Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

«Технічна механіка»

ПЛАНЕТАРНІ ЗУБЧАСТІ МЕХАНІЗМИ

Методичні вказівки до практичних занять
і самостійної роботи студентів

Київ
«Політехніка»
2011

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

«Технічна механіка»

ПЛАНЕТАРНІ ЗУБЧАСТІ МЕХАНІЗМИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять і самостійної роботи студентів

Затверджено Методичною радою НТУУ«КПІ»

Київ
«Політехніка»
2011

«Технічна механіка» Планетарні зубчасті механізми (кінематика, силовий розрахунок, підбір чисел зубців): Метод. вказівки до практ. занять та самост. роботи студ. / Ук лад:. В. О. Петрик, О. В. Тимошенко. – К.: ІВЦ „Видавництво «Політехніка»”, 2011. - 32 с.

Гриф надано Методичною радою НТУУ «КПІ»

(Протокол № 7 від 1.04.2004 р.)

Навчальне видання

«Технічна механіка»

ПЛАНЕТАРНІ ЗУБЧАСТІ МЕХАНІЗМИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять і самостійної роботи студентів

Укладачі: *Петрик Владислав Олександрович*, канд. тех. наук, доц.
Тимошенко Олександр Вікторович, асист.

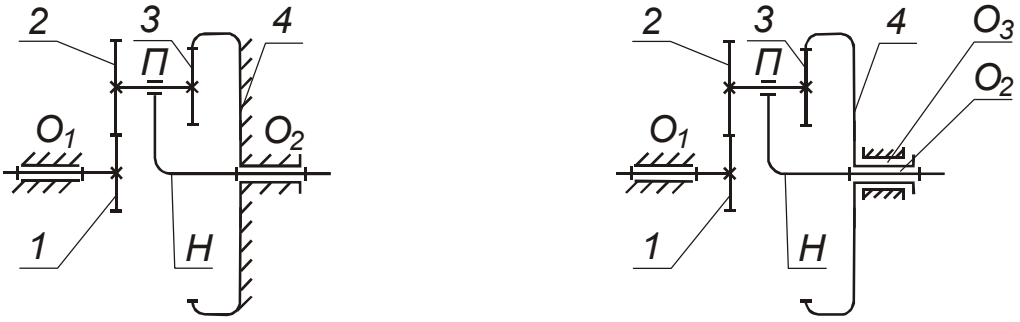
Відповідальний
Редактор *М.І. Бобир*, д-р техн. наук, проф.

Рецензент *Б.І. Ковальчук*, д-р техн. наук, проф.

ВСТУП

Планетарними зубчастими механізмами називають такі, у яких осі деяких коліс змінюють своє положення в просторі. Вони діляться на механізми з одним або з декількома степенями вільності *W*.

Розглянемо два планетарні зубчасті механізми (рис. 1,а,*б*).



а *б*

Рис. 1

Планетарні зубчасті механізми розглядають як складну систему, складену з трьох систем:

1) системи ведучої осі з центральним колесом Z_1 і кількістю обертів n_1 або з кутовою швидкістю ω_1;

2) системи веденої осі з зубчастим центральним колесом Z_4 і кількістю обертів n_4 або з кутовою швидкістю ω_4;

3) системи водила H із зубчастими колесами Z_2 і Z_3, кількістю обертів $n_н$ або з кутовою швидкістю $\omega_н$.

Колеса Z_2 і Z_3 сидять нерухомо на одній осі і виконують складні обертальні рухи, які складаються з обертів навколо своєї осі в підшипнику П і обертів разом з підшипником навколо центральної осі. Такі колеса називають *сателітами*.

У розглянутих механізмах п’ять ланок: вхідний вал із зубчастим колесом Z_1, вал у рухомому підшипнику П з колесами Z_2 і Z_3, вихідний вал із зубчастим колесом Z_4 (для механізму,зображеного на рис. 1, *а*, воно нерухоме), водило H та нерухома ланка – стояк. Такі ланки створюють різні кінематичні пари: вал колеса Z_1 і стояк створюють однорухому кінематичну пару – p_5, вал сателітів з підшипником П – p_5, водило H з колесом $Z_4 - p_5$, а для механізму на рис.1, *б* – зубчасте колесо Z_4 зі стояком – p_5, зубчасті

колеса Z_1 та Z_2 у точці зачеплення створюють дворухому кінематичну пару p_4, зубчасті колеса Z_3 та Z_4 у точці зачеплення – p_4.

Для планетарного зубчастого механізму (див. рис. 1, *а*) ступінь вільності:

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 1$$

Для планетарного зубчастого механізму (див. рис.1,*б*) ступінь вільності:

$$W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 2$$

Зубчастий механізм, у якого степінь вільності W=1, називається *планетарним* зубчастим механізмом, а якщо степінь вільності W=2, то *диференціальним* зубчастим механізмом.

За аналогією: у першому випадку одержуємо планетарну передачу, а в другому – диференціальну.

Планетарні та диференціальні передачі широко використовують в машино- та приладобудуванні, а також:

- для отримання великих передаточних чисел (до 10 000);
- для виконання мікропереміщень;
- для точного відліку кутів обертання;
- для точного установлення різних пристроїв;
- для різних складальних і диференційних механізмів;
- як диференціал в автомобілях, верстатах, тракторах, приладах.

Порівняно з іншими зубчастими механізмами планетарні мають ряд переваг:

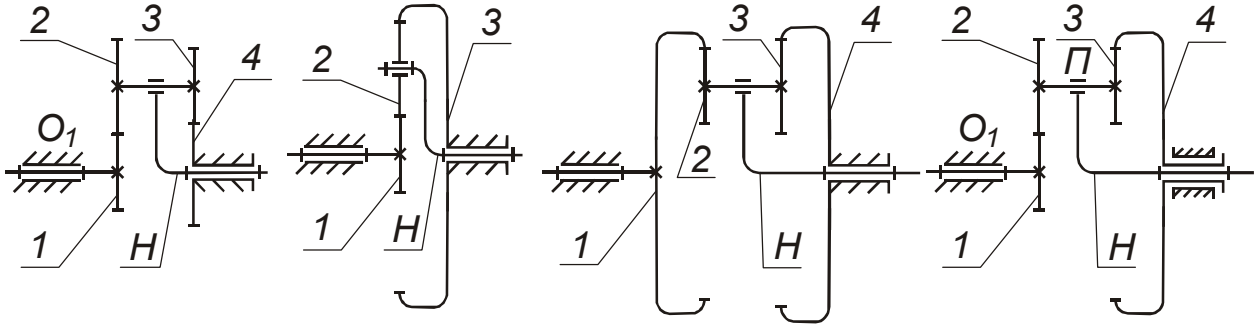
1) великі передаточні числа при невеликих розмірах і вазі механізму;
2) співвісність вхідної та вихідної осей, що зручно для компановки передачі;
3) можливість отримання декількох рухів з різними швидкостями навколо однієї геометричної осі;
4) можливість алгебричного складання швидкостей двох незалежних осей;
5) можливість заміни муфт і реверсивних передач;
6) планетарні передачі працюють з меншим шумом, ніж звичайні зубчасті передачі;
7) малі навантаження на опори, що спрощує їх конструкцію;
8) високий ККД (із збільшенням передаточного відношення ККД зменшується).

Однак недолік таких механізмів полягає у підвищені вимоги до точності виготовлення і монтажу передачі.

КІНЕМАТИКА ПЛАНЕТАРНИХ МЕХАНІЗМІВ

Визначення передаточного відношення

Відомо чотири можливі схеми простих планетарних механізмів (рис.2).



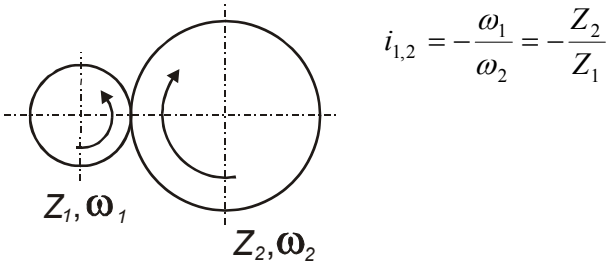
а *б* *в* *г*

Рис.2

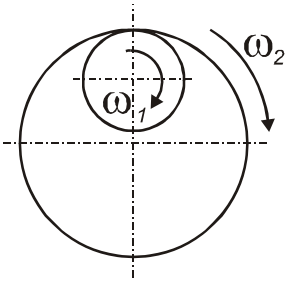
Ураховуючи знак передаточного відношення однієї пари зубчастих коліс, визначають передаточне відношення планетарних механізмів.

Вважають, якщо напрямки кутових швидкостей обох коліс збігаються, то передаточне відношення i пари – додатне і навпаки – якщо не збігаються, від'ємне.

Це означає, що в парі зубчастих коліс із зовнішнім зачепленням (рис.3,*а*) передаточне відношення $i_{1,2}$, від'ємне, а в парі зубчастих коліс з внутрішнім зачепленням (рис.3,*б*) – додатне.



$$i_{1,2} = -\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$



$$i_{1,2} = +\frac{\omega_1}{\omega_2}$$

а *б*

Рис. 3

Для визначення передаточного відношення планетарного механізму використовують метод зупинки водила (метод Вілліса) або як його ще називають – метод інверсії.

Розглянемо планетарний механізм як єдину систему, у якій кожне колесо обертається зі своєю швидкістю ω_i, а водило в якомусь напрямі зі швидкістю $\omega_н$ (рис. 4 і табл.1).

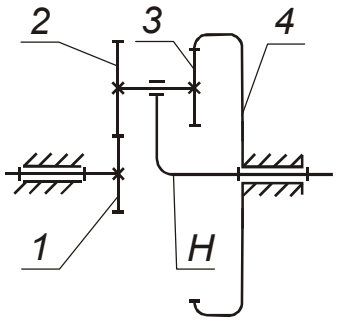


Рис. 4

Таблиця 1

Елемент механізму	Кутова швидкість	Швидкість для всієї системи	Нова кутова швидкість	Позначення нової кутової швидкості
Z_1	ω_1	$-\omega_H$	$\omega_1 - \omega_H$	$\omega_1^{(H)}$
Z_2	ω_2		$\omega_2 - \omega_H$	$\omega_2^{(H)}$
Z_3	ω_2		$\omega_2 - \omega_H$	$\omega_2^{(H)}$
Z_4	0		$-\omega_H$	$\omega_4^{(H)}$
H	ω_H		$\omega_H - \omega_H = 0$	$\omega_H^{(H)}$

Якщо планетарний механізм розмістити (установити) в будь-якій прозорій посудині, буде наочно видно, як кожний елемент планетарного механізму зі своєю кутовою швидкістю і в своєму напрямі обертатиметься, зокрема і водило зі швидкістю $\omega_н$.

Надамо всій системі механізму обертального руху у протилежному напрямі руху водила зі швидкістю $-\omega_н$. При цьому водило стане нерухомим, тобто маємо можливість спостерігати випадок зупиненя водила $\omega_н = 0$.

Якщо прозору посудину з механізмом обертати в напрямі $-\omega_н$, то водило буде нерухомим в просторі, а кожний елемент механізму змінить свою швидкість на $-\omega_н$ (див. табл. 1).

У цьому випадку вважатимемо що водила взагалі немає, а планетарний механізм став простим зубчастим багатоступеневим (оберненим) механізмом (рис. 5).

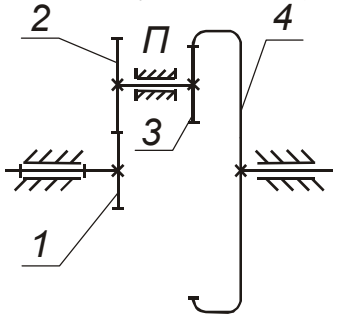


Рис. 5

Передаточне відношення простого (оберненого) механізму визначають відношенням кутових швидкостей входу до виходу

$$i_{1,4}^{(н)} = \frac{\omega_{вх}^{(н)}}{\omega_{вих}^{(н)}} = \frac{\omega_1^{(н)}}{\omega_4^{(н)}} = \frac{\omega_1 - \omega_н}{\omega_4 - \omega_н} = \left(-\frac{Z_2}{Z_1}\right)\left(\frac{Z_4}{Z_3}\right), \qquad (1)$$

де $i_{1,4}^{(н)}$ – передаточне відношення між першим і четвертим елементами планетарного механізму в разі зупиненому водила.

Вираз (1) – основна формула планетарних і диференціальних передач. Якщо розглядати механізм (див. рис. 1, *б*), тобто диференціальну передачу, то у формулі (1) $\omega_4 \neq 0$.

У планетарній передачі $\omega_4 = 0$ (див. рис. 4). У цьому разі передача руху можлива від ланки 1 (Z_1) до ланки *H*, тобто, якщо в механізмі вхід – це колесо Z_1, то вихід – водило або навпаки.

У першому випадку передаточним відношенням буде $i_{1,н}$, якщо навпаки, то $i_{1,н}$. Між ними зв'язок:

$$i_{1,н} = \frac{\omega_1}{\omega_н}; \quad i_{н,1} = \frac{\omega_н}{\omega_1}, \quad \text{або} \quad i_{1,н} = \frac{1}{i_{н,1}}.$$

У формулі (1) в правій частині записано добуток двох відношень чисел зубців з урахуванням рекомендації згідно з рис. 3.

Права частина під час розгляду кінематичних параметрів передачі завжди відома, це якесь число – ціле або дробове, додатне чи від'ємне.

Для розглядуваних далі планетарних механізмів використовуємо формулу (1) і запишемо основні рівняння.

1. *Передача Давіда* (*рис*. 2, *а*)

Механізм складається з чотирьох коліс: двох центральних – Z_1 і Z_4, два сателітів – Z_2, Z_3 та водила *H*.

Можливі варіанти передачі руху:

а) від колеса Z_1 до колеса Z_4 (коли воно рухоме), тоді передаточне відношення механізму $i_{1,4}$;

б) від колеса Z_1 до водила *H*, передаточне відношення $i_{1,н}$;

в) можлива передача навпаки, наприклад від водила до першого колеса, тоді передаточне відношення $i_{н,1}$.

Використовуючи формулу (1), основне рівняння набуде вигляду

$$i_{1,4}^{(н)} = \frac{\omega_1 - \omega_н}{\omega_4 - \omega_н} = \left(-\frac{Z_2}{Z_1}\right)\left(-\frac{Z_4}{Z_3}\right) \qquad (2)$$

Якщо за цією схемою розглядати планетарну передачу, у якій четверте колесо нерухоме, тобто $\omega_4 = 0$ і рух передається від першого колеса до водила, то передаточним відношенням планетарної передачі буде $i_{1,н}$.

Формула (2) набуде вигляду:

$$i_{1,4}^{(н)} = \frac{\omega_1 - \omega_н}{-\omega_н} = \left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)\left(\frac{Z_4}{Z_3}\right); \; -\frac{\omega_1}{\omega_н} + 1 = \left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)\left(\frac{Z_4}{Z_3}\right) = i_{1,4}^{(н)},$$

тобто $$-i_{1,н} + 1 = i_{1,4}^{(н)}.$$

Звідки $$i_{1,н} = 1 - i_{1,4}^{(н)} = 1 - \frac{Z_2}{Z_1} \cdot \frac{Z_4}{Z_3} \quad . \qquad (3)$$

Це означає, що передаточне відношення планетарної передачі визначають відніманням від одиниці передаточного відношення оберненого механізму.

На практиці такі планетарні передачі можуть реалізувати передаточні відношення $i_{1,н} = 30...1500$ і більше. Якщо в цій передачі розглянути рух від водила *H* до першого колеса Z_1, то $i_{1,н} = \frac{1}{i_{1н}} = \frac{1}{30} ... \frac{1}{1500}$.

2. *Механізм Джемма* (*рис*. 2, *б*).

У цьому механізмі ведучим є колесо Z_1, а веденим елементом - водило *H*, тому передаточне відношення $-i_{1,н}$. Якщо ведуче - водило *H*, а ведене - колесо Z_1, то передаточне відношення $- i_{н,1}$.

Основне рівняння передаточного відношення для цього механізму

$$i_{1,3}^{(н)} = \frac{\omega_1 - \omega_н}{\omega_3 - \omega_н} = -\frac{Z_3}{Z_1}. \qquad (4)$$

Для планетарної передачі ($\omega_3 = 0$)

$$i_{1,3}^{(н)} = -i_{1н} + 1 = -\frac{Z_3}{Z_1}.$$

звідки $$i_{1,н} = 1 + \frac{Z_3}{Z_1} \qquad (5)$$

Передаточне відношення $i_{1,н}$ знаходиться в межах 2,3…9,0. Якщо розглядати рух навпаки, то $i_{н,1} = 0{,}445...0{,}111$

3. Механізм із чотирма зубчастими колесами і водило, який зображено на рис. 2,в , складається із двох внутрішніх зачеплень зубчастих коліс і ведучого колеса Z_1 із внутрішньою нарізкою зубців.

Основною формулою визначення передаточного відношення для цього механізму буде рівняння

$$i_{1,4}^{(н)} = \frac{\omega_1 - \omega_н}{\omega_4 - \omega_н} = \left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)\left(\frac{Z_4}{Z_3}\right). \qquad (6)$$

У разі, якщо Z_4 нерухоме, то

$$i_{1,4}^{(н)} = -i_{1,н} + 1.$$

звідки

$$i_{1,н} = 1 - i_{1,4}^{(н)} = 1 - \frac{Z_2}{Z_1} \cdot \frac{Z_4}{Z_3} \quad . \qquad (7)$$

Ця передача може реалізувати передаточне відношення $i_{1,н} = 30...1500$ і більше. Передачі з $i_{1,н} > 1500$ мають низький ККД.

4. На рис. 2, *г* зображено механізм, який складається з чотирьох зубчастих коліс, одне з яких $-Z_4$ має внутрішню нарізку зубців.

Основна формула визначення передаточного відношення цього механізму

$$i_{1,4}^{(н)} = \frac{\omega_1 - \omega_н}{\omega_4 - \omega_н} = \left(-\frac{Z_2}{Z_1}\right)\left(\frac{Z_4}{Z_3}\right). \qquad (8)$$

У разі, коли Z_4 нерухоме,

$$i_{1,4}^{(н)} = -\frac{\omega_1}{\omega_4} + 1.$$

звідки

$$i_{1,н} = 1 - i_{1,4}^{(н)} = 1 + \frac{Z_2}{Z_1}\frac{Z_4}{Z_3} \quad . \qquad (9)$$

Таку передачу можна використовувати для реалізацій передаточного відношення $i_{1,н} = 2.0...150$ або $i_{н,1} = 0.5...0.067$.

Приклад 1. Розглянемо механізм Давіда за рис. 6.

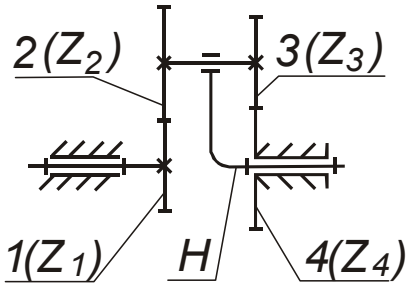


Рис. 6

Відомо: $\omega_1 = 40c^{-1}$; $Z_1 = 18$; $Z_3 = 20$; $Z_2 = 72$; $Z_4 = 80$.

Знайти: $\omega_н$, ω_2, $i_{1,н}$.

Розглядувана передача (див. рис. 2, *а*) планетарна ($\omega_4 = 0$). Основна формула для визначення передаточного відношення цієї передачі (за зупиненого водилі):

$$i_{1,4}^{(н)} = \frac{\omega_1 - \omega_н}{\omega_4 - \omega_н} = \left(-\frac{Z_2}{Z_1}\right)\left(-\frac{Z_4}{Z_3}\right) = \frac{72}{18}\cdot\frac{80}{20} = 16,$$

або

$$i_{1,4}^{(н)} = -i_{1,н} + 1 = 16\ ,$$

де

$$i_{1,н} = \frac{\omega_1}{\omega_н} = -15,$$

звідки

$$\omega_н = -\frac{40}{15}c^{-1}\ .$$

Знак «мінус» означає, що водило рухається в протилежному напрямку колесу 1.

Для визначення ω_2 слід розглянути тільки пару коліс Z_1 і Z_2:

$$i_{1,2}^{(н)} = \frac{\omega_1 - \omega_н}{\omega_2 - \omega_н} = -\frac{Z_2}{Z_1} = -4$$

або

$$(\omega_1 - \omega_н) = -4(\omega_2 - \omega_н),$$

де

$$\omega_2 = \frac{5\omega_н - \omega_1}{4} = -\frac{40}{3}c^{-1}\ .$$

Приклад 2. Його проілюстровано рис. 7.

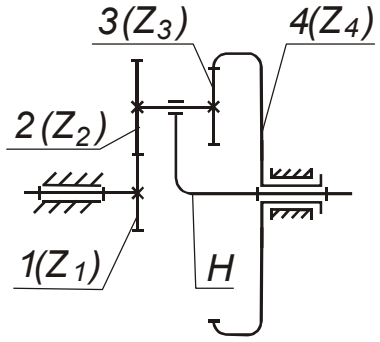


Рис. 7

Відомо: $\omega_4 = 10c^{-1}$; $Z_1 = 20$; $Z_2 = 40$; $\omega_н = 100c^{-1}$; $Z_3 = 20$; $Z_4 = 80$.

Знайти: $i_{1,4}$; $i_{1,н}$; ω_1; ω_2.

На рис. 7 всі колеса рухомі, і тому передача диференціальна.

Основна формула передачі:

$$i_{1,4}^{(н)} = \frac{\omega_1 - \omega_н}{\omega_4 - \omega_н} = \left(-\frac{Z_2}{Z_1}\right)\left(\frac{Z_4}{Z_3}\right) = \left(-\frac{40}{20}\right)\left(\frac{80}{20}\right) = -8,$$

з основної формули $\dfrac{\omega_1 - \omega_н}{\omega_4 - \omega_н} = -8.$

Звідси $\omega_1 - \omega_H = -8\omega_4 + 8\omega_H$; $\omega_1 = -8\omega_4 + 9\omega_H$,

$$\omega_1 = 820c^{-1},$$

$$i_{1,4} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{820}{10} = 82c^{-1} \quad ; \quad i_{1,н} = \frac{\omega_1}{\omega_н} = \frac{820}{100} = 8{,}2c^{-1}.$$

Для знаходження ω_2 розглянемо пару зубчатих коліс Z_1 і Z_2:

$$i_{1,2}^{(н)} = \frac{\omega_1 - \omega_н}{\omega_2 - \omega_н} = -\frac{Z_2}{Z_1} = -2.$$

звідки $\dfrac{\omega_1 - \omega_н}{\omega_2 - \omega_н} = -2$; $\omega_1 - \omega_H = -2\omega_4 + 2\omega_H$,

тобто $$\omega_2 = \frac{3\omega_H - \omega_1}{2} = -260c^{-1}.$$

Приклад 3. Розрахуємо передаточне відношення для механізму Давіда.

Відомо: $Z_1 = 101$; $Z_3 = 99$; $Z_2 = 100$; $Z_4 = 100$.

Знайти: $i_{1,н}$; $i_{н,1}$.

За формулою оберненого механізму

$$i_{1,4}^{(н)} = \left(-\frac{Z_2}{Z_1}\right)\left(-\frac{Z_4}{Z_3}\right) = \frac{100}{101} \cdot \frac{100}{99}.$$

звідки $$i_{1,н} \cong 1 - \frac{100 \cdot 100}{101 \cdot 99} \approx 0{,}0001,$$

тоді $i_{н,1} \cong 10000$.

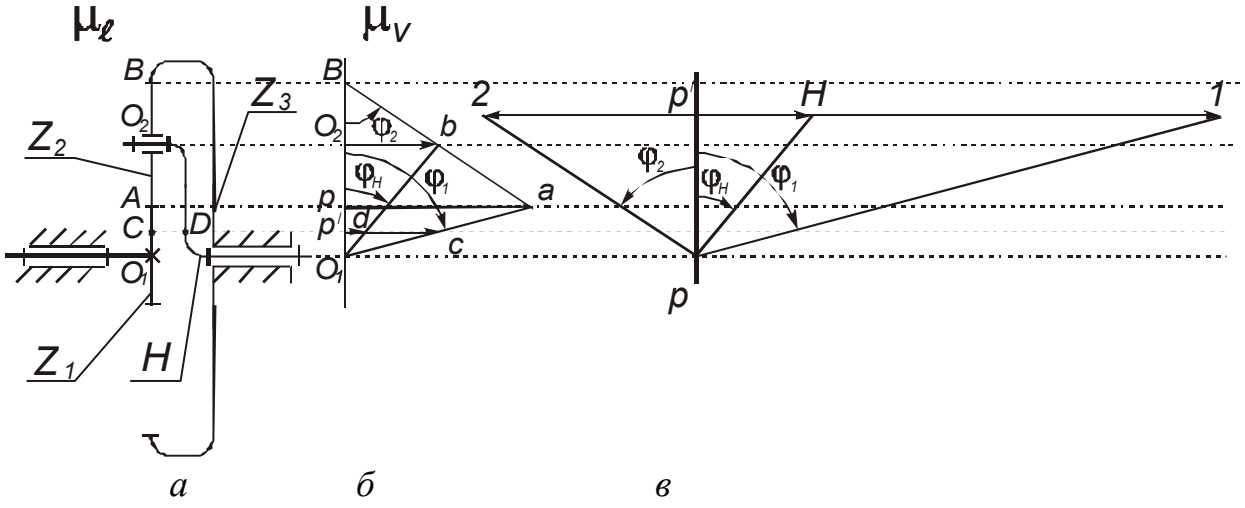
Побудова планів лінійних і кутових швидкостей планетарних механізмів

Використаймо графічний метод Кутцбаха – Смирнова для визначення передаточного відношення. Плани лінійних або кутових швидкостей також будують за допомогою цього методу.

Планетарна передача за схемою (рис. 2,б).

Відомо частоту обертів першого вала (Z_1) n_1 або кутову швидкість першого колеса ω_1. Числа зубців, або радіуси зубчастих коліс: $Z_1 = 20$, $Z_2 = 25$,

$Z_3 = 80$ або при модулі зачеплення $m = 5мм$, $r_1 = 50мм$, $r_2 = 62{,}5мм$, $r_3 = 200мм$ (рис. 8, *а*)



а *б* *в*

Рис. 8

План лінійних швидкостей (рис. 8, б). Лінійна швидкість кожної точки колеса змінюється за лінійним законом за формулою $V = \omega r$. Це означає, що достатньо знати швидкості двох точок будь-якого елемента механізму і побудувати закон зміни лінійних швидкостей.

Для першого колеса:

$$V_1 = \omega_1 \cdot x_1, \ 0 \le x_1 \le O_1A, \ O_1A = r_1;$$

$$V_{1\max} = \omega_1 \cdot r_1 = V_A \ \text{ при } \ x_1 = 0, \ V_1 = 0.$$

На плані швидкостей V_A подано відрізком *ра*. Похила O_1a показує закон зміни лінійних швидкостей будь-якої точки радіуса O_1A. Визначимо масштаб швидкостей

$$\mu_v = \frac{V_A}{pa}.$$

Точка *А* належить колесам Z_1 і Z_2.

Для побудови закону зміни швидкостей колеса Z_2 скористаємось тим, що точка *В*, яка належить колесу Z_2, знаходиться в зачепленні з нерухомим колесом Z_3 і є полюсом зачеплення , а тому її швидкість дорівнює нулю, тобто $V_B = 0$.

Це означає, що лінія *Ва* – закон зміни швидкостей точок колеса Z_2. Центр обертання колеса Z_2, тобто точка O_2, належить колесу Z_2 і водилу *Н*, і її швидкість

$$V_{O_2} = O_2b \cdot \mu_V.$$

Другою точкою з відомою швидкістю, взятою на водилі, буде будь-яка точ-ка водила на осі O_1O_1. Швидкість такої точки дорівнює нулю $V_{O_1} = 0$. Тоді закон

розподілу швидкостей точок водила буде лінія O_1b, а швидкість якоїсь точки C можна визначити як $V_C = p'c \cdot \mu_V$.

Для визначення передаточного відношення планетарної передачі $i_{1,H}$ необхідно звернутися до двох трикутників, узятих на плані швидкостей, O_1pa і O_1O_2b.

Перший трикутник показує зміну лінійних швидкостей першого колеса, другий трикутник – зміну швидкостей точок водила.

Передаточне відношення визначають відношенням двох швидкостей:

$$i_{1,H} = \frac{V_1}{V_2},$$

тобто відношенням швидкостей двох точок, узятих на колесі Z_1 і водилі H, однаково віддалених від геометричної осі O_1O_1.

$$i_{1,H} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\omega_1 \cdot r_1}{\omega_H \cdot r_1}.$$

Наприклад, для точок C і D

$$i_{1,H} = \frac{V_C}{V_D} = \frac{p'c \cdot \mu_V}{p'd \cdot \mu_V} = \frac{p'c}{p'd}.$$

Тобто відношення довжин двох відрізків, узятих на плані швидкостей, визначить передаточне відношення планетарної передачі.

План кутових швидкостей. Із ΔO_1O_2b (див. рис. 8, б) визначаємо значення кута

$$tg\varphi_H = \frac{O_2b}{O_2O_1},$$

де $O_2b\mu_V = \omega_H l_{O_1O_2}$, або $O_2b = \frac{\omega_H l_{O_1O_2}}{\mu_V}$;

$$O_2O_1 \cdot \mu_l = l_{O_1O_2},$$

звідки $O_2O_1 = \frac{l_{O_1O_2}}{\mu_l}$.

Тому значення кута визначають як $tg\varphi_H = \frac{\omega_H \cdot l_{O_1O_2} \cdot \mu_l}{\mu_V \cdot l_{O_1O_2}} = \frac{\omega_H \cdot \mu_l}{\mu_V}$,

звідки кутова швидкість водила $\omega_H = \frac{tg\varphi_H \cdot \mu_l}{\mu_V}$.

Аналогічно із плану лінійних швидкостей визначаємо значення кутів:

$$tg\varphi_1 = \frac{\omega_1 \cdot \mu_l}{\mu_V} \quad \text{і} \quad tg\varphi_2 = \frac{\omega_2 \cdot \mu_l}{\mu_V},$$

а потім – кутові швидкості:

$$\omega_1 = \frac{tg\varphi_1 \cdot \mu_V}{\mu_l} \quad \text{і} \quad \omega_2 = \frac{tg\varphi_2 \cdot \mu_V}{\mu_l}.$$

Для визначення передаточних відношень використовують значення кутових швидкостей

$$i_{1,H} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = \frac{tg\varphi_1 \cdot \mu_V \cdot \mu_l}{tg\varphi_H \cdot \mu_V \cdot \mu_l} = \frac{tg\varphi_1}{tg\varphi_H},$$

за аналогією: $i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{tg\varphi_1}{tg\varphi_2}$, $i_{2,H} = \frac{tg\varphi_2}{tg\varphi_H}$, $i_{H,1} = \frac{tg\varphi_H}{tg\varphi_1}$ тощо.

Будуємо план кутових швидкостей (рис. 8, *в*). Паралельно O_1B проводимо відрізок pp'. Через точку p' проводимо лінію, паралельну осям обертання колес 1, 2, водила *H*.

З точки *p* проводимо лінії під кутами φ_1, φ_2, φ_H до перетину з горизонтальною лінією в точках *1, 2*, *H*.

Для визначення передаточних відношень потрібно за допомогою рис. 8, *в* визначити значення кутів

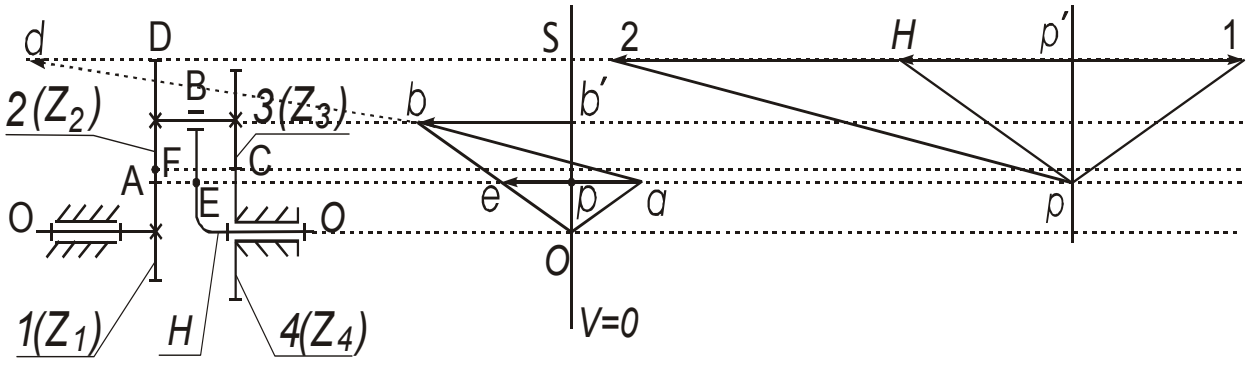
$$tg\varphi_1 = \frac{p'1}{pp'}; \quad tg\varphi_2 = \frac{2p'}{pp'}; \quad tg\varphi_H = \frac{p'H}{pp'}$$

і підставити у формулу для визначення передаточних відношень:

$$i_{1,2} = \frac{tg\varphi_1}{tg\varphi_2} = -\frac{p'1}{2p'}; \quad i_{2,H} = \frac{tg\varphi_2}{tg\varphi_H} = -\frac{2p'}{p'H}; \quad i_{1,H} = \frac{tg\varphi_1}{tg\varphi_H} = \frac{p'1}{p'H}.$$

Як видно з виразів передаточні відношення мають знак «мінус» або «плюс». Отже, якщо відрізки одного напряму співвідносні до pp', одержуємо знак «плюс».

Планетарна передача за схемою (рис. 2, *а*)



а *б* *в*

Рис. 9

Планетарна передача має чотири зубчастих колеса, з яких одне центральне колесо Z_4 - нерухоме. Відомі всі числа зубців кожного колеса, модуль колес або розміри коліс, зубчасті колеса прості без зміщення, а також кутова швидкість першого колеса ω_1 (рис. 9, *б*).

План лінійних швидкостей (рис. 9, б). Швидкість точки A $V_A = \omega_1 r_1$. При цьому $\mu_V = \dfrac{V_A}{pa}$.

Відкладаємо V_A відрізком pa від вертикалі.

Швидкість точки *O,* колеса Z_1 $V_O = 0$. Лінія Oa на плані швидкостей – це закон зміни лінійних швидкостей точок від *O* до *A* на колесі Z_1. Точка *A* належить також колесу Z_2. Для встановлення закону зміни лінійних швидкостей точок колеса Z_2 необхідно знати лінійну швидкість ще однієї точки колеса Z_2.

Колеса Z_2 і Z_3 мають однакову кутову швидкість і нерухомо посаджені на одному валу. Точки *C* і *F* мають однакову лінійну швидкість, тому що однаково віддалені від осі обертання B. Точка *C* – полюс зачеплення колеса Z_3 з нерухомим колесом Z_4; її швидкість $V_C = 0$. Отже, $V_F = 0$.

У цьому разі, з'єднуючи точку a з лінією *OS*, що відповідає значенню швидкості $V = 0$ на рівні точок *C, F,* і продовжуючи її, отримаємо лінію *da* – закон зміни лінійних швидкостей точок коліс Z_2 і Z_3.

Вісь обертання коліс Z_2 і Z_3 належить колесу Z_2 (Z_3) (точка *B*), тому лінія $b'b$ у масштабі μ_V визначатиме швидкість точки *B*, яка належить водилу. Другою точкою водила беремо будь-яку точку на горизонтальній частині водила *O*; її швидкість $V_O = 0$. Лінія, що з'єднує точки *b* і *O* на плані швидкостей, – закон зміни лінійних швидкостей точок водила.

Для визначення передаточного відношення, наприклад $i_{1,H}$, можливо використати лінійні швидкості двох точок: *A*, яка належить колесу Z_1, і *E*, яка належить водилу *H*, що віддалені на однакову відстань від осі – *OO*.

Тоді

$$i_{1,H} = \frac{V_1}{V_H} = -\frac{pa \cdot \mu_V}{pe \cdot \mu_V}.$$

У формулі використовуємо знак «мінус», тому що *pa* і *pe* мають різні напрямки.

План кутових швидкостей (рис. 9, *в*). Від точки *p* проводимо лінії *pH, p2, p1*. За аналогією з попередніми визначеннями:

$$i_{1,H} = -\frac{p_1'}{p_H'}; \quad i_{1,2} = \frac{p_1'}{p_2'}; \quad i_{H,1} = -\frac{p_H'}{p_1'}.$$

Обидва відрізки кожного разу мають різні напрямки відносно точки *p*, тому передаточні відношення від`ємні.

Планетарна передача за схемою (рис. 2, *в*)

Планетарна передача, зображена на рис. 10, *а*, складається з чотирьох зубчастих коліс, два з яких з мають внутрішню нарізку зубців (колеса Z_1 і Z_4).

Для побудови плану швидкостей числа зубців вважають відомими, розміри коліс і кутова швидкість ведучої ланки – ω_1.

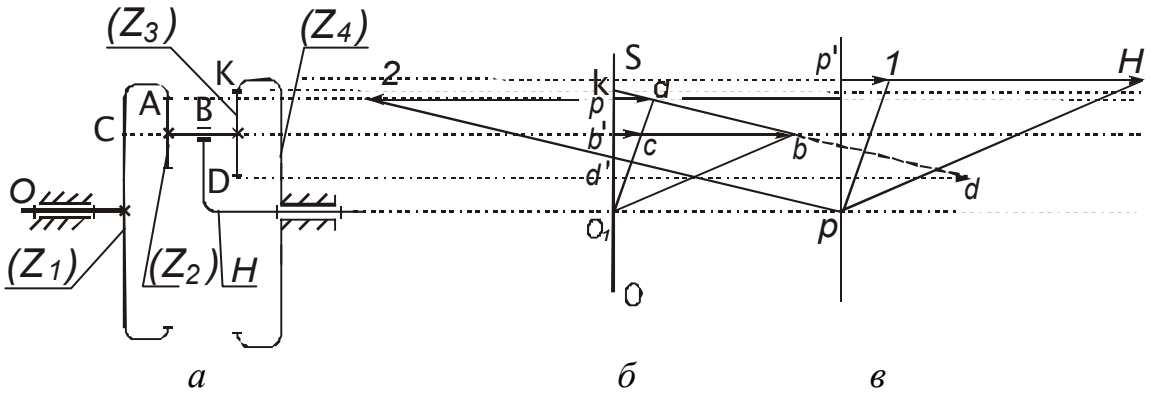


Рис. 10

План лінійних швидкостей (рис. 10, *б*). Швидкість точки *A*, $V_A=\omega_1 r_1$, $r_1=OA$. При цьому $\mu_V=\dfrac{V_A}{pa}$.

Відкладаємо від вертикалі *OS* відрізом *pa* вектор. Швидкість будь-якої точки на лінії *OO* $V_0=0$. За двома точками (V_A та V_0) будуємо закон зміни швидкостей точок колеса Z_1 – це O_1a. Для знаходження закону зміни лінійних швидкостей коліс 2 і 3 використаємо точку *K*, яка належить колесу 3, і її швидкість $V_K=0$.

У системі коліс 2 і 3, які мають однакову кутову швидкість, відомі швидкості двох точок – V_A та V_K. Лінія, що з`єднує точки *k,a,b,d*, установлює закон зміни лінійних швидкостей розглядуваної системи коліс.

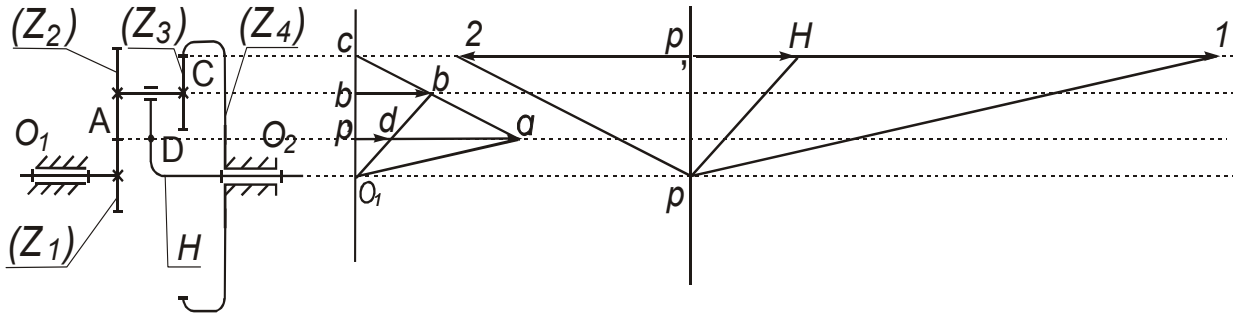
Для визначення передаточного відношення цієї планетарної передачі $i_{1,H}$ візьмемо відношення двох відрізків, що визначають швидкості двох точок, узятих на колесі Z_1 на відстані *H*, але однаково віддалених від осі обертання OO. Це можуть бути точки *C* і *B*, тобто

$$i_{1,H}=\frac{V_1}{V_H}=\frac{b'c\mu_v}{b'b\mu_v}=\frac{b'c}{b'b}.$$

План кутових швидкостей (рис. 10, *в*). Від точки *p* вертикалі *pp* відкладемо відрізки *p1* паралельно O_1a , $pH||O_1b$ та $p2||kabd$. Тоді передаточні відношення визначають відношенням відрізків:

$$i_{1,H}=\frac{p'_1}{p'_H};\ i_{1,2}=-\frac{p'_1}{p'_2};\ i_{1,H}=\frac{p'H}{p'1}.$$

Планетарна передача по схемі (рис. 2, *г*)



а *б* *в*

Рис. 11

Передача складається з чотирьох коліс (рис. 11, *а*), одне з яких має внутрішню нарізку зубців Z_1, та водила *H*. Відомо кутову швидкість вхідної ланки, колеса *1* – ω_1 та розміри коліс.

План лінійних швидкостей (рис. 11, *б*). Лінійна швидкість точки *A* $V_A=\omega_1 OA$. Відкладаємо на плані швидкостей відрізком *pa*.

Точка *A* належить колесу Z_2. Другою точкою для системи коліс $Z_1 Z_3$ візьмемо точку *c*, швидкість якої $V_c=0$. Тоді законом розподілу швидкостей точок системи коліс $Z_2 Z_3$ буде лінія *cba*. Точка *B* належить водилу *H* та колесам Z_2, Z_3. Швидкість її визначає лінія *cba*, тому це буде відрізок *b`b*, тобто $V_b= b`b\mu_v$. Друга точка водила – будь-яка на водилі по осі *OO* . Зазаконом розподілу *V* буде лінія O_1B.

Для визначення передаточного відношення цього механізму $i_{1,H}$ візьмемо дві точки на зубчастому колесі Z_1 та водилі *H*, але однаково віддалені від осі *OO* . Це будуть точки *A* і *D*. Тоді

$$i_{1,H}=\frac{V_1}{V_2}=\frac{pa\mu_V}{pd\mu_V}.$$

План кутових швидкостей (рис. 11, *в*). Проводимо довільно вертикаль *pp'*. З точки *p* поводимо проміні $pH \parallel O_1b$, $p1 \parallel O_1a$, та $p2 \parallel ac$. Усі проміні проведено паралельно законам розподілу швидкостей точок водила *H*, ведучої ланки колесу Z_1 та колесу Z_2 (Z_3). Передаточні відношення визначають відношенням відрізкі:

$$i_{1,H}=\frac{p'_1}{p'_H};\quad i_{1,2}=-\frac{p'_1}{p'_2};\quad i_{H,1}=\frac{p'H}{p'1}.$$

Сили та моменти в планетарних передачах

Для визначення сил та моментів, які діють на елементи розглядуваних передач, вважатимемо, що:

а) відсутнє тертя;

б) рух ланок рівномірний;

в) стан ланок під дією зовнішнього навантаження рівновісний;

г) геометричні розміри основних елементів передачі та закон руху вхідної ланки (наприклад, $\omega_1=const$) відомі;

д) моменти ведучої ланки $Z_1(M_1)$ та веденої ланки H (M_H) відомі.

Приклад 1. Розглянемо механізм, зображений на рис. 2, *б*.

Якщо ведуча ланка і колесо Z_1 (рис. 12) рухається за годинниковою стрілкою – ω_1, момент M_1 також буде направлений за годинниковою стрілкою, оскільки для ведучої ланки кутова швидкість і зовнішній момент збігаються за напрямом, тоді як для веденої ланки вони протилежні. Від дії моменту M_1 на боковій поверхні зуба колеса Z_2, перпендикулярно до бокової поверхні в контактній точці діє нормальна сила F_n , яку розкладають на дві складові: F_t – обводова сила, перпендикулярна до радіуса колеса, і F_r – радіальна сила, направлена по радіусу колеса до центра обертання.

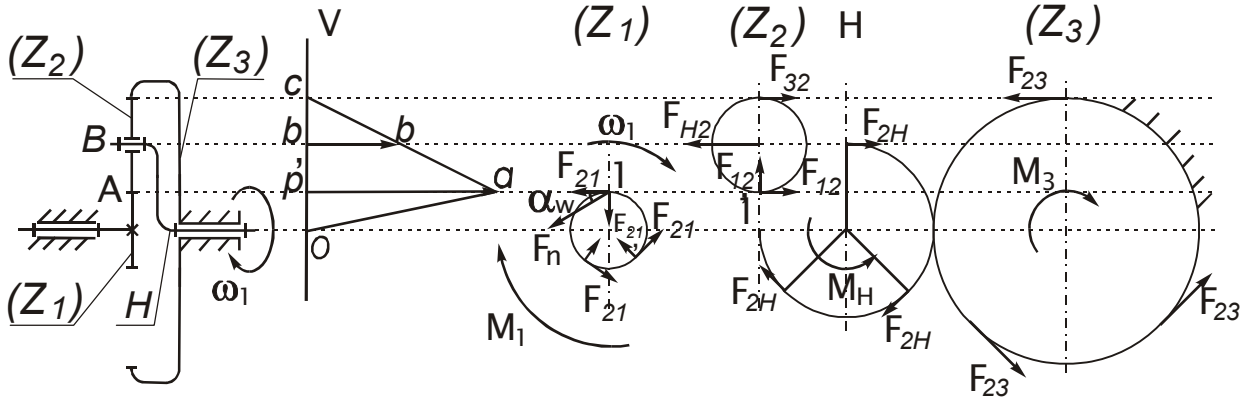


Рис.12

У нашому випадку це сили F_{12} та F'_{12}. Згідно з третім законом механіки колесо Z_2 діє на колесо Z_1 із силами F_{21} та F'_{21}. Розглядаючи рівновагу колеса Z_1 , запишемо $M_1=3F_{21}r_1$, звідки

$$F_{21}=\frac{M_1}{3r_1} \qquad (10)$$

Відомо, що нормальна сила

$$F_n=\frac{F_{21}}{\cos\alpha_w}.$$

Радіальні складові F'_{21} направлені до центра обертання і діють на опору:

$$F'_{21}=F_{21}tg\alpha_w.$$

Маємо три сателіти, тобто три точки передачі зусилля та руху та по три обводові F_{21} і радіальні F'_{21} сили. Радіальні сили, маючи напрямки до центра обертання, компенсуються; їх дія на опору нульова.

Три сателіта в передачі зменшують зусилля на колесо, а тому розміри передачі зменшуються.

Колесо Z_2, обертаючись з кутовою швидкістю ω_2, протилежною ω_1, діє на колесо Z_3 у точці контакту із силою F_{23}. У свою чергу колесо Z_3 діє на колесо 2 із силою F_{32}, F_{32}=- F_{12}.=-F_{23}.

Звертаючись до плану лінійних швидкостей, видно, що водило H має напрямок руху за годинниковою стрілкою, так само як і Z_1. Це означає, що точки (осі) обертання сателітів, зв`язані з водилом, діють на нього із силою F_{2H}. На точку обертання сателіта B водило діє із сило F_{H2}. Рівновага колеса Z_2 визначає рівновагою сил:

$$F_{H2} = F_{12} + F_{32} = 2F_{12}.$$

План швидкостей V показує, що напрямок M_H – протилежний напряму руху годинникової стрілки і ω_H (ведена ланка).

Розглянемо рівновагу водила H

$$M_H = 3F_{2H}(r_1 + r_2) = 3(2F_{12})(r_1 + r_2).$$

Через симетричність сателітів зусилля в опорі дорівнює нулю.

На основі теореми рівноваги потужностей входу та виходу, ураховуючи попередні умови, можна записати

$$M_1\omega_1 + M_H\omega_H = 0,$$

звідки $$\frac{\omega_1}{\omega_H} = i_{1H} = -\frac{M_H}{M_1} = \frac{-3(2F_{12})(r_1 + r_2)}{3F_{21}r_1} = \frac{2(r_1 + r_2)}{r_1} = 1 + \frac{r_3}{r_1}.$$

Це означає, що відношення моментів веденої ланки до ведучої визначається передаточним відношенням між цими ланками.

Нерухоме колесо Z_3 у точках дотику із сателітами сприймає зусилля F_{23}= =-F_{32}. На колесо Z_3 діє момент

$$M_3 = 3F_{23}r_3 = 3F_{32}r_3 = 3F_{12}r_3.$$

Напрямок дії збігається з напрямом вхідного моменту M_1.

Для перевірки правильності визначення сил записують рівняння рівноваги всієї системи як суму моментів, що діють на передачу

$$M_1+M_H+M_3=0.$$

Підставимо значення моментів з врахуванням знаку по напрямку дії

$$3F_{21}r_1 - 3(2F_{12})(r_1 + r_2) + 3F_{12}(r_1 + 2r_2) = 0.$$

Рівновага моментів визначає, що навантаження на осі центральних коліс немає. Розглядаючи зусилля, спрямоване на сателіт F_{2H} видно, що воно складається з двох зусиль $F_{12} + F_{32}$ у горизонтальному напрямку і з суми двох радіальних зусиль F'_{12} та F'_{32}. Від радіальних навантажень на вісь сателіта сумарного зусилля немає, а в перпендикулярному напрямку до радіуса сателіта зусилля сумарне.

Це явище зумовлює скороченість переданого зусилля передачею.

Приклад 2. Розглянемо механізм, поданий на рис. 2, *г*

Для колеса Z_1 (рис. 13) напрямки ω_1 та M_1 збігаються як для ведучої ланки.

На розглянутому плані швидкостей V бачимо, що швидкості точок колеса Z_1 та водила H збігаються за напрямом (див. рис. 11, *б*). Це означає, що моменти M_1 та $M_н$ направлені протилежно. Оскільки у зачепленні з колесом Z_1 три сателіти Z_2, то $M_1 = 3F_{21}r_1$. Колесо Z_2 сприймає від колеса Z_1 зусилля F_{12}^n нормальне до профіля зуба колеса. Складові цієї сили – радіальна F_{12}' та обводова F_{12} сили. Обводова сила передається на колесо Z_3 і від нього до нерухомого Z_4, створюючи силу $F_{34} = -F_{43}$. Для визначення цієї сили врахуємо значення моменту, який діє на колеса Z_2 та Z_3. На осі обертання цих коліс момент M_r – сталий.

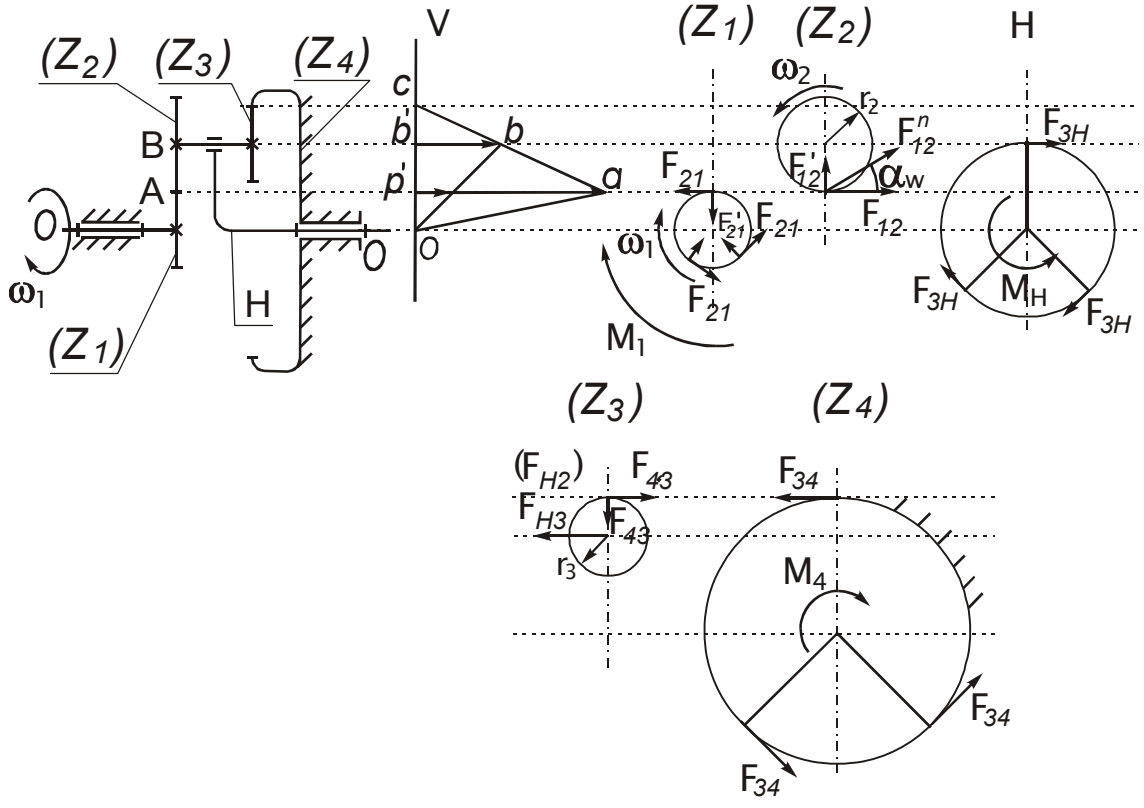


Рис . 13

Для колеса Z_2: $M_r = F_{12} \cdot r_2$.

Для колеса Z_3: $M_r = F_{43} \cdot r_3$,

тобто $F_{12} \cdot r_2 = F_{43} \cdot r_3$,

звідки $F_{43} = F_{12} \dfrac{r_2}{r_3}$.

Розглядаючи рівновагу коліс Z_2 та Z_3, можемо записати

$$F_{н3} = F_{12} + F_{43} = F_{12} + F_{12} \frac{r_2}{r_3} = F_{12}\left(1 + \frac{r_2}{r_3}\right).$$

Сателіти діють на водило із силою $F_{2н}$ у трьох точках з'єднання. Момент на водилі відносно точки обертання $M_н = 3F_{2н}(r_1 + r_2)$. Сателіти Z_3 діють на нерухоме колесо Z_4 із зусиллям F_{34} у точках контакту. Напрямок моменту, який діє на центральне колесо Z_4, за напрямом збігається з моментом M_1. Значення моменту M_4:

$$M_4 = 3F_{34}(r_1 + r_2 + r_3).$$

Для перевірки правильності визначення сил записують рівняння рівнодії зовнішніх моментів, які діють на механізм:

$$M_1 + M_н + M_4 = 0.$$

Під час виконання умов цього рівняння сили визначено правильно. Підставимо значення моментів з урахуванням напрямків (знаків):

$$3F_{21} \cdot r_1 - 3F_{н2}(r_1 + r_2) + 3F_{34}(r_1 + r_2 + r_3) = 3F_{21} \cdot r_1 -$$

$$- 3\left[F_{21}\left(1 + \frac{r_2}{r_3}\right)(r_1 + r_2)\right] + 3\left[F_{21}\frac{r_2}{r_3} \cdot (r_1 + r_2 + r_3)\right] =$$

$$= r_1 - \left(1 + \frac{r_2}{r_3}\right)(r_1 + r_2) + \frac{r_2}{r_3}(r_1 + r_2 + r_3) = \frac{-r_2 r_3 + r_2 r_3}{r_3} = 0.$$

Приклад 3. Розглянемо механізм, поданий на рис. 2, *а*

Колесо Z_1,подане на рис. 14, є ведучою ланкою, для якої задано напрям і значення ω_1. Напрям M_1 збігається з напрямом ω_1. За планом швидкостей V швидкість точки A і точок водила H протилежні. Це означає, що напрями моментів M_1 та $M_н$ збігаються. Значення моменту M_1 на колесі Z_1

$$M_1 = 3F_{21} \cdot r_1.$$

Колесо Z_1 передає колесу Z_2 зусилля F_{12}. Ця сила створює момент $M_2 = F_{12} r_2$. Колеса Z_2 та Z_3 знаходяться на одному валу, на якому наявний момент M_2. Використовуючи значення моменту M_2, знайдемо зусилля $F_{43} = -F_{34}$, з яким колесо Z_3 передає зусилля на нерухоме колесо Z_4; $M_2 = F_{43} r_3$. Отже, $F_{12} r_2 = F_{43} r_3$, звідки $F_{43} = F_{12} \dfrac{r_2}{r_3}$.

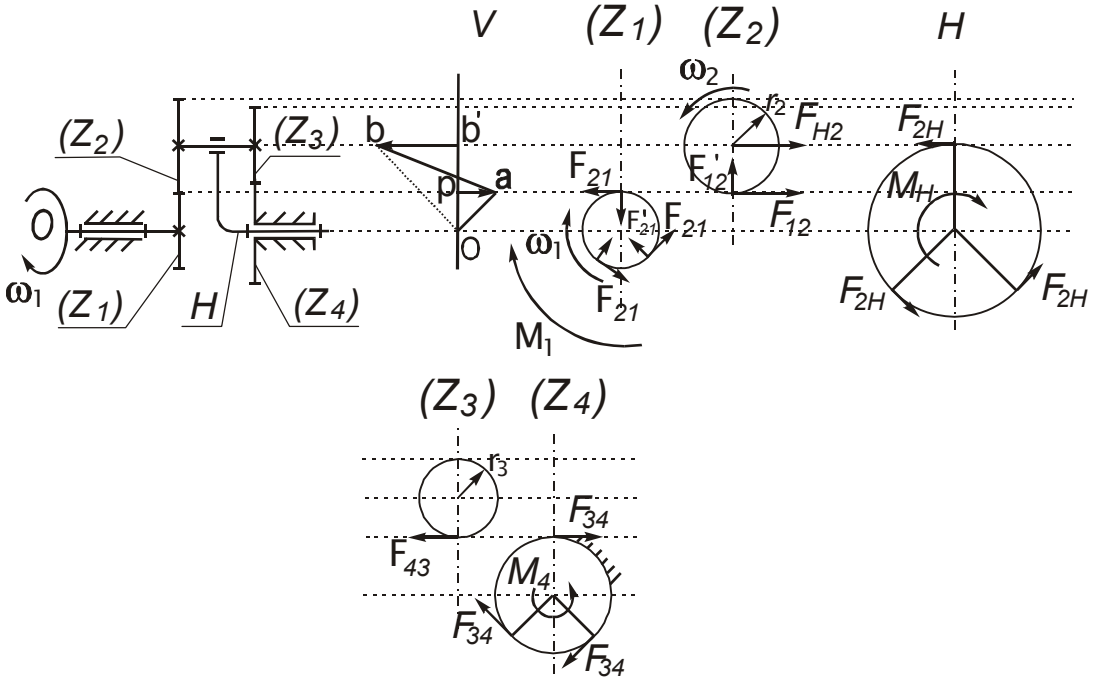


Рис. 14

Водило H. На колеса Z_2 та Z_3 в різних напрямах діють сили F_{12} та F_{43}, результатом яких будуть сила $F_{2н}$, сила дії колес Z_2 та Z_3 на водило *H*:

$$F_{2н} = F_{43} - F_{12} = F_{12} \frac{r_2}{r_3} - F_{12} = F_{12} \left(\frac{r_2}{r_3} - 1 \right).$$

Тоді момент на водилі *H*

$$M_н = 3F_{2н}(r_1 + r_2) = 3 \left[F_{12} \left(\frac{r_2}{r_3} - 1 \right) (r_1 + r_2) \right].$$

Колесо Z_4**.** Момент на колесі Z_4:

$$M_4 = 3F_{34} \cdot r_4 = 3F_{12} \frac{r_2 r_4}{r_3}.$$

Умова рівноваги:

$$M_1 + M_н + M_4 = 0;$$

$$3F_{21} \cdot r_1 + 3\left[F_{12}\left(\frac{r_2}{r_3} - 1 \right)(r_1 + r_2) \right] - 3F_{12}\frac{r_2 r_4}{r_3} = r_1 + \left(\frac{r_2}{r_3} - 1 \right)(r_1 + r_2) - \frac{r_2 r_4}{r_3} = 0.$$

Отже, сили визначено правильно.

Приклад 4. Розглянемо механізм, зображений на рис. 2, *в*.

Колесо Z_1, подане на рис. 15, є ведучою ланкою, напрями ω_1 та M_1 збігаються. Значення моменту M_1 для трьох сателітів $M_1 = 3F_{21}r_1$.

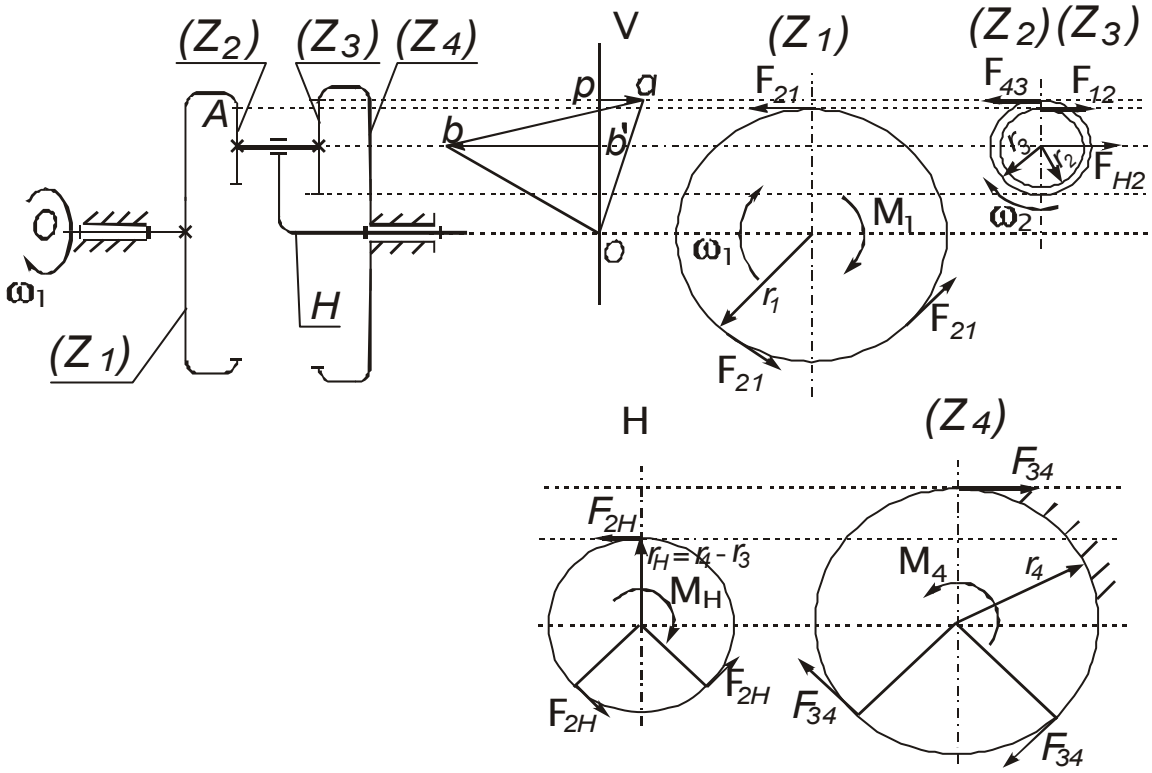


Рис. 15

Колеса Z_2, Z_3 знаходяться на одному валу і мають спільний момент M_2:

– для колеса Z_2: $M_r = F_{12}r_2$;

– для колеса Z_3: $M_r = F_{43}r_3$,

тобто $F_{12}r_2 = F_{43}r_3$,

звідки $F_{43} = F_{12}\dfrac{r_2}{r_3}$.

Водило H. За планом швидкостей V швидкість точок колеса Z_1 і водила H протилежні. Це означає, що моменти M_1 та M_H одного напрямку.

Сили, які діють на водило від коліс Z_2 та Z_3, визначають під час розгляду рівноваги системи коліс Z_2 та Z_3, тобто

$$F_{2н} = F_{43} - F_{12} = F_{12}\frac{r_2}{r_3} - F_{12} = F_{12}\left(\frac{r_2}{r_3} - 1\right).$$

Момент сил на водилі H:

$$M_н = 3F_{2н}(r_1 - r_2) = 3\left[F_{12}\left(\frac{r_2}{r_3} - 1\right)(r_1 - r_2)\right].$$

Колесо Z_4**.** У точках контакту колеса із сателітами Z_3 діє сила $F_{34} = -F_{43}$.

Момент на колесі Z_4

$$M_4 = 3F_{34} \cdot r_4 = 3F_{12}\frac{r_2 r_4}{r_3}.$$

Для перевірки правильності визначення сил записують рівняння рівноваги зовнішніх моментів, що діють на механізм:

$$M_1 + M_н + M_4 = 0.$$

Підставимо значення моментів з урахуванням напрямків:

$$3F_{21} \cdot r_1 + 3\left[F_{12}\left(\frac{r_2}{r_3} - 1\right)(r_4 - r_3)\right] - 3F_{12}\frac{r_2 r_4}{r_3} = r_1 - \frac{r_2 r_4}{r_3} - r_4 + r_3 =$$

$$= \frac{r_2 r_3}{r_4} - (r_4 - r_3) + r_1 = -r_2 r_3 + r_2 r_3 = 0.$$

Значення суми моментів дорівнює нулю, що свідчить про правильність визначення сил, які діють на елементи системи.

Визначення чисел зубців в планетарних передачах

На практиці використовують декілька методів визначення чисел зубців планетарних передач. Більш універсальним, простим методом, який дає можливість раціонального вибору, є метод співмножників. Епіциклічні передачі співвісні, тому визначення чисел зубців дозволяють визначити не тільки передаточне відношення, але і задовольнити належні умови існування передачі: співвісність, сусідство, складання та відсутність заклинювання коліс.

Під час вирішення цих питань відомими вважають: передаточне відношення планетарної передачі i_p, модуль передачі m та вид зубчастих коліс, наприклад, зубчасті колеса прості без зміщень, прямозубі.

Розглянемо необхідні умови.

1. Умови співвісності потребують розміщення сонячних (центральних) коліс Z_1 та Z_4 на одній прямій для забезпечення зачеплення сателітів із центральними колесами. Це буде виконано за таких умов:

– для схеми на рис. 2, *а:*

$$r_1 + r_2 = r_4 + r_3;$$

$$Z_1 + Z_2 = Z_4 + Z_3;$$

– для схеми на рис.2,*б:*

$$r_1 - r_2 = r_4 - r_3;$$

$$Z_1 + Z_2 = Z_4 - Z_2;$$

– для схеми на рис. 2, *в:*

$$r_1 - r_2 = r_4 - r_3;$$

$$Z_1 - Z_2 = Z_4 - Z_3;$$

– для схеми на рис. 2, *г:*

$$r_1 + r_2 = r_4 - r_3;$$

$$Z_1 + Z_2 = Z_4 - Z_3.$$

2. Умови сусідства. Планетарні механізми передбачають розміщення на одному колі декількох сателітів. При цьому необхідно, щоб у процесі обертання вони не зачіпляли одне одного. Це виконується за умови, що радіуси коліс (числа зубців) були такими, за яких відстань між осями обертання сусідніх сателітів a_{wc} була більше за діаметр d_{ac} вершин зубців найбільшого сателіта ($a_{wc} > d_{ac}$). Ці умови записують нерівністю

$$\sin\frac{\pi}{k} > \frac{d_{ac}}{2(r_1 + r_2)}$$

або

$$\sin\frac{\pi}{k} > \frac{Z_c + 2h_a}{Z_1 \pm Z_2}, \qquad (11)$$

де k – кількість сателітів, з'єднаних із центральним колесом; h_a – коефіцієнт висоти головки інструмента (для простих зубчастих коліс $h_a = 1{,}0$).

Якщо в передачі $Z_2 > Z_3$, то в чисельнику беруть $Z_c = Z_2$; якщо $Z_3 > Z_2$, то $Z_c = Z_3$. У знаменнику знак «мінус» беруть тоді, коли зачеплення коліс Z_1 і Z_2 – внутрішнє, та «плюс» при зовнішньому зачепленні.

3. Умови складання. До розвитку маніпуляторів ці умови вважались недоліком планетарних передач, оскільки вимагають одночасного зачеплення всіх сателітів зі своїм центральним колесом. Це можливо у разі рівності кутів між сателітами.

Після встановлення першого сателіта рухоме центральне колесо Z_1 займає однозначне положення (див. рис. 2, *г*) і якщо не виконати деяких умов, то під час установлення наступних сателітів їх зуби не зможуть зайти в зачеплення із зубцями центрального колеса. Тоді подальше складання механізму неможливе.

Числа зубців коліс передачі необхідно визначити таким чином, щоб зубці всіх сателітів (колеса Z_2 і Z_3, див. рис. 2, *г*) точно зайшли у западини центральних коліс (Z_1 і Z_4).

Аналітично умови складання запишуть так:

$$\frac{Z_1 i_{кн}^{(0)}}{K}\left(1 + Kp\right) = C \qquad (12)$$

де Z_1 – число зубців ведучого колеса; $i_{кн}^{(0)}$ – передаточне відношення від ведучого колеса *k* до водила *H* у разі нерухомого колеса *0*; *K* – число сателітів; *p* – число повних обертів водила, необхідне для складання; *C* – ціле число.

У процесі виконання цих умов складають передачі в такій послідовності:

1) у найвищій точці встановлюють перший сателіт;

2) водило повертають на кут

$$\varphi_н = \frac{360}{K}\left(1 + K \cdot p\right);$$

4) найвища точка для наступного сателіта вільна, тому знову виконують операцію за першим пунктом. Якщо коефіцієнт перед дужками в рівнянні (12) буде дробовим, то зміною *p* потрібно отримати ціле число С.

4. Умови відсутності заклинювання коліс у передачі. Ці умови обмежують число зубців залежно від виду колеса, кута зачеплення тощо. Наприклад, для евольвентних коліс із внутрішньою нарізкою зубців $Z_{\min} \geq 85$ (при

$h_a = 1{,}0$, $\alpha = 20^\circ$). Для коліс із зовнішньою нарізкою зубців $Z_{\min} = 20$. Детальніше поданий матеріал розглянуто в [5].

Розглядуваний метод співмножників дає можливість підібрати числа зубців за трьома умовами: передаточного відношення, співвісності, відсутності заклинювання, а перевіряють правильність за умов складання та сусідства.

Приклад. Розглянемо метод співмножників для механізму на рис. 2, *а*. Для цього механізму за формулою (3):

$$i_{1н} = 1 - \frac{Z_2}{Z_1}\frac{Z_4}{Z_3}.$$

звідки $$\frac{Z_2}{Z_1}\frac{Z_4}{Z_3} = 1 - i_{1н} = A.$$

Якщо A – дробове число, то його скорочують до отримання неподільного, дробового числа $\frac{B}{C}$, де B і C– прості числа. Якщо A – ціле число, то його подають дробовим як $\frac{A}{1}$. За теорією чисел чисельник B і знаменник C подають у вигляді співмножників, де добуток двох чисел чисельника – це B, а добуток чисел знаменника – C, тобто:

$$\frac{Z_2}{Z_1}\frac{Z_4}{Z_3} = \frac{D_2 D_4}{D_1 D_3} = \frac{D_2' D_4'}{D_1' D_3'} = \frac{D_2'' D_4''}{D_1'' D_3''} = \ldots$$

У цьому випадку відношення чисел зубців замінюється відношенням співмножників, кожен з яких пропорційний числу зубців: $D_2 \approx Z_2$; $D_4 \approx Z_4$; $D_1 \approx Z_1$; $D_3 \approx Z_3$. Тоді можна записати, що

$$\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{D_2}{D_1}; \quad \frac{Z_4}{Z_3} = \frac{D_4}{D_3},$$

звідки

$$Z_2 = \frac{Z_1 \cdot D_2}{D_1}; \; Z_4 = \frac{Z_3 \cdot D_4}{D_3}; \; Z_1 = \frac{Z_2 \cdot D_1}{D_2}; \; Z_3 = \frac{Z_4 \cdot D_3}{D_4}.$$

Підставимо ці значення в рівняння співвісності передачі (вважаємо модуль передачі постійним числом):

$$Z_1 + Z_2 = Z_4 + Z_3;$$

$$Z_1 + Z_1 \frac{D_2}{D_1} = Z_3 + Z_3 \frac{D_4}{D_3};$$

$$Z_1\left(1 + \frac{D_2}{D_1}\right) = Z_3\left(1 + \frac{D_4}{D_3}\right)$$

або

$$Z_1\left(\frac{D_1 + D_2}{D_1}\right) = Z_3\left(\frac{D_3 + D_4}{D_3}\right);$$

$$Z_1 \cdot D_3(D_1 + D_2) = Z_3 \cdot D_1(D_3 + D_4) \ .$$

Для того щоб останнє рівняння було тотожністю, простіше за все прийняти:

$$Z_1 = D_1(D_3 + D_4)q \ ;$$

$$Z_3 = D_3(D_1 + D_2)q \ .$$

Підставляючи в рівняння співвісності значення Z_1 та Z_3 та роблячи подібні перетворення, отримаємо:

$$Z_2 = D_2(D_3 + D_4)q \ ;$$

$$Z_4 = D_4(D_1 + D_2)q \ .$$

Де q– довільне число (можливо і дробове) для отримання Z_i цілими числами.

Використовуючи рівняння для інших планетарних механізмів отримаємо:

– для механізму на рис. 2, *б*:

$$i_{1н} = 1 + \frac{Z_3}{Z_1};$$

$$Z_1 = 2D_1 \cdot q;$$
$$Z_2 = (D_3 - D_1) \cdot q;$$
$$Z_3 = 2D_3 \cdot q.$$

– для механізму на рис. 2, *в*: $i_{1н} = 1 - \frac{Z_2}{Z_1} \cdot \frac{Z_4}{Z_3}$;

$$Z_1 = D_1(D_4 - D_3) \cdot q;$$
$$Z_2 = D_2(D_4 - D_3) \cdot q;$$
$$Z_3 = D_3(D_1 - D_2) \cdot q;$$
$$Z_4 = D_4(D_1 - D_2) \cdot q.$$

– для механізму на рис. 2, *г*: $i_{1н} = 1 + \frac{Z_2}{Z_1} \cdot \frac{Z_4}{Z_3}$;

$$\begin{aligned} Z_1 &= D_1(D_4 - D_3)\cdot q; \\ Z_2 &= D_2(D_4 - D_3)\cdot q; \\ Z_3 &= D_3(D_1 + D_2)\cdot q; \\ Z_4 &= D_4(D_1 + D_2)\cdot q. \end{aligned} \qquad (13)$$

Приклад. Відомо систему, у яку входить редуктор і робочий механізм. Редуктор являє собою планетарний механізм за схемою рис. 2, *г*. Після розбиття загального передаточного відношення відомо, що передаточне відношення редуктора становить $i_p = \frac{28}{3}$.

Визначити числа зубців передачі: Z_1, Z_2, Z_3, Z_4.

Розв'язання Подамо передаточне відношення $i_p = \frac{28}{3}$ у вигляді співмножників:

$$\frac{28}{3} = \frac{D_2 \cdot D_4}{D_1 \cdot D_3} = \frac{28\cdot 1}{1\cdot 3} = \frac{1\cdot 28}{1\cdot 3} = \frac{28\cdot 1}{3\cdot 1} = \frac{1\cdot 28}{3\cdot 1} = \frac{2\cdot 14}{1\cdot 3} =$$

$$= \frac{2\cdot 14}{3\cdot 1} = \frac{14\cdot 2}{1\cdot 3} = \frac{14\cdot 2}{3\cdot 1} = \frac{4\cdot 7}{1\cdot 3} = \frac{4\cdot 7}{3\cdot 1} = \frac{7\cdot 4}{1\cdot 3} = \frac{7\cdot 4}{3\cdot 1}.$$

Отримаємо 12 варіантів можливих значень зубців планетарної передачі.

З усіх варіантів виберемо такий, за якого розміри редуктора будуть мінімальними.

Урахуємо загальні рекомендації для прямозубих циліндричних передач (колеса розглянутого редуктора), а саме: а) $i_1 < i_2$; б) $i_1 \approx 2\ldots6$

Можна відразу відкинути деякі з 12 варіантів відношень, тобто, 1, 2, 3, 7-9, 11.

Використовуючи формули (13), визначимо числа зубців розглядуваної системи. Коефіцієнт q беремо з умов, що число зубців має бути не менше 17.

Варіант 2:

$$z_1 = 1(28-3)q = 25q$$

$$z_2 = 1(28-3)q = 25q$$

$$z_3 = 3(1+1)q = 6q$$

$$z_4 = 28(1+1)q = 56q$$

При $q = 3$ $z_1 = 75$; $z_2 = 75$; $z_3 = 18$; $z_4 = 168$.

Варіант 4:

$$z_1 = 3(28-1)q = 81q$$

$$z_2 = 1(28-1)q = 27q$$

$$z_3 = 1(3+1)q = 4q$$

$$z_4 = 28(3+1)q = 112q$$

При $q = 5$ $z_1 = 405$; $z_2 = 135$; $z_3 = 20$; $z_4 = 560$.

Варіант 5:

$$z_1 = 1(14-3)q = 11q$$

$$z_2 = 2(14-3)q = 22q$$

$$z_3 = 3(1+2)q = 9q$$

$$z_4 = 14(1+2)q = 42q$$

При $q = 2$ $z_1 = 22$; $z_2 = 44$; $z_3 = 18$; $z_4 = 84$.

Варіант 6:

$$z_1 = 3(14-1)q = 39q$$

$$z_2 = 2(14-1)q = 26q$$

$$z_3 = 1(3+2)q = 5q$$

$$z_4 = 14(3+2)q = 70q$$

При $q = 4$ $z_1 = 156$; $z_2 = 104$; $z_3 = 20$; $z_4 = 280$.

Варіант 10:

$$z_1 = 3(7-1)q = 18q$$

$$z_2 = 4(7-1)q = 24q$$

$$z_3 = 1(3+4)q = 7q$$

$$z_4 = 7(3+4)q = 49q$$

При $q = 3$ $z_1 = 54$; $z_2 = 72$; $z_3 = 21$; $z_4 = 147$.

Варіант 12:

$$z_1 = 3(4-1)q = 9q$$

$$z_2 = 7(4-1)q = 21q$$

$$z_3 = 1(3+7)q = 10q$$

$$z_4 = 4(3+7)q = 40q$$

При $q = 2$ $z_1 = 18; z_2 = 42; z_3 = 20; z_4 = 80$.

Із шести розглянутих варіантів заслуговують увагу 5-й та 12-й. Порівнюючи їх, бачимо, що мінімальні розміри передачі будуть за мінімальних чисел зубців, тому перевагу необхідно віддати 12-му варіанту.

Беручи варіант за основу, перевіримо умови:

1. Умова складання для кількості сателітів *K*=3:

$$\frac{z_1 \cdot i_{1,H}^{(4)}}{K}(1 + K \cdot p) = \frac{18 \cdot 28}{3}(1 + 3 \cdot p) = C = 56.$$

При $p = 0$ отримаємо ціле число C – умови виконуються.

У процесі складання передачі водило необхідно повертати на кут $\varphi_H = 120^\circ$, вставляючи на місце першого сателіту наступний.

2. Умова сусідства.

$$\frac{\sin \pi}{K} > \frac{z_2 + 2 \cdot 1}{18 + 42}; \quad 0{,}866 > \frac{42 + 2}{60} = 0{,}73.$$

Умови виконується.

Отже, числа зубців $z_1 = 18,\ z_2 = 42,\ z_3 = 20,\ z_4 = 80,$ задовольняють усі умови для визначення чисел зубців.

Для визначення розмірів передачі задають модулем передачі, виконуючи при цьому умови за габаритними розмірами.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНТДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Артоболевский И. И.* Теория механизмов. – М.: Наука, 1965. – 719 с.
2. *Баранов Г. Г.* Курс теории механизмов и машин. – М.: Матгиз, 1958. –494 с.
3. *Вопилкин Е. А.* Расчёт и конструирование механизмов приборов и систем. – М.: Высш. шк., 1980 – 463 с.
4. *Кореняко О. С.* Теорія механізмів і машин. – К.: Вища шк., 1997. – 206с.
5. *Элементы* приборных устройств. Курсовое проектирование / Под ред. проф. О. Ф. Тищенко. – М.: Высш. шк., 1978. – Ч. 1. – 322с.

ЗМІСТ

ВСТУП ….....3
КІНЕМАТИКА ПЛАНЕТАРНИХ МЕХАНІЗМІВ.....5
Визначення передаточного відношення 5
Побудова планів лінійних і кутових швидкостей планетарних механізмів...11
СИЛИ ТА МОМЕНТИ В ПЛАНЕТАРНИХ ПЕРЕДАЧАХ.....18
ВИЗНАЧЕННЯ ЧИСЕЛ ЗУБЦІВ У ПЛАНЕТАРНИХ ПЕРЕДАЧАХ.....25
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....31