В. Тимошенко. – К.: НТУУ «КПІ», 2010,с. 113

Методичні вказівки
до практичних занять з прикладної механіки
для студентів усіх форм навчання
технічних факультетів

Укладачі: к.т.н., доц. Петрик Владислав Олександрович
к.т.н., асистент Тимошенко Олександр Вікторович

Відповідальний редактор: Бобир М. І., доктор техн. наук, професор

Рецензент: Луговський О. Ф., доктор техн. наук, професор.

Вступ

Прикладна механіка складає теоретичну основу сучасного машинобудування та формує загальноконструкторську підготовку інженерів.

Мета методичних вказівок – надати допомогу студентам технічних факультетів для кращого засвоєння лекційного матеріалу курсу та набуття навичок для самостійної роботи у розв’язанні практичних задач.

Курс «Прикладна механіка» складається з трьох розділів: І Теорія механізмів та машин, ІІ Опір матеріалів, ІІІ Деталі машин.

Перший розділ є одним з важливих розділів прикладної механіки, у якому вивчають методи дослідження (аналізу) та проектування (синтезу) механізмів та машин, розглядається структура, кінематика та динаміка плоских важільних механізмів.

Другий розділ вивчає методи розв’язку задач на міцність, жорсткість при деформаціях розтягу-стиску, зрізу та зминання, крученні та згину, геометричних характеристик складних плоских перерізів, а також на визначення прогину та кута повороту перерізу методом початкових параметрів і правилом Верещагіна з числовими прикладами.

Третій розділ розглядає основні кінематичні, геометричні, силові параметри хвильових зубчастих передач із розв’язанням конкретних числових задач, а також викладено деякі розділи науки допусків та посадок. Розглянуте нерухоме з’єднання двох деталей, яке необхідне для передачі осьової сили та крутного моменту.

Для засвоєння викладеного матеріалу рекомендовані приклади для самостійного розв’язання.

І. ТЕОРІЯ МЕХАНІЗМІВ ТА МАШИН

1. Структура, кінематика та динаміка плоских механізмів

Для проведення структурного аналізу механізму складається його структурна схема. Це графічне зображення механізму за допомогою умовних зображень ланок та кінематичних пар (КП) без використання масштабу (мірила).

Для назви ланок користуються правилами:

а) ланку, яка обертається навколо стояка, називають кривошипом;

б) ланку, яка здійснює плоско-паралельний рух і ні однією КП не пов'язана зі стояком, називають шатуном;

в) ланку, яка здійснює коливальний рух навколо стояка, називають коромислом;

г) ланку, яка виконує зворотно-поступальний рух відносно нерухомої напрямної, називають повзуном;

д) ланку, яка виконує попередній рух, але відносно рухомої напрямної, називається кулісним каменем, а сама напрямна – кулісою.

Степінь рухомості (вільності) плоских механізмів визначають за формулою Чебишева П. Л.:

$$W = 3 \cdot n - 2 \cdot p_5 - p_4,$$

де n – кількість рухомих ланок у механізмі;

p_5 – кількість КП V класу, або однорухомих;

p_4 – кількість КП IV класу, або дворухомих.

Степінь рухомості, це число, яке показує, скільком ланкам необхідно задати рух, щоб усі ланки виконували задані рухи по відомих траєкторіях, або число, яке показує кількість узагальнюючих координат (див. приклад).

Виконати структурний аналіз механізму означає встановити, з яких груп Ассура складається механізм і в якій послідовності вони приєднані до вихідного механізму. Встановити клас і порядок механізму.

Для виконання цієї задачі необхідно знати, що собою представляють групи Ассура і як створюється будь-який механізм.

За Ассуром-Артоболевським будь-який механізм створюється шляхом послідовного приєднання до вихідного механізму кінематичних пар Ассура.

Групою Ассура називається кінематичний ланцюг, який складається тільки з рухомих ланок та КП V класу, які будучи приєднаними до стояка (нерухомої ланки) мають степінь вільності $W = 0$.

Групи Ассура характеризуються класом і порядком.

Порядок групи визначається кількістю вільних повідків із шарнірами, до яких можливо приєднатися (рис. 1).

Клас групи визначається кількістю КП найскладнішого замкнутого контуру, в якому відсутні внутрішні побудови (рис. 1).

Для виділення з механізму груп Ассура необхідно знати ознаки таких груп: число ланок у групі парне; степінь вільності групи завжди дорівнює нулю; степінь вільності залишкового механізму, тобто після від'єднання групи, незмінний.

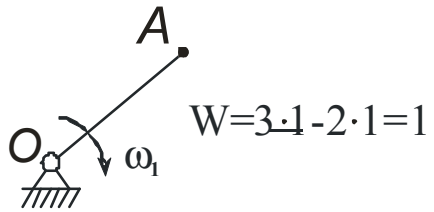


Рис. 1

За вихідний механізм у класифікації Ассура-Артоболевського прийнято механізм I класу і I порядку, це кривошип OA.

Найпростіші групи Ассура (рис. 2) : а, б, в, г – групи II класу і II порядку; д – група III класу і III порядку; е – група IV класу (A, B, C, D) і III порядку.

На рис. 2, д замкнутий контур ABC, три КП, тобто III клас. Три поводки AD, BE, CF з кінематичними парами DEF. е) – найскладніший замкнутий контур без внутрішніх побудов це $ABCD$ з 4 КП, а не $MANBOCPD$, так як в ньому є внутрішні побудови – це ланки AD, AB, BC, DC. На чотирьох поводках ME, NL, OK, PF відсутня одна КП – L, тому група III порядку. Кінематичні групи а, б, в, г визнані II класу, оскільки ланка AB, або інша має замкнутий контур, який позначено на AB пунктиром і в ньому дві КП.

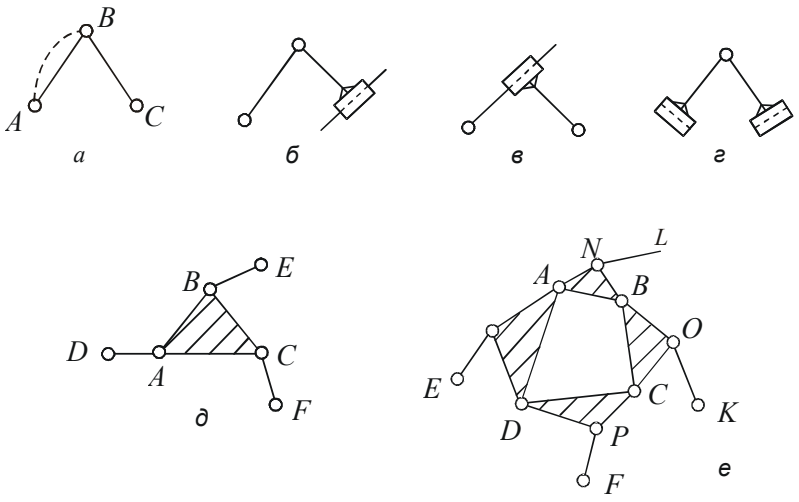


Рис. 2

Виділення з механізму групи Ассура доцільно починати з ланки, яка найвіддаленіша від входу механізму.

Клас і порядок механізму визначається класом і порядком найскладнішої групи, яка входить у склад цього механізму.

Приклад

Виконати структурний аналіз механізму (рис. 3).

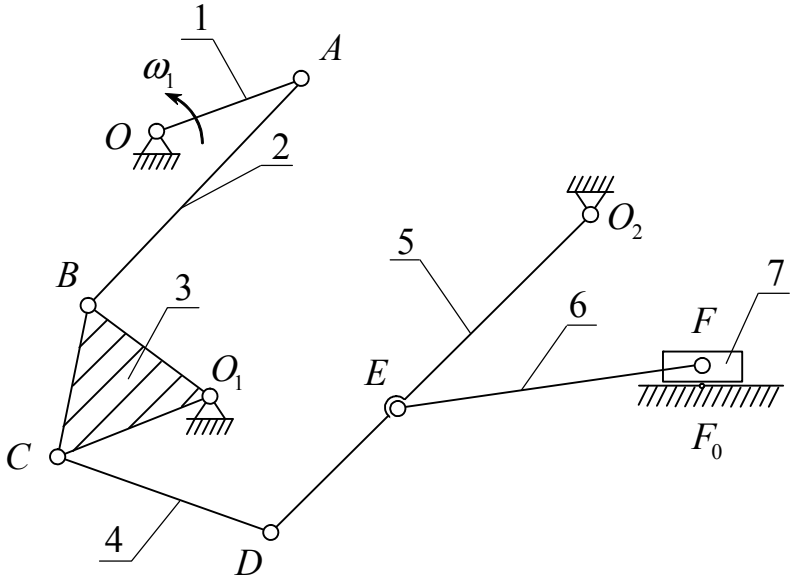


Рис. 3

Розглядуваний механізм має сім рухомих ланок:

OA – кривошип;AB, CD, EF – шатуни; O_1CB, O_2D – коромисла; *F* – повзун; O, O1, O2, F_0 – стояки (корпус). Ланки з'єднані десятьма КП V класу: O, A, B, O_1,C, D, E, O_2, F, F_0.

Степінь вільності механізму:

$$W = 3 \cdot n - 2 \cdot p_5 - p_4,$$

при $n = 7$ – кількість рухомих ланок;

$p_5 = 10$ –кількість КП V класу;

$p_4 = 0$ – кількість КП IV класу.

$$W = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 10 = 1$$

Це означає, що для приведення в рух усіх ланок необхідно мати одну вхідну ланку і задати їй рух. Це ланка ОА.

Розкладемо механізм на групи Ассура. Найвіддаленішою ланкою від ОА є повзун F. Починаючи з нього і враховуючи властивості груп Ассура, відокремлюємо дві ланки F та EF та три КП – це E, F і F_0.

Рис.4

Зарисуємо можливу групу Ассура точно в такому положенні, яке вона займає в механізмі (рис. 4).

Степінь вільності можливої групи:

$W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0;$

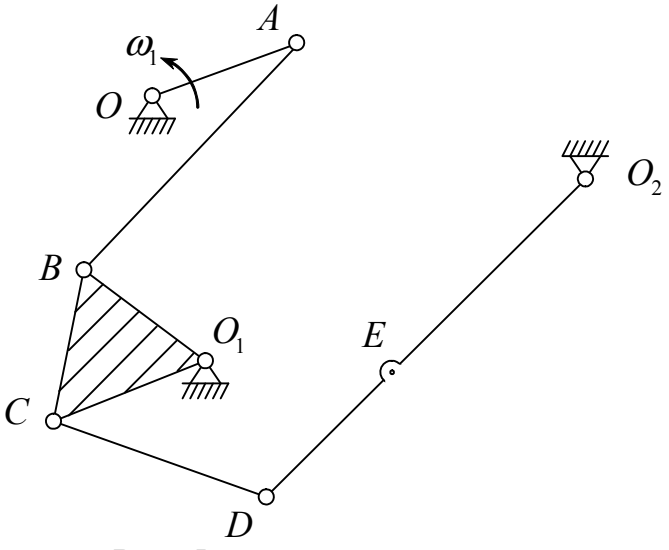


Рис. 5

Залишковий механізм матиме вигляд на рис. 5.

Його степінь вільності при $n = 5, p_5 = 7$: $W = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1$, тобто незмінна.

Це підтверджує, що група, складена з 6 та 7 ланок, є група Ассура II класу і II порядку (див. рис. 1, б). Далі найвіддаленішою ланкою від вхідної ОА є ланка DO_2.

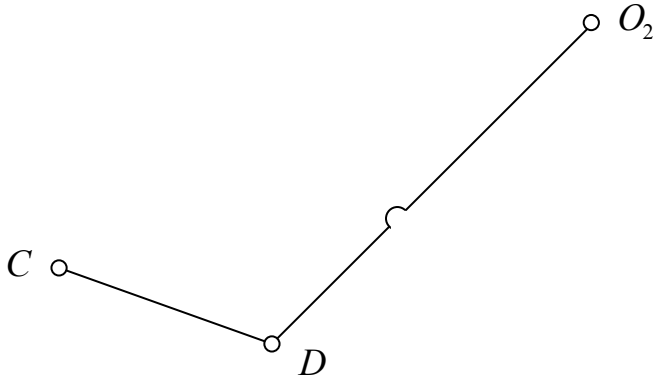


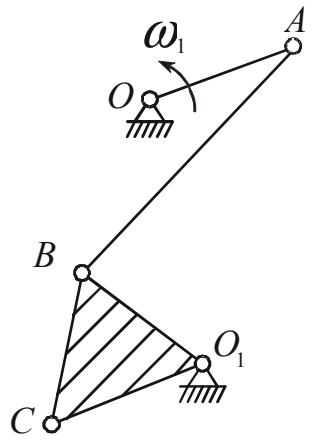
Рис.6

Відокремлюємо можливу групу Ассура та перевіряємо (рис. 6).

У цьому випадку дві ланки CD та DO_2 і три КП C, D, O_2.

Степінь вільності:

$W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0$.



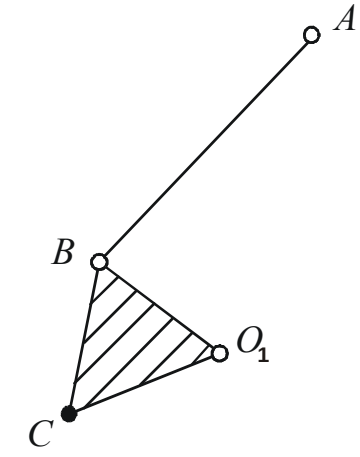
а

Залишковий механізм має три рухомі ланки та чотири КП (рис.), тобто $n = 3, p_5 = 4$.

Степінь вільності:

$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$.

Степінь вільності незмінний, це підтверджує що дві ланки CD та DO_2 з трьома КП C, D, O_2 створюють групу Ассура II класу та II порядку (див. рис. 1, а).

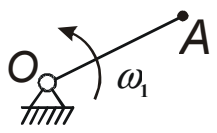


б

Знову відокремлюємо можливу групу Ассура, починаючи з найвіддаленішої ланки, тобто ланки DCB.

У цьому випадку маємо дві ланки АВ та BCO_1 і три КП А, В, O_1 (рис. 7б).

Порівнюючи цю групу з попередньою, уже перевіреною, бачимо, що вона подібна, тобто це група Ассура II класу, II порядку (див. рис.1, а).



в

Рис.7

Залишковий механізм - це вихідний механізм за класифікацією Ассура-Артоболевського. У цьому механізмі (рис. 7в) $n = 1, p_5 = 1$.

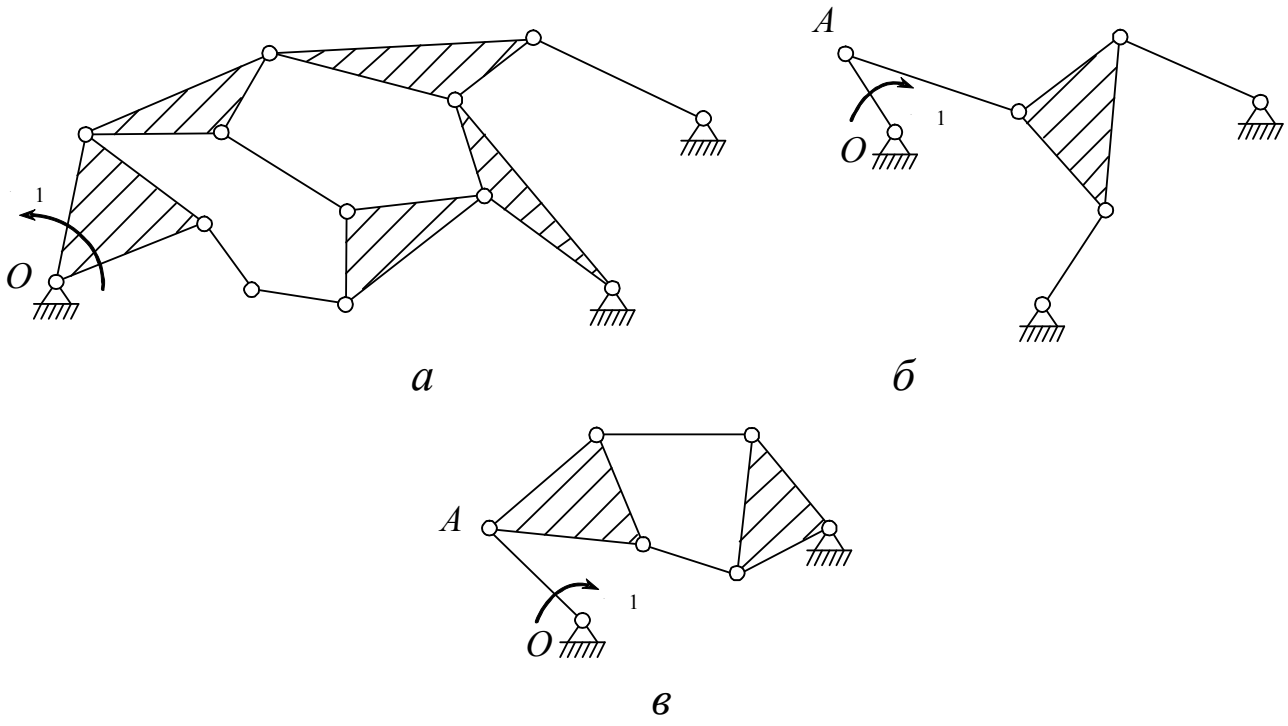
Степінь вільності: $W = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1$. Як бачимо, степінь вільності незмінний.

Висновок

Розглядуваний механізм створений шляхом послідовного приєднання до вихідного механізму ОА трьох кінематичних груп Ассура.

Кожна із розглядуваних груп є групою II класу та II порядку. Це означає, що і механізм в цілому II класу, II порядку.

Для самостійної роботи пропонується виконати структурний аналіз механізмів на рис. 8.



а *б* *в*

Рис. 8

2. Кінематичне дослідження механізму

2.1. Основні завдання кінематичного дослідження

Основними завданнями кінематичного дослідження (КД) механізму є:

а) побудова планів положення механізму;

б) побудова траєкторії руху точки;

в) визначення величини і напрямку лінійних швидкостей та прискорень точок механізму (V, a);

г) визначення величини і напрямку кутових швидкостей та прискорень ланок механізму (ω,ε).

Для розв'язання цих завдань використовують три основні методи КД:

- графічний, з найменшою точністю та трудомісткістю;

- графоаналітичний, з достатньою точністю, найпоширеніший;

- аналітичний, найточніший, дуже трудомісткий, використовується, як правило, в наукових дослідженнях.

Кінематичне дослідження механізмів здійснюється на кінематичних схемах, а тому передбачає використання масштабного коефіцієнта.

2.2. Масштабний коефіцієнт

Масштабний коефіцієнт μ, це величина, ціла або дробова, яка показує відношення дійсної фізичної величини, вираженої у відповідній розмірності, до відрізка, який виражений в міліметрах і на графіку показує цю фізичну величину. Наприклад:

$$\mu_l = \frac{l_{OA}}{OA},$$

де l_{OA} – дійсна довжина ланки, *м*;

OA – довжина відрізка, який зображає кривошип, *мм*;

Масштабний коефіцієнт швидкостей, для побудови плану швидкостей:

$$\mu_V = \frac{V_A}{pa},$$

Масштабний коефіцієнт прискорень, при побудові плану прискорень:

$$\mu_a = \frac{a_A}{\pi a}.$$

При масштабному коефіцієнті завжди проставляють індекс, який вказує на належність масштабного коефіцієнта.

Масштабний коефіцієнт - це не стандартна величина, але, як правило, рекомендована, тобто це цифра, яку зручно використовувати в подальших математичних розрахунках.

Наприклад: 0,1; 0,01; 0,2; 0,02; 0,5; 0,05; 1; 2; 5; ...

2.3. Побудова планів положень механізму

План положення механізму - це кінематична схема механізму, зафіксована в довільний момент часу, або для якогось значення узагальненої координати, або для якогось положення кривошипа OA.

Зазвичай плани положень механізму будують для декількох (12; 24) рівновіддалених положень вхідної ланки OA.

Оскільки кінематичне дослідження механізму передує динамічному дослідженню, то при побудові плану положень механізму знаходять крайні положення робочої ланки, а відповідно і точки A, кінця кривошипа. Із двох крайніх положень точки *A*, одне припускають за нульове A_0, починаючи з якого траєкторію руху точки A_0, тобто коло, ділять на рівні частини (12; 24) у напрямку ω_1.

Робочою ланкою в механізмі вважають ланку, яка долає силу корисного опору $\overline{F}_{\text{К.О.}}$. За нульове положення механізму (A_0) приймають таке крайнє положення робочої ланки, а значить і точки *A*, починаючи з якого ланка здійснює рух проти сил корисного опору. Це точка, яка визначає початок робочого ходу.

Є два методи визначення крайніх положень робочої ланки:

1) розташуванням кривошипу ОА та шатуна АВ на одній прямій (рис. 9);

2) побудовою траєкторії руху необхідної точки (рис. 10).

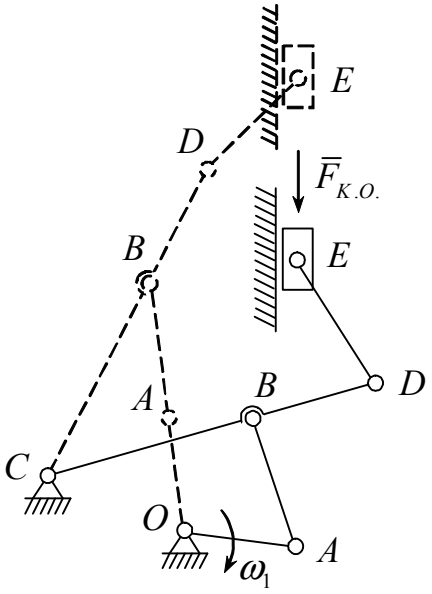


Рис. 9

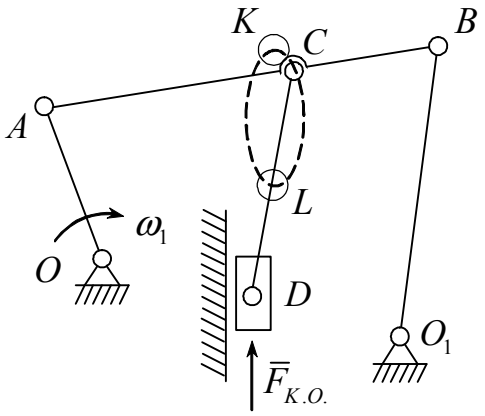


Рис. 10

На рис. 9 робочою ланкою є повзун E. Він переміщується по напрямній вертикально, знаходячись при цьому в якомусь найвищому положенні (це одне крайнє положення) і в найнижчому положенні (це друге крайнє положення).

Для знаходження цих положень кривошип ОА і шатун АВ розташовують на одній прямій:

а) витягнувши OA і AB в одну лінію, коли $R_1 = OA + AB$;

б) шатун AB перекриває кривошип OA, коли $R_2 = AB - OA$.

При побудові планів положень задають довжини всіх ланок, а необхідні нові положення точок при русі механізму знаходять на перетині траєкторій руху точок.

На рис. 9 пунктиром показано знаходження найвищого положення точки E при витягнутих OA і AB.

На рис. 10 робочою ланкою є повзун D. Він також здійснює вертикальний зворотно-поступальний рух відносно напрямної.

Є найвище і найнижче положення повзуна D, і знайти його попереднім методом неможливо. У даному випадку необхідно побудувати траєкторію руху точки С. Для цього довільно будують декілька послідовних кінематичних схем (чим більше схем, тим точніша траєкторія). На кожній схемі знаходять точку C. Знайдені положення з'єднують плавною кривою. На рис. 10 пунктиром показана умовна траєкторія у вигляді овалу.

Уже наочно видно, що коли точка C проходила ділянки К і L, то повзун займав відповідно найвище і найнижче положення.

Використовуючи метод проб, в зоні К довільно вибирають положення точки С. Для цього положення точки C будують кінематичну схему механізму. Будують план швидкостей. Якщо вибрана точка С відповідає крайньому положенню, то швидкість точки D, тобто $V_D = 0$. Для вибраної точності задають параметр $pd \approx 2$ *мм*, наприклад, вважається нульовим. Якщо отримане значення $V_D = pd \cdot \mu_V$ не відповідає нулю, вибрану точку C в зоні К зміщують вліво чи вправо. Знову будують для нового положення точки C кінематичну схему ме-

ханізму і план швидкостей. Аналогічно робиться і в зоні L до отримання $V_D = 0$.

Крайні положення робочої ланки визначають крайні положення точки A з яких вибирають A_0.

2.4. Визначення лінійної швидкості точки механізму та кутової швидкості ланки методом планів швидкостей

Знаючи закон руху вхідної ланки та довжини ланок механізму, можна визначити величину та напрямок лінійної швидкості будь-якої точки та кутову швидкість будь-якої ланки механізму шляхом побудови плану швидкостей.

Побудова плану швидкостей та подальше його читання та використання значно спрощується із знанням властивостей плану швидкостей:

1. Вектори, які виходять із полюса плану швидкостей « p », визначають величину і напрямок абсолютної швидкості точки механізму в масштабі плану швидкостей. Точки плану швидкостей, які відповідають нерухомим точкам механізму, знаходяться в полюсі.

2. Вектори, які з'єднують кінці векторів абсолютних швидкостей, визначають величину і напрямок відносної швидкості точки в масштабі плану швидкостей.

3. Теорема подібності. Вектори відносних швидкостей на плані швидкостей створюють фігуру, подібну однойменній жорсткій фігурі, створеній відрізками на кінематичній схемі, але повернуту відносно останньої на кут 90° у напрямку миттєвої швидкості жорсткої фігури.

Із теоретичної механіки відомо, що абсолютна, тобто сума*рна* швидкість будь-якої точки плоского механізму визначається геометричною сумою двох швидкостей переносного та відносного рухів. Тобто:

$$\underset{\text{абс.}}{\bar{V}_A} = \underset{\text{пер.}}{\bar{V}_O} + \underset{\text{відн.}}{\bar{V}_{AO}}. \qquad (1)$$

Згідно з визначенням і використанням формули (1), можна сказати, що для отримання вектора V_A необхідно кінець вектора V_O продовжити вектором V_{AO},

а вектор, замикаючий початок вектора V_O та кінець вектора V_{AO}, визначить величину та напрямок абсолютної швидкості точки A, тобто V_A.

Слід зауважити, що перша складова загальної формули із визначення швидкості будь-якої точки механізму (1), – завжди відомий вектор. Якщо це не так, то рівняння (1) складене неправильно.

Друга складова основного рівняння - відносна швидкість. Вона має відомий напрямок: це завжди перпендикуляр до розглядуваної ланки при обертальному відносному русі.

Для рівняння (1), V_{AO} - це $\perp$ до АО.

Відносна швидкість визначається по величині добутком кутової швидкості ланки на дійсну довжину ланки.

Вважаючи ОА кривошипом, ланкою 1, відносна швидкість:

$$V_{AO} = \omega_1 \cdot l_{AO}. \qquad (2)$$

Подальше розглядання цього питання доцільне на прикладі.

Приклад

Визначити абсолютні та відносні швидкості точок та кутові швидкості ланок механізму (рис. 11) шляхом побудови плану швидкостей.

Відомо:

$l_{OA} = 0,4$ м; $l_{AB} = 0,5$ м; $l_{O_1B} = 0,25$ м; $l_{O_1C} = 0,5$ м; $l_{CD} = 0,25$ м; $l_{O_1D} = 0,5$ м;

$l_{DE} = 0,6$ м; $\varphi_1 = 55^\circ$; $c = 0,15$ м; $a = 0,4$ м; $b = 0,2$ м; $n_1 = 120$ об/хв.

Центри ваги: для трикутника – на перетині медіан, для інших ланок – на середині ланки. Візьмемо довжину відрізка, що на схемі позначає кривошип $OA = 40$ *мм*, тоді:

$$\mu_l = \frac{l_{OA}}{OA} = \frac{400\text{мм}}{40\text{мм}} = 10\frac{\text{мм}}{\text{мм}} = 0,01\ \frac{\text{м}}{\text{мм}};$$

Визначимо довжини відрізків для побудови кінематичної схеми, враховуючи $OA = \frac{l_{OA}}{\mu_l}$.

При цьому:

$AB = \dfrac{500\text{мм}\,\text{Ч}\text{мм}}{10\text{мм}} = 50$ мм; $O_1B = 25$мм; $O_1C = 50$ мм; $CD = 25$ мм;

$O_1D = 50$ мм; $DE = 60$ мм; $c = 15$ мм; $a = 40$ мм; $b = 20$ мм.

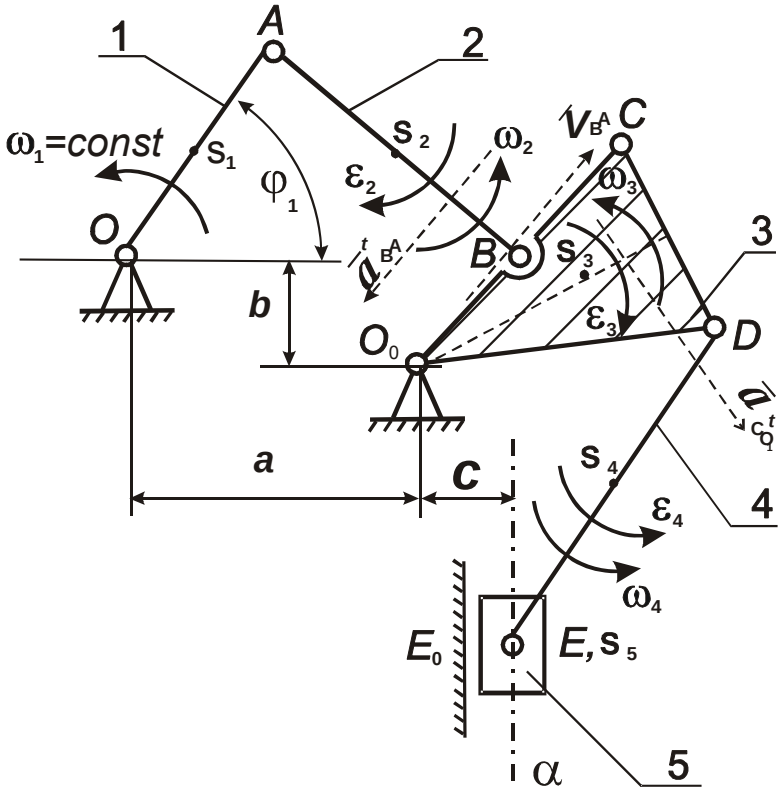


Рис. 11

Першою рухомою точкою в механізмі є точка A. Для визначення швидкості цієї точки використовуємо загальну формулу (1):

$$\bar{V}_A = \bar{V}_O + \bar{V}_{AO}.$$

Перша складова $\bar{V}_O = 0$. Це означає, що $\bar{V}_A = \bar{V}_{AO}$, тобто абсолютна швидкість точки A визначається величиною і напрямком відносної швидкості.

$$\bar{V}_A = \bar{V}_{AO} = \bar{\omega}_1 \cdot l_{AO} = 12{,}56 \cdot 0{,}4м = 5{,}024 \text{ м/с},$$

де $\omega_1 = \dfrac{\pi n_1}{30} = \dfrac{n_1}{9{,}55} = 12{,}56$ рад/с.

Напрямок швидкості – перпендикуляр до ланки ОА (рис. 12), узгоджений з напрямком ω_1. Для побудови плану швидкостей виберемо полюс плану « p ».

Визначимо масштабний коефіцієнт побудови. Якщо задамо параметр відрізку $\ll pa \gg = 50$ мм, який на плані буде зображати V_A, тоді:

$$\mu_V = \frac{V_A}{pa} = \frac{5{,}024}{50} = 0{,}1 \ \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}.$$

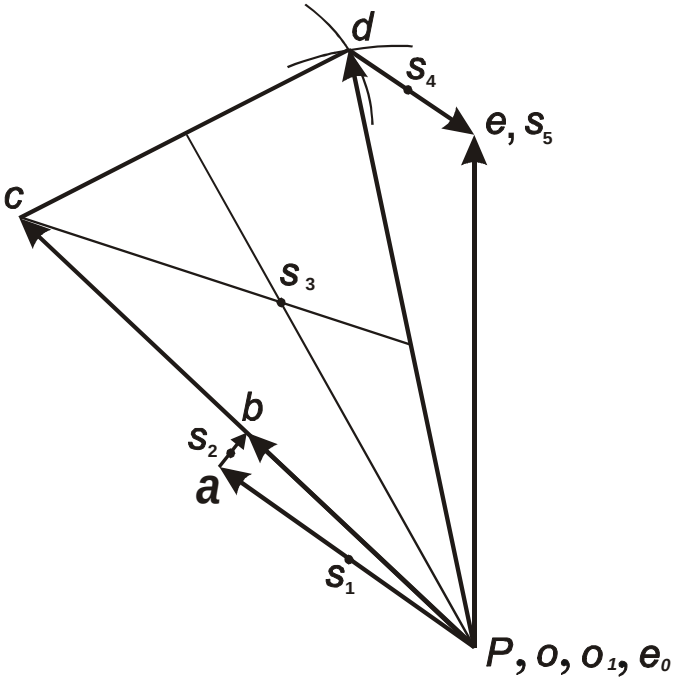


Рис. 12

Наступна в механізмі точка B. Головне рівняння, що визначає швидкість точки B, матиме вигляд:

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA} \tag{3}$$

Перша складова V_A – відомий вектор. Друга складова:

$$V_{BA} = \omega_2 \cdot l_{BA}. \tag{4}$$

Визначити відносну швидкість V_{BA} неможливо через відсутність значення ω_2.

Через це потрібно записати ще одне рівняння із визначення швидкості тієї ж точки B, але відносно точки O_1. У зв'язку з цим існує правило вибору наступної за точкою A точки. Тобто це повинна бути точка, яка належить двом ланкам, і в кожній із цих ланок є точка з відомою швидкістю. У нашому випадку точка B належить двом ланкам: АВ – де відома V_A і BO_1 – де відома $V_{O_1} = 0$.

Таким чином, маємо систему двох рівнянь із визначення швидкості точки B:

$$\begin{cases} \bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA} \\ \bar{V}_B = \bar{V}_{O_1} + \bar{V}_{BO_1} \end{cases} \tag{5}$$

За першим рівнянням необхідно кінець вектора V_A продовжити вектором V_{BA}, тобто перпендикуляром до ланки BA.

За другим рівнянням: кінець вектора $V_{O_1} = 0$, тобто нульового вектора, який знаходиться в полюсі, необхідно продовжити вектором V_{BO_1}, тобто перпендикуляром до ланки BO_1. На перетині цих двох ліній отримаємо точку «b« – кінець вектора швидкості $\bar{V}_B$ у точці B.

$$V_B = pb \cdot \mu_V = 50 \cdot 0{,}1 = 5\,\text{м/с} = V_{BO_1}$$

Наступна точка механізму - C. Швидкість цієї точки визначимо, використовуючи третю властивість плану швидкостей – теорему подібності.

На кінематичній схемі точка B знаходиться посередині відрізка O_1C. Це означає, що швидкість точки C, враховуючи пропорційність, буде в два рази більша:

$$V_C = 2 \cdot V_B = 10 \text{ м/с}.$$

Для визначення швидкості точки D знову скористаємося теоремою подібності. За теоремою трикутник O_1CD повинен бути подібним Δo_1cd на плані швидкостей, але повернутим відносно O_1CD на кут 90°. При побудові Δo_1cd необхідно виконати вимогу, за якої, наприклад, за рухом годинникової стрілки порядок літер на кінематичній схемі O_1CD однаковий з порядком однойменних літер на плані швидкостей, тобто o_1cd.

Побудову Δo_1cd можна виконати двома способами:

а) оскільки трикутники o_1cd і O_1CD взаємно перпендикулярні, то перпендикуляри з точки «c» до ланки CD та з точки «o_1» до O_1D на перетині створять точку «d»;

б) складанням пропорцій:

$$\frac{O_1C}{o_1c} = \frac{CD}{cd}, \text{ Звідки } cd = \frac{o_1c \cdot CD}{O_1C} = \frac{100 \cdot 25}{49} = 51 \text{ мм},$$

$$\frac{O_1C}{o_1c} = \frac{O_1D}{o_1d}, \text{ Звідки } o_1d = \frac{o_1c \cdot O_1D}{O_1C} = \frac{100 \cdot 50}{49} = 102 \text{ мм}.$$

Радіусами cd та o_1d з точок відповідно «c» та «o_1», зберігаючи умову послідовності літр Δo_1cd, проведемо дві дуги. На перетині отримаємо точку d:

$$V_D = pd \cdot \mu_V = 102 \cdot 0{,}1 = 10{,}2 \text{ м/с}.$$

Швидкість останньої точки E визначимо, склавши систему двох рівнянь, вважаючи що точка належить двом ланкам: ланці DE та EE_0.

Допоміжна точка E_0 знаходиться в центрі Землі, і відстань $EE_0 = \infty$. Але при розв'язанні подібних задач вважається, що точка в розглядуваний момент часу знаходитися під точкою E:

$$\begin{cases} \bar{V}_E = \bar{V}_D + \bar{V}_{ED} \\ \bar{V}_E = \bar{V}_{E_0} + \bar{V}_{EE_0}. \end{cases} \quad (6)$$

Розв'язуємо перше рівняння. Кінець вектора $\bar{V}_D$ (на плані швидкостей це вектор pd) продовжуємо вектором $\bar{V}_{ED}$, тобто перпендикуляром до ланки ED.

За другим рівнянням, вектор $\bar{V}_{E_0} = 0$ продовжено вектором $\bar{V}_{EE_0}$. Переміщення повзуна E відносно E_0 здійснюється за напрямною $\alpha - \alpha$. У цьому ж напрямку і швидкість. Тому з нульового вектора, тобто з полюса «p» проведемо вектор $\bar{V}_{EE_0}$ паралельно $\alpha - \alpha$. На перетині отримаємо точку «e».

$$V_E = pe \cdot \mu_V = 92 \cdot 0{,}1 = 9{,}2 \text{ м/с}.$$

Для визначення величини і напрямку кутових швидкостей ланок звернемося до відносних швидкостей, значення яких залежить від кутової швидкості ланки.

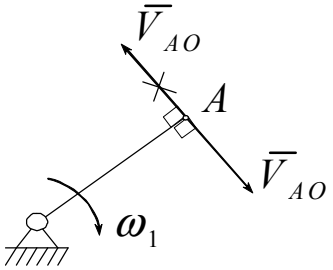


Рис. 12

Відносна швидкість $\bar{V}_{AO} = \bar{\omega}_1 \cdot l_{AO}$. Векторами в цій формулі будуть: в лівій частині - $\bar{V}_{AO}$, а в правій напрямок – $\bar{\omega}_1$. Це означає, що напрямок перпендикуляра $\bar{V}_{AO}$ до ланки ОА визначається напрямком $\bar{\omega}_1$, як показано на рис. 12.

При зворотньому розгляді, тобто, якщо відомий напрямок $\bar{V}_{AO}$, напрямок $\bar{\omega}_1$, погоджений з напрямком $\bar{V}_{AO}$, буде за рухом годинникової стрілки.

Враховуючи цю властивість, звернемося до інших відомих швидкостей для знаходження величини та напрямку кутових швидкостей інших ланок.

Ланка AB. Звернемося до рівняння із системи з визначення швидкості точки B відносно точки A. Тобто перша літера B визначає рухому точку, швидкість якої визначається, а друга A – нерухому, або умовно нерухому, відносно якої визначається швидкість точки B.

BA - це друга ланка, і з врахуванням цього відносна швидкість:

$$\bar{V}_{BA} = \bar{\omega}_2 \cdot l_{BA}, \text{ звідки } \bar{\omega}_2 = \frac{\bar{V}_{BA}}{l_{BA}}.$$

Користуючись планом швидкостей:

$$V_{BA} = ba \cdot \mu_V = 15 \cdot 0{,}1 = 1{,}5 \text{ м/с}.$$

Тоді $\bar{\omega}_2 = \dfrac{1{,}5 \text{ м/с}}{0{,}5 \text{ м}} = 3 \text{ с}^{-1}$.

Напрямок $\bar{V}_{BA}$ також визначається рівнянням:

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA},$$

або $\overline{pb} = \overline{pa} + \overline{ab}$.

У цьому рівнянні $\bar{V}_B(pb)$ є сумарним вектором і, за правилами складання векторів, напрямок вектора $\overline{ab}$ повинен бути від точки «a» до точки «b».Для визначення напрямку ω_2 необхідно вектор відносної швидкості $\bar{V}_{BA}$ із плану швидкості умовно перенести на ланку AB (рис. 8, показано пунктиром) поближче до рухомої точки B і розглянути обертальний рух цієї ланки під впливом $\bar{V}_{BA}$ відносно осі, яка проходить через центр ваги ланки S_2. Напрямок ω_2 представити дуговою стрілкою.

Аналогічно для ланки O_1CD. Скористаємось рівнянням:

$$\bar{V}_B = \bar{V}_{O_1} + \bar{V}_{BO_1}.$$

Із цього рівняння видно, що при $\bar{V}_{O_1} = 0$, абсолютна швидкість $\bar{V}_B$ визначається відносною за величиною і напрямком швидкістю, а враховуючи те, що O_1B – це частина ланки O_1C, то:

$$V_{BO_1} = \omega_3 \cdot l_{BO_1},$$

або $V_{CO_1} = \omega_3 \cdot l_{CO_1}$,

Звідки:

$$\omega_3 = \frac{V_{BO_1}}{l_{BO_1}} = \frac{V_{CO_1}}{l_{CO_1}} = \frac{5}{0,25} = \frac{10}{0,5} = 20 \text{ с}^{-1}.$$

Для визначення напрямку ω_3 вектор $\bar{V}_{CO_1} = \bar{V}_C$ умовно перенесемо на трикутну ланку поближче до рухомої точки С. Обертання навколо S_3 показано ω_3.

Знайти напрямок ω_4 для ланки DE допоможе рівняння:

$$\bar{V}_E = \bar{V}_D + \bar{V}_{ED},$$

або $\overline{pe} = \overline{pd} + \overline{de}$

Відносна швидкість ланки 4:

$$V_{ED} = \omega_4 \cdot l_{ED}.,$$

де V_{ED} визначаємо із плану швидкостей:

$$V_{ED} = de \cdot \mu_V = 18 \cdot 0,1 = 1,8 \text{ м/с}$$

Кутова швидкість:

$$\omega_4 = \frac{V_{ED}}{l_{ED}} = \frac{1,8 \frac{\text{м/с}}{\text{м}}}{0,6} = 3 \text{ с}^{-1}$$

Для визначення напрямку ω_4 відносну швидкість $\bar{V}_{ED}$ із плану швидкостей перенесемо умовно на ланку DE ближче до рухомої точки E і розглянемо обертальний рух ланки відносно S_4.

Отримаємо напрямок ω_4, який відповідає руху проти годинникової стрілки.

Остання ланка механізму, повзун E, не виконує обертальних рухів, тому, ω_5 відсутня.

2.5. Визначення лінійного прискорення точки механізму та кутового прискорення ланки методом плану прискорень

Відомо, що, знаючи закон руху вхідної ланки кривошипу OA та довжини всіх ланок, можна визначити вектори абсолютних прискорень будь-яких точок

механізму, величини та напрямки кутових прискорень ланок шляхом побудови плану прискорень.

Побудова плану прискорень та подальше його використання значно спрощується, якщо відомі властивості плану:

1. Вектори, які виходять із полюса плану прискорень «π», визначають величину і напрямок абсолютного прискорення точки механізму в масштабі плану прискорень.

Усі нерухомі точки механізму, прискорення яких дорівнюють нулю, розташовані в полюсі.

2. Вектори, які з'єднують кінці векторів абсолютних прискорень, визначають величину і напрямок повних відносних прискорень точок в масштабі плану прискорень.

3. Теорема подібності. Вектори повних відносних прискорень на плані прискорень складають фігуру, подібну жорсткій фігурі, взятій на кінематичній схемі механізму, але повернутій відносно останньої на кут $180-\alpha$, де $\alpha = \text{arctg}\dfrac{\varepsilon}{\omega^2}$, в напрямку миттєвого прискорення ланки.

Із теоретичної механіки відомо, що абсолютне прискорення точки визначається геометричною сумою двох прискорень переносного та відносного рухів:

$$\underset{\text{абс.}}{\overline{a}_{\text{A}}} = \underset{\text{пер.}}{\overline{a}_{\text{O}}} + \underset{\text{відн.}}{\overline{a}_{\text{AO}}}\,. \qquad (7)$$

На відміну від швидкостей складова $\overline{a}_{AO}$ визначає повне відносне прискорення. Повне відносне прискорення складається з двох складових: $\overline{a}^{n}_{AO}$ – нормальної, $\overline{a}^{t}_{AO}$ – тангенційної.

Враховуючи цю відмінність, загальна формула із визначення абсолютного, або сумарного прискорення точки матиме вигляд:

$$\overline{a}_{A} = \overline{a}_{O} + \overline{a}^{n}_{AO} + \overline{a}^{t}_{AO}\,. \qquad (8)$$

Розв'язання такого рівняння означає, що кінець першої складової $\overline{a}_{O}$ продовжується вектором $\overline{a}^{n}_{AO}$, а кінець цього вектора продовжується вектором тангенційної складової. Сумарний вектор $\overline{a}_{A}$ отримаємо, коли початок першого ве-

ктора $\overline{a}_O$ з'єднаємо з кінцем вектора $\overline{a}^t_{AO}$, і в цьому напрямку буде результуюче значення, тобто абсолютне прискорення розглядуваної точки.

Визначення сумарного прискорення потребує від нас знань, як визначити кожну складову загальної формули і куди її направити.

Загальний аналіз цієї формули показує, що:

1) перша складова – завжди відомий вектор;

2) друга складова – нормальне прискорення $\overline{a}^n$, визначається за величиною і напрямком;

3)третя складова – тангенційне прискорення, має відомий напрямок. Але для визначення цієї величини необхідно знати значення кутового прискорення кожної ланки.

Через відсутність цього параметру так само, як і при визначенні швидкостей, діє правило вибору наступної точки, і для неї записується система двох рівнянь.

Конкретно за складовими рівняння,де a^n_{AO} – нормальна складова, визначається:

$$a^n_{AO} = \frac{V^2_{AO}}{l_{AO}} = \frac{\omega_1^2 \cdot l^2_{AO}}{l_{AO}} = \omega_1^2 \cdot l_{AO}. \qquad (9)$$

Направляється нормальна складова вздовж ланки (якщо ланка - пряма лінія) від рухомої точки до нерухомої, або умовно нерухомої. Кінець вектора нормальної складової позначають буквою «n» з порядковим числом-індексом ($n_1; n_2; ...$). Відрізок, який зображає a^n на плані прискорень, визначають, як напрямок від A до O:

$$on_1 = \frac{a^n_{AO}}{\mu_a},$$

де a^t_{AO} – тангенційна складова.

Величина:

$$\overline{a}^t_{AO} = \overline{\varepsilon}_1 \cdot l_{AO}. \qquad (10)$$

Напрямок – перпендикуляр до розглядуваної ланки.

Нормальна і тангенційна складові взаємно перпендикулярні.

Для побудови плану прискорень, перш за все, визначимо прискорення точки A,користуючись основною формулою:

$$\overline{a}_A = \overline{a}_O + \overline{a}^n_{AO} + \overline{a}^t_{AO}. \qquad (11)$$

Точка O - нерухома точка, тому: $a_O = 0.$

$$a^t_{AO} = \varepsilon_1 \cdot l_{AO},$$

де $\varepsilon_1 = 0,$

при $\omega_1 = const,$

тому $a^t_{AO} = 0.$

Абсолютне прискорення точки A визначається за величиною і напрямком нормальної складової:

$$a_A = a^n_{AO} = \omega_1^2 \cdot l_{OA} = 12,56^2 \cdot 0,4 = 63,1 \text{ м/с}^2. \qquad (12)$$

Напрямок від A до O, $A \to O$. Якщо прискорення точки A на плані прискорень представити відрізком $\pi a = 63$ мм, то масштабний коефіцієнт плану прискорень визначиться, як:

$$\mu_a = \frac{a_A}{\pi a} = \frac{63,1}{63} = 1,0 \ \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}$$

З довільної точки π (рис. 10), полюса плану прискорень проводимо відрізок πa. Наступна точка B. Вона належить двом ланкам AB і BO_1, і в кожній ланці є точка з відомим прискоренням. Це точки A і O_1 відповідно.

Для визначення прискорення точки В запишемо систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} \overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}^n_{BA} + \overline{a}^t_{BA} \\ \overline{a}_B = \overline{a}_{O_1} + \overline{a}^n_{BO_1} + \overline{a}^t_{BO_1}. \end{cases} \qquad (13)$$

Перше рівняння. Для знаходження вектора $\overline{a}_B$ необхідно кінець вектора $\overline{a}_A$ продовжити вектором $\overline{a}^n_{BA}$, а кінець цього вектора продовжити вектором $\overline{a}^t_{BA}$. Вектор, що з'єднує початок вектора $\overline{a}_A$ і кінець вектора $\overline{a}^t_{BA}$, визначає вектор $\overline{a}_B$.

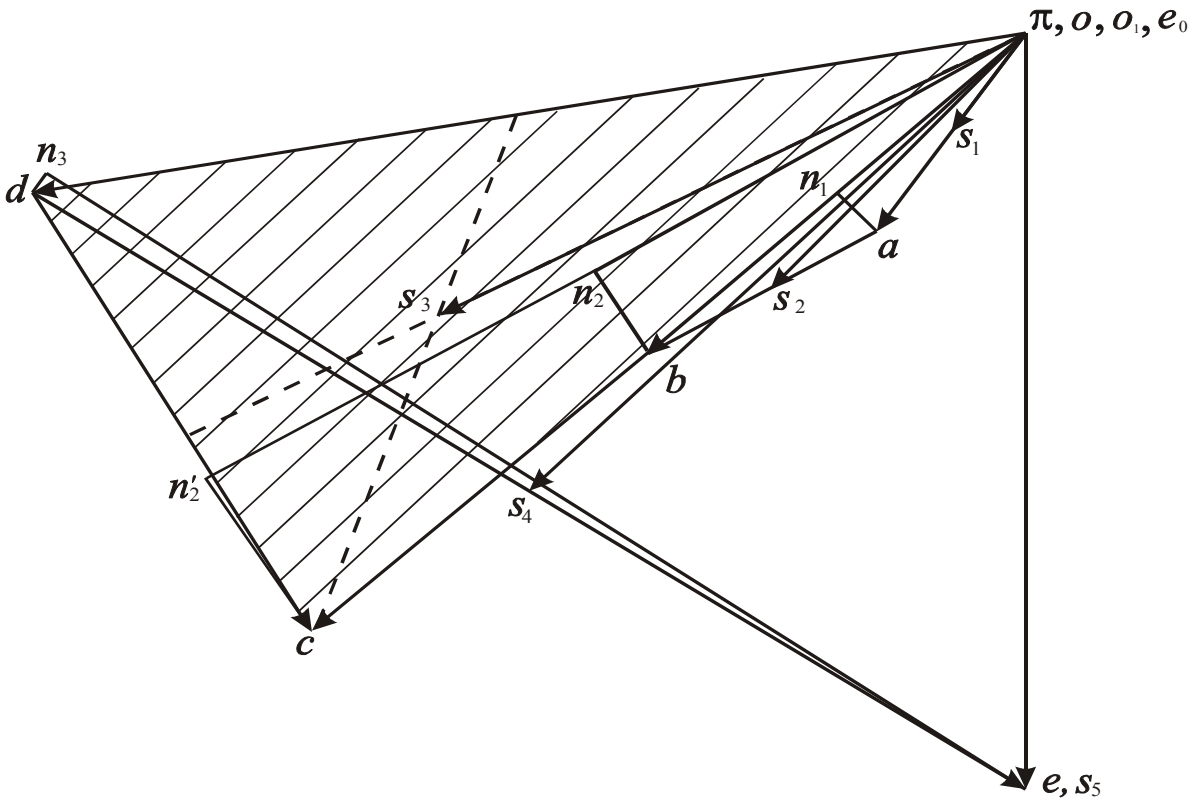


Рис. 13

Перший вектор $\bar{a}_A$ відомий за величиною і напрямком.

Другий вектор $\bar{a}^n_{BA}$ – дійсна величина з використанням плану швидкостей:

$$\bar{a}^n_{BA} = \frac{V^2_{BA}}{l_{BA}} = \frac{(ba \cdot \mu_V)^2}{BA \cdot \mu_l} = \frac{(1,5)^2}{0,5} = 4,5 \ \text{м/с}^2 .$$

Який відрізок буде зображати на плані прискорень цю величину:

$$an_1 = \frac{a^n_{BA}}{\mu_a} = \frac{4,5}{1,0} \frac{\left[\text{м/с}^2\right] \text{Ч} [\text{мм}]}{\left[\text{м/с}^2\right]} = 4,5 \text{ мм} .$$

Напрямок від B до A, $B \to A$.

Третій вектор:

$$\bar{a}^t_{BA} = \varepsilon_2 \cdot l_{BA} . \qquad (14)$$

Дійсне значення визначити неможливо через відсутність значення ε_2, але відомий напрямок – це перпендикуляр до ланки АВ, або до нормальної складової, до відрізка an_1. Аналогічно за другим рівнянням.

Перший вектор – відома величина і напрямок. $\bar{a}_{O_1} = 0$ – цей вектор знаходиться в полюсі π.

Другий вектор:

$$\overline{a}^{n}_{BO_1} = \frac{V^2_{BO_1}}{l_{BO_1}} = \frac{5^2}{0,25} = 100 \text{ м/с}^2 .$$

Відрізок, що буде зображати нормальну складову:

$$\pi n_2 = \frac{a^n_{BO_1}}{\mu_a} = \frac{100}{1} = 100 \text{ мм}.$$

Третій вектор, пов'язаний з третьою ланкою:

$$\overline{a}^{t}_{BO_1} = \varepsilon_3 \cdot l_{BO_1} . \qquad (15)$$

Через відсутністьі ε_3 визначити тангенційну складову поки неможливо.

Напрямок відомий, це перпендикуляр до ланки BO_1, або до відрізка πn_2. На перетині тангенційних складових $\overline{a}^{t}_{BA}$ і $\overline{a}^{t}_{BO_1}$ визначається положення точки в. Вектор, який виходить із полюса π до точки в , буде зображати: абсолютне прискорення точки В:

$$a_B = \pi b \cdot \mu_a = 103 \cdot 1 = 103 \text{ м/с}^2 .$$

Відрізок $n_1 b$ буде зображати величину і напрямок тангенційної складової $\overline{a}^{t}_{BA}$:

$$\overline{a}^{t}_{BA} = n_1 b \cdot \mu_a = 40 \cdot 1 = 40 \text{ м/с}^2 . \qquad (16)$$

а відрізок $n_2 b$ – величину і напрямок тангенційної складової $\overline{a}^{t}_{BO_1}$:

$$\overline{a}^{t}_{BO_1} = n_2 b \cdot \mu_a = 22 \cdot 1 = 22 \text{ м/с}^2 . \qquad (17)$$

Для визначення прискорення точки С скористаємося теоремою подібності.

Точка B лежить посередині відрізка O_1C, а тому прискорення точки С буде вдвічі більше, тобто:

$$a_C = 2a_B = 2 \cdot 103 = 206 \text{ м/с}^2 .$$

Прискорення точки D визначається за теоремою подібності, роблячи подібними $\Delta O_1 CD$ і $\Delta \pi cd$.

Складемо пропорції:

$$\frac{O_1C}{\pi c} = \frac{CD}{cd}, \text{ звідки } cd = \frac{\pi c \cdot CD}{O_1C} = \frac{206 \cdot 25}{50} = 103 \text{ мм}$$

$$\frac{O_1C}{\pi c}=\frac{O_1D}{\pi d},\ \text{звідки}\ \pi d=\frac{\pi c\cdot O_1D}{O_1C}=\frac{206\cdot 50}{50}=206\ \text{мм}.$$

Точку d знайдемо на перетині дуг радіусами 103 мм та 206 мм.

Прискорення точки D:

$$a_D=\pi d\cdot\mu_a=206\cdot 1=206\ \text{м/с}^2\,. \tag{18}$$

Прискорення точки E визначається із системи двох рівнянь:

$$\begin{cases}\overline{a}_E=\overline{a}_D+\overline{a}^n_{ED}+\overline{a}^t_{ED}\\ \overline{a}_E=\overline{a}_{E_0}+\overline{a}^n_{EE_0}+\overline{a}^t_{EE_0}.\end{cases} \tag{19}$$

У першому рівнянні перша складова $\overline{a}_D$ – відомий вектор.

Друга складова – дійсне значення нормального прискорення:

$$a^n_{ED}=\frac{V^2_{ED}}{l_{ED}}=\frac{1{,}8^2}{0{,}6}=5{,}4\ \text{м/с}^2\,.$$

Довжина відрізку, що зображатиме нормальну складову:

$$dn_3=\frac{a^n_{ED}}{\mu_a}=\frac{5{,}4}{1}=5{,}4\ \text{мм}\,.$$

Тангенційна складова визначається пізніше, після побудови плану прискорень, через відсутність кутового прискорення ланки DE – ε_4.

$$a^t_{ED}=\varepsilon_4\cdot l_{ED}\,, \tag{20}$$

але напрямок відомий – це перпендикуляр до ланки DE, або відрізка dn_3.

У другому рівнянні перша складова – прискорення нерухомої точки $a_{E_0}=0$.

Друга складова, нормальне прискорення, визначається, як:

$$a^n_{EE_0}=\frac{V^2_{EE_0}}{l_{EE_0}}. \tag{21}$$

У знаменнику $l_{EE_0}=\infty$, тому нормальна складова прискорення $a^n_{EE_0}=0$.

Третя складова – тангенційне прискорення у русі за напрямною. Визначається напрямком напрямної, тобто паралельно $\alpha-\alpha$. На перетині тангенційних складових із кожного рівняння отримаємо точку «e». При цьому:

$$a_E=\pi e\cdot\mu_a=176\cdot 1=176\ \text{м/с}^2;$$

$$a^t_{ED} = n_3 e \cdot \mu_a = 216 \cdot 1 = 216 \text{ м/с}^2.$$

Для визначення величини та напрямку кутових прискорень ланок ε_i використаємо загальновідому формулу:

$$\overline{a}^t_i = \overline{\varepsilon}_i \cdot l_i.$$

Також використаємо кінематичну схему та план прискорень (рис. 8; 10). Це допоможе знайти ліву частину цієї формули, а напрямок тангенційної складової визначить напрямок ε_i.

Кутове прискорення ланки АО, $\varepsilon_1 = 0$, при $\omega_1 = const$.

Друга ланка АВ та третя ланка O_1BCD розглядувалися разом при визначенні прискорення точки В, це система рівнянь (13). У цій системі два тангенційних прискорення:

$$a^t_{BA} = \varepsilon_2 \cdot l_{BA} = n_1 b \cdot \mu_a, \text{ звідки:}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{n_1 b \cdot \mu_a}{l_{BA}} = \frac{40}{0,5} \frac{\text{м/с}^2}{\text{м}} = 80 \text{ с}^{-2}$$

Для визначення напрямку ε_2 звертаємось до плану прискорень. Тангенційна складова – вектор $\overline{n_1 b}$. Умовно перенесемоїї на ланку АВ поближче до рухомої точки В і розглянемо обертальний рух ланки АВ відносно точки центру мас S_2 від напрямку $\overline{a}^t_{BA}$. Напрямок ε_2 проставимо дуговою стрілкою.

Особливості ланки трикутника O_1BCD.

У системі рівнянь (13) розглядається рух точки відносно O_1, тобто частина ланки O_1C.

При повному розгляді руху ланки O_1C у другому рівнянні системи (13) друга і третя складові мали б такий вигляд:

$\overline{a}^n_{CO_1} + \overline{a}^t_{CO_1}$,

а сама побудова доповнилася б (див. пунктиром). У такому випадку для визначення кутового прискорення трикутника рівняння мало б вигляд:

$a^t_{BO_1} = \varepsilon_3 \cdot l_{BO_1}$, або $a^t_{CO_1} = \varepsilon_3 \cdot l_{CO_1}$, звідки:

$$\varepsilon_3 = \frac{a^t_{BO_1}}{l_{BO_1}} = \frac{a^t_{CO_1}}{l_{CO_1}} = \frac{22}{0,25} = \frac{44}{0,5} = 88 \text{ с}^{-2}$$

Для визначення напрямку ε_3 тангенційну складову $\overline{n'_2c}$ з плану прискорень перенесемо на ланку ΔO_1CD поближче до рухомої точки С і розглянемо обертальний рух ланки відносно точки центру мас S_3 під впливом вектора $\overline{n'_2c}$. Напрямок руху позначимо дуговою стрілкою.

Кутове прискорення ланки DE . ε_4 визначаємо, використовуючи систему рівнянь (19). Тангенційна складова $\overline{a}^t_{ED}$ визначить величину і напрямок ε_4.

Величина:

$$a^t_{ED} = \varepsilon_4 \cdot l_{ED}, \text{ звідки: } \varepsilon_4 = \frac{a^t_{ED}}{l_{ED}} = \frac{216}{0,6} \frac{\text{м/с}^2}{\text{м}} = 360 \text{ с}^{-2}.$$

Напрямок визначаємо за допомогою напрямку вектора $\overline{n_3e}$, який з плану прискорень умовно переносимо на ланку DE поближче до рухомої точки Е. Розглянемо обертальний рух ланки від дії вектора відносно точки центра мас S_4. Напрямок ε_4 позначимо дуговою стрілкою.

Ланка Е (повзун) не виконує обертальних рухів, а тому $\varepsilon_5 = 0$.

Прискорення точок центрів мас a_{si} визначимо, користуючись першою і третьою властивостями плану прискорень. Наприклад, ланка, трикутник O_1CD, має точку центру мас S_3 на перетині меридіан. Згідно з третьою властивістю плану прискорень точка S_3 також знаходиться на трикутнику o_1cd на перетині медіан. Використовуючи першу властивість плану прискорень, вектор πs_3 визначить величину і напрямок $\overline{a}_{S_3}$ в масштабі плану прискорень, тобто:

$$a_{S_3} = \pi s_3 \cdot \mu_a = 133 \cdot 1 = 133 \text{ м/с}^2.$$

Аналогічно:

$$
\begin{aligned}
a_{S_1} &= \pi s_1 \cdot \mu_a = 31 \cdot 1 = 31 \ \text{м/с}^2 \\
a_{S_2} &= \pi s_2 \cdot \mu_a = 82{,}5 \cdot 1 = 82{,}5 \ \text{м/с}^2 \\
a_{S_4} &= \pi s_4 \cdot \mu_a = 158{,}5 \cdot 1 = 158{,}5 \ \text{м/с}^2 \\
a_{S_5} &= \pi s_5 \cdot \mu_a = 176 \cdot 1 = 176 \ \text{м/с}^2
\end{aligned}
\qquad (22)
$$

При побудові плану швидкостей та прискорень для механізмів II класу та II порядку з'являються два випадки:

1) дві точки належать одній ланці і віддалені одна від одної на якусь відстань;

2)дві точки належать двом ланкам і створюють поступальну пару, а в розглядуваний проміжок часу збігаються.

Ці випадки ми розглянули в попередніх рішеннях і використовували при цьому два основні рівняння для визначення швидкості та прискорення точки.

Для визначення швидкості : $\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA}$.

Для прискорення : $\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}^n_{BA} + \overline{a}^t_{BA}$.

В розглядуваних випадках переносним рухом був поступальний, і тоді повне відносне прискорення складалося з нормальної $\overline{a}^n_{BA}$ і тангенційної $\overline{a}^t_{BA}$ складових.

У випадку, коли переносний рух не є поступальним, повне відносне прискорення $\overline{a}_{BA} = \overline{a}^c_{BA} + \overline{a}^t_{BA}$ складається з прискорення Каріоліса і тангенційного. Тоді повне прискорення точки буде визначатись рівнянням:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}^c_{BA} + \overline{a}^t_{BA}. \qquad (23)$$

У цьому випадку ланки, які створюють спільну точку, мають поступальний рух, але ці ланки не мають між собою відносного обертального руху, тому ці ланки мають однакові кутові швидкості та прискорення.

Нова складова $\overline{a}^c_{BA}$ – поворотне прискорення, яке визначається за формулою:

$$\overline{a}^c_{BA} = 2V_{BA} \cdot \omega_1, \qquad (24)$$

де V_{BA} – швидкість відносного руху;

ω_1 – кутова швидкість переносного руху.

Напрямок $\bar{a}^c_{BA}$ визначається напрямком $\bar{V}_{BA}$, якщо його повернути в напрямку ω_1 на кут 90°. Яскравим прикладом є кулісний механізм (рис. 11). Для цього механізму план швидкостей будується вищезазначеним методом, за яким:

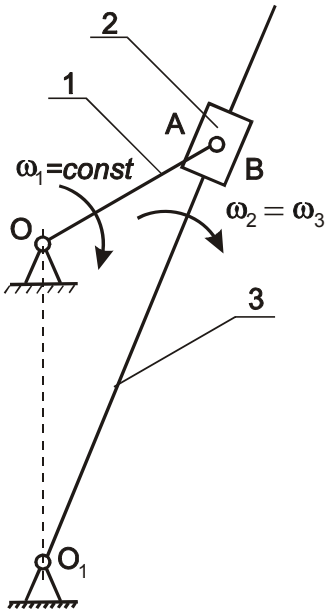


Рис. 14

$$V_A = \omega_1 \cdot l_{OA},$$

$$\begin{cases} V_B = V_A + V^c_{BA} \\ V_B = V_{O_1} + V_{BO_1}. \end{cases}$$

При побудові плану прискорень

$$a_A = \omega_1^2 \cdot l_{OA} = a^n_{AO},$$

$$\begin{cases} \bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}^c_{BA} + \bar{a}^t_{BA} \\ \bar{a}_B = \bar{a}_{O_1} + \bar{a}^n_{BO_1} + \bar{a}^t_{BO_1}. \end{cases} \qquad (25)$$

Звідки дійсне значення:

$$a^c_{BA} = 2V_{BA} \cdot \omega_3.$$

Це величина прискорення Каріоліса.

Відрізок

$$ak = \frac{a^c_{BA}}{\mu_a}.$$

Побудова планів здійснена на рис. 15 та рис. 16.

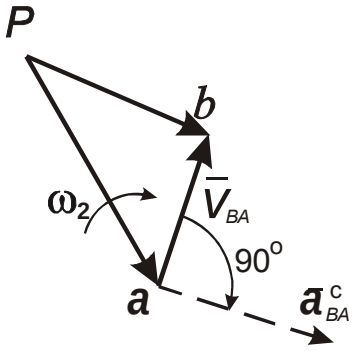


Рис. 15

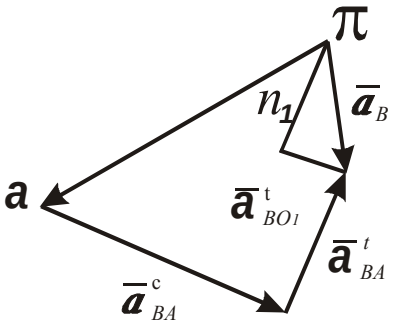


Рис. 16

Інші складові та їх напрямки визначаються вже відомими методами.

3. Динамічне дослідження механізму

Основною метою динамічного дослідження механізмів є встановлення залежностей між силами або парами сил, які діють на ланки механізму, і параметрами кінематики (переміщення, швидкість, прискорення). Ці залежності відомі у вигляді рівнянь руху механізму. Маючи таке рівняння і, наприклад, діючі сили чи пари сил, встановлюються параметри кінематики. Тобто стає можливим відповісти на питання, якими будуть переміщення, швидкості та прискорення елементів ланок від дії сил, або пар сил.

При використанні теореми про зміну кінетичної енергії системи, ці рівняння мають вигляд:

– ланка приведення рухається поступально (рис. 17), тобто ланка наділена приведеною масою $т_{пр}$ (x), під дією приведеної сили $F_{пр}$ (x,V,t) здійснює поступальний рух.

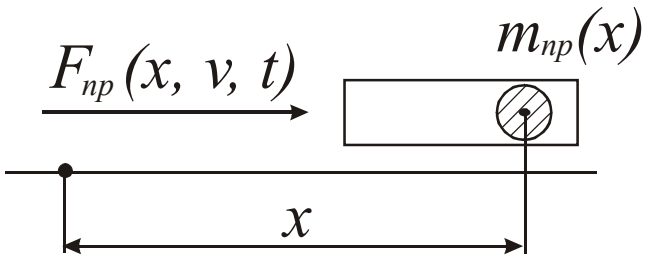


Рис. 17

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{m_{\text{пр}}(x)\cdot V^2}{2}\right]=F_{\text{пр}}(x,V,t),$$

або

$$m(x)\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{d\left[m_{\text{пр}}(x)\right]}{dx}\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=F_{\text{пр}}(x,V,t). \qquad (26)$$

– ланка приведення рухається обертально (рис. 18). Ланка ОА наділена приведеним моментом інерції $I_{пр}(\varphi)$ під впливом $M_{пр}(\varphi,\omega,t)$ обертається навколо точки О.

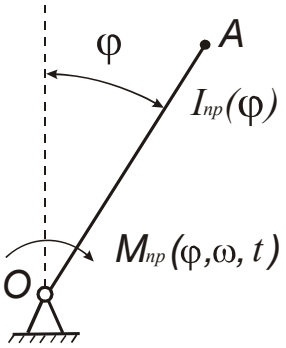


Рис. 18

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{I_{\text{пр}}(\phi)\cdot\omega^2}{2}\right]=M_{\text{пр}}(\phi,\omega,t)\,,$$

або

$$I_{\text{пр}}(\phi)\frac{d^2\phi}{dt^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{d\left[I_{\text{пр}}(\phi)\right]}{d\phi}\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2=M_{\text{пр}}(\phi,\omega,t) \qquad (27)$$

де $M_{\text{пр}}=F_{\text{пр}}\cdot l_{OA}$,

Відомі наближені методи вирішення цих рівнянь, які не мають значних складнощів.

Більш цікавими є питання силового дослідження механізмів, де визначається величина та напрямок дії приведеної сили $F_{\text{пр}}$.

Ці питання розглядаються в кінетостатичному дослідженні та методі визначення приведеної сили за допомогою важеля Жуковського М. Є.

3.1. Кінетостатичне дослідження механізму

В основу цього дослідження положено теорему, яку виражає принцип Д'Аламбера, який стосовно механізмів можна сформулювати так: якщо до всіх зовнішніх сил, які діють на ланки механізму, додати сили інерції та моменти сил інерції, то розглянутий механізм можна вважати таким, який умовно знаходиться в рівновазі.

Оскільки групи Ассура знаходяться в рівновазі ($W=O$), тобто статично визначені, то кінетостатичне дослідження здійснюють на групах, розглядаючи послідовно рівновагу кожної групи, починаючи з групи, найвіддаленішої від входу механізму.

Для виконання вказаного дослідження визначають сили інерції та моменти сил інерції, використовуючи формули:

$$\overline{F_i} = -m_i \cdot \overline{a}_{si} \text{ [Н];} \qquad (28)$$

$$\overline{M_i} = -I_{si} \cdot \overline{\varepsilon}_i \text{ [Н·м].}$$

Знаки «мінус» вказують, що сили інерції та моменти сил інерції направлені проти відповідних прискорень.

Послідовність виконання кінетостатичного дослідження краще розглянути на конкретному прикладі.

Приклад

Вихідні дані: G_1=30Н, C_2=60Н, G_3=80Н, G_4=65Н, C_5=60Н,

I_{S1}=0,28 кг·м^2, I_{S2}=0,88 кг·м^2,I_{S3} =1,0 кг·м^2,I_{s4} =0,92 кг·м^2, $F_{ко}$=340 Н;

–інші необхідні дані при необхідності взяти з попередніх розрахунків.

– побудована кінематична схема механізму (Рис. 19);

– побудований план швидкостей;

– побудований план прискорень;

– відома вага кожної ланки, G_1;

– відомий момент інерції кожної ланки, I_{si};

– відома сила або момент сил корисної дії;

– відомі координати центра ваги кожної ланки.

Кінетостатичне дослідження складається з двох частин:

1) Підготовка вихідної задачі.

2) Власне кінетостатичне дослідження.

3.1.1. Підготовка вихідної задачі

1. Будується кінематична схема механізму.

2. З плану прискорень у точки центрів ваги ланок S_i переносять напрямки прискорень a_{si}.

3. Протилежно напрямкам a_{si} проставляють сили інерції F_{ii}.

4. Користуючись попередніми відомостями, на кожній ланці проставляємо кутові прискорення ε_i.

5. Протилежно напрямку ε_i на ланках відносно точки центра ваги простав-

ляємо моменти сил інерції M_{ii}.

6. У точках S_i проставляємо сили ваги G_i, направлені до центра Землі, тобто вниз.

7. Проставляємо силу(и), або момент(и) сил корисної дії.

Усі ці дії відображені на рис. 19.

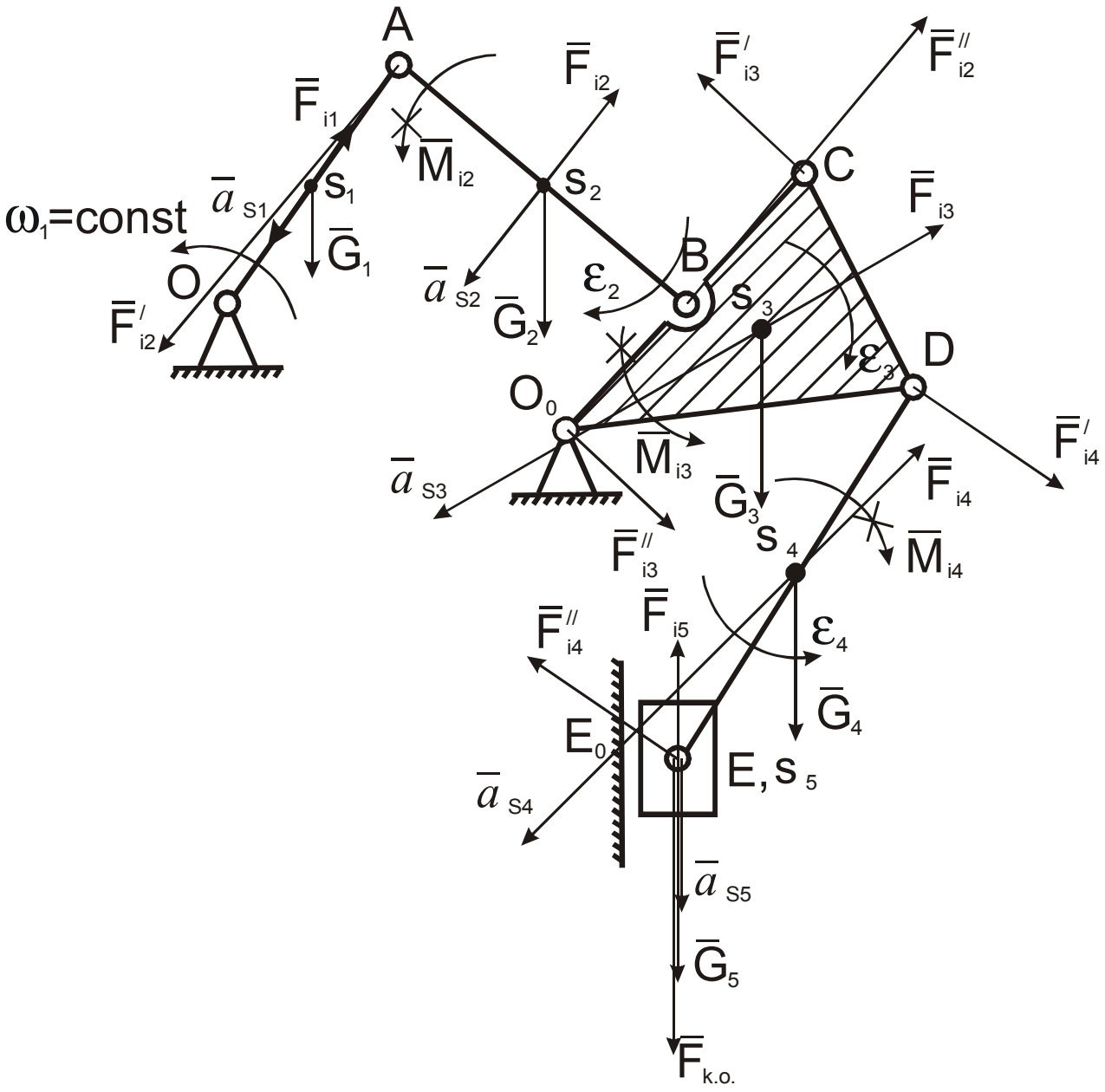


Рис. 19

Визначимо сили інерції кожної ланки:

$$F_{i1} = \left| m_i \cdot a_{si} \right| = \frac{G_1}{q} \cdot a_{si} = \frac{30}{9,8} \cdot 31 = 94,9[\text{Н}];$$

$$F_{i2} = \left| m_2 \cdot a_{s2} \right| = \frac{G_2}{q} \cdot a_{s2} = \frac{60}{9,8} \cdot 82,5 = 505,1[\text{Н}];$$

$$F_{i3} = \left|m_3 \cdot a_{s3}\right| = \frac{G_3}{q} \cdot a_{s3} = \frac{80}{9,8} \cdot 133 = 1085,7[\text{Н}];$$

$$F_{i4} = \left|m_4 \cdot a_{s4}\right| = \frac{G_4}{q} \cdot a_{s4} = \frac{65}{9,8} \cdot 158,5 = 1051,3[\text{Н}];$$

$$F_{i5} = \left|m_5 \cdot a_{s5}\right| = \frac{G_5}{q} \cdot a_{s5} = \frac{60}{9,8} \cdot 176 = 1077,5[\text{Н}];$$

Момент сил інерції:

$M_{i1}=0$, оскільки $\varepsilon_1=0$;

$M_{i2}=|I_{s2}\cdot\varepsilon_2|=0,88\cdot80=70,4$[Н·м].

$M_{i3}=|I_{s3}\cdot\varepsilon_3|=1\cdot88=88$[Н·м].

$M_{i4}=|I_{s4}\cdot\varepsilon_4|=0,92\cdot360=331,2$[Н·м].

3.1.2. Дослідження механізму

Виділяємо з механізму першу групу Ассура. Якщо необхідно, є можливість змінити масштабний коефіцієнт довжини. Із вихідної задачі на ланки групи переносимо тільки силові фактори (рис.20).

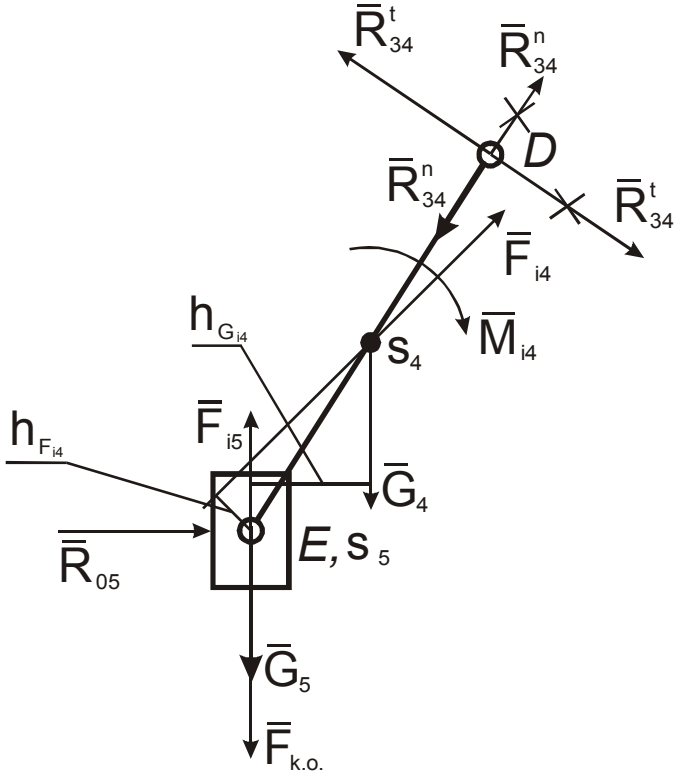


Рис. 20

Для звільнення від зв'язків у розірваних кінематичних парах, обертальній D і поступальній E-E_o проставляємо реакції. Необхідно врахувати правила простановки реакцій:

а) у поступальній парі – відомий напрямок, це перпендикуляр до напрямної – $\overline{R}_{05}$;

б) в обертальній кінематичній парі невідому за величиною і напрямком реакцію представляють двома складовими: нормальною, направленою по-вздовж ланки, і тангенційною, перпендикулярною ланці, – $\overline{R}_{34}^{n}, \overline{R}_{34}^{t}$.

Вказані напрямки реакцій спочатку вибирають довільно, але вздовж ланки або перпендикулярно. Взагалі реакція позначається літерою R, нормальна R^n, тангенційна R^t, з двома цифровими індексами – наприклад, R_{34}^{n}. Перша цифра показує номер ланки, яка відкинута при розриванні пари, друга цифра – номер ланки, яка розглядається. Стояк, нерухома ланка позначаються нулем «0». Довільно міняти місцями цифри індексу не дозволяється, оскільки $R_{43} = -R_{34}$. Враховуючи ці правила, проставимо реакції в розірваних КП на групі Ассура I.

Для визначення реакцій розглянемо рівновагу групи, записавши векторне рівняння рівноваги. Це рівняння є векторною сумою сил, які діють на групу Ассура I. Існує правило складання цього рівняння:

– у рівняння входять тільки сили, і беруть їх із знаком «плюс»;

– спочатку записують сили, які діють на одну ланку, потім – на іншу;

– першою і останньою складовою рівняння будуть нормальні складові реакції;

– другою і передостанньою — тангенційні складові реакцій;

– між ними – всі інші сили, які діють на групу.

Розглядається рівновага групи, тому рівняння прирівнюють до нуля. Векторне рівняння рівноваги розв'язують графічним методом, шляхом побудови плану сил. План сил – це замкнутий багатокутник, у якому , в дослідженні по векторному рівнянню, кінець одного вектора є продовженням наступного. Рівняння вирішується, тобто план сил будується, в тому випадку, коли в ньому

не більше двох невідомих. Зайвими невідомими є тангенційні складові реакцій, які визначаються допоміжними способами.

Використовуючи правила складання векторного рівняння, складемо його для першої групи Ассура:

$$\underbrace{\overline{R}^{n}_{34} + \overline{R}^{t}_{34} + \overline{F}_{i4} + \overline{G}_{4}}_{\text{ланка 4}} + \underbrace{\overline{F}_{i5} + \overline{G}_{5} + \overline{F}_{\text{к.о}} + \overline{R}_{05}}_{\text{ланка 5}} = 0 . \qquad (31)$$

У рівнянні три невідомі: $\overline{R}^{n}_{34}$, $\overline{R}^{t}_{34}$ і $\overline{R}_{05}$. Зайва невідома – R^{t}_{34}. Для визначення цієї невідомої необхідно записати одне рівняння, яке являє собою алгебраїчну суму моментів відносно нерозірваної КП, тобто відносно точки *E*.

Для запису алгебраїчної суми моментів довільно встановлюється правило знаків. Наприклад, моменти, які діють по ходу годинникової стрілки, будемо вважати додатними, +*M*:

$$R^{t}_{34} \cdot DE + F_{i4} \cdot h_{Fi4} + G_{4} \cdot h_{G4} + \frac{M_{i4}}{\mu_{l}} = 0 \quad . \qquad (32)$$

Плечі взяті в мм до діючих сил при безпосередньому замірі найкоротшої відстані від точки *E* до лінії дії сили. Розмірність M_{i4} – [Н·м]. Це означає, що всі відстані *DE, h_{Fi4}, h_{G4}* необхідно було взяти дійсною величиною, помноживши на масштабний коефіцієнт μ_{l}. Раз ми цього не робили, то необхідно момент M_{i4} поділити на μ_{l}. Звідки:

$$R^{t}_{34} = \frac{-F_{i4} \cdot h_{Fi4} - G_{4} \cdot h_{G4} - \frac{M_{i4}}{\mu_{l}}}{DE} = \frac{-1051,3 \cdot 4,5 - 65 \cdot 15 - \frac{331,2}{0,01}}{60} = -647,1[\text{Н}] . \qquad (33)$$

Отримане від'ємне значення R^{t}_{34} свідчить про те, що довільно вибраний початковий напрямок буде протилежним. Вектор R^{t}_{34} на групі Ассура I закреслити і замалювати протилежний. При відомому векторі R^{t}_{34}, рівняння (31) має дві невідомі R^{n}_{34} та R_{05}, а тому може бути вирішеним. Для побудови плану сил за рівнянням (31) задаємо довільний масштабний коефіцієнт μ_{F}=10 [Н/мм].

Для побудови замкнутого багатокутника, де кінець одного вектора є початок наступного, визначимо довжини відрізків, які на плані сил будуть представляти сили згідно з рівнянням (31).

$$ab = \frac{R_{34}^{t}}{\mu_F} = \frac{647{,}1}{10} = 64{,}7 \text{ мм}; \quad bc = \frac{F_{i4}}{\mu_F} = \frac{1051{,}3}{10} = 105{,}1 \text{ мм};$$

$$cd = \frac{G_4}{\mu_F} = \frac{65}{10} = 6{,}5 \text{ мм}; \quad de = \frac{F_{i5}}{\mu_F} = \frac{1077{,}5}{10} = 107{,}7 \text{ мм}; \tag{34}$$

$$ef = \frac{G_5}{\mu_F} = \frac{60}{10} = 6 \text{ мм}; \quad fl = \frac{F_{к.о}}{\mu_F} = \frac{340}{10} = 34 \text{ мм}.$$

Відрізки відомі, напрямки сил – на групі Ассура. Будуємо план сил (рис.21), починаючи із точки «*a*». Із плану сил визначимо величини і напрямки невідомих сил:

$$R^{n}{}_{34} = ak \cdot \mu_F = 202{,}5 \bullet 10 = 2025 \text{ [Н]};$$

$$R_{05} = lk \cdot \mu_F = 94 \bullet 10 = 940 \text{ [Н]}; \tag{35}$$

$$R_{34} = kb \cdot \mu_F = 212{,}5 \bullet 10 = 2125 \text{ [Н]}.$$

План сил показав, що напрямок $\overline{R}_{34}^{n}$ необхідно змінити на зворотній.

Невідомою залишилася реакція в обертальній кінематичній парі *E*.

Для визначення цієї реакції умовно розірвемо КП «*E*» і розглянемо рівновагу ,будь-якої ланки 4 або 5. Розглядаючи рівновагу ланки 4, відкидаємо ланку 5, тоді невідома, згідно з попередніми правилами, позначається як $\overline{R}_{54}^{n}$. При розгляді ланки 5 відкидаємо ланку 4, тоді невідома – $\overline{R}_{45}^{n}$. Згідно з третім законом механіки $\overline{R}_{45} = -\overline{R}_{54}$. Розглянемо перший випадок, де невідомою є реакція R_{54}. Запишемо рівняння рівноваги ланки 4 як векторне рівняння, подібне рівнянню (31):

$$\overline{R}_{34} + \overline{F}_{i4} + \overline{G}_4 + \overline{R}_{54} = 0 \ . \tag{36}$$

Використаємо попередню побудову плану сил, починаючи з точки «*k*». Кінцем вектора $\overline{R}_{34}$ є точка «*b*». Наступний відрізок «*bc*» відповідає другій складовій рівняння (36) – $\overline{F}_{i4}$, третій відрізок «*cd*» – силі $\overline{G}_4$.

Для знаходження вектора $\overline{R}_{54}$ необхідно з'єднати першу точку «*k*» і останню точку «*d*» відрізком «*dk*», продовжуючи вибраний напрямок, тобто від «*d*» до «*k*».

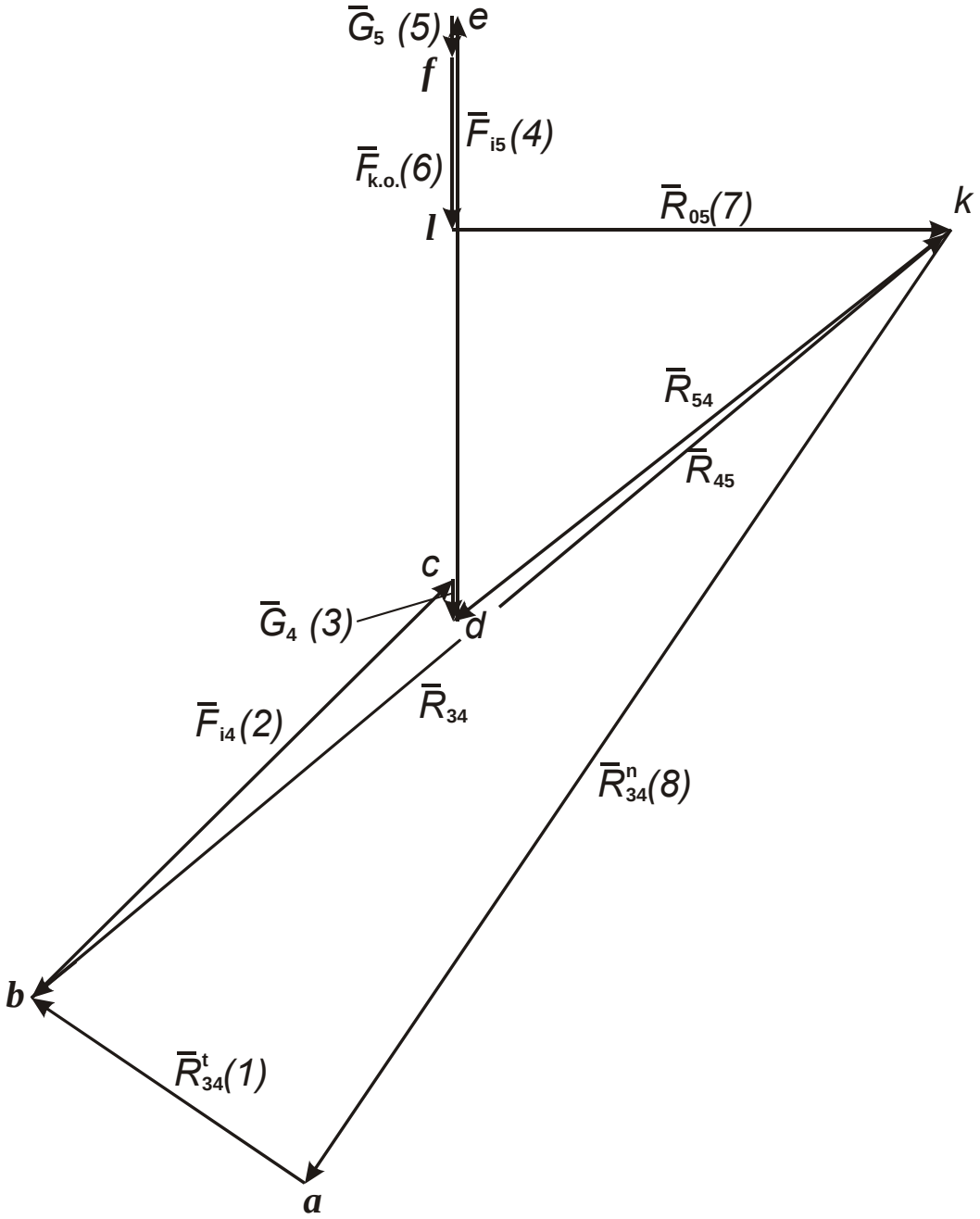


Рис. 21

Розглянемо другий випадок, тобто рівновагу ланки 5, тоді невідома – $\bar{R}_{45}$. Векторне рівняння рівноваги ланки 5 матиме вигляд:

$$\bar{F}_{i5} + \bar{G}_5 + \bar{F}_{\text{k.o}} + \bar{R}_{05} + \bar{R}_{45} = 0 \qquad (37)$$

Всі сили в рівняннях (36) і (37) записувались у такій самій послідовності, як і в рівнянні (31), а тому для розв'язання рівняння (37) маємо можливість знову користуватися уже побудованим планом сил (рис. 21).

Перша складова рівняння (37) – сила $\overline{F}_{i5}$. На плані це відрізок «*de*», наступна сила – $\overline{G}_5$, це відрізок «*ef*» аналогічно – силі $\overline{F}_{k0}$ відповідає відрізок «*fl*», реакції $\overline{R}_{05}$ – відрізок «*lk*».

Для знаходження останньої складової, невідомої $\overline{R}_{45}$, необхідно з'єднати першу точку «*d*» і останню «*k*», зберігаючи напрямок векторів, тобто від «*k*» до «*d*».

Ми отримали доказ того, що $R_{45} = -R_{54}$. Необхідно зазначити, чому в векторних рівняннях рівноваги, наприклад (31), не входять пари сил від моментів. Тобто на першій групі Ассура замість моменту M_{i4}, зберігаючи напрямок моменту, була можливість мати $F'_{i4} = F''_{i4} = \frac{M_{i4}}{l_{DE}}$, дві сили $\overline{F}'_{i4} = -\overline{F}''_{i4}$, рівні за величиною, але протилежного напрямку, і вписати ці сили в рівняння (31). Надалі, при побудові плану сил за рівнянням (31), відкладаючи відрізок, відповідний силі $\overline{F}'_{i4}$, наступним відрізком, відповідним силі $\overline{F}''_{i4}$, ми повернемось у вихідну позицію. Тобто моменти у векторних рівняннях не вносять змін у плани сил.

Виділяємо наступну групу Ассура II. Перш за все, в точку D від дії сил на групу Ассура I проставимо сумарну реакцію $\overline{R}_{43} = -\overline{R}_{34}$, враховуючи третій закон механіки. У розірваних обертальних кінематичних парах *A і* O_i проставимо реакції: $\overline{R}^n_{12}, \overline{R}^t_{12}, \overline{R}^n_{03}, \overline{R}^t_{03}$. З вихідної задачі на групу Ассура II переносимо тільки силові параметри (рис. 22). Розглянемо рівновагу групи Ассура II.

Запишемо векторне рівняння рівноваги:

$$\underline{\overline{R}^n_{12}} + \underline{\overline{R}^t_{12}} + \overline{F}_{i2} + \overline{G}_2 + \overline{F}_{i3} + \overline{G}_3 + \overline{R}_{43} + \underline{\overline{R}^t_{03}} + \underline{\overline{R}^n_{03}} = 0. \qquad (38)$$

Невідомих у рівнянні (38) чотири. Зайві невідомі – це тангенційні складові реакції $\overline{R}^t_{12}$ та $\overline{R}^t_{03}$, визначимо допоміжно, відомим вже методом. Будемо вважати дію моменту за годинниковою стрілкою додатною. $\sum M_B = 0$ – для ланки AB.

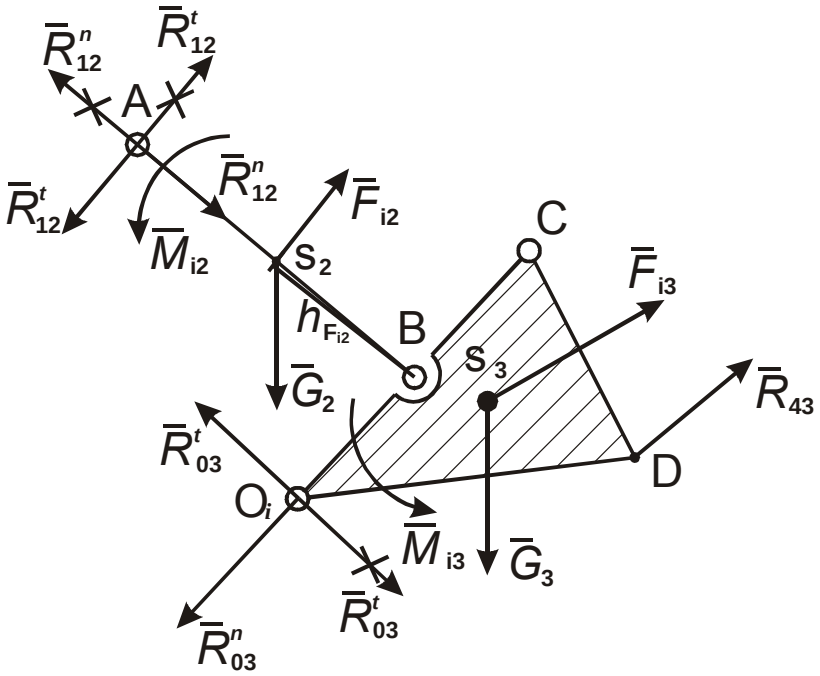


Рис. 22

$$R^t_{12} \cdot AB + F_{i2} \cdot h_{Fi2} - G_2 \cdot h_{G2} - \frac{M_{i2}}{\mu_l} = 0.$$

Звідки:

$$R^t_{i2} = \frac{-F_{i2} \cdot h_{Fi2} + G_2 \cdot h_{G2} + \dfrac{M_{i2}}{\mu_l}}{AB} = \frac{-505{,}1 \cdot 24{,}5 + 60 \cdot 18 + \dfrac{70{,}4}{0{,}01}}{50} = -85{,}1 \text{ [Н]}$$

Змінимо напрямок реакцій $\bar{R}^t_{12}$.

$$\sum M_B = 0 \text{ – для ланки } O_iBCD$$

$$-R^t_{03} \cdot O_1B - F_{i3} \cdot h_{Fi3} - R_{43} \cdot h_{R43} + G_3 \cdot h_{G3} - \frac{M_{i3}}{\mu_1} = 0;$$

Звідки:

$$R^t_{03} = \frac{-F_{i3} \cdot h_{Fi3} - R_{43} \cdot h_{R43} + G_3 \cdot h_{G3} - \dfrac{M_{i3}}{\mu_l}}{O_1B} =$$

$$= \frac{-1085{,}7 \cdot 8 - 2125 \cdot 26{,}5 + 80 \cdot 10 - \dfrac{88}{0.01}}{25} = -2919{,}9 \text{ [Н]}$$

Змінимо напрямок реакції R^t_{03}. Розв'язуємо рівняння (38) шляхом побудови плану сил. Задаємо масштаб сил $F_2 = 25\frac{H}{мм}$. Визначимо довжини відрізків, які на плані сил II будуть зображати сили згідно з рівнянням (38).

$$ab = \frac{R^t_{12}}{\mu_F} = \frac{85,1}{25} = 3,4\text{мм} \qquad bc = \frac{F_{i2}}{\mu_F} = \frac{505,1}{25} = 20,2\text{мм} \qquad cd = \frac{G_2}{\mu_F} = \frac{60}{25} = 2,4\text{мм}$$

$$de = \frac{F_{i3}}{\mu_F} = \frac{1085,7}{25} = 43,4\text{мм} \qquad ef = \frac{G_3}{\mu_F} = \frac{80}{25} = 3,2\text{мм} \qquad fk = \frac{R_{43}}{\mu_F} = \frac{2125}{25} = 85\text{мм}$$

$$kl = \frac{R^t_{03}}{\mu_F} = \frac{2919,9}{25} = 116,8\text{мм}$$

Будуємо план сил, починаючи з точки «*a*» (рис. 23).

План сил II дає можливість визначити величини і напрямки невідомих:

$$\begin{aligned} R^n_{03} &= lm \cdot \mu_F = 139 \cdot 25 = 3475[\text{Н}]; \\ R_{03} &= km \cdot \mu_F = 182 \cdot 25 = 4550[\text{Н}]; \\ R^n_{12} &= ma \cdot \mu_F = 121 \cdot 25 = 3025[\text{Н}]; \\ R_{12} &= mb \cdot \mu_F = 122 \cdot 25 = 3050[\text{Н}]. \end{aligned} \qquad (39)$$

Реакцію $\overline{R}^n_{12}$ на групі Ассура II необхідно змінити за напрямком на зворотню.

Для визначення реакції в КП «В» розглянемо рівновагу ланки *AB,* а шукана реакція буде R_{32}.

$$\overline{R}_{12} + \overline{F}_{i2} + \overline{G}_2 + \overline{R}_{32} = 0. \qquad (40)$$

Користуємось планом сил II та рівнянням (40). Реакцію $\overline{R}_{32}$ представляє відрізок «*md*»:

$$R_{32} = md \cdot \mu_F = 119 \cdot 25 = 2975\ [\text{Н}_1], \qquad (41)$$

Розглянемо вихідний механізм *OA,* а до точки *A,* враховуючи дію третього закону механіки, прикладемо реакцію $\overline{R}_{21}$ як результат дії всіх сил, які діють на інші ланки. Крім того, до точки *A* під прямим кутом прикладаємо наведену силу $\overline{F}_{\text{пр}}$.

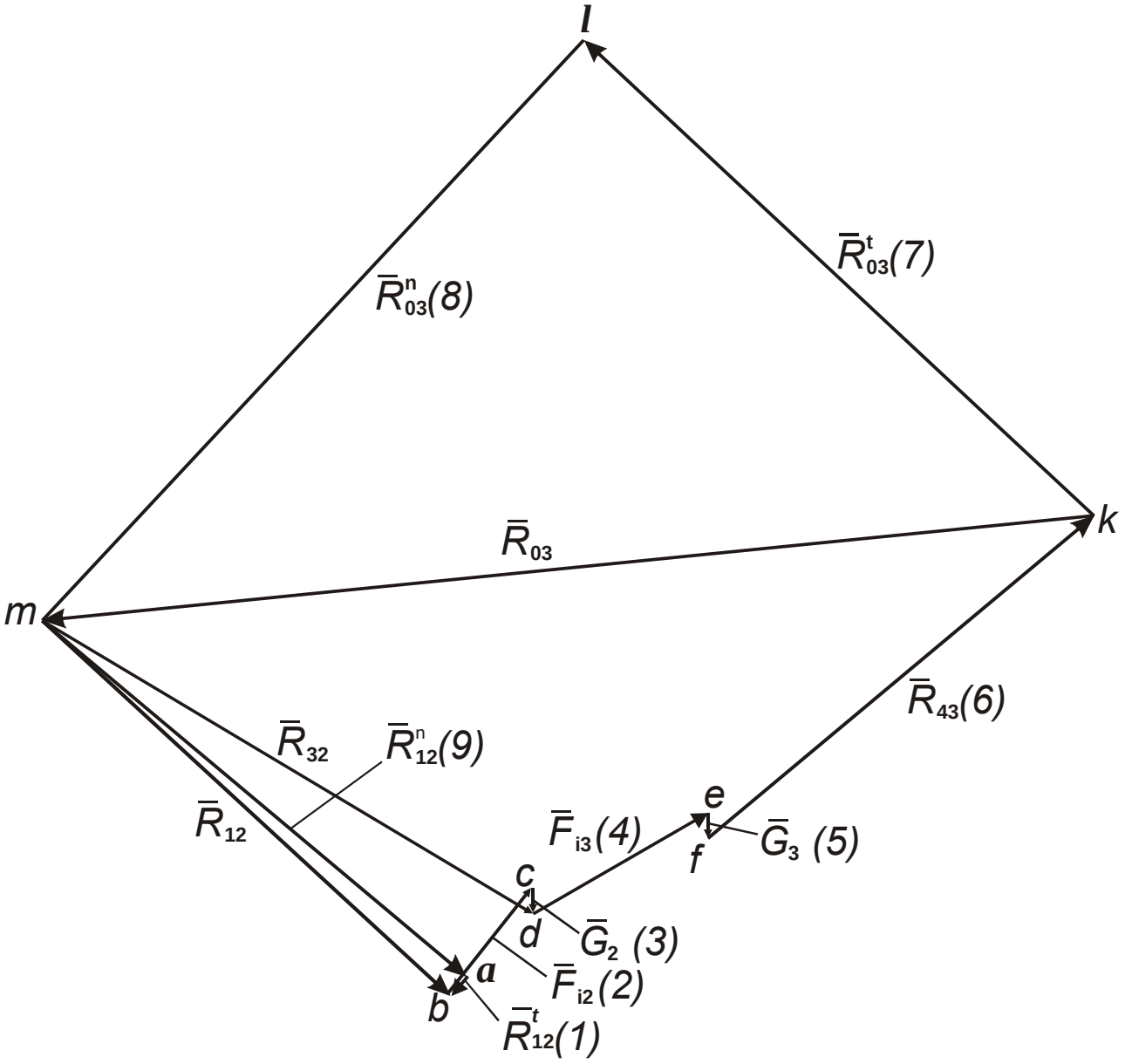


Рис. 23

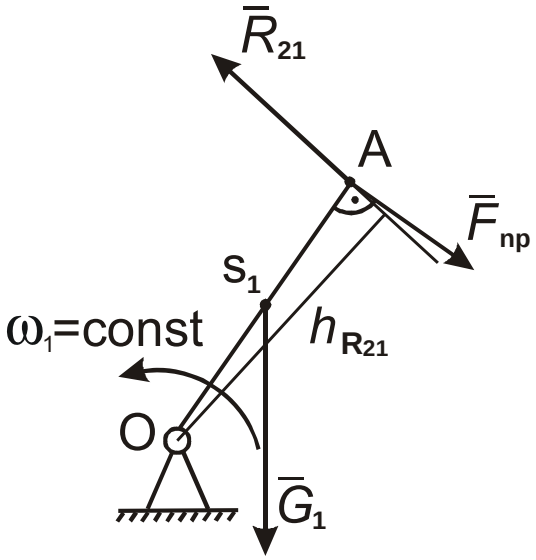


Рис. 24

З вихідної задачі на вихідний механізм перенесемо інші діючі сили (рис. 24).

Для визначення приведеної сили $F_{пр}$ розглянемо рівновагу вихідного механізму шляхом запису рівняння рівноваги у вигляді алгебраїчної суми моментів сил відносно точки *O*. Будемо вважати дію моменту за годинниковою стрілкою – додатною.

$$\sum M_0 = 0;\ G_1 \cdot h_{G1} - R_{21} \cdot h_{R21} + F_{\text{пр}} \cdot OA = 0. \qquad (42)$$

Звідки: $$F_{\text{пр}} = \frac{-G_1 \cdot h_{G1} + R_{21} \cdot h_{R21}}{OA} = \frac{-30 \cdot 12 + 3050 \cdot 38,5}{40} = 2926,6[\text{Н}]$$

При отриманні від'ємного результату, вибраний напрямок $\overline{F}_{пр}$ необхідно змінити на зворотній, а в такому випадку сила, яка погоджена з напрямком «ω» є не приведеною, а зрівноважувальною, тобто $\overline{F}_{\text{зр}} = -\overline{F}_{\text{пр}}$.

Залишилось питання про величину і напрямок реакції в точці «О».

Умовно розриваємо КП і невідому реакцію позначаємо R_{01}. Розглядаючи рівновагу ланки ОА. Запишемо векторне рівняння рівноваги:

$$\overline{R}_{21} + \overline{F}_{\text{пр}} + \overline{G}_1 + \overline{F}_{i1} + \overline{R}_{01} = 0. \qquad (43)$$

Приймаємо масштабний коефіцієнт μ_F=50 $\frac{\text{Н}}{\text{мм}}$. Довжини відрізків, які відображають сили в рівнянні (43):

$$ab = \frac{R_{21}}{\mu_F} = \frac{3050}{50} = 61\,\text{мм};\ bc = \frac{F_{пр}}{\mu_F} = \frac{2926,6}{50} = 58,5\,\text{мм};\ cd = \frac{G_1}{\mu_F} = \frac{30}{50} \cong 0\,\text{мм}.$$

Будуємо план сил вказаними методами. На плані сил реакція $\overline{R}_{01}$ позначена відрізком «*da*»

$$R_{01} = da \cdot \mu_F = 20 \cdot 50 = 1000\ [\text{Н}];$$
$$F_{i1} = ea \cdot \mu_F = 78 \cdot 50 = 390[\text{Н}]. \qquad (44)$$

3.2. Визначення $F_{пр}$ за допомогою важеля Жуковського М. Є.

Жуковський М. Є. довів, що будь-який механізм може бути зведеним до системи важеля з прикладеними до нього силами та парами сил.

У даному випадку під важелем розуміється план швидкостей механізму з точкою опори в полюсі, до відображальних точок якого прикладені сили, що діють на механізм (зовнішні та сили інерції) в тих самих точках та повернуті в одному напрямку на кут 90°, а до відображальних відрізків прикладені приведені до плану пари сил, які діють на відповідні ланки механізму.

Використання важеля Жуковського М. Є. дає можливість заміни розв'язування задач про рівновагу сил та пар сил, які діють на рухомі ланки механіз-

му, розв'язуванням задач про рівновагу важеля, який знаходиться в нерухомому стані. Тобто, використання важеля Жуковського М. Є. дає можливість вирішувати задачі динаміки, використовуючи рівняння статики. Зауважимо, що сили при переносі з механізму на важіль можна не повертати, якщо попередньо план швидкостей (важіль) повернути на кут 90°.

Розв'язуючи задачу про визначення приведеної сили $\overline{F}_{np}$, достатньо підготувати важіль, тобто перенести сили та пари сил на план швидкостей, і записати єдине рівняння про рівновагу важеля. Це рівняння являє собою алгебраїчну суму моментів сил, які діють на важіль, відносно полюса, тобто $\sum M_{\text{p}} = 0$;

При переносі з механізму на важіль моментів, можливо використати такі прийоми:

а) моменти, які діють на ланки, представляють парою сил, не змінюючи напрямок моменту:

$$F' = F'' = \frac{M}{l_{AB}}. \qquad (45)$$

Сили F' та F'' переносять на важіль в точки «A» і «B» по правилам переносу (рис. 25).

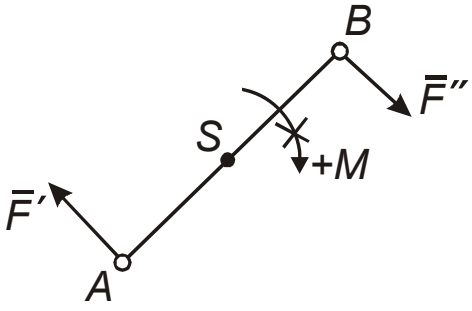


Рис. 25

б) здійснюють перетворення, використовуючи теорему Л. Пуансо, яку можна сформулювати так: не змінюючи дії сили на ланку, її можна перенести в іншу точку паралелельно своїй дії, приєднавши при цьому деякий момент.

Приклад:

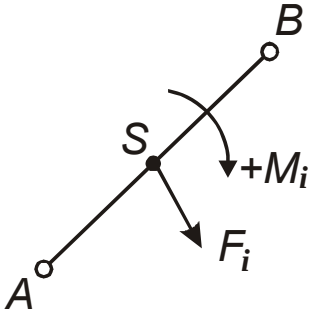
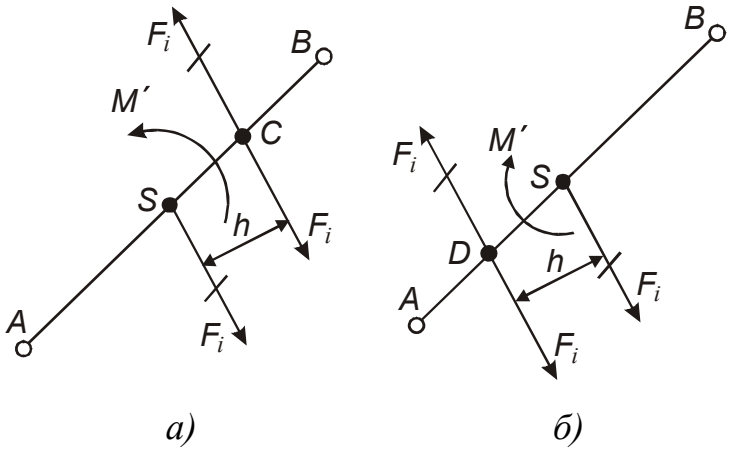


Рис. 26

На ланку AB (рис. 26) діють навантаження у вигляді сили F_i та моменту M_i. Використовуючи теорему Л. Пуансон, розглянемо два випадки переносу сили F_i (без моменту M_{i}).



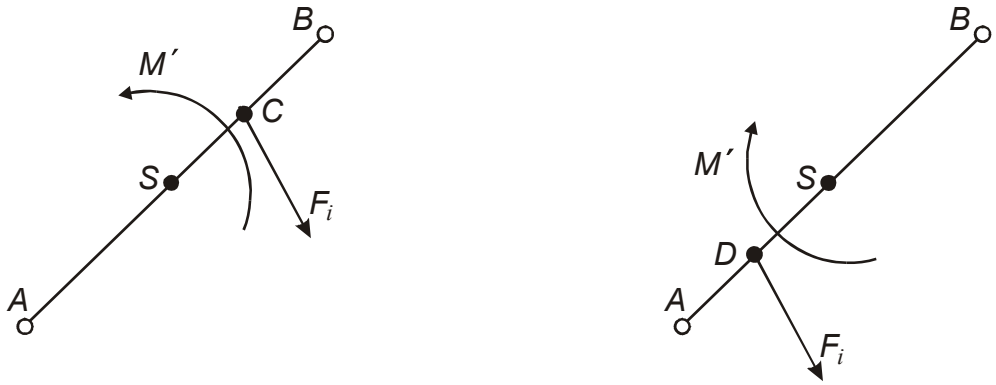
а) *б)*

Рис. 27

Не змінюючи рівноваги, перенесемо силу F_i вище і нижче точки *S* (рис. 27).

У точку «*C*» перенесли силу F_i , а щоб не порушити рівновагу, проставимо таку ж протидіючу силу F_i. Аналогічний прийом і на прикладі «б)».

Розглядаючи пари сил, які перекреслені поперечною лінією, бачимо, що вони створюють моменти $M' = F_i \bullet h$, але залежно від того, вище чи нижче здійснювався перенос точки S, моменти мають різні напрямки (рис. 28). У цьому випадку системи можна подати так:

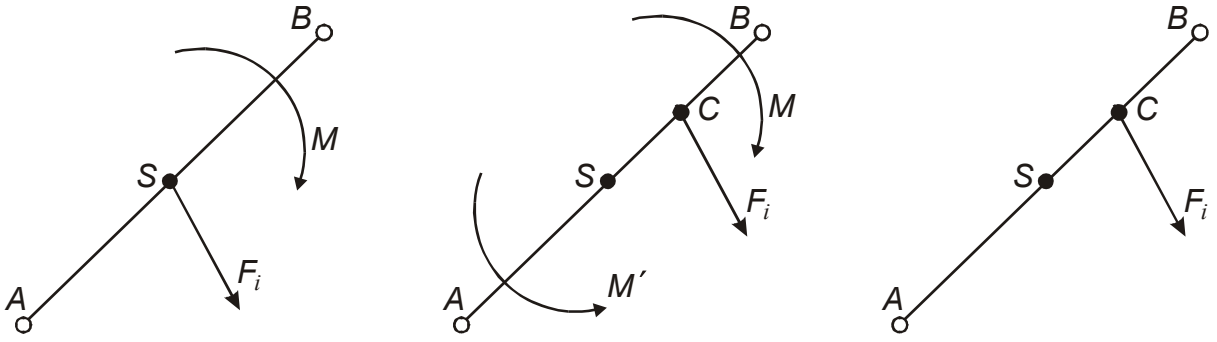


а) *б)*

Рис. 28

Змінюючи плече «*h*», маємо можливість змінювати за величиною допоміжні моменти M'

Розглядаючи попереднє навантаження на ланку *AB* (рис. 29) і випадки а) чи б), бачимо, що у випадку а), змінюючи плече «*h*» маємо можливість створити ситуацію, за якої $M = -M'$, тобто M' знищить момент *M,* і на ланці залишиться та сама сила F_i, але прикладена не в точці «*S*», а в точці «*C*».



а) *б)* *в)*

Рис. 29

У цьому випадку $h = \dfrac{M_i}{F_i}$.

Для знаходження точок *C* чи *D* паралельно лінії дії заданої силі F_I на величину «h» проводять лінію до перетину з ланкою. Залишається тільки визначити, яка точка потрібна *C* чи *D*?

Будуємо план швидкостей (див. побудову плану V). Даючи йому точку опори в полюсі «р», створюємо важіль Жуковського М. Є.

Розглядаючи ланки *AB*, O_iCD, *DE*, видно, що на кожну діють моменти. Вибираючи розглянуті попередньо методи перетворення моментів, звернемо увагу на значення сил інерції F_{ii}, на значення моментів M_{ii}. При значних величинах F_{ii} недоцільно використовувати теорему Пуансо.

Перетворимо моменти на пари сил, які потім перенесемо на важіль за правилами переносу:

$$F'_{i2} = F''_{i2} = \frac{M_{i2}}{l_{AB}} = \frac{70,4[\text{НЧм}]}{0,5[\text{м}]} = 140,8 \text{ [Н]};$$

$$F'_{i3} = F''_{i3} = \frac{M_{i2}}{l_{AB}} = \frac{88}{0,5} = 176\,[\text{Н}]; \qquad (46)$$

$$F'_{i4} = F''_{i4} = \frac{M_{i4}}{l_{DE}} = \frac{331,2}{0,6} = 552\,[\text{Н}].$$

У цих рівняннях в знаменнику дозволяється проставляти довжину між двома довільними фіксованими точками розглянутої ланки. Змінюючи відстань, змінюються точки прикладення та величина цих сил.

Переносимо на важіль всі сили з кінематичної схеми механізму, повертаючи їх за годинниковою стрілкою на кут 90° (рис. 30).

У точку «*a*» важеля перпендикулярно відрізку «*pa*» проставляємо приведену силу $\boldsymbol{F_{пр}}$, величину і напрямок якої будемо визначати.

Для встановлення знаку в рівнянні моментів зазначимо, що момент за годинниковою стрілкою будемо вважати додатним:

$$\sum M_p=0;$$

$$-F_{\text{пр}}\cdot p\alpha-G_1\cdot h_1-G_2\cdot h_2-G_3\cdot h_3-G_4\cdot h_4-G_5\cdot h_5+F_{i2}^{'}\cdot h+F_{i2}\cdot h+F_{i2}^{''}\cdot h+F_{i3}^{'}\cdot h+F_{i3}\cdot h-$$

$$-F_{i4}^{'}\cdot h+F_{i4}^{''}\cdot h-F_{к.о}\cdot h+F_{i4}\cdot h+F_{i5}\cdot h=0. \qquad (47)$$

$$-F_{\text{пр}}\cdot 50-30\cdot 14-60\cdot 34-80\cdot 58{,}5-65\cdot 94{,}5-60\cdot 90+140{,}8\cdot 7+505{,}1\cdot 5+140{,}8\cdot 9+176\cdot 100+$$

$$+1085{,}7\cdot 14-552{,}8\cdot 62+552{,}8\cdot 44-340\cdot 90+1051{,}3\cdot 70+1077{,}5\cdot 90=0.$$

Звідки $F_{\text{пр}}=\dfrac{148911{,}2}{50}=2978{,}2$ [Н].

Похибка при визначенні приведеної сили $\boldsymbol{F_{пр}}$ двома методами визначиться:

$$\Delta F_{\text{пр}}=\frac{F_{\text{прж}}-F_{\text{прк}}}{F_{\text{прж}}}\cdot 100\%=1{,}7\% . \qquad (48)$$

Це свідчить про значну точність при вирішенні задачі двома методами.

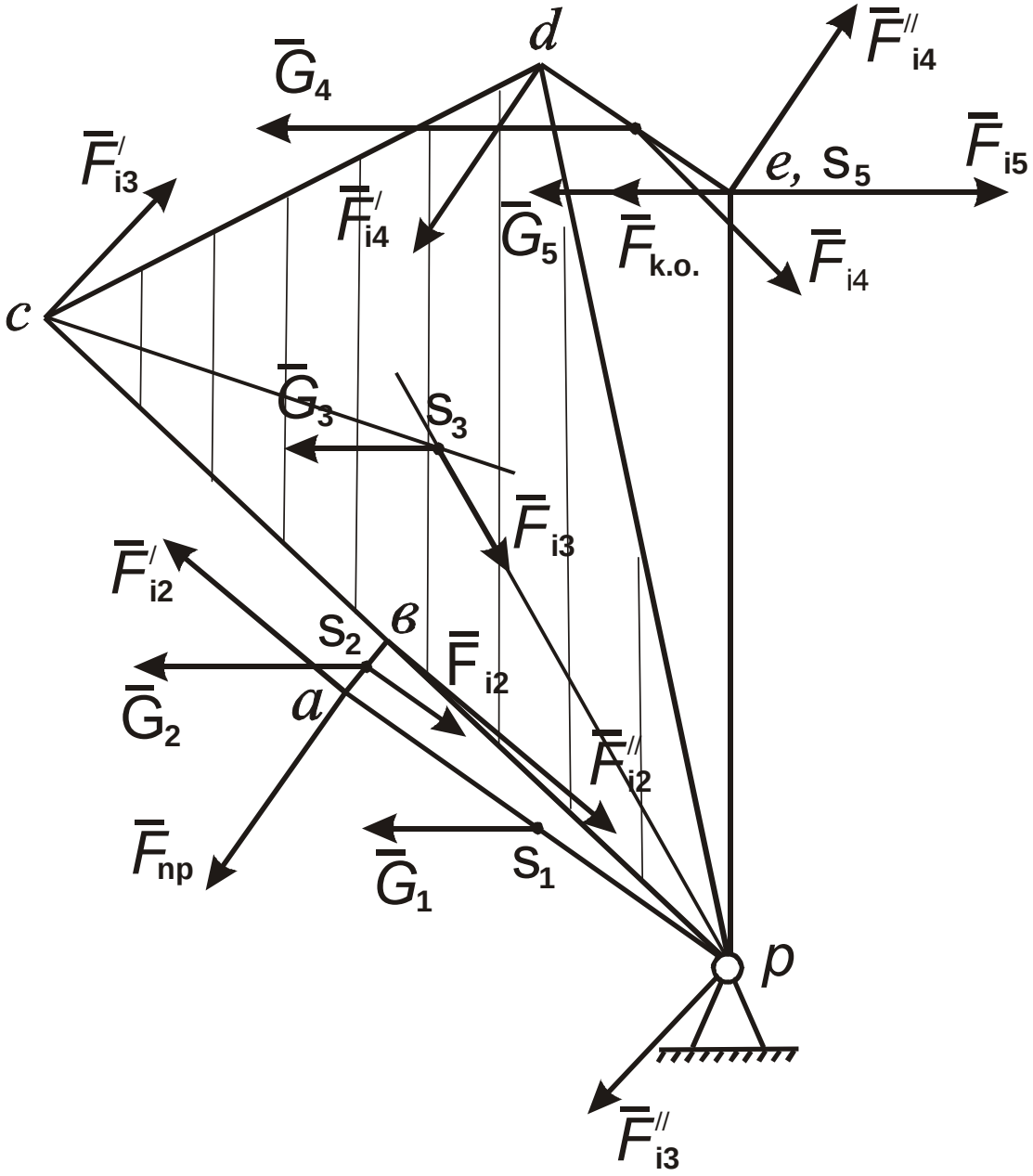

d
$\bar{G}_4$
$\bar{F}^{//}_{i4}$
$\bar{F}^{/}_{i3}$
e, S_5
$\bar{F}_{i5}$
$\bar{F}^{/}_{i4}$
$\bar{G}_5$
$\bar{F}_{k.o.}$
$\bar{F}_{i4}$
c
$\bar{G}_3$
S_3
$\bar{F}_{i3}$
$\bar{F}^{/}_{i2}$
S_2
в
$\bar{F}_{i2}$
$\bar{G}_2$
a
$\bar{F}^{//}_{i2}$
$\bar{F}_{пр}$
$\bar{G}_1$
S_1
p
$\bar{F}^{//}_{i3}$

Рис. 30