ІІ. ОПІР МАТЕРІАЛІВ

Опір матеріалів розглядає тіла, які під впливом зовнішнього навантаження змінюють свої форму та розміри, тобто деформуються. Деформації бувають пружними та пластичними. В залежності від того, які зовнішні сили діють на тіло, останнє деформується по-різному, як кажуть, тіло знаходиться в різному напруженому стані.

Основними видами напруженого стану є: стиск, розтяг, згин, зсув, кручення. У природі абсолютно пружних тіл не існує, тому якщо розглядати незначні деформації, то тіло можливо вважати пружним. Про такі деформації, а точніше про деформації, які діють в межах закону Гука, і буде в подальшому йти мова. Основним завданням опору матеріалів є забезпечення надійних розмірів поперечного перерізу деталі, на яку діють зовнішні навантаження. Такі розміри визначаються із розрахунків на міцність, жорсткість та стійкість елемента конструкції.

При розрахунку на міцність розміри поперечного перерізу деталі визначаються із умов, що при дії зовнішнього навантаження виключена можливість руйнації.

При розрахунку на жорсткість також визначаються розміри поперечного перерізу деталі, але із умов, що при дії зовнішнього навантаження деформація тіла не перевищить допустимих значень.

Розрахунком на стійкість визначається критичне значення сили, при якій можливий перехід конструкції із одного рівновісного, розрахункового стану в інший, не бажаний стан.

Із всіх розрахунків основним є розрахунок на міцність.

Руйнація зразка відбувається за рахунок найбільших значень нормальних та дотичних напружень або їх комбінацій. Тому ці величини обмежені допустимими значеннями: $[\sigma]$ – нормальним та $[\tau]$ – дотичним напруженнями.

При розрахунку на міцність вирішуються такі задачі:

1. Проектувальний розрахунок.

Відомі навантаження на матеріал. Необхідно знайти розміри поперечного перерізу стрижня.

2. Перевірочний розрахунок.

Відомі матеріал та розміри стрижня. Необхідно перевірити, чи витримає даний стрижень навантаження, що діє.

3. Відомі матеріал, розміри стрижня та схема його навантаження. Визначити, яке максимальне навантаження витримає стрижень.

В основі всіх розрахунків лежать умови міцності, при яких діюче значення напруження не перевищує допустимих значень, тобто $\sigma_{max} \le [\sigma]$, або $\tau \le [\tau]$.

При розрахунку на міцність діють таким чином:

Будуються епюри сил та моментів, за якими визначають небезпечні перерізи, тобто перерізи з максимальними значеннями сил або моментів. Для цих перерізів записують умови міцності. З цих рівнянь визначають розміри поперечного перерізу стрижня, перевіряють міцність або визначають допустиме навантаження.

При розрахунку на жорсткість вирішуються ті самі задачі, але в основі лежать умови жорсткості, тобто максимальні значення лінійних та кутових деформацій, що не перевищують допустимих значень:

$$\Delta l \le [\Delta l];\ \theta \le [\theta]. \qquad (49)$$

де: Δl – зміна розміру деталі,

$[\Delta l]$ – допустиме значення цієї зміни,

θ, $[\theta]$ – кутова деформація, кут закручування деталі та допустиме значення цієї величини.

Розрахунок на жорсткість є доповненням до розрахунку на міцність.

4. Види деформації

4.1. Розтяг-стиск

Приклад 1

Визначити діаметр стрижня постійного поперечного перерізу довжиною l = 600 мм, що стримує зусилля, згідно з рис. 31, F = 11760[Н]. Матеріал стрижня, сталь – Ст. 3, $[\sigma]$ = 157 [Н/мм^2]

Розв'язок

В основу даного рышення положимо умови міцності, тобто:

$$\sigma_{max} \le [\sigma] . \qquad (50)$$

При деформації розтягу-стиску еквівалентом внутрішніх сил від дії зовнішнього навантаження є поздовжня сила *N*. У цьому випадку максимальне значення напруження що діє, визначається так:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} . \qquad (51)$$

Тоді умови міцності запишуться як:

$$\frac{N_{\max}}{A} \le [\sigma] ,$$

де A – площа перерізу стрижня, $\pi d^2/4$.

Максимальне значення $N_{\max}$ отримаємо після побудови епюри *N*. Будуємо епюру поздовжніх сил *N*.

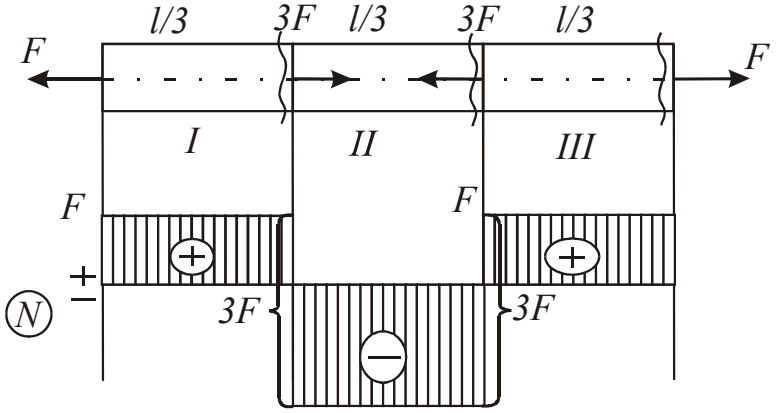


Рис.31

Виділяємо характерні перерізи (перерізи в місцях прикладення сил та кінцеві перерізи).

При цьому створилося 3 ділянки I, II, III. В перерізі під місцем прикладання розтягувальної чи стискувальної зовнішньої сили на епюрі *N* відбуваються стрибки на величину зовнішньої сили. При цьому вважається, що розтягувальна сила – додатна. Послідовно в кінці кожної ділянки біля характерного перерізу умовно розсікаємо стрижень і розглядаємо рівновагу «відрізаної» частини. Для здійснення стрибка наступним кроком розглядаємо кінець ділянки, тобто характерний переріз.

Ділянка I

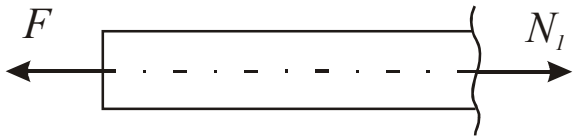


Рис.32

Рівновага – $\Sigma Fi=0$. В нашому випадку $F–N_1=0$ використано правило: Осьова сила визначається алгебраїчною сумою всіх сил, розташованих з одного боку від перерізу. Сила F – розтягувальна. Звідки $N_1 = F$. Значення сили $N_1 = F$ буде постійним на всій ділянці I.

Розглядаємо характерний переріз на кордоні ділянок I і II (рис. 33). У цьому перерізі діє стискуюча сила $3F$. Згідно з правилом робимо стрибок у від'ємну зону на величину $3F$. Тобто $F – 3F = -2F$.

Ділянка II

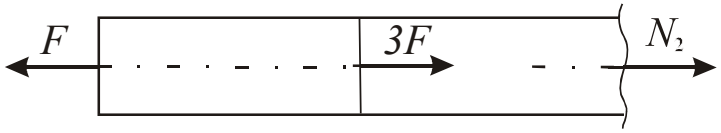


Рис.33

Розглядаємо переріз в кінці ділянки II. Умови рівноваги:

$$\Sigma Fi = 0;\ F - 3F - N_2 = 0.$$

Звідки: $N_2 = F - 3F = -2F$. На ділянці II це постійна величина.

Наступною розглядаємо характерний переріз між ділянками II і III. В перерізі діє розтягувальна сила $3F$. Згідно з правилом робимо стрибок у додатну зону на величину $3F$. Це можна записати так: $-2F + 3F = F$.

Розглядаючи останній переріз в кінці ділянки III, запишемо рівняння рівноваги з різних боків перерізу:

Ліворуч $\rightarrow F - 3P + 3P - N_3 = 0$; Звідки $N_3=F$.

Праворуч $\rightarrow F – N_3 = 0$; Звідки $N_3 = F$.

Тобто однакові значення внутрішньої сили з різних боків перерізу свідчать про вірність розв’язку задачі. Розглядаючи епюру N, видно, що $N_{max} = |2F|$. Умови міцності можливо записати так:

$$\frac{2F}{A} \le [\sigma]. \qquad (52)$$

Звідки: $A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{2 \cdot 11760}{157} \ge 149{,}8 \text{мм}^2$,

звідки $d \ge 1{,}13\sqrt{A} \ge 13{,}8$ мм.

Більшим значенням в бік стандартного буде $d = 14$ мм.

Приклад 2

Ступеневий стрижень із матеріалу Сталь 30 навантажено згідно зі схемою. Чи витримає стрижень вказане навантаження, якщо відомо, що $[\sigma]$=250Н/мм^2, F_1=80 кН, F_2=120 кН, F_3 =100 kH.

Розв'язок.

Починаючи з вільного кінця, виділимо характерні перерізи. Отримаємо 5 ділянок.

Кожного разу розглядаємо рівновагу правої частини від перерізу, відкидаючи ліву частину.

На кожній ділянці будемо розглядати перерізи в кінці ділянки близько до характерного, потім у самому перерізі.

Наприклад: виділяємо переріз в кінці ділянки I, потім в перерізі між ділянками I та II і так далі. На першій ділянці діє одна сила $F_{1,}$ тобто F_1-N_1=0; $N_1 = F_{1.}$ У перерізі між ділянками I та II зовнішні сили відсутні. На епюрі N стрибка не буде, і значення сили $N_{1=} F_1$ буде на ділянці II.

Розглядаємо переріз між ділянками II та III. У цьому перерізі діє стискувальна сила F_2, від якої стрибок вниз на величину 120 кН до величини або значення $F_1 - F_2 - N_2 = 0$; N_2 = -120+80 = –40 кН.

Це значення внутрішньої сили буде до кінця ділянки III, а враховуючи те, що в перерізі III – IV зовнішня сила відсутня, значення N_2 буде до кінця ділянки IV.

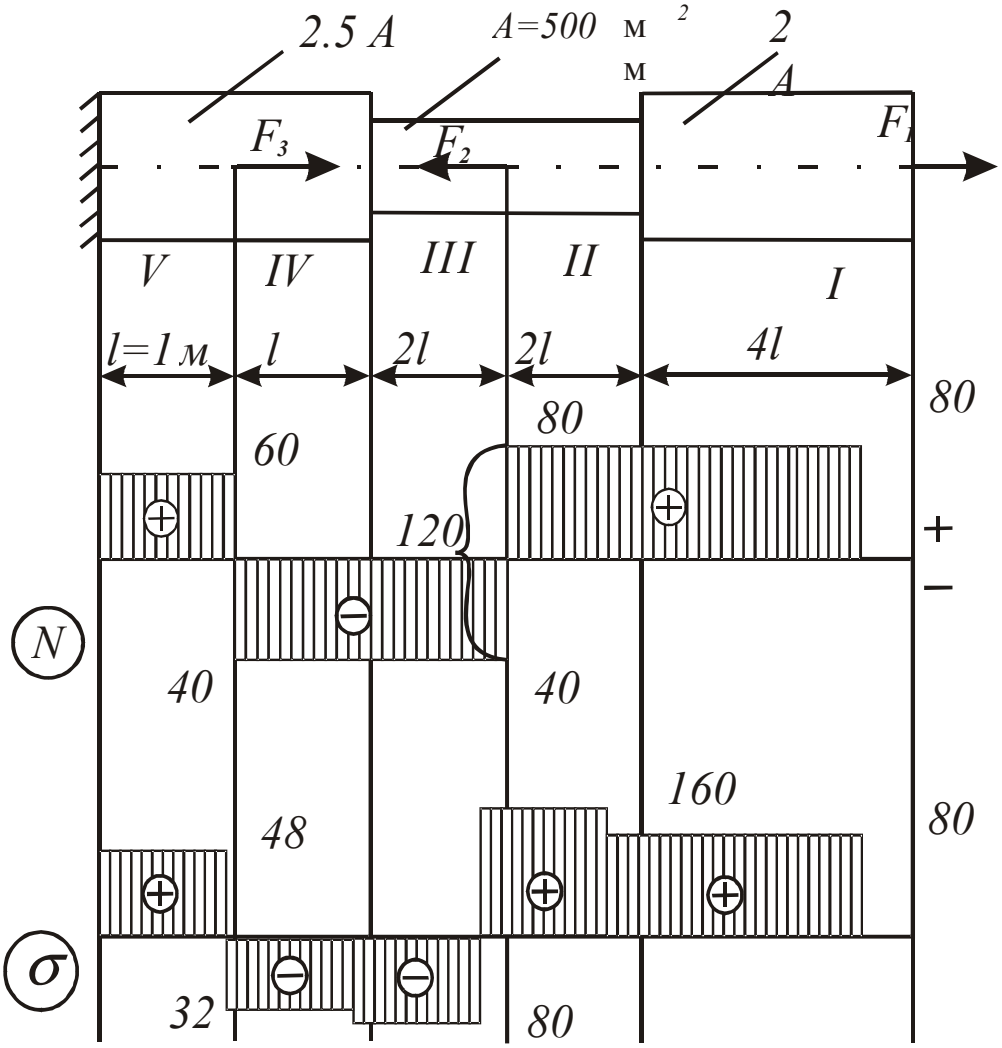


Рис.34

Розглянемо переріз IV–V. Там діє зовнішня розтягувальна сила F_2. Вона викликає стрибок у зону додатних значень на величину F_3 = 100 кН від значення N_2 = -40 кН, тобто кінцевий результат N_3 = 60 кН. До кінця ділянки V значення N_3 = 60 кН не змінюється. Для отримання напруження в будь-якому перерізі стрижня необхідно скористатися формулою:

$$\sigma_1 = \frac{Ni}{Ai}; \tag{53}$$

$$\text{Ділянка I: } \sigma_1 = \frac{80000[\text{Н}]}{1000[\text{мм}^2]} = 80\,\text{МПа};$$

$$\text{Ділянка II: } \sigma_2 = \frac{80000}{500} = 160\,\text{МПа};$$

$$\text{Ділянка III: } \sigma_3 = -\frac{40000}{500} = -80\,\text{МПа};$$

$$\text{Ділянка IV: } \sigma_4 = -\frac{40000}{1250} = -32 \text{ МПа};$$

$$\text{Ділянка V: } \sigma_5 = \frac{60000}{1250} = 48 \text{ МПа}.$$

За цими даними будуємо епюру напружень.

Із епюри видно, що небезпечною є ділянка II, де максимальне значення напруження σ_{max} = 160 МПа. Порівнюючи максимальне значення з допустимим бачимо, що умови міцності забезпечені:

$$\sigma_{max} = 160 \text{ МПа} < [\sigma] = 250 \text{ МПа}.$$

4.2. Зріз і зминання (зсув)

Деформація зсуву відбувається при зміщенні двох паралельних перерізів стрижня. Деталями, які працюють на зсув, будуть: шпонки, штіфти, заклепки, зварені, паяні та клеєні з'єднання, тощо. При цьому виді деформації виникають дотичні напруження – τ. Умовою міцності при цьому буде вираз:

$$\tau = \frac{F}{A_{\text{зр}}} \le [\tau_{\text{зр}}], \tag{54}$$

де $[\tau_{\text{зр}}]$ – допустиме дотичне напруження при розрахунках на зріз;

$A_{зр} = \frac{\pi d^2}{4}$ – площа зрізу, наприклад, заклепки.

Допустиме значення напруження:

$$[\tau_{\text{зр}}] = (0{,}75...0{,}8)[\sigma], \tag{55}$$

де $[\sigma]$ – допустиме напруження на розтяг матеріалу заклепки.

Умова міцності елементів конструкцій, що працюють на зминання:

$$\sigma_{зм} = \frac{F_{\text{зм}}}{A_{\text{зм}}} \le [\sigma_{\text{зм}}], \tag{56}$$

де $A_{\text{зм}}$ - площа зминання, $F_{\text{зм}} = \delta \bullet d$

δ – товщина полоски, d – діаметр заклепки.

$[\sigma_{\text{зм}}]$ – допустиме напруження на зминання:

$$[\sigma_{\text{зм}}] = (1{,}7...2{,}2)[\sigma]. \tag{57}$$

Приклад 3

Дві полоси товщиною δ = 10 мм з'єднанні 20 заклепками (рис. 35). Діаметр заклепки d = 12мм. Заклепочне з'єднання досліджують розтягувальною силою $F = 700 \cdot 10^2$ [Н].

Чи витримає з'єднання дане навантаження?

Відомо: $[\tau_{зр}] = 100$ МПа, $[\sigma_{зм}] = 240$ МПа.

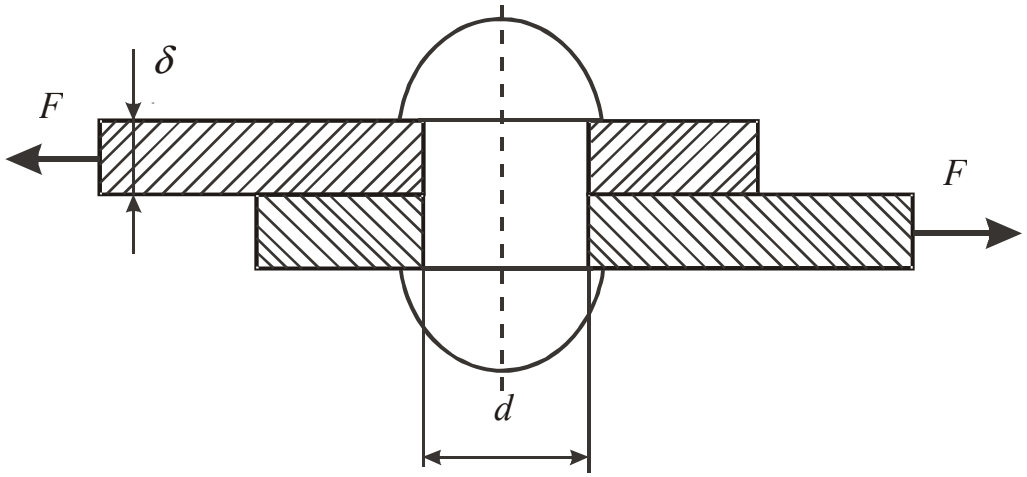


Рис. 35

Розв'язок

З'єднання виконане 20 заклепками $i = 20$, кожна заклепка зрізається силою $F/20$, тобто дотичні напруження при цьому:

$$\tau = \frac{F}{i \cdot A} = \frac{700 \cdot 10^2}{20 \cdot \frac{\pi \cdot 12^2}{4}} = 30,96 \text{МПа} .$$

Умови міцності $\tau = 30,96$ МПа $< [\tau_{зр}]$ виконуються.

Визначимо напруження зминання:

$$\sigma = \frac{F}{i \cdot A_{зм}} = \frac{700 \cdot 10^2}{20 \cdot 120} = 29,2 \text{ МПА} . \qquad (59)$$

де $A_{зм} = \delta * d = 10 * 12 = 120$ мм^2

Умови міцності виконуються:

$$\sigma_{зм} = 29,2 \text{ МПа} < [\sigma_{зм}] = 240 \text{ МПа} . \qquad (60)$$

Приклад 4

Дві полоси товщиною δ = 10мм з'єднані заклепками d=12мм.

Розтягувальна сила $F = 700 \cdot 10^2$ Н. Яка кількість заклепок необхідна в з'єднанні, якщо $[\tau_{зр}] = 100$ МПа?

Розв'язок

Кількість заклепок визначають із умов міцності на зріз:

$$\tau = \frac{F}{i \cdot A} \le [\tau_{зр}], \tag{61}$$

звідки: $i \ge \dfrac{F}{A \cdot [\tau_{зр}]} = \dfrac{700 \cdot 10^2}{\dfrac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot 100} \ge 6{,}2$.

Приймаємо більше число, і=8.

Приклад 5

Визначити діаметр болта, якщо з'єднання відбувається за рис. 36. Відомо: $\delta = 20$ мм; δ_1=12 мм, допустиме напруження $[\tau_{зр}] = 100$ МПа,

$[\sigma_{зм}] = 240$ МПа; (рис.36). Розтягувальна сила 80 кН. Вважати, що болт входить в отвір без зазору.

Розв'язок

За такої схеми з'єднання, болт буде працювати на зріз по двом перерізам *«ab»* та «*ce*» і тоді площа зрізу буде: $A_{зр} = \dfrac{\pi \cdot d^2}{2}$

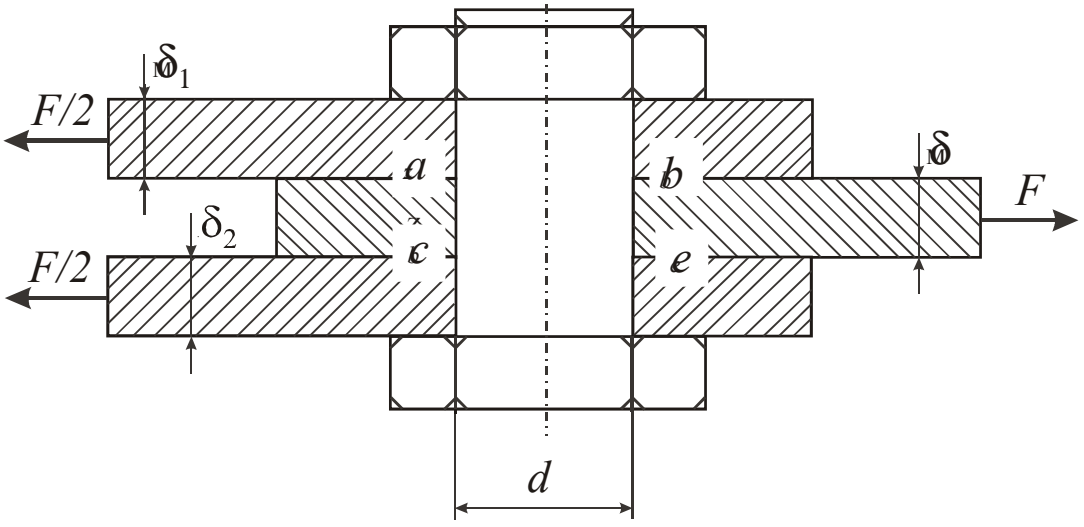


Рис. 36

Умови міцності на зріз:

$$\tau = \frac{F}{A_{зр}} \le [\tau_{зр}] \ . \qquad (62)$$

Звідки $$A_{зр} \ge \frac{F}{[\tau_{зр}]}, \text{ або } \frac{\pi \cdot d^2}{2} \ge \frac{2F}{[\tau_{зр}]},$$

звідки

$$d \ge \sqrt{\frac{2F}{\pi \cdot [\tau_{зр}]}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 80 \cdot 10^3}{\pi \cdot 100}} = 22{,}6 \text{ мм} \ .$$

Оскільки $2\delta_1 > \delta$, то небезпечним у відношенні зминання буде внутрішній лист. Площа зминання: $A_{зм} = \delta \cdot d$.

Із умов міцності на зминання :

$$A_{зм} = \frac{F}{[\tau_{зм}]}, \text{ або } \delta \cdot d = \frac{F}{[\sigma_{зм}]}, \ d \ge \frac{F}{\delta \cdot [\sigma_{зм}]} = \frac{800 \cdot 10^3}{20 \cdot 240} = 16{,}7 \text{ мм}$$

Із двох значень діаметра необхідно вибрати більше й округлити його в більшу сторону за *ГОСТ* 7798-70, тобто болт діаметром 24 мм і різьбою М24.

4.3. Кручення

Деформація кручення виникає при дії на стрижень пари сил в площині, перпендикулярній до осі вала. Момент пари сил називається крутним моментом. Це означає, що з шести внутрішніх силових факторів, при деформації кручення діє тільки один $M_{кр}(T_к)$. Розрахунки на кручення необхідні при проектуванні вала. При цьому визначають значення крутного моменту $T_к$ *(*НЧм*)*, діючого на вал з потужністю *P (*Вт*),* яка передається валом, при частоті обертів вала *n (*$хв^{-1}$). Між цими характеристиками діє залежність:

$$T_k = 9{,}55 \frac{P}{n} \ . \qquad (63)$$

В основі розв'язання всіх задач на кручення є умови рівноваги вала, тобто сума моментів, діючих на вал, дорівнює нулю:

$$\sum T_{ki} = 0 \ .$$

Це рівняння рівноваги є алгебраїчна сума моментів, де довільний

напрямок моменту приймають додатним.

Приклад 6

Побудувати епюру крутних моментів для вала згідно з рис. 37, якщо шків I від двигуна отримує потужність $P_1 = 52$ кВт, при частоті обертів вала $n_1 = 240$ хв$^{-1}$, а шківи II, III, IV використовують потужність відповідно $P_2 = 15$кВт, $P_3 = 17$ кВт, $P_4 = 220$ кВт.

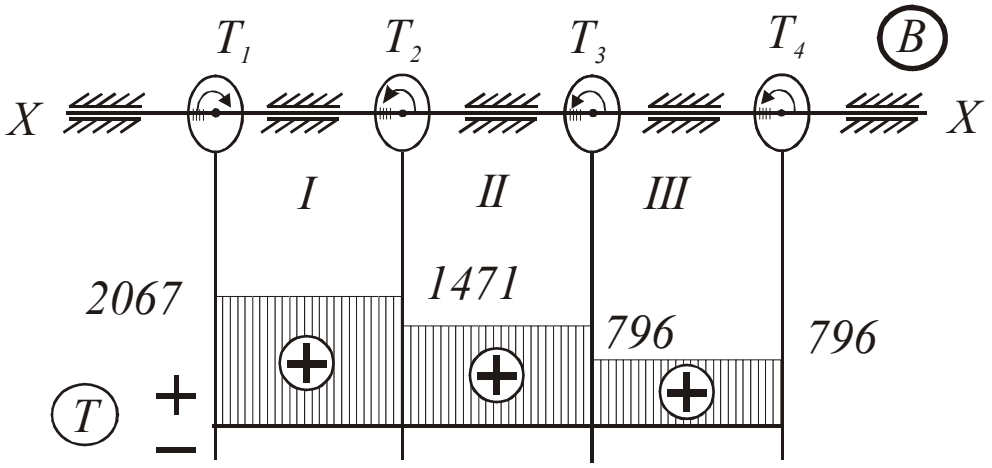


Рис.37

Розв'язок.

За формулою (63) визначаємо моменти на шківах.

$$T_1 = 9,55 \cdot \frac{P_1}{n_1} = 9,55 \cdot \frac{52 \cdot 10^3}{240} = 2067[\text{НЧм}] \ ;$$

$$T_2 = 9,55 \cdot \frac{P_2}{n_1} = 9,55 \cdot \frac{15 \cdot 10^3}{240} = 596[\text{НЧм}] \ ;$$

$$T_3 = 9,55 \cdot \frac{P_3}{n_1} = 9,55 \cdot \frac{17 \cdot 10^3}{240} = 675[\text{НЧм}] \ ;$$

$$T_4 = 9,55 \cdot \frac{P_4}{n_1} = 9,55 \cdot \frac{220 \cdot 10^3}{240} = 796[\text{НЧм}] .$$

Складаємо рівняння рівноваги:

$\Sigma T_{ix} = 0$; $T_1 = T_2 + T_3 + T_4$, або 2067=596+675+796.

Для побудови епюри вал розіб'ємо на 3 ділянки I, II, III. Побудову будемо здійснювати від опори A до опори B. На ділянці I діє момент $T_I = 2067$ [Н·м].

Якщо напрямок цього моменту прийняти додатним, то це значення

відкладемо вгору від нульової осі. На переході від ділянки I до II, на шківі діє від'ємний момент T_2. Результуючий момент на ділянці II:

$T_{II} = T_1 - T_2 = 1471$ [Н·м].

Між ділянками II, III на шківі діє від'ємний момент T_3 і на ділянці III буде результуючий момент :

$T_{III} = T_1 - T_2 - T_3 = 2067 - 596 - 675 = 796$ [Н·м].

Отримані значення зображені прямокутниками на кожній ділянці.

Приклад 7

Вал обертається рівномірно, обертальний момент на ведучому шківі T_1 =5000 [НЧм]. Визначити величину та напрямок моменту T_2 на відомому шківі (рис. 38). Побудувати епюру крутних моментів.

Розв'язок

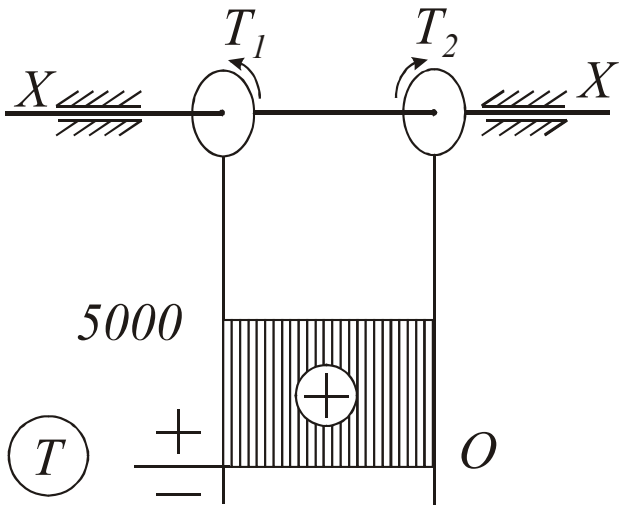


Рис. 38

Розглянемо рівновагу вала, при якому $\Sigma T_i = 0$. Це буде тоді, коли $T_1 - T_2 = 0$; тобто $T_1 = T_2$. Рівняння показує, що моменти T_1 *і* T_2 рівні між собою, але протилежні за напрямком.

Для побудови епюри виділяється одна ділянка I, на якій діє постійний момент $T_1 = T_2 = 5000$ Н·м, який на епюрі зображений прямокутником.

При розрахунку на міцність вала круглого суцільного або кільцевого поперечного перерізу записують умови міцності:

$$\tau = \frac{T_{\max}}{W_P} \le [\tau], \qquad (64)$$

де T_{max} – максимальне значення крутного моменту, взятого з епюри;

W_P – полярний момент опору перерізу вала крученню:

для суцільного перерізу: $Wp = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \cong 0{,}2d^3$;

для кільцевого перерізу: $Wp = 0{,}2 \cdot d_3^3 \cdot (1 - a^4)$; $a = \frac{d_3}{d_B}$.

де d_3, d_B – діаметри кільця, відповідно зовнішній та внутрішній.

Рівняння міцності дає можливість розв'язати три задачі:

1.**Перевірка міцності.** Відомі: T_{max} та розміри поперечного перерізу. Чи витримає вал дане навантаження?

2.Проектний розрахунок. Відомі: T_{max} і матеріал $[\tau]$. Підібрати розміри поперечного перерізу вала для цього навантаження. У цьому випадку $Wp = \frac{T\max}{[\tau]}$. Необхідні розміри вала визначають із Wр.

3. Визначення допустимого значення крутного моменту. Відомі розміри поперечного перерізу вала і матеріал, тобто [τ]. У цьому випадку

$$T\max = Wp \cdot [\tau] .$$

Крім виконання умов міцності, при проектуванні валів, необхідно виконати умови жорсткості. При цьому відносний кут закручування вала θ обмежується допустимим значенням $[\theta]$.

Рівняння жорсткості має вигляд:

$$\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{T\max}{G \cdot Ip} \le [\theta] \quad , \qquad (65)$$

де θ [рад/мм], T [Н·мм], G [Н/мм^2], $Ip = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$[мм^4].

Значення допустимого кута закручування вала, у залежності від умов роботи вала, знаходяться в межах $[\theta] = (0{,}45...1{,}75) \cdot 10^{-2}$ рад/мм, або

$$[\theta] = (0{,}25...1{,}0) \text{ град/м.}$$

Для визначення відносного кута закручування в градусах на 1 метр довжини вала:

$$\theta = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{T\max}{G \cdot Ip} \le [\theta].$$

Розмірності величин попередні.

Умови жорсткості дають можливість вирішувати три типи задач:

1.Перевірка на жорсткість. Відомі: крутний момент T_k, розміри вала, його матеріал, а також допустимий відносний кут закручування [θ]. Визначити величину максимального відносного кута закручування і перевірити умови жорсткості.

2. Проектний розрахунок. Відомі: крутний момент T_k, матеріал вала, а також допустимий відносний кут закручування [θ]. Підібрати розміри поперечного перерізу вала, щоб вал витримував дане навантаження. При цьому рівняння жорсткості (65) вирішують відносно полярного моменту інерції $I_p \ge \frac{T\max}{G[\theta]}$. Із формули з визначення $I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$ підраховують діаметр вала.

3. **Визначення допустимого T_k.**

Відомі: розміри поперечного перерізу вала, тобто I_p, матеріал вала G і допустимий відносний кут закручування [θ]. Визначити допустиме значення крутного моменту $[T_k] = GI_p[\theta]$.

Приклад 8

У поперечному перерізі стального вала виникає крутний момент $T_k = 2000$ Н·м. Діаметр вала $d = 65$ мм. Модуль пружності $G = 0{,}8 \cdot 10^5$ Н/мм^2. Допустиме напруження $[\tau] = 40$ Н/мм^2, а допустимий кут закручування $[\theta]$=0,85 град/м. Перевірити міцність та жорсткість вала.

Цей приклад відноситься до першого типу задач.

Розв'язок

Записуємо умови міцності:

$$\tau = \frac{T_{\max}}{W_p} \le [\tau].$$

Визначимо значення полярного моменту опору перерізу вала крученню:

$$W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16} = \frac{\pi \cdot 64^3}{16} = 53,9 \cdot 10^3 \text{мм}^3 .$$

Діюче значення напруження дорівнюватиме:

$$\tau = \frac{2000 \cdot 10^3}{53,9 \cdot 10^3} = 37,2 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2} \le [\tau] = 40 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2} \ .$$

Умови міцності виконуються. Для перевірки жорсткості записується рівняння жорсткості (65). Визначається полярний момент інерції:

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{\pi \cdot 65^4}{32} = 175 \cdot 10^4 \text{мм}^4 .$$

Переводимо допустиме значення відносного кута закручування із град/м в розмірність рад/ мм.

$$[\theta] \frac{\text{рад}}{\text{мм}} = [\theta] \frac{\text{град}}{\text{м}} \cdot \frac{\pi}{180 \cdot 10^3} = 0.148 \cdot 10^{-4} .$$

Із рівняння жорсткості:

$$\theta = \frac{T_k}{G \cdot I_p} = \frac{2000 \cdot 10^3}{0,8 \cdot 10^3 \cdot 175 \cdot 10^4} = 0.143 \cdot 10^{-4} < [\theta] = 0.148 \cdot 10^{-4} \frac{\text{рад}}{\text{мм}} ..$$

Умови жорсткості також виконуються.

Приклад 9

Із умов міцності та жорсткості визначити діаметр суцільного вала від дії навантаження за прикладом 4. Допустиме напруження $[\tau]$ = 40 Н/мм^2.

Допустимий відносний кут закручування: $[\theta]$ = 1/4 град/м. Модуль пружності: $G = 0,8 \cdot 10^5$ Н/мм^2.

Розв'язок

Допустимий відносний кут закручування в розмірності, рад/мм :

$$[\theta] = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{180 \cdot 1000} = 0,436 \cdot 10^{-5} .$$

Із побудованої епюри відомо, що найбільший момент діє на ділянці I, T_I = 2067 Н ·м, за цим значенням і будемо визначати діаметр вала.

Із умов міцності: $d \ge \sqrt[3]{\frac{16 \cdot T_{\max}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2067 \cdot 10^3}{\pi \cdot 40}} = 64,1 \text{мм} .$

Із умов жорсткості: $d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot T_{\max}}{G \cdot \pi \cdot [\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 2067 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{0,8 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot 0,436}} = 88,2$мм.

Із двох значень діаметра вала необхідно брати більше, отримане з умов жорсткості, округляючи його до більшого стандартного значення. Діаметр вала приймаємо d = 90 мм [*ГОСТ 6636-69*].

4.4. Деформація згину

Згин – це такий стан елемента конструкції, при якому під впливом зовнішнього навантаження прямолінійна вісь елемента скривляється. Цей елемент називають балкою. З усіх зовнішніх навантажень, діючих на балку, виділимо (рис. 37):

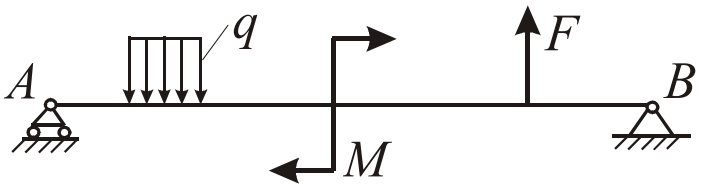


Рис. 37

F – зосереджена сила;

q – рівномірно розподілене навантаження;

M – зосереджений момент.

Якщо зовнішні навантаження діють в одній площині, наприклад в площі вертикальної осі, то такий згин називається плоским.

При згині поздовжні волокна, розташовані на різній висоті перерізу, деформуються по-різному: одні – скорочуються, інші – видовжуються. У зв'язку з таким розподілом деформації по висоті перерізу балки, напруження, пов'язані з деформацією законом Гука, по висоті перерізу також неоднакові: найбільші напруження відповідають найбільшим деформаціям. Тобто напружені волокна площі поперечного перерізу, найбільш віддалені від середини по висоті перерізу, знаходяться в найбільш напруженому стані. Тому для визначення напружень в перерізі необхідно враховувати не тільки кількість матеріалу (площа перерізу), а й його розподіл по висоті перерізу. У зв'язку з цим для характеристики явища згину використовують такі геометричні характеристики перерізу, які враховують розподіл матеріалу по висоті перерізу: статичний момент площі S, осьовий момент інерції I та момент опору перерізу W.

Внутрішніми силовими факторами при згині в перерізах балок є поперечна

сила Q та згинаючий момент M, які залежать від зовнішніх навантажень, змінюються по довжині балки. Закони їх зміни представляються деякими рівняннями, в яких аргументом є координата довжини балки «*X*» а функціями – *Q і M*.

Зручно подати ці рівняння у вигляді епюр, ординати яких для будь-яких значень абсциси X дають відповідні значення поперечної сили Q та згинаючого моменту M. Внутрішні силові фактори Q і M спричинюють напруження в перерізі балки, за яким оцінюють її стан.

Згинаючий момент M спричинює в поперечному перерізі стрижня нормальні напруження σ, які визначаються формулою:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W} \quad , \tag{66}$$

і закон їх зміни по висоті має вигляд наведений на рис. 38.

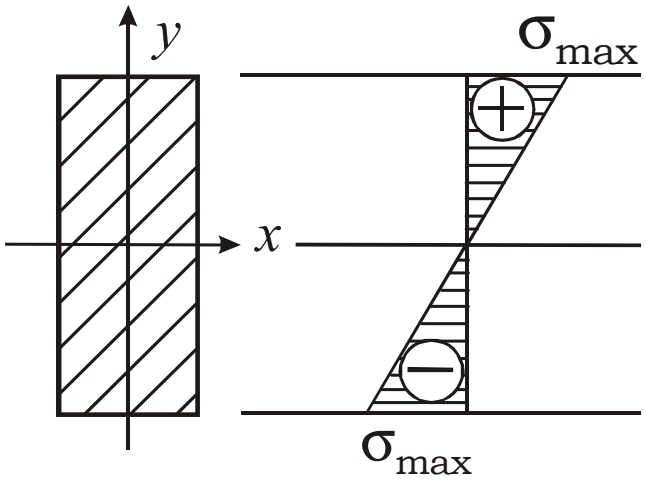


Рис.38

Із рисунка видно, що максимальні значення напруження виникають у верхніх (нижніх) шарах матеріалу стрижня.

Поперечна сила Q спричинює в поперечному перерізі стрижня дотичне напруження τ, яке визначається за формулою Журавського Д. І.:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_x}{b \cdot I_x} \quad , \tag{67}$$

де S_x – статичний момент площі перерізу стрижня відносно нейтральної лінії (осі x), тієї частини площі, яка розташована над досліджуваною точкою, наприклад C (рис. 39).

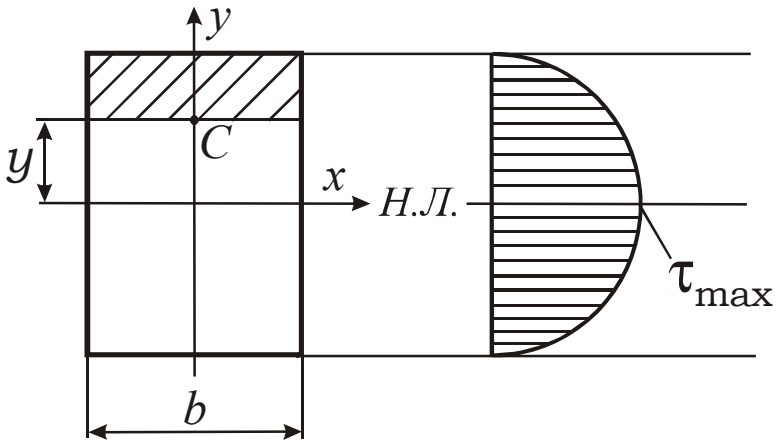


Рис. 39

b – ширина поперечного перерізу балки в точках з координатою «y», для яких визначається дотичне напруження «τ».

I_x – осьовий момент інерції поперечного перерізу балки відносно осі «x».

Розподіл дотичного напруження по висоті поперечного перерізу балки не рівномірний, а максимальне значення τ_{max} в тому перерізі, де $\sigma = 0$.

На практиці, при перевірці умов міцності, частіше за все використовують значення нормальних напружень, тобто:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W} \le [\sigma]. \qquad (68)$$

Дотичні напруження, які визиваються поперечними силами, мають максимальне значення в нейтральному шарі, де діють максимальні поперечні сили, як показано на рис. 39.

Якщо максимальний згинаючий момент і максимальна поперечна сила діють в одному і тому ж перерізі балки, то доцільно використати перевірку загальної міцності балки з визначенням головних напружень за формулою:

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\cdot\tau^2} \quad , \qquad (69)$$

$$\sigma_{\min} = \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\cdot\tau^2} \, , \qquad (70)$$

а умовою міцності буде нерівність:

$$\sigma_{\max} \le [\sigma].$$

Розглядаючи умови міцності, формули (68) чи (70), розв’язуються три

типи задач:

1. Перевірочний розрахунок. Відомі: розміри перерізу балки, найбільший згинаючий момент та допустиме напруження $[\sigma]$. Чи витримає балка таке навантаження?

2. Проектний розрахунок. Відомі: матеріал балки, діючі навантаження. Визначити розміри поперечного перерізу балки, спроможні витримати діюче навантаження.

У цьому випадку із умов міцності визначають значення моменту опору перерізу балки:

$$W \geq \frac{|M|_{\max}}{[\sigma]}.$$

3. Визначення найбільшого допустимого згинаючого моменту. Відомі: розміри перерізу балки, її матеріал. Основна задача при цьому – визначити небезпечний переріз балки, в якому діє максимальний згинаючий момент $|\mathrm{M}|_{\max}$. За його значенням є можливість знайти максимальне напруження або підібрати необхідний переріз балки.

Порядок розв'язування задач.

1. Зображають схему навантаження балки, тобто активні й реактивні сили та моменти. Активні сили задаються, а реактивні визначаються.
2. Визначаються реакції в опорах, якщо ці невідомі не дають можливості будувати епюри. Балки опираються на опори, в яких виникають реакції від дії зовнішнього навантаження.

За конструктивними особливостями розрізняють три види опор: шарнірно-нерухомі (рис. 40, а), шарнірно-рухомі (рис. 40, б), жорстко затиснені (рис.40, в).

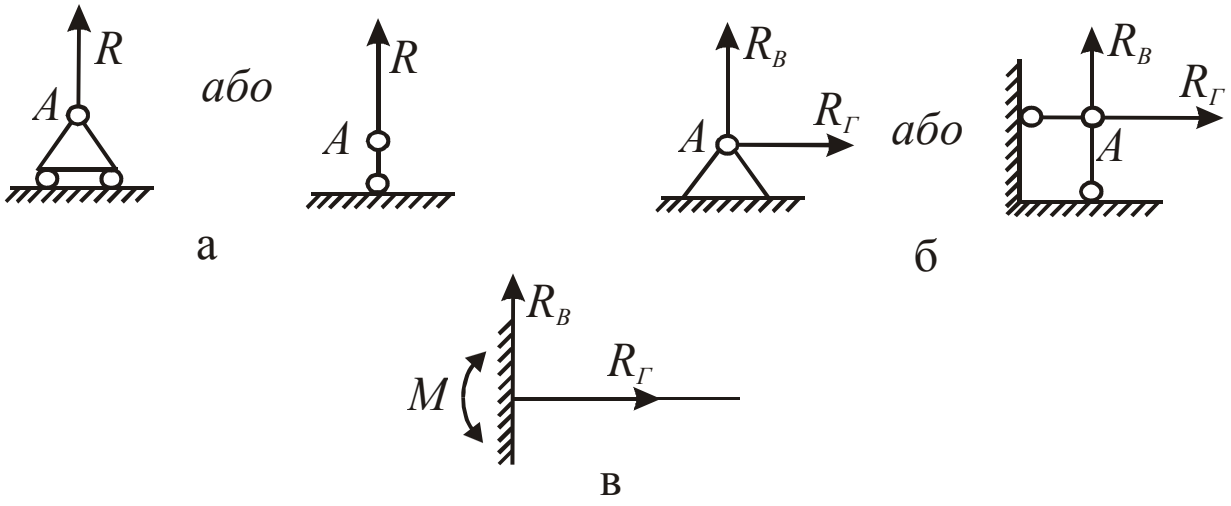


Рис. 40

Залежно від числа та виду опор балки, число реакцій, необхідних для визначення, різне. Кількість рівнянь для визначення реакцій в опорах – три:

Перше – $\Sigma F_{ix} = 0$: алгебраїчна сума проекцій всіх сил на горизонтальну вісь дорівнює нулю;

Друге – $\Sigma F_{iy} = 0$: алгебраїчна сума проекцій всіх сил на вертикальну вісь дорівнює нулю;

Третє – $\Sigma M_{ОП} = 0$: алгебраїчна сума моментів всіх сил та пар сил (активних і реактивних) відносно будь-якої опори дорівнює нулю.

Алгебраїчна сума враховує знак складової рівняння. Правило знаків встановлюється довільно.

Якщо кількість невідомих реакцій перевищує кількість рівнянь, то задача вважається статично не визначеною.

Після визначення реакцій обов'язковою процедурою є перевірка вірності визначення реакцій. Для цього складається одне рівняння, яке підтвердить, що алгебраїчна сума моментів відносно довільної точки балки (крім опор) буде дорівнювати нулю. Доцільно зауважити, що складання рівнянь повинне відбуватися так, щоб вони вирішувались без труднощів. Це, перш за все, рівняння, які мають одну невідому з малою к кількістю складових. Досягти такого можливо вибором напрямку координатних осей і центра моментів. Напрямки координатних осей необхідно вибирати так, щоб вони були

паралельні одним і перпендикулярні іншим силам.

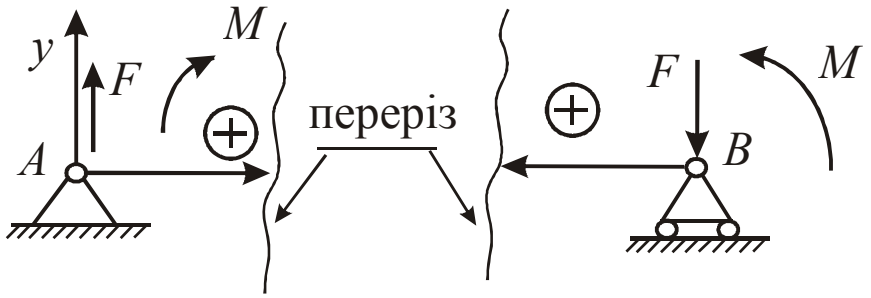
Якщо після вирішення рівнянь значення невідомої реакції отримали з від'ємним знаком, це означає, що попередній довільно вибраний напрямок реакції невірний і його необхідно змінити на зворотний.

3. Креслять вихідну схему навантаження балки з активними і реактивними силами та моментами. На цій схемі вертикальними лініями виділяють характерні перерізи (під місцем прикладання сил та моментів, ділянки з розподіленим навантаженням, а також всю довжину балки), які створюють досліджувані ділянки.

4. За відомими правилами будують епюру поперечних сил Q.

Побудову епюри здійснюють в напрямку зліва направо або навпаки. На кожній ділянці розглядають два перерізи: один в кінці ділянки, біля характерного перерізу, другий – безпосередньо в самому характерному перерізі.

Це робиться для того, щоб виконати стрибки під силами на епюрі сил і під моментами на епюрі моментів (рис. 41).



а) б

Рис. 41

Кожного разу визначається поперечна сила Q по один бік від перерізу.

5. Аналогічно будують епюру згинаючих моментів M за відомими правилами.

Для того, щоб поперечну силу Q та згинаючий момент M отримувати однакової величини і знаку, не залежно від вибраного напрямку побудови епюр, встановлено правило знаків:

При побудові епюри зліва направо (рис. 41, а) розглядаються сили і пари

сил, розташовані зліва від перерізу.

Правило. Усі сили направлені вгору, а моменти по ходу годинникової стрілки вважаються додатними.

При побудові епюри справа наліво (рис. 41, б) розглядаються сили та пари сил, розташовані справа від перерізу.

Правило. Усі сили направлені вниз, а моменти проти ходу годинникової стрілки вважаються додатними.

Правила побудови епюр *Q*

1. На ділянках рівномірно розподіленого навантаження *q* епюра *Q* зображається похилою прямою лінією. Кут нахилу лінії залежить від інтенсивності розподіленого навантаження «*q*».

$$\frac{dQ}{dx} = q = const; \quad Q = q\int dx = qx + Q_0 \ .$$

2. На ділянках, вільних від розподіленого навантаження, епюра *Q* зображається прямою горизонтальною лінією.

$$\frac{dQ}{dx} = q = 0; \quad Q = const \ .$$

3. У характерному перерізі балки під місцем прикладання активної або реактивної сили на епюрі *Q* спостерігаються стрибки на величину діючої сили.

4. У характерному перерізі балки під місцем прикладання активного або реактивного моменту епюра *Q* не змінює своїх значень. Це означає, що при побудові епюри *Q* на моменти можна не звертати уваги.

Правила побудови епюр M

1. У кінцевих перерізах балки момент завжди дорівнює нулю за винятком випадків, коли в цих перерізах діє пара сил.

2. На ділянках рівномірно розподіленого навантаження епюра *M* зображається квадратичною параболою. Причому випуклість параболи направлена проти інтенсивності розподіленого навантаження.

Якщо на розглядуваній ділянці епюра *Q* змінює свій знак, тобто перетинає нульову вісь, то в даному перерізі *(Q* = 0) момент має екстремальне значення.

$$\frac{dM}{dx} = Q = qx + Q_0; \quad M = \int (qx + Q_0)dx = \frac{qx^2}{2} + Q_0 x + M_0,$$

де Q_0 і M_0 – постійні інтегрування.

3. У перерізах під місцем прикладання зосередженої сили, активної чи реактивної, зміна моменту не відбувається. Епюра моментів зображається ламаною лінією з вершиною під місцем прикладання сили.

$$\frac{dM}{dx} = Q = const; \quad dM = Q \cdot dx; M = Q\int dx = Q \cdot x + M_0 .$$

4. У перерізах балки під місцем прикладання до балки зосередженої пари сил (активної чи реактивної) на епюрі моментів відбуваються стрибки на величину моменту.

Використовуючи правила знаків та правила побудови епюр Q і M, визначаються поперечна сила Q та згинаючий момент M тільки в характерних перерізах, а потім ці значення з'єднуються вже відомою кривою.

Використовуючи цей метод побудови епюр, маємо значно меншу трудомісткість розрахунків у порівнянні з методами складання рівнянь і визначенням із них Q і M.

Приклад 10

Побудову епюр Q і M у даному випадку виконати неможливо ні в напрямку від A до B, ні навпаки, тому що в точках A і B не відомі реакції.

Визначаємо реакції. В опорах A і B у довільному напрямку проставляємо реакції R_A та R_B (рис. 42).

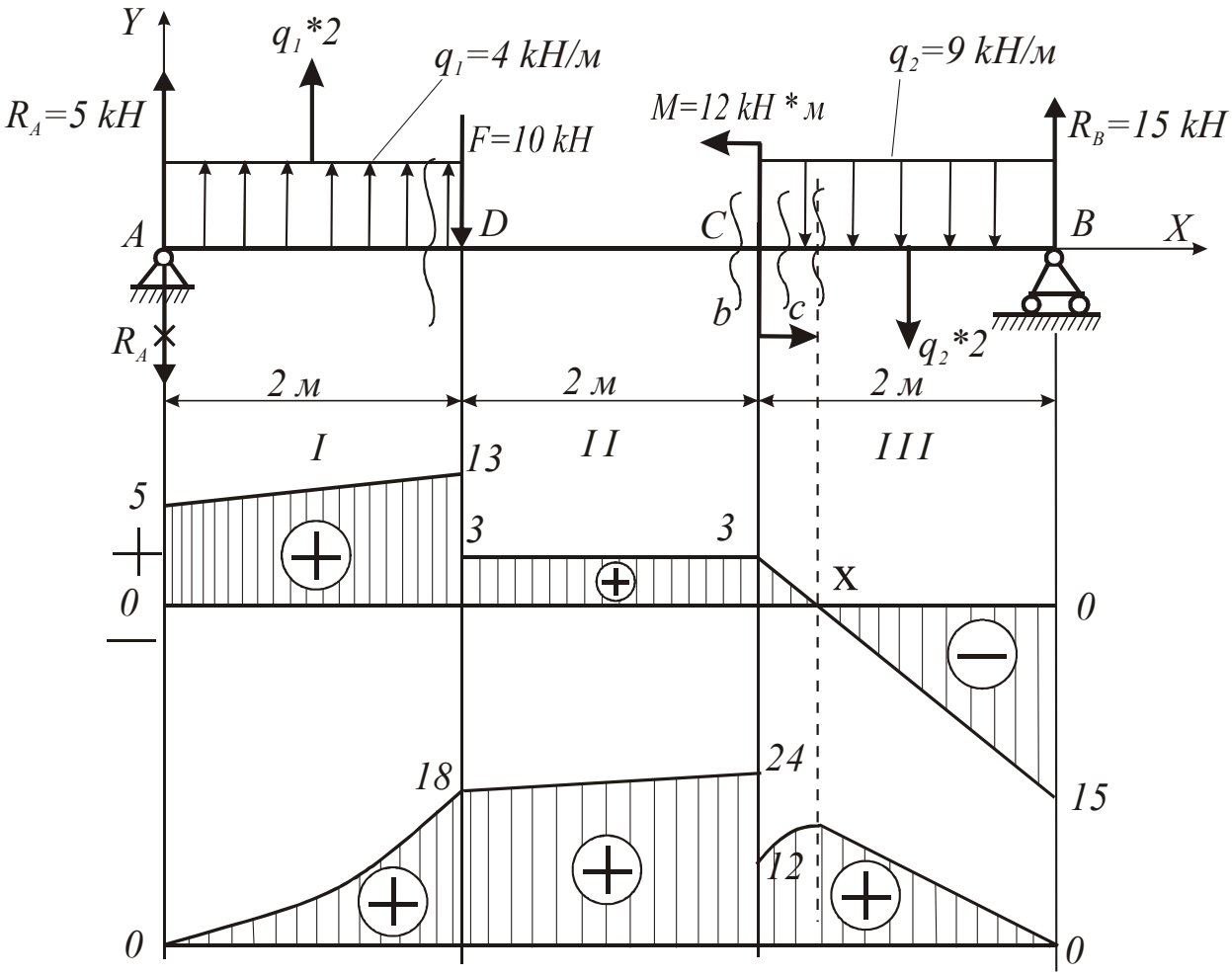


Рис. 42

Для визначення реакцій використовуємо два рівняння. Вибираємо правило знаків (рис. 43):

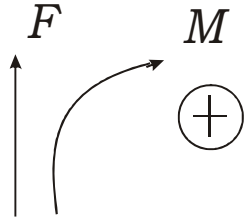


Рис. 43

1. $\Sigma F_{iy} = 0; -R_A + q_1 \cdot 2 - F - q_2 \cdot 2 + R_B = 0;$

2. $\Sigma M_A = 0; - q_1 \cdot 2 \cdot 1 + F \cdot 2 - M + q_2 \cdot 2 \cdot 5 - R_B \cdot 6 = 0.$

Із другого рівняння: $R_B = \dfrac{-q_1 \cdot 2 \cdot 1 + F \cdot 2 - M + q_2 \cdot 2 \cdot 5}{6} = 15$ кн.

Із першого рівняння: $R_A = q_1 \cdot 2 - F - q_2 \cdot 2 + R_B$ = -5 кН.

Отримане від'ємне значення R_A = -5 кН означає, що вибраний довільно

напрямок R_A необхідно змінити на зворотний. Перевірка вірності визначення реакцій:

$$\Sigma M_C = R_A \cdot 4 + q_1 \cdot 2 \cdot 3 - F \cdot 2 - M + q_2 \cdot 2 \cdot 1 - R_B \cdot 2 = 5 \cdot 4 + 4 \cdot 2 \cdot 3 - 10 \cdot 2 - 12 + 9 \cdot 2 \cdot 1 - 15 \cdot 2 = 0.$$

Реакції визначено вірно.

Побудова епюр *Q* і *M*

Виділяємо характерні перерізи. Згідно з попередніми правилами, це — перерізи під точками *A*, *B*, *C*, *D*. Отримали три ділянки: I, II, III.

Будувати епюри будемо у напрямку від *A* до *C*, потім – зворотно від *B* до *C*. Якщо в перерізі *C* отримаємо однакові результати, то побудова вірна.

Переріз *A*. Застосовуючи правило, що в перерізі під місцем прикладання активної або реактивної сили на епюрі *Q* спостерігаються стрибки на величину сили, робимо стрибок на величину R_A в бік за правилами знаків.

Ділянка I. Виділяємо переріз а) дуже близько до характерного перерізу *D* і, використовуючи правило знаків для лівої частини відносно перерізу, визначаємо:

$$Q_a = +R_A + q_1 \cdot 2 = 13 \text{ кН}.$$

У характерних перерізах *A* і практично *D* маємо значення Q_A=5 кН, Q_D=13 кН.

Згідно з правилом: на ділянці рівномірно розподіленого навантаження епюра *Q* зображується прямою похилою лінією. З'єднаємо ці значення.

Переріз *D*. Розглядаючи біля перерізу і в самому перерізі, ми даємо можливість виконувати стрибки: на епюрі сил *Q* – під силами, на епюрі моментів *M* – під моментами.

В перерізі *D* діє сила *F* = 10 кН, згідно з правилами – від'ємна. Виконаємо стрибок із 13 кН до 3 кН:

Ділянка II. Використовуємо правило: на ділянках, вільних від розподіленого навантаження, епюра *Q* зображується горизонтальною лінією. Тобто, на всій ділянці II поперечна сила *Q* = *3* кН до перерізу b).

Переріз *C*. У перерізі відсутня сила, відсутній стрибок. У цьому перерізі діє момент *M*, на який, згідно з правилами, ми не звертаємо уваги. Ми маємо можливість розглядати наступний переріз *B,* але ми домовились подальшу

побудову епюри *Q* здійснювати в напрямку від *B* до С.

Переріз *B.* У перерізі *B* діє сила R_B, за правилами знаків – від'ємна. Виконуємо стрибок на величину цієї сили під перерізом *B* вниз.

Ділянка III. Розглядаємо переріз с), тобто близько до характерного *C*. По один бік від перерізу *c)* значення *Q* визначається з рівняння:

$$Q_C = -R_B + q_2 \cdot 2 = -15 + 18 = 3 \text{ кН}.$$

Отримане значення *Q* = 3 при побудові епюри з різних напрямків підтверджує вірність Розв'язок.

Значення «-15» та «+3» з'єднаємо прямою лінією. Звертаємо увагу на те, що на ділянці III епюра *Q* змінює свій знак, тобто є переріз, при якому *Q* = 0. У цьому перерізі момент буде мати екстремальне значення. Для знаходження значення *«X»* при якому Q = 0, записують рівняння:

$$- R_B + q_2 \cdot X = 0; \text{ звідки } X = \frac{R_B}{q_2} = 1,666\text{м}$$

Відносно цього перерізу пізніше визначимо екстремальне значення моменту.

Епюра М

Використаємо правило: у кінцевих перерізах балки значення моменту завжди дорівнює нулю за винятком випадків, коли в цих перерізах діють моменти. У нашому випадку винятків немає, тобто в перерізах *A* і *B* момент *M* = 0.

Напрямок побудови епюри *M* залишаємо попередній.

Ділянка I, переріз *a)*. Використаємо правило знаків.

$$M_a = R_A \cdot 2 + q_1 \cdot 2 \cdot 1 = 18 \text{ кН}.$$

Маємо дві точки, два значення моментів. У перерізі *A, M* = 0, у перерізі *D[a)]*, *M* = +18. Використовуємо правило і з'єднуємо ці точки. На ділянках розподіленого навантаження епюра *M* зображується квадратичною параболою, причому випуклість параболи направлена проти інтенсивності розподіленого навантаження.

Переріз *D*. У перерізі момент відсутній, тобто стрибок відсутній, а сила *F* значення моменту в перерізі не змінює.

Ділянка II, переріз *b)*.

$$M_b = R_A \cdot 4 + q_1 \cdot 2 \cdot 3 - F \cdot 2 = 24 \text{ кН}.$$

На ділянках, вільних від розподіленого навантаження, епюра M зображується прямою, частіше – похилою лінією.

Характерний переріз *C*. У перерізі діє момент M = 12 кН·м. На епюрі M спостерігається стрибок на величину від'ємного моменту.

Переходимо до побудови епюри моментів від точки B до C.

В перерізі *B*. Значення моменту $M = 0$.

Ділянка III, переріз *c)*. Згідно з правилами знаків:

$$M_C = R_B \cdot 2 - q_2 \cdot 2 \cdot 1 = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Тобто отримали знову значення моменту M = 12 кН·м. Згадуємо два правила:

- на ділянці розподіленого навантаження епюра M зображається квадратичною параболою, причому випуклість параболи направлена проти інтенсивності розподіленого навантаження;
- у перерізі X на ділянці III, де $Q = 0$, момент має екстремальне значення. В нашому випадку

$$M_{\max} = R_B \cdot 1,666 - q_2 \cdot 1,666 \cdot \frac{1,666}{2} = 12,5 \text{кН} \cdot \text{м}$$

Перевірка вірності побудови епюри M.

На ділянці I, де Q позитивна – момент зростає.

На ділянці II, де Q також позитивна – момент зростає.

На ділянці III. У частині, де Q позитивна – момент зростає, де Q від'ємна - момент спадає.

4.4.1. Визначення головних центральних моментів інерції та положення головних центральних осей складних фігур, складених з стандартних профілів

Вихідні дані: із довідкової літератури, моменти інерції стандартних профілів відносно власних центральних осей, координати центрів ваги стандартних профілів.

Послідовність розв'язання:

1. Визначають координати центра ваги складної фігури:

$$x_c = \frac{\sum_1^n A_i \cdot x_i}{\sum_1^n A_i}; \; y_c = \frac{\sum_1^n A_i \cdot y_i}{\sum_1^n A_i}. \tag{71}$$

2. Визначають осьові I_x, I_y і відцентровий моменти інерції відносно центральних осей, використовуючи формули для паралельного переносу:

$$I_x = \sum_1^n \left[\left(I_x \right)_i + a_i^2 \cdot A_i \right],$$

$$I_y = \sum_1^n \left[\left(I_y \right)_i + b_i^2 \cdot A_i \right], \tag{72}$$

$$I_{xy} = \sum_1^n \left[\left(I_{xy} \right)_i + a \cdot b \cdot A_i \right].$$

3. Визначають положення головних центральних моментів інерції:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}. \tag{73}$$

Із отриманих двох значень кута α_0, які відрізняються на кут 90°, необхідно вибирати менший. Від'ємні значення кута α_0 відкладають від осі X за напрямком годинникової стрілки. Під кутом α_0 прокладають вісь «U» через центр ваги перерізу, другу вісь «V» — перпендикулярно до «U».

4. Визначають екстремальні значення осьових моментів інерції I_U і I_V.

Відцентровий момент інерції I_{UV} відносно головних центральних осей дорівнює нулю.

$$I_U = \frac{I_y + I_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_y - I_x}{2} \right)^2 + I_{xy}^2};$$

$$I_V = \frac{I_y + I_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_y - I_x}{2} \right)^2 + I_{xy}^2}. \tag{74}$$

Приклад 11

Визначити значення головних центральних моментів інерції та положення головних центральних осей перерізу, складеного з стандартних прокатних профілів (рис. 44):

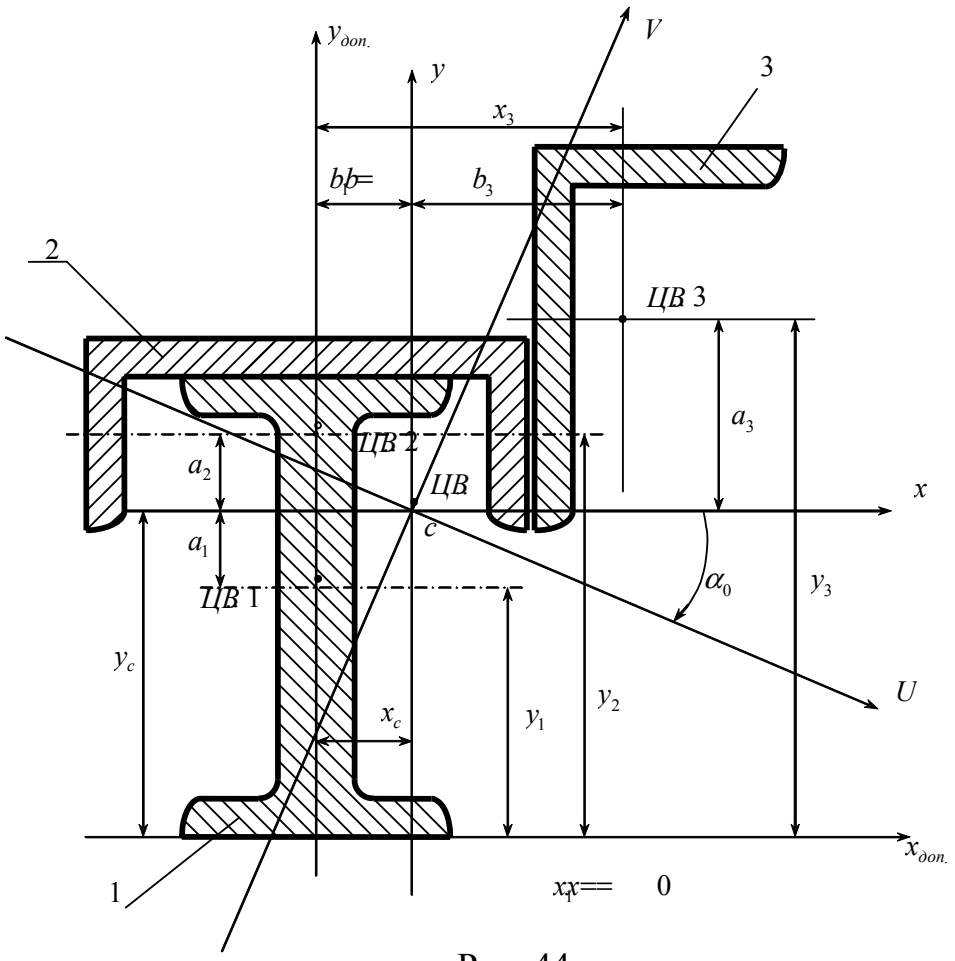


Рис. 44

1 – двотавр № 24;

2 – швелер № 20;

3 – кутник № 16/10

Розв'язок.

1. За ГОСТ 8239-72 для двотавра № 24: A_1 = 34,8 см^2; моменти інерції відносно власних центральних осей: I_{x1} = 3460 см^4, I_{y1} = 198 см^4. За ГОСТ8240-72 для швелера № 20: A_2 = 23,4 см^2; I_{x2} = 113 см^4, I_{y2} = 1520 см^4. Відцентровий момент інерції відносно осі симетрії $I_{xy1} = I_{xy2} = 0$. За ГОСТ8510-72 для кутника №16/10: A_3= 25,3 см^2; I_{x3} = 667 см^4; I_{y3} = 204

см^4; tgα_3 = 0,39. Для знаходження відцентрового моменту інерції I_{xy3}:

$$tg2\alpha_3 = \frac{2I_{xy3}}{I_{y3} - I_{x3}}$$, звідки $I_{xy3} = 0{,}5 \cdot \left(I_{y3} - I_{x3}\right) \cdot \text{tg}2\alpha_3$.

У зв'язку з тим, що кутник повернутий відносно швелера і полка швелера є паралельною не вісі *x, а y,* то формула з визначення I_{xy3} матиме вигляд:

$$I_{xy3} = 0{,}5 \cdot \left(I_{x3} - I_{y3}\right) \cdot tg2\alpha_3 = 214\,\text{см}^4$$

2. Визначимо координати центра ваги складного перерізу відносно допоміжних осей $x_{доп}$, $y_{доп}$.

$$x_c = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + A_3 \cdot x_3}{A_1 + A_2 + A_3} = 3{,}72\,\text{см}^4.$$

$x_1 = x_2 = 0$; x_3 = 12,28 см; y_1 = 12 см; y_2 = 22,45 см; y_3 = 27,69 см.

Через точку *c* проводимо осі *x* та *y*.

3. Визначимо осьові I_x, I_y і відцентровий I_{xy} моменти інерції.

Із рис.44 визначимо:

a_1 = -7,68 см; a_2 = 2,77 см; a_3 = 8,01 см; $b_1 = b_2$ = -3,72 см; b_3 = 8,56 см;

$$I_x = I_{x1} + a_1^2 \cdot A_1 + I_{x2} + a_2^2 \cdot A_2 + I_{x3} + a_3^2 \cdot A_3 =$$

= 3460 + (-7,68)^2 • 34,8 + 113 + 2,77^2 • 23,4 + 667 + 8.01^2 • 25,3 = 8090 см^4;

I_y =198 + (3,72)^2 • 34,8 + 1520 + (-3,72)^2 • 2,34 + 204 + 8.56^2 • 25,3 = 4580 см^4;

$$I_{xy} = (-3{,}72) \cdot (-7{,}68) \cdot 34{,}8 + (-3{,}72) \cdot 2{,}77 \cdot 23{,}4 + 213 + 8{,}56 \cdot 8{,}01 \cdot 25{,}3 = 2700\,\text{см}^4.$$

4. Визначимо положення головних центральних осей:

$$\text{tg}2\alpha_0 = \frac{2 \cdot I_{xy}}{I_y - I_x} = \frac{2 \cdot 2700}{4580 - 8090} = -1{,}54.$$

Звідки $\alpha_{01} = -28°30'$; $\alpha_{02} = 61°30'$.

Приймаємо менше значення кута $\alpha_{01} = -28°30'$.

Через точку *c* проводимо головні центральні осі. Відкладемо від осі *x* кут α_{01} за годинниковою стрілкою і проведемо вісь *U*. Вісь *V* проводимо через

точку *c* перпендикулярно до осі *U*.

5. Визначимо екстремальні значення осьових моментів інерції:

$$I_U = \frac{I_y + I_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_y - I_x}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = 9560\,\text{см}^4;$$

$$I_V = \frac{I_y + I_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_y - I_x}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = 3120\,\text{см}^4.$$

Відцентровий момент інерції відносно головних центральних осей дорівнює нулю, $I_{UV} = 0$.

4.4.2 Пружна лінія балки. Визначення переміщень

Прямолінійна вісь балки під впливом зовнішнього навантаження скривляється. Така здеформована вісь балки називається пружною лінією.

При розрахунках балки часто ставиться питання про виконання не тільки умов міцності, а й виконання умов жорсткості, за яких максимальний прогин балки був би не більше заданого значення. Ці умови вимагають знань з визначення прогину балки в довільному місці.

Для визначення прогину в довільній точці балки діє метод початкових параметрів, метод Мора, графоаналітичне рішення якого запропоноване Верещагіним.

Метод початкових параметрів

При використанні цього методу необхідно виконувати наступні правила:

- початок координат завжди вибирати в крайній лівій точці, направляючи при цьому вісь ординат вгору, а вісь абсцис вправо;
- при записуванні універсального рівняння навантаження вважати позитивними при їх дії за годинниковою стрілкою відносно розглядуваної точки (перерізу);
- у рівняння входять навантаження, розташовані тільки від розглядуваної точки.

Прогин балки та кут повороту перерізу в довільній точці визначаються універсальними рівняннями:

$$y_K = f_0 + \theta_0 \cdot x + \frac{1}{EI}\left[\sum M\frac{(x-a)^2}{2!} + \sum F\frac{(x-b)^3}{3!} + \sum q\frac{(x-c)^4}{4!} - \sum q\frac{(x-d)^4}{4!}\right], \quad (75)$$

$$\theta_K = \theta_0 + \frac{1}{EI}\left[\sum M\frac{(x-a)}{1!} + \sum F\frac{(x-b)^2}{2!} + \sum q\frac{(x-c)^3}{3!} - \sum q\frac{(x-d)^3}{3!}\right],$$

де f_0, θ_0 – відповідно прогин на кут повороту перерізу на початку координат;

(x - a), (x - b), (x - c), (x - d) – відстань від точки *X* до відповідного навантаження. Вираз $q\frac{(x-c)^A}{A!}$ враховує розподілене навантаження на всій ділянці до точки *K.* (рис. 45)

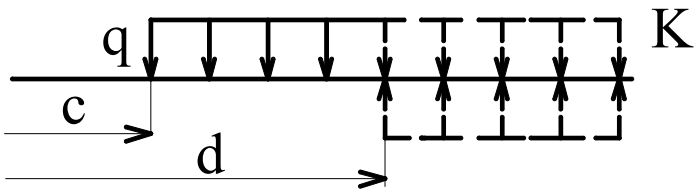


Рис. 45

Якщо є ділянка з розривом розподіленого навантаження (рис. 45), тобто розподілене навантаження діє тільки на ділянці (d – c), то складова $q\frac{(x-c)^A}{A!}$ враховує розподілене навантаження по всій довжині балки до точки *K* (показано пунктиром), а складова $\left(-q\frac{(x-d)^A}{A!}\right)$ відраховує попередньо добавлене навантаження (показано пунктиром знизу). Прогин вважається позитивним, якщо він збігається з напрямком осі ординат. Кут повороту перерізу відраховується по вертикалі (рис. 46).

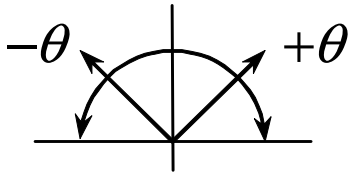


Рис.46

Кут повороту перерізу з початку координат θ_0 і прогин f_0 визначається з умов:

- прогин стрижня в опорах дорівнює нулю;
- кут повороту перерізу в середній точці прогину (якщо є така точка) дорівнює

нулю;

- f_0 та θ_0 в защемленій опорі дорівнюють нулю.

Порядок розв'язування задач

1. Для заданої балки відомими методами визначаються реакції в опорах.
2. За встановленими правилами вибираються напрямки координатних осей.
3. Складаються рівняння (75) з визначення y_K та θ_K для вибраної точки *K*.
4. Складанням відповідних рівнянь визначають f_0 та θ_0.

Приклад 12

Визначити прогин балки та кут повороту перерізу в точці *K*, тобто y_K, θ_K (рис. 47).

В універсальні рівняння (75) увійдуть навантаження, розташовані зліва від точки *K*, тобто R_A, q і F_1.

$$y_K = f_0 + \theta_0(a+0{,}5a) + \frac{1}{EI}\left[R_A\frac{(1{,}5a)^3}{3!} - F_1\frac{(0{,}5a)^3}{3!} - q\frac{(1{,}5a)^4}{4!} + q\frac{(0{,}5a)^4}{4!}\right].$$

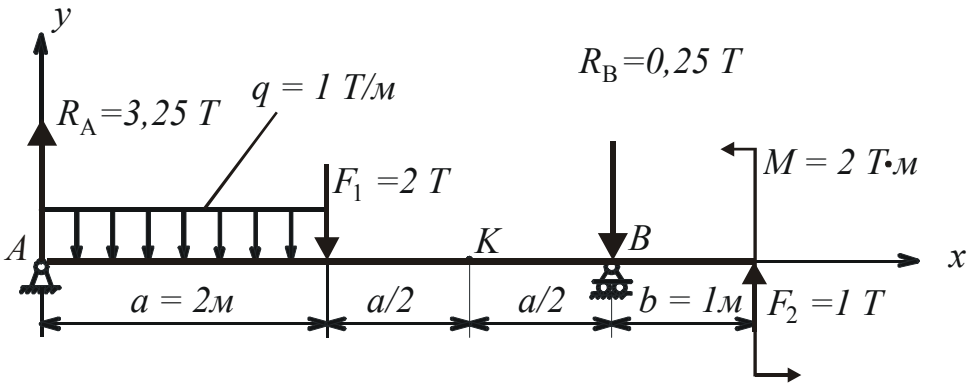


Рис. 47

Складова $\left(-q\frac{(1{,}5a)^4}{4!}\right)$ враховує розподілене навантаження з добавкою на $a/2$, тобто довжиною (a + 0,5a). Складова $q\frac{(0{,}5a)^4}{4!}$ відраховує добавку довжиною $a/2$.

Невідомі f_0 та θ_0 визначаються з рівнянь (76) складених для визначення прогину в опорах, тобто $y_A = 0$; $y_B = 0$. Оскільки точка *A* збігається з початком

координат, то $y_A = 0;\ y_B = 0;$

$$0 = \theta_0 \cdot 2a + \frac{1}{EI}\left[R_A \frac{(2a)^3}{3!} - F_1 \frac{a^3}{3!} - q\frac{(2a)^4}{4!} + q\frac{a^4}{4!} \right],$$

$$0 = \theta_0 \cdot 4 + \frac{1}{EI}[3{,}25 \cdot 10{,}67 - 2 \cdot 1{,}33 - 1 \cdot 10{,}67 + 0{,}67] = \theta_0 \cdot 4 + \frac{22}{EI},$$

$$\theta_0 = -\frac{5{,}5}{EI},$$

$$y_K = -\frac{5{,}5}{EI} \cdot 3 + \frac{1}{EI}[3{,}25 \cdot 4{,}5 - 2 \cdot 0{,}167 - 1 \cdot 3{,}375 + 1 \cdot 0{,}04] = -\frac{5{,}5 \cdot 3}{EI} + \frac{10{,}96}{EI} = -\frac{5{,}54}{EI},$$

$$y_K = -\frac{5{,}54}{EI}.$$

Кут повороту перерізу

$$\theta_K = \theta_0 + \frac{1}{EI}\left[R_A \frac{(1{,}5a)^2}{2!} - F_1 \frac{(0{,}5a)^2}{2!} - q\frac{(1{,}5a)^3}{3!} + q\frac{(0{,}5a)^3}{3!} \right],$$

$$\theta_K = -\frac{5{,}5}{EI} + \frac{1}{EI}[3{,}25 \cdot 4{,}5 - 2 \cdot 0{,}5 - 4{,}5 + 0{,}167] = -\frac{5{,}5}{EI} + \frac{9{,}3}{EI} = \frac{3{,}8}{EI},$$

$$\theta_K = \frac{3{,}8}{EI} \text{ рад.}$$

Часто на практиці цікавляться не всією пружною лінією, а переміщенням чи кутом повороту в необхідному перерізі. Для цієї цілі зручніше користуватися методом Мора.

Суть методу. Для заданої балки будують епюру згинаючих моментів. Для визначення переміщення в зацікавленій точці балки в цю точку прикладають одиночну силу, для кута повороту — одиничний момент. Від дії цих навантажень (розглядається кожна окремо) визначають реакції в опорах і будують епюри згинаючих моментів M_I.

Для визначення прогину і кута повороту перерізу користуються рівнянням, запропонованим Верещагіним:

$$y_K(\theta_K) = \frac{1}{EI}\sum A_i \cdot y_i,$$

де A_i — площа частини епюри моментів *M* від дії зовнішніх навантажень на балку;

y_i – значення ординати на епюрі M_1 від одиничного навантаження, розташованої під центром ваги епюри *M*;

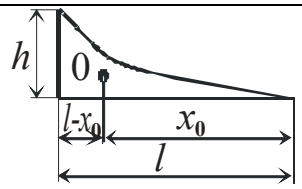
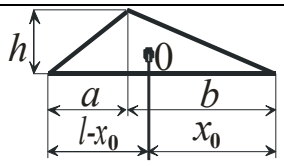
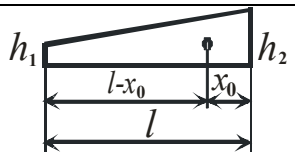
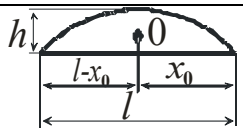
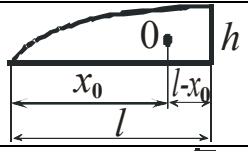
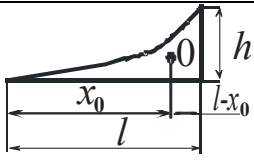
y_K – прогин балки в точці К ;

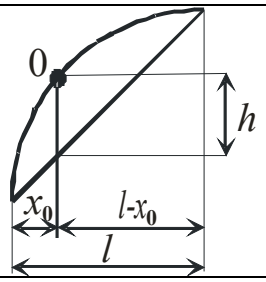
θ_K – кут повороту перерізу в точці К.

Слід зауважити: якщо епюра від зовнішніх сил й одинична епюра розміщені по один бік від нульової (базової) лінії, то результат множення епюр $(A_i \cdot y_i)$ є величина додатна, якщо ж по різні боки, то від'ємна.

Значення площ й абсцис центра ваги епюр наведені в табл. 1.

Таблиця 1.

Вид епюри	Площа	Відстань до Ц.В.	
		x_0	l-x_0
	$\frac{lh}{2}$	$\frac{2l}{3}$	$\frac{l}{3}$
	$\frac{lh}{2}$	$\frac{l+b}{2}$	$\frac{l+a}{2}$
	$\frac{(h_1+h_2)l}{2}$	$\frac{(h_2+2h_1)l}{(h_1+h_2)3}$	$\frac{(h_1+2h_2)l}{(h_1+h_2)3}$
	$\frac{2lh}{3}$	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}$
	$\frac{2lh}{3}$	$\frac{5l}{8}$	$\frac{3l}{8}$
	$\frac{lh}{3}$	$\frac{3l}{4}$	$\frac{l}{4}$

	$\frac{2lh}{3}$	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}$

Метод розв'язування.

1. Будують епюри згинаючих моментів M від дії зовнішнього навантаження.
2. Для тієї ж балки в зацікавлену точку прикладають одиничне навантаження (для визначення переміщення – одинична сила, для кута повороту – одиничний момент).
3. Від дії одиничного навантаження визначають реакції в опорах.
4. Відповідно під епюром M будують епюру M_1 від дії одиночного навантаження.
5. Користуючись Табл. 1, визначають площу епюри A_i, а із епюри M_1 — ординату y_1.
6. За формулою (76) визначають прогин та кут повороту перерізу. Площа A_i та ордината y_i вважаються позитивними, якщо вони розташовані над нульовою лінією.

Приклад 12 (продовження)

Першу ділянку розглянемо як таку, яка складається з двох згинаючих моментів:

- перший, від реакції $R_A = 3{,}25$ т, тобто $M = 3{,}25 \cdot 2 = 6{,}5$ т-м;
- другий, від розподіленого навантаження,

$$M = q \cdot \frac{a^3}{2} = 2 \text{ т-м.}$$

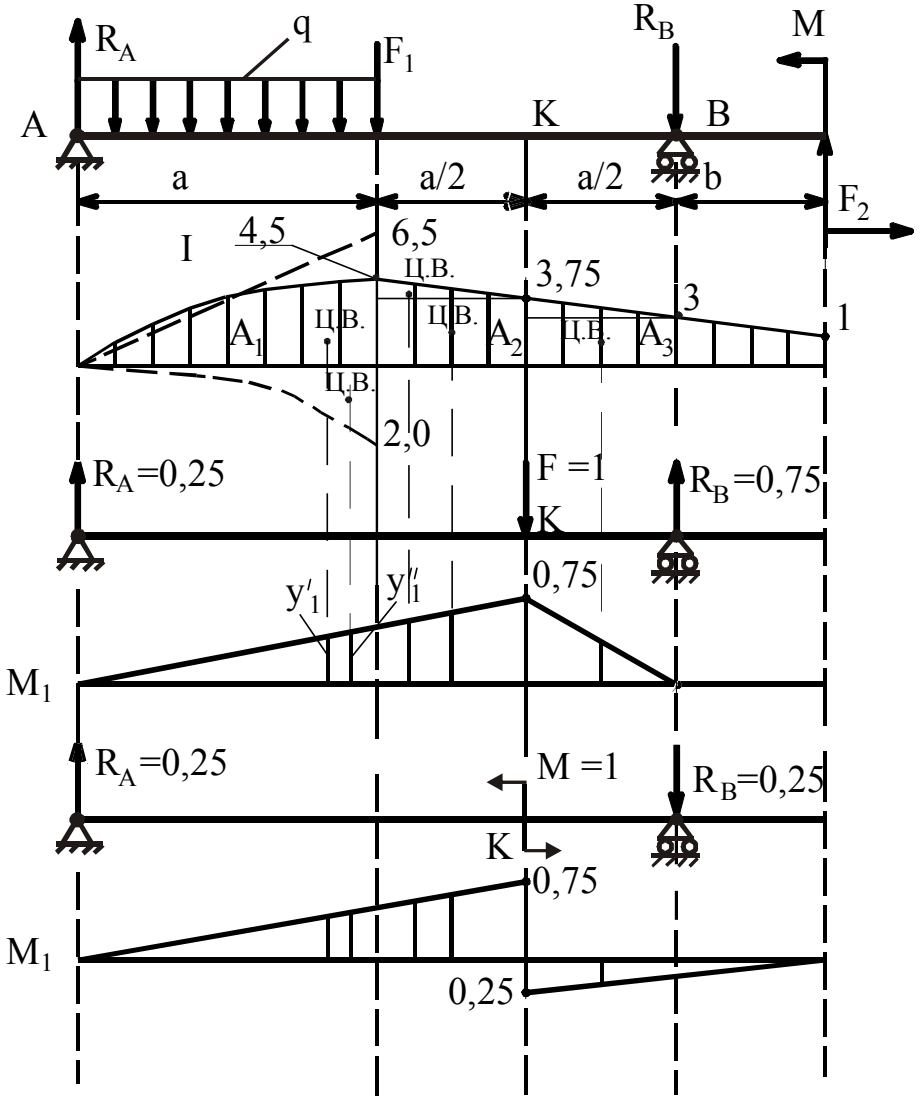


Рис. 48

Звідки:

$$A_1^{'} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6{,}5 = 6{,}5 \text{ м}^2,$$

$$x_{Ц.В.} = \frac{2}{3} l = \frac{4}{3} = 1{,}33 \text{ м}.$$

Із подібності трикутників на епюрі M_1:

$$\frac{3}{0{,}75} = \frac{1{,}33}{y_1^{'}}; \quad y_1^{'} = \frac{0{,}75 \cdot 1{,}33}{3} = 0{,}33 \text{ м}.$$

За таблицею 1:

$$A_1^{''} = \frac{lh}{3} = \frac{qa^3}{6} = \frac{1 \cdot 8}{6} = 1{,}33 \text{ м}^2; \quad x_{Ц.В.} = \frac{3}{4} a = \frac{3}{2} = 1{,}5 \text{ м},$$

$$\frac{3}{0,75}=\frac{1,5}{y_1''};\quad y_1''=0,375\text{ м},$$

$$A_1\cdot y_1=A_1'\cdot y_1'-A_1''\cdot y_1''=6,5\cdot 0,33-1,33\cdot 0,375=1,65,$$

$$A_1\cdot y_1=1,65.$$

Ділянку між силою F_1 та реакцією R_B на епюрі *M* представимо двома ділянками, які розділені точкою *K,* тобто ділянкою між силою F_1 і точкою *K,* і ділянкою від точки *K* до реакції R_B.

Ділянка між F_1 і точкою *K*

Загальну площу представимо із двох площ: трикутника і прямокутника.

Тоді м^2.

$$A_2=A_\Delta+A_\square=\frac{1}{2}\cdot 0,75\cdot 1+1\cdot 3,75=4,125,$$

$$x_{Ц.В.}=\frac{\sum x_i\cdot A_i}{\sum A_i}.$$

У нашому випадку:

$$x_{Ц.В.}=\frac{A_1\cdot x_{1Ц.В.}+A_2\cdot x_{2Ц.В.}}{A_1+A_2}=\frac{1\cdot 3,75\cdot 0,5+\frac{1}{2}\cdot 0,75\cdot 1\cdot\frac{1}{3}}{4,125}=0,485\text{ м.}$$

Це значення вимірюється від перерізу, де діє сила F_1 і до точки центра ваги складної фігури $A_\Delta+A_\square$.

Відраховуючи $x_{2Ц.В.}$ від початку координат, тобто від точки *A*: $x_{2.Ц.В.}=x_{Ц.В.}+a=2,485$ м. Для визначення ординати y_2 по епюрі M_I складемо пропорцію:

$$\frac{3}{0,75}=\frac{2,485}{y_2};\quad y_2=0,62\text{ м.}$$

Аналогічно площу від точки *K* до R_B представляємо двома площами:

– площею трикутника з розмірами $b * h = 0,75 * 1,0$;

– площею прямокутника розмірами $b * h = 3 * 1$.

Загальна площа A_3:

$$A_3 = 1 \cdot 3 + 0,75 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 3,375 \text{ м}^2; \quad A_3 = 3,375 \text{ м}^2;$$

$$x_{3Ц.В.} = \frac{3 \cdot 1 \cdot 0,5 + \frac{1}{2} \cdot 0,75 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3}}{3,375} = 0,52 \text{ м}; \quad \frac{1}{0,75} = \frac{0,52}{y_3}; \quad y_3 = 0,39 \text{ м};$$

$$y_K = \frac{1}{EI}\left[A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3\right], \tag{77}$$

$$y_K = \frac{1}{EI}\left[1,65 + 4,125 \cdot 0,62 + 3,375 \cdot 0,39\right] = \frac{5,53}{EI}; \quad y_K = \frac{5,53}{EI}.$$

Для визначення кута повороту перерізу в досліджуваній точці K прикладаємо одиничний момент. Епюри M_1 відрізняються тільки правими, відносно точки K, частинами, а тому в загальному рівнянні (77) будують різними останні складові – $A_3 y_3$.

$$A_3 = 3,375 \text{ м}^2; \qquad x_{Ц.В,} = \frac{3 \cdot 1 \cdot 0,5 + \frac{1}{2} \cdot 0,75 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3}}{3,375} = 0,52 \text{ м};$$

$$\frac{1}{0,25} = \frac{0,52}{y_3}; \qquad y_3 = 0,25 \cdot 0,52 = 0,13.$$

Оскільки вантажна й одинична епюри розміщені по різні боки від базової лінії, то результат множення епюр – від'ємний.

$$A_3 \cdot y_3 = 3,375 \cdot 0,13 = -0,44,$$

$$\theta_K = \frac{1}{EI}\left[A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 - A_3 \cdot y_3\right], \tag{78}$$

$$\theta_K = \frac{1}{EI}\left[1,65 + 2,56 - 0,44\right] = \frac{3,8}{EI}; \quad \theta_K = \frac{3,8}{EI}.$$

Приклад 13

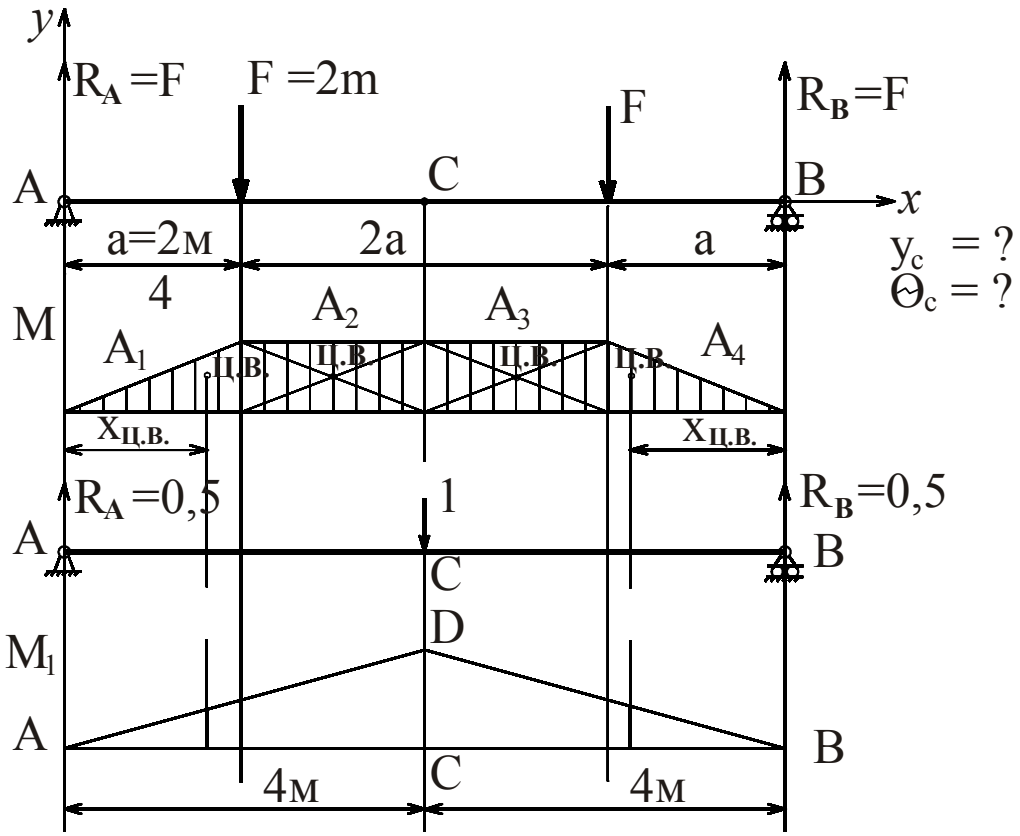


Рис. 49

Розв’язання за правилом Верещагіна

1. Будуємо епюру M .

2. У точці C прикладаємо одиничну силу.

3. Будуємо епюру M_1.

4. Визначаємо переміщення точки C.

$$y_C = \frac{1}{EI}\left[A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3 + A_4 \cdot y_4\right]. \qquad (79)$$

Епюри M та M_1 мають вісь симетрії, яка проходить через точку C, тому

$A_1 = A_4$; $A_2 = A_3$; $y_1 = y_4$; $y_2 = y_3$.

Тоді рівняння (79) матиме вигляд:

$$y_C = \frac{2}{EI}\left[A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2\right]. \qquad (80)$$

Визначимо складові рівняння (80).

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4 \ м^2; \quad x_{Ц.В.,} = \frac{2}{3} l = \frac{4}{3} \text{ м.}$$

Із $\Delta ADC: \frac{4}{2} = \frac{1{,}33}{y_1}$; $y_1 = 0{,}665$ м; $A_2 = 2 \cdot 4 = 8$ м^2; $x_{Ц.В.} = 3$ м.

Із $\Delta ADC: \frac{4}{2} = \frac{3}{y_2}$; $y_2 = 1{,}5$ м;

$$y_C = \frac{2}{EI}[4 \cdot 0{,}665 + 8 \cdot 1{,}5] = \frac{29{,}32}{EI}; \qquad y_C = \frac{29{,}32}{EI}.$$

Розв'язання цього прикладу універсальним рівнянням

1. Початок координат розташовуємо в точці *A,* а напрямок – згідно загальному правилу.

2. У рівняння ввійдуть навантаження, розташовані зліва від точки *C*.

$$y_C = f_0 + \theta_0 \cdot 2a + \frac{1}{EI}\left[R_A \cdot \frac{(2a)^3}{6} - F \cdot \frac{a^3}{6}\right].$$

Величини f_0 та θ_0 визначимо з рівнянь рівності нулю прогинів в опорах.

$$y_A = 0; \quad f_0 = 0; \quad y_B = 0;$$

$$0 = \theta_0 \cdot 4 \cdot a + \frac{1}{EI}\left[R_A \cdot \frac{(4a)^3}{6} - F \cdot \frac{(3a)^3}{6} - F \cdot \frac{a^3}{6}\right] = \theta_0 \cdot 8 + \frac{96}{EI};$$

$$\theta_0 = -\frac{12}{EI}.$$

Тоді $y_C = -\frac{12}{EI} \cdot 4 + \frac{1}{EI}\left(2 \cdot \frac{4^3}{6} - 2 \cdot \frac{2^3}{6}\right) = -\frac{29{,}32}{EI}; \qquad y_C = -\frac{29{,}32}{EI}.$

Визначимо кут повороту перерізу в точці *C* правилом Верещагіна. Хід рішення такий же, що й при визначенні переміщення, крім пункту 2. У точці *C* прикладаємо одиничний момент (рис. 50).

$$\theta_C = \frac{1}{EI}(A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 - A_3 \cdot y_3 - A_4 \cdot y_4)$$

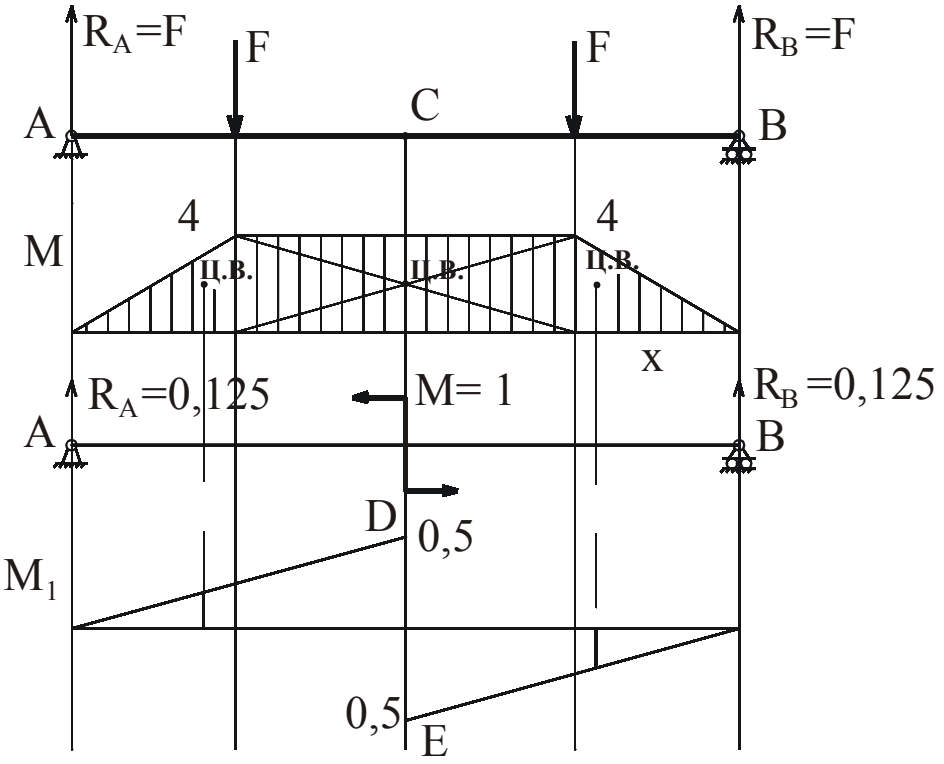


Рис. 50

На епюрі M : $A_1 = A_4$; $A_2 = A_3$.

На епюрі M_1 : $y_1 = -y_4$; $y_2 = -y_3$.

Очевидно, що через точку C проходить вісь симетрії. У точці C екстремальний прогин балки. У точці C невеличка горизонтальна ділянка і кут повороту в цьому перерізі дорівнює нулю, $\theta_C = 0$.

Розв'язання універсальним рівнянням

$$\theta_C = \theta_0 + \frac{1}{EI} \cdot \left[R_A \frac{(2a)^2}{2} - F \cdot \frac{a^2}{2} \right] = -\frac{12}{EI} + \frac{1}{EI} \cdot \left(2 \cdot \frac{4^2}{2} - 2 \cdot \frac{2^2}{2} \right) = 0 .$$