

Приложение 8

КРАЕВЫЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ (теория)

Д8.1. Особенности постановки краевых контактных задач о напряженно-деформированном состоянии тел

Для краевой контактной задачи характерно наличие *зоны контакта* известной (стабильной) или неизвестной (нестабильной, переменной) конфигурации. В этой зоне *нет взаимонепрониновения* поверхностей тел, а переданные в результате контакта усилия *не могут быть растягивающими* (при учете сил поверхностного сцепления в зоне контакта допускается некоторый уровень „отрицательного давления“). В соответствии со следствием общего закона сохранения (закон поверхностных взаимодействий) усилия контакта на двух контактных поверхностях должны быть *равными по величине и разнонаправленными*. Различают силовой контакт *без трения* и *с трением*.

Итак, постановка краевой *контактной* задачи о напряженно-деформированном состоянии тел отличается от постановки неконтактной задачи наличием дополнительных граничных условий и ограничений на поверхности контакта S_K . Опишем их формулами.

На общей поверхности S_K с условными номерами 1 и 2 должны быть выполнены *условия сопряжения*:

- силовые

$$(\sigma_{mn}^{(1)} - \sigma_{mn}^{(2)}) \cdot \nu_{m(j)} = 0; \quad ; \quad m, n = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2; \quad (Д8.1)$$

- кинематические при сцеплении (перемещения в том же базисе, что и координаты)

$$[(x_m + U_m)_{(1)} - (x_m + U_m)_{(2)}] \cdot \nu_m = 0; \quad m = 1, 2, 3; \quad (Д8.2)$$

$$[(x_m + U_m)_{(1)} - (x_m + U_m)_{(2)}] \cdot \tau_m = 0; \quad m = 1, 2, 3, \quad (Д8.3)$$

где ν_m, τ_m – компоненты векторов соответственно внешней нормали к поверхности контакта и касательной к той же поверхности. При проскальзывании (с трением или без трения) условие (Д8.3) не используется;

- отрицательных значений нормальных составляющих контактных усилий

$$(\sigma^{mn} \nu_m \nu_n)_{(j)} < 0; \quad j = 1, 2; \quad (Д8.4)$$

- взаимного непрониновения тел

$$[(x_m + U_m)_{(1)} - (x_m + U_m)_{(2)}] \cdot \nu_m \leq 0. \quad (Д8.5)$$

Две последних условий являются основой для определения конфигурации текущей поверхности контакта.

Вместе с ГУ (Д5.47) и (Д5.48) дополнительно привлекаются ГУ на поверхности контакта S_K при:

- сцеплении, т.е. при $|\sigma_\tau| \leq \min \{ \mu |\sigma_\nu|; (\sigma_S)_{\min} / \sqrt{3} \}$ (σ_S – актуальный предел текучести материала)

$$\sigma_\nu = \sigma^{mn} \nu_m \nu_n \Big|_{S_K} = \widehat{F}_\nu; \quad (Д8.6)$$

$$\sigma_\tau = \left[\sum_{n=1}^3 (\sigma^{mn} \nu_m)^2 - (\sigma^{mn} \nu_m \nu_n)^2 \right]^{1/2} \Big|_{S_K} = \widehat{F}_\tau; \quad (Д8.7)$$

или

$$U_m \Big|_{S_K} = \widehat{U}_m; \quad (Д8.8)$$

- проскальзывании, т.е. при $|\sigma_\tau| > \min\{\mu|\sigma_\nu|; (\sigma_S)_{\min}/\sqrt{3}\}$

$$\sigma_\nu = \sigma^{mn} v_m v_n \Big|_{S_k} = \widehat{F}_\nu; \tag{Д8.9}$$

или

$$U_\nu = U_m v_m \Big|_{S_k} = \widehat{U}_\nu; \tag{Д8.10}$$

а также при $\mu \neq 0$

$$\sigma_\tau = -|\widehat{F}_\tau| \cdot \text{sign}(U_\tau), \tag{Д8.11}$$

где $U_\tau = (U_{m(1)} - U_{m(2)}) \cdot \tau_m$ – касательная к поверхности контакта проекция вектора взаимных перемещений.

При не учете трения (при равенстве нулю коэффициента трения μ) ГУ на S_k упрощаются до

$$\sigma_\nu = \sigma^{mn} v_m v_n \Big|_{S_k} = \widehat{F}_\nu \quad \text{или} \quad U_\nu = U_m v_m \Big|_{S_k} = \widehat{U}_\nu. \tag{Д8.12}$$

Примечание Д8.1. Выше применена схема сухого трения Кулона (Амонтона-Кулона) – простейшая рабочая гипотеза, которая позволяет в первом приближении вычислить величину силы трения. Модели коэффициента трения Кулона – в следующем Разделе.

Итак, контактная краевая задача содержит в краевых условиях неравенства и логические условия. Это значительно усложняет ее решение.

Д8.2. Модели коэффициента трения Кулона

В NX Nastran применяется модель трения Кулона:

$$F_\tau \leq \mu \cdot F_n, \tag{Д8.13}$$

где F_τ – сила трения; F_n – нормальная к поверхности контактная сила; μ – коэффициент трения. В NX Nastran 5.0 есть несколько моделей коэффициента трения Кулона (см. табл.Д8.1).

Таблица Д8.1. Модели коэффициента трения Кулона в NX Nastran 5.0

FRICMOD	Выражение
1..	$\mu = A_1$
2..	$\mu = \frac{1 - \exp(-A_2 T_n)}{T_n / A_1}$
3..	$\mu = A_2 + (A_2 - A_1) \exp(-A_3 T_n)$
4..	$\mu = \begin{cases} A_1, & \text{если } \dot{i} \leq A_3 \\ A_2, & \text{если } \dot{i} > A_3 \end{cases}$
5..	$\mu = \begin{cases} A_1 + \dot{i}(A_3 - A_1) / A_2, & \text{если } \dot{i} < A_2 \\ A_3, & \text{если } \dot{i} > A_2 \end{cases}$
6..	$\mu = \begin{cases} \sqrt{(A_1 \chi_{(1)})^2 + (A_2 \chi_{(2)})^2 + (A_3 \chi_{(3)})^2}, & \text{если } \dot{i} > A_5 \\ A_4, & \text{если } \dot{i} \leq A_5 \end{cases}$
7..	$\mu = A_1 + A_2 F_n; \quad 0 \leq \mu \leq 1$
8..	$\mu = \begin{cases} A_1 + t(A_3 - A_1) / A_2, & \text{если } t < A_2 \\ A_3, & \text{если } t > A_2 \end{cases}$
9..	$\mu = \begin{cases} A_1 + A_3 x_{(2)} + A_4 x_{(3)}, & 2D \text{ (двухмерный случай)}; \\ A_1 + A_3 x_{(1)} + A_4 x_{(2)} + A_5 x_{(3)}, & 3D \text{ (трехмерный случай)}; \end{cases} \quad 0 \leq \mu \leq A_2$
12..	$\mu = \frac{1 - \exp(-A_2 F_n)}{F_n / A_1}$

13..	$\mu = A_2 + (A_2 - A_1) \exp(-A_3 F_n)$
$A_1 \dots A_3$ – постоянные, которые вводятся в диалоге; $x_{(i)}$ – координаты; $\chi_{(i)}$ – координаты локальной системы скольжения (sliding); F_n, T_n контактные силы и тяга; \dot{u} – скорость взаимного скольжения; t – время	

В этой таблице **FRICMOD** – переменная, назначаемая в поле „**Friction Model**” на диалоговой панели, изображенной на рис.8.3. А на рис.8.2 в поле „**Friction**” задается значение A_1 .

Если рассматривать величину $\tau = F_\tau / \mu \cdot F_n$, то $\tau \leq 1$. Естественно, что при отсутствии взаимного проскальзывания $\dot{u} = 0$ и $|\tau| < 1$, а при проскальзывании $sign(\dot{u}) = sign(\tau)$ и $|\tau| = 1$.

Для применения закона трения в NX Nastran создается функция трения. Старый вариант функции трения (для SOL 101, 103, 111, 112) задавался неявно как непрерывная функция $\gamma(\dot{u}, \tau) = 0$ в виде

$$\tau + \gamma - \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\dot{u} - \gamma}{\varepsilon_T}\right) = 0, \tag{Д8.14}$$

что изображена на рис.Д8.1-а и где ε_T – малый параметр. Новый вариант функции трения (для SOL 601, 701) изображен на рис.Д8.1-б (из „**Help**”). Это полилинейная функция.

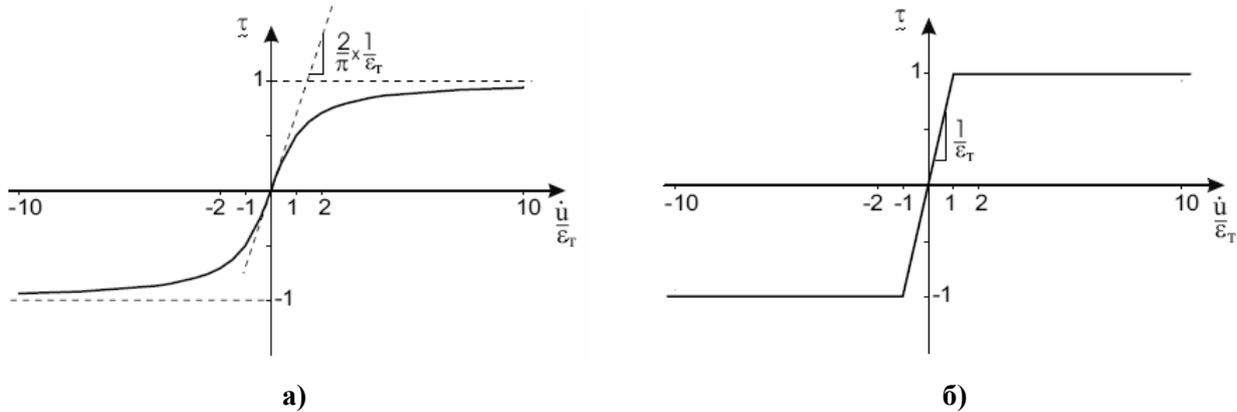


Рис.Д8.1. Графики функций трения

Д8.3. Модели контакта

В NX Nastran 5.0 есть три метода решения контактных задач:

- метод функции кинематических ограничений (**Constraint-function method**);
- метод множителей Лагранжа (**Lagrange multiplier (segment) method**). Требуется, чтобы все тела модели имели отдельные (свои) условия закрепления;
- метод жестких ограничений (**Rigid target method**).

В *методе функции кинематических ограничений* применяется функция

$$w(g, \lambda) = g\lambda = 0; \quad g \geq 0; \quad \lambda \geq 0 \tag{Д8.15-а}$$

(старый вариант, для SOL 101, 103, 111, 112) или (новый вариант для SOL 601, 701) $w(g, \lambda) = g\lambda = \varepsilon_N$; $g \geq 0; \lambda \geq 0$, которая имеет другую (эквивалентную) запись, приведенную в „**Help**”:

$$w(g, \lambda) = \frac{g + \lambda}{2} - \sqrt{\left(\frac{g - \lambda}{2}\right)^2 + \varepsilon_N} = 0, \tag{Д8.15-б}$$

где g и λ – числа, соответствующие величинам зазора и нормальной контактной силы F_n , а ε_N – малый параметр. Графики этих функций изображены на рис.8.2 (увеличение ε_N увеличивает радиус перехода от горизонтали до вертикали графика).

Вариант (Д5.15-б) приводит к повышенной скорости сходимости алгоритма, поскольку функция (Д5.15-б) не имеет изломов и дифференцируется.



Рис.Д8.2. Графики функций ограничений

В методе функции кинематических ограничений первый шаг – неконтактное решение. Выявляются зоны проникновения одного тела в другое, в этих местах (в узлах) прикладываются дополнительные сжимаемые (контактные) силы, которые потом в итерациях уточняются так, чтобы не было взаимопроникновения тел. Для вычисления этих дополнительных сжимающих сил используется оригинальный алгоритм, обеспечивающий довольно быструю сходимость контактных итераций.

Метод множителей Лагранжа приводит к добавлению к глобальной СЛАУ дополнительных уравнений и неизвестных – множителей Лагранжа, приобретающих смысл контактных усилий. Записываются выражения для ограничений на поверхности контакта S_K в виде неравенств:

$$([b]\{q\} - \{\delta\})|_{S_K} \geq 0, \tag{Д8.16}$$

где $[b]$ – матрица кинематических ограничений; $\{\delta\}$ – вектор натягов; которые (неравенства) умножаются на множители Лагранжа λ_m и результат прибавляется к полной энергии системы Π_0 :

$$\Pi = \Pi_0 + \{\lambda\}^T ([b]\{q\} - \{\delta\}), \tag{Д8.17}$$

причем считается, что (сравните с (Д8.15-а))

$$\lambda_m \geq 0; \quad \{\lambda\}^T ([b]\{q\} - \{\delta\})|_{S_K} = 0. \tag{Д8.18}$$

В соответствии с теоремами Джона и Куна-Такера нелинейного программирования ищется минимум функционала (Д8.17), в результате чего формируется СЛАУ и выясняется физический смысл множителей Лагранжа для этого класса задач: узловые контактные давления. Путем выбора вида матрицы кинематических ограничений $[b]$ можно организовать схему контакта типа „узел в поверхность”. Усилия проскальзывания могут определяться в итерациях в соответствии с законом трения.

Метод жестких ограничений (метод штрафа) применяется в разнообразных формах. Кроме прямого формулирования к нему сводятся методы введения безтолщинной контактной прослойки или контактных элементов со специальными свойствами. В результате к функционалу, описывающему общую энергию системы контактирующих тел, добавляется функционал, который отражает работу контактных усилий, квадратичный по узловым перемещениям контактных узлов, и параметры штрафа, что присутствуют в чистом виде, в виде характеристик контактной прослойки или в виде контактных конечных элементов. Минимизация полученного функционала приводит к созданию симметричной, положительно определенной СЛАУ. Недостаток метода: точность решения связана с выбором параметров штрафа. В NX Nastran 5.0 реализован вариант с созданием контактной прослойки, имеющей разные значения параметров жесткости (штрафа) в нормальном и касательном к поверхности контакта направлениях.

В одномерном случае множители штрафа имеют размерность 1/длина, а физическую интерпретацию – осевая жесткость стрежня длиной L , с площадью сечения A и модулем Юнга материала E , а именно $K = E \cdot A \cdot L$. Изменять (от принятых разработчиками NX Nastran) значения этих множителей есть смысл лишь тогда, когда конечно-элементная сетка

зоны контакта имеет или очень большие, или очень маленькие длины поверхностей КЭ вблизи края контакта.

Существенно заниженные значения множителей штрафа (в нормальном направлении) приводят к чрезмерному взаимному проникновению поверхностей контакта, а существенно завышенные значения – к снижению скорости сходимости алгоритма. Обычно удается автоматизировать выбор оптимальных значений этих параметров, что и сделано в NX Nastran 5.0.

Повышение скорости сходимости алгоритма часто происходит при увеличении количества точек на поверхности КЭ, из которых ищутся оппозитные контактные точки. Возможность изменять такое количество введено в NX Nastran 5.0 (см. табл.8.1).

Для получения решения *динамических* задач типа 103, 11 и 112 (см. табл.4.2) считается, что при колебаниях реализуется конфигурация контактных поверхностей, найденная при решении статической контактной задачи. Иногда это предположение верно (например, при предварительно напряженном контакте), иногда – нет.